چه وقت یك تابع C^{∞} تحلیلی است؟*

رالف بواس*

ترجمهٔ مهدی حسینی‌نسب

دانشجویان اغلب تعجب می‌کنند که استادانشان پیش از قبول اینکه یك سری تیلر نمایانگر تابعی‌است که از آن به‌دست آمده، بر اثبات میل‌کردن باقیماندهٔ سری به‌صفر اصرار دارند. دانشجویان باعمل معمولی استفاده از صورت لاگرانژی باقیمانده، با آن نقطهٔ میانی نامشخص واسرارآمیزش، نمی‌توانند بـه یك بینش صحیح دست یابند.

در این مسأله تنهادانشجویان نیستند که دچار اشتباه می‌شوند؛ یك ریاضیدان ممتاز (پرینگشایم[1]) نیز یك‌بار در مورد باقیمانده دچار اشتباه شد. این مقاله داستان میراث آن اشتباه‌است که مدت چهل‌سال مورد توجه قرارنگرفته بود.

سری تیلر یك تابـع C^{∞} مانند f می‌تواند دو نوع رفتـار غیرعادی [تکین] داشته باشد: سری ممکن است درهمه‌جا مگر در مرکزش واگرا باشد یا ممکن‌است دریك همسایگی ازمرکز به‌تابعی که درهمسایگیهای به‌دلخواه کوچکی از مرکزبا f تفاوت دارد، همگرا باشد. مثالهـای بسیاری از تکینی نوع اول وجود دارد، اگرچه آنها را نمی‌توان برای یك‌کلاس مقدماتی به‌راحتی مطرح کرد. برای‌تکینی‌نوع دوم مثال استانداردی وجود داردکه‌عبارت است از تابع F که به‌صورت $F(x)=e^{-1/x^2}$ برای $x<0$، و $F(x)=0$ بـرای $x\geqslant 0$ تعریف می‌شود. (حتی در سال ۱۹۲۸ اسگود در[۵] صفحهٔ ۱۲۵،خود را مجبور می‌بیند بر پیش‌افتادگی این‌ایراد که "F واقعاً یك تابع نیست"چون‌با یك تك‌فرمول‌تعریف نشده، تأکیدکند.)

اگـر سری تیلر F حول نقـاط مختلف x را بنویسیم، شعاع همگرایی سری، $\rho(x)$، وقتی $x\to\infty$ به‌سمت صفرمیل می‌کند.

1.A. Pringsheim

با وجود این، فرض کنید f تابعی‌باشد با این خاصیت‌که به‌ازای هر x دریك بازه، $\rho(x)\geqslant\delta>0$. آیا چنین‌تابعی، تحلیلی‌حقیقی (برابر با سری تیلرخود) است، یا ممکن‌است دارای تکینی نوع دوم باشد؟ ظاهراً این سؤال را اولین‌بار پرینگشایم [۶] در سال ۱۸۹۳ مطرح‌کرد. او اثباتی ارائه‌کردکـه بنابرآن، چنین تابعی لزوماً تحلیلی‌است؛ من اثبات اورا با علائم امروزی‌ترنقل‌می‌کنم. فرض‌کنیدکه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)r^n}{n!}$$

به‌ازای $a\leqslant t\leqslant b$ و $0\leqslant r\leqslant r_1$ همگرا باشد؛ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(t)r^n}{n!}=0 \qquad \text{(الف)}$$

به‌ازای $a\leqslant t\leqslant b$ و $0\leqslant r\leqslant r_1$. بنابراین اگر $0<s<r_1$، آنگاه،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(t+\theta s)s^n}{n!}=0 \quad \text{برای}\ a\leqslant t+\theta s\leqslant b، \qquad \text{(ب)}$$

پرینگشایم ازروی (ب) نتیجه‌گرفت‌که باقیماندهٔ سری تیلر f حول t به‌صفر می‌گراید، پس f روی (a,b) تحلیلی‌است.

آیا متوجه اشکال استدلال شدید؟

تعجب‌آور است که پرینگشایم که شیفتهٔ همگرایی یکنواخت بوده به‌این‌مطلب توجه نکرده است‌کـه هیچ‌چیز دال بر اینکه حد مذکور در (الف) یـا (ب) نسبت به r (یـا θ) یکنواخت باشد وجود ندارد، و بنابراین اثبات کامل نیست. توضیح دقیقتر اینکه، اگربگوییم $\rho(x)>0$ درست مثل‌این‌است‌که گفته باشیم

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\right\}^{1/n}<\infty. \qquad (۱)$$

درحالی‌که فرض پرینگشایم این‌است‌که برای Mی متناهی‌ومستقل از x داریم

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\right\}^{1/n}<M \qquad (۲)$$

و این‌کاملاً[*] روشن است (و از صورت لاگرانژی باقیماندهٔ سری تیلر نتیجه می‌شود) که شرط کرانداری یکنواخت $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ در یك همسایگی از هرنقطهٔ یك بازه، برای تحلیلی بودن f کافی است.

حتـی امروز مفهوم همگرایی یکنواخت گاه مفهوم دشواری به‌نظر می‌رسد و طبیعتاً پنجاه سال پیش، از این هم دشوارتر به‌نظر می‌رسیده‌است. درسال ۱۹۳۲ گرگن[1] ناچار شد درسی درسریهای فوریه را بدون استفاده از همگرایی یکنواخت ارائه‌کند، چراکه گروه ریاضی دانشگاه هاروارد مفهوم همگرایی‌یکنواخت رابرای دانشجویان دورهٔ لیسانس بسیار دشوار تشخیص داده بود.

من یکی ازآن دانشجویـان دورهٔ لیسانس بودم. من به طور اتفاقی مقالهٔ پرینگشایم را خوانده و فریفتهٔ قضیهٔ مورد بحث شده بودم.اولین باری‌که مقاله راخواندم اثبات پرینگشایم راپذیرفتم.

1. J. J. Gergen

لیکن وقتی در تعطیلات تابستانی سعی کردم آن اثبات را بازسازی کنم، از عهده برنیامدم. نهایتاً دست از کار کشیدم، ۹۰ مایل تا هاروارد رانندگی کردم و اثبات را پیدا کردم. سپس آن را دقیقتر مورد مطالعه قراردادم و اشتباه آن را تشخیص دادم.

شما وقتی در اثبات یك قضیهٔ جالب نقصی پیدا می‌کنید، چه کار می‌کنید؟ ممکن است تصمیم به‌مکاتبه با نویسندهٔ مقاله بگیرید، ولی‌یك دانشجوی لیسانس‌معمولاً چنین‌کاری نمی‌کند. به‌هرصورت من این احتمال را درنظر گرفتم که پرینگشایم دراین ۵۰ سال مرده است (در واقع او در ۱۹۳۲، ۸۲ ساله بود و تا سال ۱۹۴۱ نیز زندگی کرد). ولی برای پیداکردن یك اثبات صحیح حتماً باید کاری انجام می‌شد.

در ۱۹۳۲–۱۹۳۳ من از نظریهٔ مجموعه‌ها تنها درحدی که در دروس مقدماتی آنالیز حقیقی و مختلط مطرح می‌شود آگاهی داشتم. به‌ویژه قضیهٔ رسته‌ای بر[1] را هرگز ندیده بودم، ولی‌موفق شده بودم که خودم آن را کشف کنم (فقط برای خط حقیقی؛ این واقعه حداقل‌دوسال قبل ازآشنایی من با فضاهای متریك‌کامل اتفاق‌افتاد). با استفاده از قضیهٔ بر، من حداقل توانستم ثابت‌کنم که اگر $\rho(x)$ برای هر x دربازه‌ای چون J اکیداً مثبت باشد، آنگاه f درتمام J، مگر دریك زیرمجموعهٔ هیچ‌جا چگال بستهٔ آن، تحلیلی است. این مطلب یك نتیجهٔ جدید ولی‌فی‌نفسه جالب بود، برای اینکه نشان می‌دادکه یك تابع C^∞ نمی‌تواند درهمهٔ نقاط یك بازه، یا حتی‌در نقاط یك زیرمجموعهٔ چگال آن، تکینی نوع دوم داشته باشد.

من‌تشخیص‌دادم که قضیهٔ قدرتمندی همچون قضیهٔ بر نمی‌تواند کاملاً تازه باشد، اما مدتها طول‌کشید تا توانستم آن را دریك کتاب پیداکنم. وقتی قضیه را برای اعضای گروه ریاضی شرح دادم ایشان آن را نشناختند، گرچه کاملاً محتمل است که من نتوانسته باشم خوب ازعهدهٔ توضیح آن برآیم.

طولی نکشید، که دراوایل ۱۹۳۴ توانستم اثبات قانع‌کننده‌ای برای قضیهٔ پرینگشایم بیابم. من درباغی در جزیرهٔ مدیرا[2]، که به‌دلایلی بی‌ارتباط با ریاضیات به آنجا رفته بودم، موفق به‌یافتن اثبات شدم. بعد از آن متوجه شدم‌که متقاعدکردن مردم در مورد نادرستی یك اثبات ادعایی از یك قضیهٔ درست، تا چه حد دشوار است. وقتی‌که اثبات خود را در ۱۹۳۵ منتشرکردم [۱] می‌بایستی تحلیلی از اثبات پرینگشایم را نیز ضمیمهٔ آن می‌کردم ولی ساده‌اندیش‌تر از آن بودم که چنین‌کاری بکنم. من تصور می‌کردم که‌تمام‌ریاضیدانان مجرب به‌محض اینکه به‌آن نگاه‌کنند به‌نادرستی آن پی می‌برند. این‌گمان نادرست بود: منتقد یادبوخ[3] معتقد نبود که اثبات پرینگشایم‌اشتباه‌است و این مطلب را اظهار کرد. نهایتاً توانستم او را متقاعدکنم و او با انتشار اصلاحیه‌ای نقد خود را تصحیح کرد. منتقد تسنترالبلات[4] محتاطتر بود، ولی فکرمی‌کنم به‌هر حال حرف مرا قبول نکرد.

اثبات اولیهٔ من بیش‌از اندازه طولانی‌بود؛ اثبات‌خلاصه‌تری را می‌توان در [۷] یافت؛ و نیز در [۹] اثبات دیگری هست که آن را زاهورسکی که مستقلاً به‌اشتباه پرینگشایم پی‌برد و آن را اصلاح‌کرد، ارائه‌کرده‌است. همچنین اثبات نوین دیگری ازقضیهٔ پرینگشایم‌را که هوفمان و کاتس ارائه داده‌اند می‌توان در [۳] پیدا کرد. اخیراً بوقوسیان و جانسن [۲] قضیهٔ پرینگشایم را مجدداً کشف کردند. ایشان تعمیمهای جالب و نتایج مشابه‌به‌متعددی‌یافته‌اند وقضیه را درپهنهٔ وسیعتری‌مطرح‌کرده‌اند. هرکاردیگری‌که‌بخواهد درآینده دراین زمینه انجام شود باید از [۲] آغاز گردد. دراینجا من تنها می‌خواهم اثباتی را خلاصه‌وار ارائه دهم و درطی آن اصولی را که همهٔ اثباتهای موجود به آنها وابسته‌اند بیان‌کنم. استدلال زیرعملاً نتیجهٔ کلیتری را به‌دست خواهد داد.

قضیه. فرض کنید f روی بازهٔ بازی چون J، C^∞ باشد و $\rho(x)$ شعاع همگرایی سری تیلر f حول نقطهٔ x باشد. تصورکنیدکه (۱) در هر نقطهٔ x از J، $\rho(x) > 0$ و (۲) در هر نقطهٔ p از J، $\liminf_{x\to p}\rho(x)/|x-p| < 1$. در ایـن صورت، f در J تحلیلی است.

قضیهٔ فوق قضیهٔ پرینگشایم را در بـر دارد چرا کـه اگر $\rho(x)\geqslant\delta>0$ آنگاه $\liminf_{x\to p}\rho(x)/|x-p|=\infty$. بزبان غیررسمی، مفروضات‌قضیه می‌گویندکه اگر نقطهٔ p یی‌وجود داشته باشدکه f درآن تحلیلی نباشد، آنگاه بازهٔ همگرایی سری تیلر f حول نقاط نزدیك p نباید به‌فراتر از p امتداد یابد.

اثبات طبیعتاً درچندین‌گام انجام می‌شود.

I. فرض (۱) به‌تنهایی‌نتیجه می‌دهدکه f روی یك‌زیرمجموعهٔ چگال J تحلیلی‌است. این‌کاربرد مستقیمی ازقضیهٔ بر است. فرض (۱) بداین معنی‌است‌که

$$\frac{1}{\rho(x)}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|^{1/n}<\infty$$

و این‌معادل است با اینکه بگوییم یك تابع متناهی μ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant n![\mu(x)]^n,\qquad (n=1,2,\ldots).$$

فرض‌کنید E_m زیرمجموعـه‌ای از J باشد کـه روی آن، $m\leqslant\mu(x)<m+1$ و بنابراین $J=\bigcup_{m\geqslant 0}E_m$. طبق قضیهٔ بر، بعضی از E_mها نمی‌توانند در J هیچ جـا چگال باشند؛ یعنی عدد صحیح m و بازهٔ $K\subset J$ وجود دارد به‌طوری‌که E_m در K چگال‌است. بنابراین، به‌ازای $x\in E_m$ داریم

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant n!(m+1)^n,\qquad n=1,2,\ldots \qquad (*)$$

و برای $x\in K-E_m$ نابرابری (*) به‌سبب پیوستگی برقراراست. پس نابرابریهای (*) برای هر $x\in K$ برقرارند. از اینجا معلوم می‌شودکه f روی K تحلیلی است. با استدلال مشابهی در مورد بازه‌های $J-K$، f روی یك زیرمجموعهٔ چگال J تحلیلی‌است. فرض‌کنید H مکمل نسبی این مجموعهٔ بازباشد.

II. H دارای هیـچ نقطهٔ منزوی نیست. این گام از اثبات، چندان ضروری نیست لیکن نقش فرض (۲) را در قضیه روشن می‌سازد.

فرض‌کنید y یك نقطهٔ منزوی H باشد. آنگاه y نقطهٔ‌انتهایی مشترك دو زیربازهٔ مکمل از H است؛ سمت چپی را J_1 و سمت

1. Bair
2. Madeira
3. *Jahrbuch*
4. *Zentralblatt*

راستی‌را J_2 بنامید. اگر z_1 نقطه‌ای از J_1 و به‌اندازهٔ کافی نزدیك به y باشد، سری تیلر f حول z_1 در بازه‌ای که در درون J_2 امتداد دارد همگراست. حکم مشابهی در مورد $z_2 \in J_2$ برقرار است. می‌توانیم ضرایب تیلر f را در نقطهٔ y از روی سری تیلر f حول z_1 محاسبه کنیم و این سری نمایشگر f در بازه‌ای درسمت چپ y است. ضرایب همین سری (حول y) را می‌توان از سری تیلر f حول z_2 محاسبه کرد و این سری نمایشگر f در بازه‌ای در سمت راست y است. بنابراین f درنزدیکی y با سری تیلر خود که مرکزش y است نمایش داده می‌شود. به‌بیان دیگر، y متعلق به H نیست واین با فرض درتناقض است. پس H یك مجموعهٔ بی‌کاست است.

III. چون H بسته‌است، می‌توانیم آن را به‌عنوان یك فضای متریك کامل درنظر بگیریم وقضیهٔ بر را برای آن به‌کار بریم. سپس درمی‌یابیم که یك زیرمجموعهٔ بستهٔ P از H ویك λی متناهی‌وجود دارد به‌طوری‌که رابطهٔ

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\,\lambda^n, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

برای هر x در مقطع P با بازه‌ای چون J_1 برقرار است.

IV. حال‌رابطهٔ(۳) را داریم که درنقاط یك مجموعهٔ هیچ‌جا چگال بستهٔ P_1 برقرار است. به‌راحتی می‌توان دید که f نه‌تنها روی هر بازهٔ مکمل P_1 تحلیلی‌است بلکه در واقع دراین‌بازه‌ها با بسط تیلرخودحول یك نقطهٔ انتهایی r از بازه نمایش داده می‌شود. حال نیازداریم که $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ را دربازه‌های مکمل P_1 در J_1 تخمین بزنیم. این کار را با محاسبات مستقیم روی سریهامی‌توان انجام داد (ر.ك. [۲]). همچنین‌می‌توانیم ایدهٔ زالتسمان[1] و تسلر[2] رابه‌کار بریم[۷]: f را به‌صفحهٔ مختلط توسیع دهیم وبراوردهای کوشی را برای مشتقات به‌کار گیریم. با هریك از این روشها می‌توانیم یك کران‌یکنواخت برای $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ در J_1 به‌دست آوریم، واین نشان می‌دهد که f دریك بازهٔ شامل‌نقاط H تحلیلی است. این با تعریف H در تناقض است، پس H باید تهی باشد. یعنی f باید روی J تحلیلی باشد وقضیهٔ پرینگشایم خاتمه می‌یابد.

قضیهٔ پرینگشایم قضیهٔ چندان‌شناخته شده‌ای نیست؛ من تا به‌حال ندیده‌ام که درکتابی درسی اشاره‌ای به‌آن بشود. درمدت نیم قرن من اعتقاد داشتم که این قضیه واقعاً یك قضیهٔ "محض" است وهیچ کاربردی در ریاضیات و درجاهای دیگر ندارد. لیکن‌حالت خاصی از آن اخیراً کاربردهایی درفیزیك یافته است ([۳] و [۸])، گرچه فیزیکدانان مجبور شدند خودشان آن راکشف کنند. نتیجه‌ای که آنها به‌آن احتیاج داشتند این بودکه اگر برای هر t در یك بازهٔ J، $\liminf_{n\to\infty} |f^{(2n+1)}(t)|^{-1/n} \geqslant C > 0$، آنگاه f تحدید یك تابع تام است. این‌شرط معادل با این‌است که برای هر $t \in J$، $|f^{(2n+1)}(t)|^{1/(2n+1)} \leqslant L$. سپس قضیه‌ای‌از آدامار نشان می‌دهد که $f^{(2n)}(t)$ نیزدرنابرابری متناظرصدق‌می‌کند (با یك L بزرگتر). من به‌جای استنتاج این مطلب از قضیهٔ آدامار، آن را به‌سادگی به‌شکل مطلوب ثابت می‌کنم. طبق قضیهٔ تیلر با باقیماندهٔ مرتبهٔ ۲، اگر t و $t+\lambda$ متعلق به J باشند، داریم

$$f^{(2n)}(t) = \frac{f^{(2n-1)}(t+\lambda) - f^{(2n-1)}(t)}{\lambda} - \frac{1}{2} f^{(2n+1)}(t+\theta\lambda)\lambda, \qquad |\theta| < 1$$

پس نتیجه می‌شود

$$|f^{(2n)}(t)| \leqslant 2|\lambda|^{-1} L^{2n-1} + 1/2\lambda L^{2n+1}.$$

فرض کنیم h عدد حقیقی مثبتی کوچکتر از نصف طول J باشد. می‌توانیم فرض کنیم $L > 2/h$، آنگاه برای $t \in J$ یکی از $t \pm 2/L$ متعلق به J است، پس اگر بگیریم $\lambda = \pm 2/L$، خواهیم داشت،

$$|f^{(2n)}(t)| \leqslant 2L^{2n}$$

$$|f^{(2n)}(t)|^{1/(2n)} \leqslant 2^{1/(2n)} L < 2L.$$

مراجع

1. R. P. Boas, A theorem on analytic functions of a real variable, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (1935), 233-236.
2. A. Boghossian and P. D. Johnson, Jr., Pointwise conditions for analyticity and polynomiality of infinitely differentiable functions, *J. Math. Analysis and Appl.* 140 (1989), 301-309.
3. M. J. Hoffman and R. Katz, The sequence of derivatives of a C^∞-function, *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 557-560.
4. P. Kolar and J. Fischer, On the validity and practical applicability of derivative analyticity relations, *J. Math. Phys.* 25 (1984), 2538-2544.
5. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie,* vol. I, 5th. ed., Leipzig and Berlin: Teubner (1928).
6. A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich, *Math. Ann.* 42 (1893), 153-184.
7. H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* 62 (1955), 354-367.
8. I. Vrkoc, Holomorphic extension of a function whose odd derivatives are summable, *Czechoslovak Math. J.* 35(110) (1985), 59-65.
9. Z. Zahorski, Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres, *Fund. Math.* 34 (1947), 183-245; supplement, *ibid.* 36 (1949), 319-320.

• R. P. Boas, "When is a C^∞ function analytic?," *The Mathematical Intelligencer*, (4) **11** (1989) 34-37.

* رالف بواس از ریاضیدانان معروف آمریکایی است و مدتی ویراستار اجرایی مجلهٔ *Mathematical Reviews* بوده است. در حال حاضر نیز جزو ویراستاران چند مجلهٔ معتبر ریاضی است.

1. Salzmann 2. Zeller