

# کدهای میله‌ای: تحلیل توپولوژیک داده‌ها\*

رابرت گریست\*

ترجمه حسن حقیقی

## ۱. شکل داده‌ها

وقتی از توپولوژیدان سؤال می‌شود: «چگونه یک شیء چهاربعدی را در ذهن خود مجسم می‌کنید؟» پاسخ مناسبی که می‌تواند بدهد، یک پاسخ سقراطی است: «شما چگونه یک شیء سه‌بعدی را در ذهن خود مجسم می‌کنید؟» ما اشیا را در فضای سه‌بعدی مستقیماً نمی‌بینیم بلکه آنها را از طریق ترکیب یک سلسله تصاویر مسطح به‌گونه‌ای حس می‌کنیم. بخش قابل توجهی از اولین سال زندگی ما صرف آموختن این امر می‌شود که چگونه داده‌های فضایی سه‌بعدی را از تصاویر مسطح جفت‌وجور شده استنتاج کنیم. سالها ممارست، توانایی چشمگیری برای استخراج ساختار کلی از تصاویری در بُعد پایین‌تر پدید آورده است.

استنتاج ساختار کلی از طریق تبدیل داده‌های گسسته به تصاویر پیوسته، در مقیاسهای بسیار ظریف‌تری هم انجام می‌پذیرد. چاپگرهای سوزنی، تابلوهای تبلیغاتی LED، تلویزیون، و نمایشگر رایانه‌ها، همگی تصاویر را از طریق آرایه‌هایی از نقاط گسسته که در قالب اشیایی کلی و منسجم ترکیب شده‌اند، انتقال می‌دهند. این نیز مهارتی است که ما از کودکی آن را تمرین کرده‌ایم.

## ۱.۱ تحلیل توپولوژیک داده‌ها

مسأله‌های تحلیل داده‌ها، ویژگیهای مشترک بسیاری با این دو مسأله بنیادی ترکیب اشکال دارند: (۱) چگونه ساختاری با بُعد بالا از نمایشهای بُعد پایین استنتاج می‌شود؛ و (۲) چگونه نقاط گسسته در ساختار کلی گرد می‌آیند. این مقاله مروری بر کارهای کارلسن، دو سیلوا، ادلزبرونر<sup>۱</sup>، هارر<sup>۲</sup>، زمردیان و دیگران در این زمینه است. [مترجم مفاهیم پایه عمده‌ای را که پیشنیاز مطالعه این مقاله‌اند در تابلو «یادآوری بعضی مفاهیم» آورده است و خوانندگانی که آنها را از یاد برده‌اند می‌توانند به این تابلو مراجعه کنند]. موضوعات اصلی مقاله، تکنیکهای مفید زیرند.

۱. به جای مجموعه‌ای از نقاط داده، خانواده‌ای از مجموعه‌های سادگی

1. Edelsbrunner 2. Harer

را در نظر بگیریم که با یک پارامتر نزدیکی<sup>۱</sup> اندیس‌گذاری شده باشند. این کار مجموعه داده‌ها را به اشیای توپولوژیک کلی تبدیل می‌کند.

۲. این مجموعه‌های توپولوژیک را با عدسی توپولوژی جبری—به‌خصوص از طریق نظریه جدید مانستگی ماندگار<sup>۲</sup>، که بر خانواده‌های پارامتری تطبیق یافته باشد، ببینیم.

۳. مانستگی ماندگار مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌صورت نسخه پارامتری شده یک عدد بتی، یعنی کد میله‌ای<sup>۳</sup> بیان کنیم.

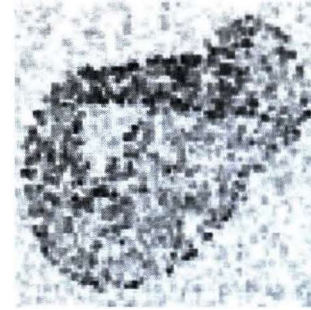
در این مقاله مروری، این موضوعات را معرفی می‌کنیم و مثالی از کاربرد این تکنیکها را در مورد یک مجموعه داده‌های از بعد بالا، مستخرج از تصاویر طبیعی، بررسی خواهیم کرد.

## ۲.۱ توده‌های داده‌ها

داده‌ها اغلب به‌صورت دنباله‌ای نامرتب از نقاط در فضای اقلیدسی  $n$  بُعدی نمایش داده می‌شوند. داده‌های حاصل از یک حسگر در یک میز آزمایش<sup>۴</sup> مهندسی، یا حاصل از پاسخهای مندرج در پرسش‌نامه یک آزمایش روانشناسی، یا از اندازه‌های جمعیت در یک اکوسیستم پیچیده، همگی در فضایی بالقوه از بعد بالا قرار دارند. «شکل» کلی داده‌ها اغلب ممکن است درباره پدیده‌های اصلی که داده‌ها نمایش می‌دهند، اطلاعات مهمی به‌دست دهد.

نوعی از مجموعه داده‌ها که ویژگیهای کلی آن معلوم و مهم‌اند، داده‌های توده نقطه‌ای<sup>۵</sup> نام دارد که از اشیای فیزیکی در فضای سه‌بعدی به‌دست می‌آید. کاوشگرهای تماسی<sup>۶</sup>، لیزرهای نقطه‌ای یا لیزرهای خطی، جسم معلق را می‌رویند و از سطح نمونه‌گیری می‌کنند، و به ثبت مختصات نقاط اصلی روی سطح جسم می‌پردازند. چنین توده‌ای از نقاط را می‌توان خیلی سریع

1. proximity parameter 2. persistent homology 3. barcode  
4. testbed 5. point cloud data 6. touch probes



شکل ۱ تعیین ساختار کلی یک توده نقطه نوفه‌ای، وقتی نقاط در  $\mathbb{R}^2$  اند مشکل نیست، اما برای توده‌های در ابعاد بالاتر، رمزگشایی از یک تصویر مسطح همیشه آسان نیست.

به‌دست آورد و برای نمایش رایانه‌ای شیء از آن استفاده کرد. یک روایت موقت این وضعیت در داده‌های ضبط حرکت پیدا می‌شود که در آنها نقاط هندسی به صورت یک سری زمانی ضبط می‌شوند. در هر دوی این حالتها، شناختن ویژگیهای کلی حائز اهمیت‌اند: انگشت اشاره کجاست؟ سوراخ کلید کجاست؟ شکستگی کجاست؟

به پیروی از روش متداول، هر گردابه از نقاط در  $\mathbb{R}^n$  را با داده‌های توده نقطه‌ای نمایش می‌دهیم، اگرچه معنای ضمنی آن این است که نمونه‌ای از نقاط (که شاید نوفه باشد) روی زیرمجموعه‌ای از بعد پایین‌تر قرار دارند. برای توده‌هایی از نقاط که در یک فضای کم‌بعد قرار دارند، رویکردهای متعددی برای استنتاج ویژگیها براساس تصاویر مسطح وجود دارد: تکنیکهای بازسازی در نوشتگان گرافیک رایانه‌ای و آمار، گوناگون است. از یک منظر طبیعی، وقتی داده‌ها به‌طور ذاتی از بعد بالا هستند، یا آنقدر «تابیده» (مخدوش)‌اند که مانع ایجاد یک تصویر مسطح قابل اعتماد می‌شوند، تصاویر مسطح ارزش محدودی دارند.

اخیراً رویکردی کلی‌تر و درونی‌تر به توده داده‌های از بعد بالا در کارهای کارلسن و همکارانش مشاهده شده است. در این رویکرد، از ابزارهایی از توپولوژی جبری استفاده می‌شود تا ویژگیهای کلی مجموعه داده‌های از بعد بالا استخراج شود. این مقاله مروری است موجز بر برخی از کارهای ایشان. به‌خاطر تمرکز توجه به تکنیکهایی از توپولوژی جبری، قسمت اعظم کارهایی را که در این زمینه در آمار غیرخطی انجام گرفته (و به‌ندرت توپولوژیک هستند) و همچنین تحقیقات انجام‌شده در گرافیک رایانه‌ای را (که به‌ندرت در بعد بالا هستند) نادیده می‌گیریم.

### ۳.۱ از توده‌ها به مجتمعه‌ها

بدیهی‌ترین راه برای تبدیل گردابه‌ای از نقاط  $\{x_\alpha\}$  در یک فضای متریک به یک شیء کلی، به‌کارگرفتن توده نقاط به‌عنوان رئوس یک گراف ترکیبیاتی است که یالهای آن با رابطه نزدیکی (رأسهایی که در فاصله معین  $\epsilon$  قرار می‌گیرند) تعیین می‌شود. چنین گرافی هرچند داده‌های مربوط به همبندی را در خود ضبط می‌کند، اما بسیاری ویژگیهای از مرتبه بالاتر، که در ورای خوشه‌بندی قرار دارد، در آن نادیده گرفته می‌شود. با پذیرفتن گراف به‌عنوان قالبی برای یک شیء از بعد بالاتر، این ویژگیها به‌صورتی دقیق قابل درک

هستند. به‌طور مشخص: گراف به یک مجتمع سادگی، فضایی که از قطعات ساده‌ای (سادکهای) ساخته شده که به‌طور ترکیبیاتی در طول وجه‌ها یکی گرفته شده‌اند، ترفیع می‌یابد. انتخاب شیوه پر کردن سادکهای ابعاد بالاتر گراف نزدیکی، نمایشهای کلی متفاوتی را امکان‌پذیر می‌سازد. دوتا از طبیعی‌ترین روشها برای انجام این کار به شرح زیرند.

**تعریف ۱.۱** گردابه‌ای از نقاط  $\{x_\alpha\}$  در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  داده شده است. مجتمع چخ<sup>۱</sup> [همچنین، موسوم به عصب<sup>۲</sup>،  $C_\epsilon$ ، مجتمع سادگی مجردی است که  $k$ -سادکهای آن به‌وسیله  $(k+1)$ -تاییهای نامرتب نقاط  $\{x_\alpha\}^k$  تعیین می‌شوند، به‌طوری که همسایگیهای بسته  $\epsilon/2$ -گوی آنها، یک نقطه مشترک دارند.

**تعریف ۲.۱** گردابه‌ای از نقاط  $\{x_\alpha\}$  در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  داده شده است. مجتمع ریپس<sup>۳</sup>  $R_\epsilon$ ، مجتمع سادگی مجردی است که  $k$ -سادکهای آن متناظر با  $(k+1)$ -تاییهای نامرتب  $\{x_\alpha\}^k$  از نقاطند که دوه‌دو در فاصله‌ای کمتر از  $\epsilon$  قرار دارند.\*

**قضیه چخ** (یا «قضیه عصب») حاکی است که  $C_\epsilon$  نوع هوموتوبی‌ای برابر اجتماع گویهای بسته به شعاع  $\epsilon/2$  حول مجموعه نقاط  $\{x_\alpha\}$  دارد. این بدان معناست که  $C_\epsilon$  هرچند مجتمع سادگی مجردی است که بعد آن به‌طور بالقوه بالاست، درست مثل زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^n$  رفتار می‌کند (شکل ۲ را ببینید). مجتمع چخ، از نظر توپولوژیک یک مدل سادگی معتبر برای توپولوژی یک توده نقطه است که از گویها انباشته شده است. اما مجتمع چخ و زیرمجموعه‌های گوناگونی که به‌طور توپولوژیک هم‌ارز آن هستند (برای مثال، مجتمع آلفای [۱۳]) اشیای خوبی از لحاظ محاسبه، با تکیه بر فاصله دقیق بین گرهما در  $\mathbb{R}^n$  هستند.

از نظر محاسباتی، در مورد مجتمع ریپس به عملیات کمتری نیاز است تا در مورد مجتمع چخ، اگرچه مجتمع ریپس (در حالت کلی) سادکهای بیشتری دارد. دلیل آن هم این است که مجتمع ریپس یک مجتمع پرچم<sup>۴</sup> است. یعنی در میان تمام مجتمعهای با ۱-اسکلت مفروض، ماکسیمال است. بنابراین، خاصیت ترکیبیاتی ۱-اسکلت مجتمع را، به‌طور کامل، مشخص می‌کند و مجتمع ریپس را می‌توان به‌صورت یک گراف ذخیره کرد و دوباره ساخت، به‌جای اینکه تمامی عملگرهای مرزی مورد نیاز برای مجتمع چخ را ذخیره کنیم. این مزیت، که داده‌های حاصل از نزدیکی ناظرین<sup>۴</sup> روی زوجهای گرهما، مجتمع ریپس را تعیین می‌کند، خالی از هزینه نیست. جریمه این ساده‌سازی این خواهد بود که آنچه در نوع هوموتوبی  $R_\epsilon$  منعکس می‌شود بلافاصله روشن نیست؛ به‌طور کلی، نه یک زیرمجتمع  $\mathbb{R}^n$  است و نه اینکه لزوماً مانند یک فضای  $n$ -بعدی رفتار می‌کند (شکل ۲).

1. Čech complex 2. Rips complex

\* برای به رسمیت شناختن کار اصیل ویه‌توریس در استفاده از این اشیاء در دوره اولیه نظریه مانستگی، بهتر است این مجتمع را ویه‌توریس-ریپس بنامیم. اما برای رعایت اختصار، در اینجا اصطلاح «مجتمع ریپس» را به‌کار می‌بریم.

توضیح مترجم. ویه‌توریس در اوایل پیدایش نظریه مانستگی از این مجتمع به‌عنوان وسیله‌ای برای ساختن مدل‌های سادگی از فضای متریک استفاده کرد [۲۱] و ریپس در دهه ۱۹۸۰ این مجتمع را در نظریه هندسی گرهما برای ساختن مدل‌های سادگی برای عمل گروه به‌کار برد.

3. flag complex 4. coarse proximity

# یادآوری بعضی مفاهیم

## ۱. مدول آزاد

همانگونه که هر عنصر یک فضای برداری  $V$  روی یک میدان  $F$  را می‌توان به صورت یکتایی به شکل ترکیب خطی مجموعه‌ای معین از عناصر  $V$  نوشت، ممکن است بتوان هر عنصر یک  $R$ -مدول  $M$  را به صورت یکتایی به شکل ترکیب خطی یک مجموعه معین از عناصر  $M$  نوشت. در این صورت،  $M$  را یک  $R$ -مدول آزاد می‌نامند. به عبارت دیگر،  $R$ -مدول  $M$  را آزاد می‌نامند هرگاه با یک جمع مستقیم از  $R$ ها یکرخت باشد. یعنی  $M \simeq \bigoplus R$ .

## ۲. دامنه ایده‌آل اصلی

دامنه صحیح  $R$  را یک دامنه ایده‌آل اصلی می‌نامند هرگاه هر ایده‌آل آن توسط یک عنصر تولید شود.  $\mathbb{Z}$  و حلقه چند جمله‌ایها با ضرایب متعلق به یک میدان  $F$ ،  $F[x]$  مثالهایی از دامنه‌های ایده‌آل اصلی‌اند.

قضیه ساختاری مدوله‌ای متناهی مولد روی دامنه‌های ایده‌آل اصلی فرض کنیم  $R$  یک دامنه ایده‌آل اصلی و  $M$  یک  $R$ -مدول متناهی مولد باشد. آنگاه

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{i=n} x^{t_i} \cdot R \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{j=m} (R/x^{s_j} \cdot R) \right)$$

## ۳. حلقه مدرج

حلقه  $R$  را  $\mathbb{N}$ -مدرج می‌نامند هرگاه زیرگروه‌های  $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  از  $R$  وجود داشته باشند به طوری که  $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$  و به ازای هر  $i, j \in \mathbb{N}$ ،  $R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}$ .

## ۴. مجتمع سادگی مجرد

فرض کنیم  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  یک مجموعه و  $\Delta$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه زیرمجموعه‌های  $V$  باشد.  $\Delta$  را یک مجتمع سادگی روی  $V$  می‌نامند هرگاه

- به ازای هر  $x \in V$ ،  $\{x_i\} \in \Delta$ ،
- اگر  $A \in \Delta$  و  $B \subset A$  آنگاه  $B \in \Delta$ .

هر عضو  $\Delta$  را یک وجه می‌نامند و برای هر وجه  $F$  عدد  $|F| - 1$  را بُعد  $F$  می‌خوانند. عدد  $\max\{\dim F | F \in \Delta\}$  را بُعد  $\Delta$  می‌نامند.

## ۵. اسکلت یک مجتمع سادگی

فرض کنیم  $\Delta$  یک مجتمع سادگی از بُعد  $n$  روی  $V$  و  $r$  یک عدد صحیح با ویژگی  $-1 \leq r \leq n$  باشد. مجموعه

$$\Delta^{(r)} = \{F \in \Delta | \dim F \leq r\}$$

را که خود یک مجتمع سادگی روی  $V$  است،  $r$ -اسکلت  $\Delta$  می‌نامند.

## ۶. گروه‌های مانستگي [هومولوژی]

به هر مجتمع سادگی  $\Delta$  از بُعد  $n$ ،  $n+1$  گروه جابه‌جایی (یا مدول) به صورت زیر نسبت داده می‌شود. فرض کنیم  $R$  یک حلقه جابه‌جایی یک‌دار و  $F = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$  یک وجه  $\Delta$  باشد که عناصرش به ترتیب صعودی اندیسها مرتب شده‌اند. در این صورت، این وجه را با  $[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}]$  نمایش می‌دهیم. به هر وجه  $F \in \Delta$  یک نشان  $e_F$  نسبت می‌دهیم. فرض کنیم به ازای هر  $-1 \leq k \leq n$ ،  $C_k(\Delta) = \bigoplus_{F \in \Delta, \dim F = k} R \cdot e_F$ ،  $R$ -مدول آزاد پدید آمده توسط وجه‌های  $k$  بُعدی  $\Delta$  باشد. تناظر  $\partial_k : C_k(\Delta) \rightarrow C_{k-1}(\Delta)$  که به صورت

$$\partial_k([x_1, \dots, x_{k+1}]) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1}]$$

تعریف می‌شود به یک همریختی  $R$ -مدولها از  $C_k(\Delta)$  در  $C_{k-1}(\Delta)$  گسترش می‌یابد. از نحوه تعریف  $\partial_k$  نتیجه می‌شود  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ . به این ترتیب یک مجتمع زنجیری از  $R$ -مدولها و  $R$ -همریختها به صورت زیر به دست می‌آید

$$0 \rightarrow C_n(\Delta) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\Delta) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Delta) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

اگر  $\{b\}$  ازای یک  $b' \in C_{k+1}(\Delta)$  در  $\text{Im } \partial_{k+1} = \{b \in C_k(\Delta) | \partial_{k+1}(b') = b, C_{k+1}(\Delta)\}$  و  $\ker \partial_k = \{a \in C_k(\Delta) | \partial_k(a) = 0\}$  از  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$  نتیجه می‌شود  $\text{Im } \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$ .  $R$ -مدول  $H_k(\Delta) = \ker \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$  را  $k$ -امین مدول مانستگی [هومولوژی] مجتمع سادگی  $\Delta$  می‌نامند. اگر  $R$  یک میدان باشد آنگاه  $\dim H_k(\Delta)$  را  $k$ -امین عدد بتی  $\Delta$  می‌نامند و با  $\beta_k$  نمایش می‌دهند.

مثال. فرض کنیم  $\Delta$  مجتمع سادگی وابسته به بطری کلاین باشد. آنگاه گروههای مانستگی آن به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول به صورت زیرند

$$H_n(\Delta) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \{0\} & n = 2 \end{cases}$$

## ۷. هوموتوپي

فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک و  $f, g : X \rightarrow Y$  دو نگاشت پیوسته باشند.  $f$  و  $g$  را هوموتوپ گویند هرگاه یک تابع پیوسته  $F : X \times I \rightarrow Y$  که  $I$  بازه بسته  $[0, 1]$  است، وجود داشته باشد به طوری که  $F(x, 0) = f(x)$  و  $F(x, 1) = g(x)$ .

هم ارزی هوموتوپي

دو فضای توپولوژیک  $X$  و  $Y$  را هوموتوپي-هم ارز گوئیم هرگاه دو تابع پیوسته  $f : X \rightarrow Y$  و  $g : Y \rightarrow X$  وجود داشته باشند به طوری که  $f \circ g$  با تابع همانی  $Y$  و  $g \circ f$  با تابع همانی  $X$  هوموتوپ باشند. در این صورت،  $X$  و  $Y$  را دارای یک نوع هوموتوپي هم می‌نامند.



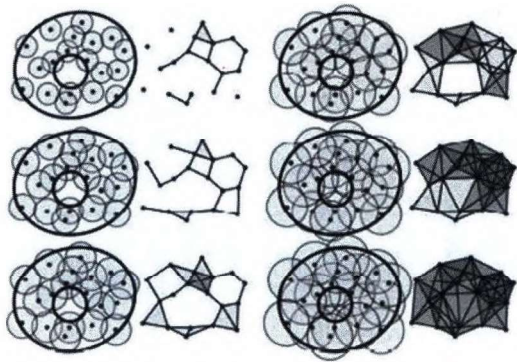
شکل ۱. سه فضای فوق متشکل از خطوط سیاه، دارای یک نوع هوموتوپي هستند.

## ۸. نظیر کردن مجتمع سادگی به یک فضای توپولوژیک

فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد. به هر پوشش باز  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  برای  $X$  یک مجتمع سادگی به صورت زیر می‌توان نظیر کرد. به ازای هر  $\alpha \in A$  یک عضو  $x_\alpha$  از  $\mathcal{U}_\alpha$  انتخاب می‌کنیم. اگر  $N(\mathcal{U})$  مجموعه تمام چنین عناصری باشد، روی آن یک مجتمع  $\Delta(\mathcal{U})$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}\} \in \Delta(\mathcal{U}) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \mathcal{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha_n} \neq \emptyset$$

این مجتمع را عصب  $\mathcal{U}$  می‌نامند. حال اگر  $\{\mathcal{V}_\beta\}_{\beta \in B}$  یک پوشش باز دیگر برای  $X$  باشد به طوری که به ازای هر  $\alpha \in A$  یک  $\beta \in B$  وجود داشته باشد که  $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{U}_\alpha$ ، آنگاه یک نگاشت سادگی از  $N(\mathcal{U})$  در  $N(\mathcal{V})$  تعریف می‌شود که با تقریب هوموتوپي خوشتعریف است. به خصوص اگر  $X$  یک فضای متریک باشد، به ازای هر  $\epsilon > 0$  می‌توان یک پوشش باز برای  $X$  از گویهای باز به شعاع  $\epsilon$  و یک عصب برای این پوشش ساخت که با تغییر  $\epsilon$ ، زنجیری از چنین مجتمعهایی ساخته می‌شوند. دو نوع خاص آن، یعنی چخ و ریپس اشیای اصلی مورد بحث در این مقاله‌اند.



شکل ۳ دنباله‌ای از مجتمع‌های رییس برای یک مجموعه داده‌های توده نقطه‌ای که نمایش‌دهنده یک طوق است. با افزایش  $\epsilon$ ، حفره‌ها ظاهر و محو می‌شوند. کدام حفره‌ها واقعی و کدام نوفه است؟

بسی کفایت نمی‌کنند. وسیله‌ای لازم است که مشخص کند کدام حفره‌ها اساسی هستند و کدام حفره‌ها را با اطمینان می‌توان نادیده گرفت. شیوه‌های توپولوژیک استاندارد هوموتوپ و مانستگ، انعطافی در طبیعت انعطاف‌ناپذیر آنها پدید نمی‌آورند. حفره، حفره است؛ مهم نیست که چقدر صاف یا ناصاف است.

## ۱.۲ ماندگاری

ماندگاری بدان‌گونه که توسط ایلزبرون، لیشر<sup>۱</sup> و زمردیان معرفی شده [۱۲] و توسط کارلسن و زمردیان پالایش یافته [۲۲]، پاسخی دقیق به این مسأله است. فرض کنیم خانواده‌ای پارامتری شده از فضاها داده شده است. آن ویژگی‌های توپولوژیکی که روی یک حوزه پارامتری قابل ملاحظه ماندگارند به عنوان سیگنال و ویژگی‌های زودگذر به عنوان نوفه در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان یک مثال مشخص، فرض کنیم  $R = (R_i)^N$  دنباله‌ای از مجتمع‌های رییس باشد که به توده نقطه معینی به ازای یک دنباله افزایشی از مقادیر پارامتر  $(\epsilon_i)^N$  وابسته شده است. نگاشتهای شمول طبیعی

$$R_1 \hookrightarrow R_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_{N-1} \hookrightarrow R_N \quad (۱.۲)$$

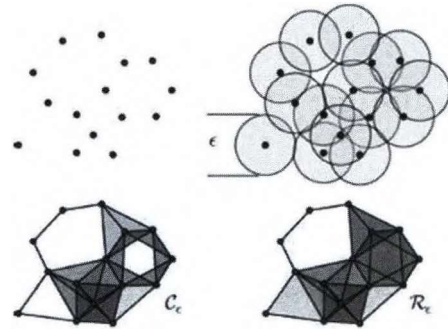
وجود دارند. به جای بررسی مانستگ تک تک جملات  $R_i$ ، مانستگی شمولهای مکرر  $H_*R_i \rightarrow H_*R_j$  به ازای همه  $j < i$ ها بررسی می‌شود. این نگاشتهای معلوم می‌کنند کدام ویژگی‌ها ماندگارند.

به عنوان مثالی ساده، ماندگاری توضیح می‌دهد که چرا مجتمع‌های رییس تقریب قابل قبولی از مجتمع‌های چخ هستند. با وجود آنکه هیچ مجتمع رییس منفردی، تقریب قابل اعتمادی از یک مجتمع چخ منفرد نیست، زوجهای مجتمع‌های رییس، مجتمع چخ مناسب را در حفره‌ای با اندازه مناسب «فشرده» می‌کنند.

لم ۱.۲ (دوسیلا [۱۰]) به ازای هر  $\epsilon > 0$ ، زنجیری از نگاشتهای شمول

$$R_\epsilon \rightarrow C_{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \rightarrow R_{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \quad (۲.۲)$$

وجود دارد.



شکل ۲ با کامل‌سازی یک مجموعه معین نقاط [گوشه چپ بالا] می‌توان یک مجتمع چخ  $C_\epsilon$  [گوشه چپ پایین] یا یک مجتمع رییس  $R_\epsilon$  [گوشه راست بالا] براساس یک پارامتر نزدیکی  $\epsilon$  به دست آورد. این مجتمع چخ نوع هوموتوپ‌ای برابر پوشش  $\epsilon/2$   $(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$  دارد؛<sup>۱</sup> در حالی که مجتمع رییس نوع هوموتوپ‌ی کاملاً متفاوت  $(S^1 \vee S^2)$  را دارد.<sup>۲</sup>

## ۴.۱ کدام $\epsilon$ ؟

تبدیل مجموعه‌ای از داده‌های توده نقطه‌ای به یک مجتمع کلی (خواه رییس، چخ یا دیگری)، مستلزم انتخاب پارامتر  $\epsilon$  است. به ازای  $\epsilon$  به اندازه کافی کوچک، مجتمع یک مجموعه گسسته است؛ به ازای  $\epsilon$  به اندازه کافی بزرگ، مجتمع یک سادک تنها از بعد بالا خواهد بود. آیا انتخابی بهینه برای  $\epsilon$  وجود دارد که به بهترین نحو توپولوژی مجموعه داده‌ها را منعکس کند؟ مجموعه داده‌های توده نقطه‌ای و دنباله‌ای از مجتمع‌های رییس را چنانکه در شکل ۳ تصویر شده در نظر بگیرید. این توده نقطه، از نمونه‌گیری از نقاط روی یک طوق مسطح به دست آمده است. آیا می‌توان این را نتیجه گرفت؟ از روی شکل به نظر می‌رسد که مقدار ایده‌آل  $\epsilon$ ، اگر وجود داشته باشد، بسیار نادر است. زمانی که  $\epsilon$  افزایش می‌یابد به گونه‌ای که حفره‌های کوچک از درون طوق برداشته می‌شوند، حفره بزرگی که طوق را از قرص متمایز می‌کند، پر می‌شود.

## ۲. توپولوژی جبری برای داده‌ها

توپولوژی جبری مجموعه کاملی از ابزارها برای شمردن و شماره‌گذاری حفره‌ها و دیگر ویژگی‌های توپولوژیک در فضا و نگاشتهای بین آنها ارائه می‌دهد. در مورد داده‌های از بعد بالا، توپولوژی جبری به مانند تلسکوپ عمل می‌کند، اشیاء و ویژگی‌هایی را که با چشم غیرمسلح قابل رؤیت نیستند آشکار می‌کند. در آنچه در پی می‌آید، ما توجه خود را به مانستگی [هومولوژی] معطوف می‌کنیم، زیرا توازنی بین محاسبه و تحلیل توپولوژیک ایجاد می‌کند. آشنایی مقدماتی با مانستگی را، به اندازه‌ای که مثلاً از فصل ۲ی [۱۵] می‌توان کسب کرد، مفروض می‌گیریم [به تابلو «یادآوری بعضی مفاهیم» هم نگاه کنید.م.]. مانستگی مجتمعی وابسته به یک توده نقطه در یک  $\epsilon$  مشخص، هرچند هم قابل محاسبه و هم اطلاع‌دهنده است، کافی نیست؛ اشتباه است که سؤال شود کدام مقدار  $\epsilon$  بهینه است. اطلاع از نحوه «شمردن» ساده تعداد و انواع حفره‌هایی که به ازای هر مقدار پارامتر  $\epsilon$  ظاهر می‌شود هم کافی نیست. اعداد

۱. فضایی همسانریخت با اجتماع سه دایره که در یک و فقط یک نقطه مشترک‌اند.م.  
۲. فضایی همسانریخت با اجتماع یک کره ۲ بعدی و یک دایره که در یک و فقط یک نقطه مشترک‌اند.م.

اما برای ضرایب متعلق به یک میدان  $F$ ، رده‌بندی  $F[x]$ -مدولها از «قضیه ساختار» برای دامنه ایده‌آلهای اصلی نتیجه می‌شود، زیرا ایده‌آلهای مدرج  $F[x]$  تنها به صورت  $(x^n \cdot F[x])$  هستند. از اینجا نتیجه زیر به دست می‌آید.

**قضیه ۳.۲** (رک. [۲۲]) برای یک مدول ماندگار متناهی  $C$ ، با ضرایب متعلق به میدان  $F$ ، یکرختی زیر برقرار است

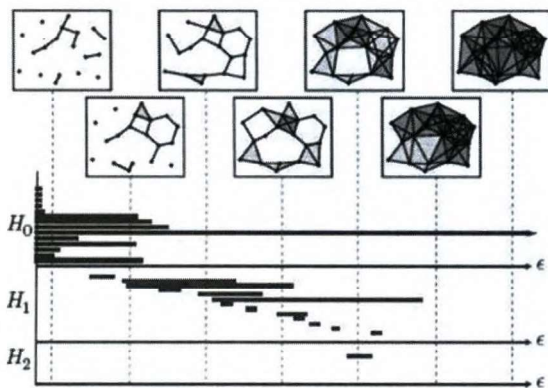
$$H_*(C; F) \simeq \bigoplus_i x^{t_i} \cdot F[x] \oplus \left( \bigoplus_j x^{r_j} \cdot (F[x]/(x^{s_j} \cdot F[x])) \right) \quad (3.2)$$

این قضیه رده‌بندی تعبیری طبیعی دارد. قسمتهای آزاد رابطه (۳.۲) با آن مولدهای مانستگی که به‌ازای پارامتر  $t_i$  به‌وجود می‌آیند و برای تمام مقادیر بعدی پارامتر ماندگار می‌مانند، در تناظر دوسویی قرار می‌گیرند. عناصر تابدار نیز با آن مولدهای مانستگی که در پارامتر  $r_j$  ظاهر می‌شوند و در پارامتر  $s_j + r_j$  محو می‌شوند، متناظر می‌شوند. در سطح زنجیر، قضیه ساختار، یک زوج‌سازی تولد-مرگ مولدهای  $C$  را (به‌استثنای آنهایی که تا بینهایت ماندگار می‌مانند) به‌دست می‌دهد.

### ۳.۲ کدهای میله‌ای

بازه‌های پارامتری که از پایه  $H_*(C; F)$  در رابطه ۳.۲ به‌دست می‌آیند، الهامبخش یک تصویر بصری کلی از  $H_k(C; F)$  به‌صورت کد میله‌ای‌اند. هر کد میله‌ای، نمایشی گرافیکی از  $H_k(C; F)$  به‌صورت گردهای از پاره‌خطهای افقی در صفحه است که محور افقی آن متناظر با پارامتر است و محور عمودی آن ترتیبی (اختیاری) از مولدهای مانستگی را نمایش می‌دهد. شکل ۴ نشان‌دهنده مثالی است از نمایش مانستگی نقاط نمونه‌گیری شده از یک طوق از شکل ۳ با استفاده از کد میله‌ای (در حالتی که تعداد زیادی مقدار پارامتر،  $\epsilon_i$ ، مورد نظر است).

قضیه ۳.۲ مشخصه اساسی کدهای میله‌ای را به‌دست می‌دهد.



شکل ۴ [پایین] مثالی از کدهای میله‌ای برای  $H_*(R)$  در مثال شکل ۳. [بالا] رتبه  $H_k(R_{\epsilon_i})$  برابر است با تعداد بازه‌هایی در کد میله‌ای  $H_k(R)$  که خط‌چین  $\epsilon = \epsilon_i$  را قطع می‌کنند.

(برای کران وابسته به بعد نایبشتر از  $\sqrt{2}$ ، نگاه کنید به [۱۰]). این دلالت بر این امر دارد که هر ویژگی توپولوژیکی که تحت نگاشت شمول  $R_{\epsilon} \rightarrow R_{\epsilon'}$  ماندگار بماند، وقتی که  $\epsilon'/\epsilon > \sqrt{2}$ ، در واقع یک ویژگی توپولوژیک مجتمع چرخ  $C_{\epsilon'}$  خواهد بود. نتیجه: مانستگی شمول  $H_*R_{\epsilon} \rightarrow H_*R_{\epsilon'}$  :  $\iota_* : H_*R_{\epsilon} \rightarrow H_*R_{\epsilon'}$  قابل رؤیت نیست و  $H_*R_{\epsilon'}$  بی‌آلایش<sup>۱</sup> است. این نشانه‌ای از ایده گسترده‌تر ماندگاری است که در دنباله‌ای دلخواه از مجموعه‌های زنجیری مطرح می‌شود.

### ۲.۲ مانستگی ماندگار

با یک مجتمع ماندگار شروع می‌کنیم، یعنی دنباله‌ای از مجموعه‌های زنجیری  $C = (C_i^j)_i$  به همراه نگاشتهای زنجیری  $x : C_*^i \rightarrow C_*^{i+1}$  (برای سادگی در علامت‌گذاری، نگاشتهای زنجیری  $x$  را اندیس‌گذاری نمی‌کنیم). منشأ آن دنباله‌ای از مجموعه‌های رییس یا چرخ افزایشی برحسب  $\epsilon$  است که به‌ازای یک دنباله صعودی از پارامترهای  $\{\epsilon\}$  نمونه‌گیری شده‌اند. چون مجموعه‌های رییس یا چرخ با  $\epsilon$  رشد می‌کنند، نگاشتهای زنجیری، به‌طور طبیعی با نگاشت شمول یکی گرفته می‌شوند.

**تعریف ۲.۲** به‌ازای  $i < j$ ، مانستگی  $(i, j)$  ماندگار  $C$  که با  $H_*^{i \rightarrow j}(C)$  نشان داده می‌شود، به‌عنوان تصویر هم‌ریختی القایی  $H_*(C_*^i) \rightarrow H_*(C_*^j)$  تعریف می‌گردد.

به عنوان مثال، پالایه  $R = (R_i)$  از مجموعه‌های رییس، پارامتری شده با نزدیکیهای  $\epsilon_i$ ، را در نظر بگیرید. لم ۱.۲ ایجاب می‌کند که اگر  $\epsilon'_j/\epsilon_i \geq \sqrt{2}$  آنگاه از  $H_k^{i \rightarrow j}(R) \neq 0$  نتیجه می‌شود  $H_k(C_{\epsilon_j}) \neq 0$ . حفره‌ها در مجتمع چرخ، به‌وسیله مانستگی ماندگار پالایه رییس به‌دست می‌آیند.

همان‌طور که کارلسن و زمردیان توضیح داده‌اند، مقدار بیشتری ساختار جبری در لایه‌های گروه‌های مانستگی ماندگار وجود دارد. یک دامنه ایده‌آل اصلی  $R$  را به‌عنوان حلقه ضرایب ثابت نگاه می‌داریم و یک ساختار  $R[x]$ -مدول مدرج روی  $C$  قرار می‌دهیم که  $x$  به‌عنوان یک نگاشت انتقال عمل می‌کند، یعنی یک تک‌جمله‌ای واحد  $x^n$  از  $R[x]$ ،  $C_*^i$  را از طریق  $n$  بار کاربرد متوالی  $x$  به  $C_*^{i+n}$  می‌فرستد. شرطی از نوع متناهی را با این مضمون می‌پذیریم که هر  $C_*^i$ ، به عنوان  $R[x]$ -مدول، متناهی‌مولد است و اینکه دنباله در  $i$  پایدار می‌ماند (در حالتی که دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌های زنجیری داده شده است).

اگرچه پالایش  $C$  از طریق نگاشتهای زنجیری  $x$  است (مقایسه کنید با وضعیت مجموعه‌های رییس که با افزایش  $\epsilon$  سادکها اضافه می‌شوند اما هرگز برداشته نمی‌شوند)،  $C$  به عنوان یک  $R[x]$ -مدول، آزاد است. مانستگی حاصل،  $H_*(C)$ ، ساختار یک  $R[x]$ -مدول را حفظ می‌کند اما برخلاف مدول زنجیری، لزوماً آزاد نیست، و به آسانی رده‌بندی نمی‌شود: نظریه آرتین-ریس<sup>۲</sup> در جبر جابه‌جایی دلالت به این دارد که مسئله رده‌بندی (از نوع متناهی) مدولهای ماندگار، مثل  $H_*(C)$ ، معادل است با رده‌بندی  $R[x]$ -مدولهای متناهی‌مولد که با اعداد نامنفی مدرج شده باشند. این نیز معلوم شده که بسیار دشوار است، برای مثال، در مورد  $\mathbb{Z}[x]$ .

1. torsional elements

1. unadorned 2. Artin-Rees

### ۵.۲ راههای دیگر

باید خاطرنشان کنیم که آنچه در بالا آمد، مختصرترین برداشت از مبحثی است که به سرعت به یک زیرشاخه جذاب و پر جنب و جوش از توپولوژی محاسباتی تبدیل شده است. برای افرادی که به جنبه های جبری-توپولوژیک نظریه علاقه مند هستند، پیشرفتهای اخیر را در زیر ذکر می کنیم.

- پالایه های دیگری، علاوه بر آنهایی که به مجتمعهای چخ و رییس وابسته اند، وجود دارند که وضعیتهایی طبیعی برای بررسی ماندگاری هستند. پالایه مورس یک فضای  $X$  مجهز به  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ، پالایه ای از  $X$  به توسط مجموعه های

$$X_t = \{f^{-1}([-\infty, t])\}$$

است. این (یا نسخه گسسته شده مربوط به آن) وضعیت بررسی شده ای است ([۱] و [۷])، گرچه پالایش به وسیله داده های خمیدگی انجام می گیرد [۵]. بحث ما درباره ماندگاری در وضعیتی بود که با زنجیر مجتمعهای سادگی اندیس گذاری شده با یک پارامتر سروکار داریم. انگیزه های قوی برای بررسی خانواده های چند پارامتری مجتمعهها وجود دارد. لکن در این وضعیت مشکلات جبری اساسی در ساختن نظریه ای مشابه برای مدوله های ماندگاری پیش می آید [۲۴].

- محاسبه مانستگی نسبی ماندگار پیچیده تر است، زیرا زنجیر مجتمعهای پارامتری شده  $C$ ، که به دنبال آن می آید، دیگر به عنوان یک  $F[x]$ -مدول، آزاد نیست. بندیک<sup>۱</sup> و هارر (در تحقیقی در حال پیشرفت) یک روش ساخت جبری برای تعریف و محاسبه مانستگی ماندگار ارائه داده اند که در مورد پالایه مورس صورت بسیار روشنی دارد. قضیه مشابه قضیه ۳.۲ زوج سازی کامل نقاط بحرانی مورس را میسر می کند.
- محاسبه همانستگی [کوهمولوژی<sup>۲</sup>] ماندگار سراسر نیست. همان طور که دوسیلاوا (در تحقیقی در حال پیشرفت) نشان داده است، اگر  $F[x]$ -مدول مدرج آزاد زنجیر مجتمعهای  $C$  برای پالایه مورس  $X_t$  فضای  $X$  را بگیرد و آن را به عنوان یک  $F[x]$ -مدول آزاد مدرج دوگان سازی کنید، یعنی اگر  $\text{Hom}_{F[x]}(C, F[x])$  را بسازید، آنگاه مانستگی شیء حاصل دیگر به عنوان یک  $F[x]$ -مدول مدرج، همانستگی ماندگار  $H^*(X_t)$  نخواهد بود، بلکه همانستگی نسبی  $H^*(X, X_t)$  خواهد بود. محاسبه همانستگی ماندگار مطلق، توسل به دوگانی و نظریه بندیک-هارر را که در بالا عنوان شد الزامی می سازد.

### ۳. مثال: تصاویر طبیعی

مثال جدیدی از کشف ساختار توپولوژیک در یک مجموعه داده های بعد بالا، از تصاویر طبیعی می آید. در اواخر دهه ۱۹۹۰، فان هاترن و فان در شاف مجموعه ۴۱۶۷ عدد عکس دیجیتالی تصادفی از صحنه هایی در فضای باز را کنار هم گذاشتند [۲۰]. مامفرد و همکارانش چندین سؤال جالب درباره ساختار و عمومیت بالقوه جنبه های آماری این مجموعه و مجموعه هایی مشابه از تصاویر، در زمینه درک بصری مطرح کرده اند [۱۷].

قضیه ۴.۲ (رک. [۲۲]) رتبه گروه مانستگی ماندگار  $H_k^{i \rightarrow j}(C; F)$  برابر است با تعداد بازه هایی در کد میله ای  $H_k(C; F)$  که بازه  $[i, j]$  را می پیمایند. به خصوص،  $H_*(C_*^i; F)$  برابر است با تعداد بازه هایی که شامل  $i$  اند.

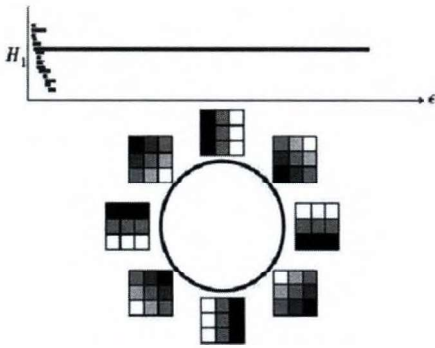
بهترین تعبیر کد میله ای آن است که آن را مشابه عدد بتی برای ماندگاری بدانیم. یادآور می شویم که  $k$  امین عدد بتی یک مجتمع،  $\beta_k := \text{rank } H_k$ ، نقش یک اندازه عددی ناظریف برای  $H_k$  را ایفا می کند. همانند  $\beta_k$ ، کد میله ای مربوط به  $H_k$  هیچ اطلاعاتی درباره ساختار ظریف تر مانستگی نمی دهد، بلکه فقط یک رتبه پارامتری شده پیوسته را به دست می دهد. ویژگی نمایش با کد میله ای، توانایی پالایش کیفی نوفه توپولوژیک و جذب کردن ویژگیهای مهم است. در واقع، همان گونه که در [۷] تشریح شده، کدهای میله ای، در حضور نوفه های افزوده شده به یک پالایه [مورس]، پایدارند. برای مثال در شکل ۴، می توان (با استفاده از یک نمونه گیری بسیار ناظریف) ملاحظه کرد که توده نقطه، احتمالاً یک شیء همبند را با یک یا دو حفره قابل رؤیت، آن طور که با  $H_1$  اندازه گرفته شده، نشان می دهد و هیچ مانستگی بالاتر قابل ملاحظه ای ندارد.

### ۴.۲ محاسبه

اکثر ناوردها در توپولوژی جبری به دلیل دشواری محاسبه شناخته شده نیستند. مانستگی (در ساده ترین صورتهايش) به نظر استثنایی می آید از این لحاظ که در آن ناوردها به عنوان خارج قسمت فضاهای برداری ظاهر می شوند. در زمینه کاربردها، «متناهی» ممکن است از کرانه های معقول فراتر رود. وقتی با میلیونها سادک مواجه می شویم، هیچ دلیلی برای این شعار نداریم که «مانستگی فقط جبر خطی است» بلکه به الگوریتم خوب نیاز است. خوشبختانه چنین الگوریتمهایی، با دامنه و سرعت فزاینده، وجود دارند. مرجع [۱۶] درآمدی جامع بر مباحث و الگوریتمهای قابل دسترس برای محاسبه مانستگی در مسائل واقعی در حوزه های کاربردی است.

خوش اقبالی بیشتر اینکه، یک الگوریتم عالی برای محاسبه گروه های مانستگی ماندگار و کدهای میله ای در دسترس است. این الگوریتم، مجتمع سادگی پالایش شده متشکل از زوج  $(\sigma_i, \tau_i)$  را، که  $\sigma_i$  یک سادک و  $\tau_i$  زمانی است که این سادک در پالایش ظاهر می شود، به عنوان متغیر خود می گیرد. این الگوریتم ابتدا در مرجع [۱۲] برای زیرمجتمعه های سادگی  $\mathbb{E}^3$  با ضرایب متعلق  $\mathbb{Z}_2$  و بعد در مرجع [۲۲] برای مجتمعه های ماندگار عمومی با ضرایب متعلق به یک میدان، انتشار یافت. برنامه رایانه ای مبتنی بر Matlab موسوم به Plex که دو سیلوا و پری [۱۱] آن را تهیه کرده اند، برنامه کتابخانه ای مانستگی ماندگار به زبان ++C تهیه شده به وسیله کیترا<sup>۱</sup> و زمردیان را با ابزارهایی برای وارد کردن داده ها و نیز محاسبه ادغام کرده است.

شایان ذکر است که برای پالایه های زنجیری حاصل از مجموعه های داده های واقعی، مجتمعهای رییس اندازه غیر قابل کنترلی دارند. این ویژگی، نمونه گیری کارا یا فروکاهش مجتمع با توپولوژی صحیح را ضروری می سازد. مجتمع شاهد<sup>۲</sup> کارلسن و دو سیلوا [۸]، [۹]، و [۱۴] راهحلی ساده برای این مسأله به دست می دهد.



شکل ۵ کدهای میله‌ای  $H_1$  برای یک نمونه‌گیری تصادفی از ۵۰۰۰ نقطه از  $M[15, 25]$ . یک مولد تنها را به دست می‌دهد. این مولد نشان‌دهنده خط گرهی بین یک قطعه روشن و یک قطعه تاریک، ویژگی بارز دایره اولیه در  $M$ ، است.

هدف از محاسبه مانستگی، کشف یک ویژگی «پنهان» مجموعه داده‌هاست که فقط با خوشه‌بندی و همبندی قابل تشخیص نیست. همان‌گونه که محاسبه بالا نشان می‌دهد، ساده‌ترین ویژگی از این نوع، یک دایره اولیه است که داده‌ها حول آن پراکنده شده‌اند. این را با چه چیزی می‌توان نظیر کرد؟ یک بررسی دقیق نقطه داده متناظر با دایره اولیه یک الگوی  $3 \times 3$  از قطعات را با یک ناحیه روشن و یک ناحیه تاریک که با یک انتقال خطی از هم جدا شده‌اند نشان می‌دهد. خم گرهی<sup>۱</sup> بین ناحیه تاریک و روشن، خطی است و در خانواده‌ای دایره‌ای که با زاویه بین خطوط گرهی پارامتری شده، طبق شکل ۵ ظاهر می‌گردد. همان‌طور که از کدهای میله‌ای ملاحظه می‌شود، این مولد به‌ازای آستانه و پارامترهای هم‌چگالی انتخاب شده نمایان است. بررسی کدهای میله‌ای مربوط به اولین گروه مانستگی  $H_1$  مجموعه داده‌ها، پالایش شده با پارامتر هم‌چگالی  $k = 15$  و آستانه  $T = 25$ ، اولین مانستگی ماندگار متفاوت را نمایان می‌کند. کاهش  $k$ ، به میانگین‌گیری از نقاط کمتر و حساسیت چگالی موضعی‌تر منجر می‌شود. کدهای میله‌ای شکل ۶ نشان می‌دهد که  $H_1$  مانستگی ماندگار نمونه‌های انتخاب شده از  $M[k, T]$ ، عدد بتی‌ای برابر ۵ دارد. این به معنای حضور پنج دایره مجزا در مجموعه داده‌ها نیست، بلکه با توجه به مولدها و محاسبه کدهای میله‌ای برای  $H_1$  مشاهده می‌شود [۳] که علاوه بر دایره اولیه، حاصل از محاسبه  $H_1$  برای  $k$  بزرگ، دو دایره ثانویه نیز وجود دارد که در پارامتر چگالی پایین‌تر به چشم می‌آیند.

بررسی دقیق این سه دایره نشان می‌دهد که هر یک به‌ازای  $k$  بزرگ، دایره اولیه را دوبار قطع می‌کنند، با این حال دو دایره ثانویه جدا هستند. این دو دایره ثانویه با چه ویژگی‌هایی در داده‌ها ممکن است متناظر باشند؟ همان‌طور که در [۳] خاطرنشان شده، هر دایره ثانویه تصاویر را با سه ناحیه تباین تنظیم می‌کند و بین این حالتها و دایره اولیه درونیابی می‌کند. تفاوت بین دو دایره ثانویه، به ترتیب، در گرایش آنها به لایه‌لایه شدن افقی و عمودی است. شکل ۷ تعبیری از معنای دایره‌های ثانویه را نشان می‌دهد.

#### ۴.۳. مشابه، اما متفاوت

فایده ویژگی‌های توپولوژیک موقتی که به‌صورت تابعی از پارامتر  $\epsilon$  ظاهر می‌شوند و محو می‌شوند چیست؟ آیا این به چیزی بیشتر از یک روش اکتشافی<sup>۲</sup>

#### ۱.۳. مسأله، مسأله می‌آفریند: گامی به جلو

مامفرد، لی<sup>۱</sup> و پدرسن<sup>۲</sup>، ۵۰۰۰ مربع ۳ پیکسل در ۳ پیکسل را به تصادف از هر تصویر دیجیتالی انتخاب کردند و با نگه داشتن ۲۰ درصد بالایی آنها برحسب تباین [کنتراست]شان، یک مجموعه داده‌ها ساختند [۱۸]. هریک از چنین مربع‌هایی، ماتریسی از شدتهای خاکستری مقیاس است. مجموعه کامل داده‌ها تقریباً از ۸۰۰۰۰۰۰ نقطه در  $\mathbb{R}^4$  تشکیل شده است. با بهنجارسازی نسبت به میانگین شدت و محدود کردن توجه به تصاویری که تباین زیاد دارند (آنهايي که از مبدأ دورند)، مجموعه داده‌ها روی مجموعه‌ای چون  $M$  از نقاط یک کره توپولوژیک هفت بُعدی  $S^7 \in \mathbb{R}^8$  تصویر می‌شود. این نحوه ساختن مجموعه داده‌ها نیازمند انتخاب پایه‌ای طبیعی برحسب نرم خاصی برای مقادیر تباین قطعات است. برای ملاحظه جزئیات بیشتر، خواننده علاقه‌مند را به [۱۸] ارجاع می‌دهیم.

#### ۲.۳. ساختاری هنوز مبهم

فروکاهش ناظر یک تصویر طبیعی (به مربعهای  $3 \times 3$  از شدتهای خاکستری مقیاس) باز هم به توده نقطه‌ای می‌انجامد که بعد آن بالاتر از آن است که قابل تجسم باشد. از این بدتر، ساختاری که در آنجاست مبهم و آشفته است: به نظر می‌آید نقاط ابتدا باید روی کل کره  $S^7$  توزیع شوند. به این ترتیب، بررسی چگالی در دستور قرار می‌گیرد. موضوع پالایش چگالی، حوزه بسیار شناخته شده‌ای در آمار است. برای مثال [۱۹] را ببینید. در [۳] یک تابع هم‌چگالی به‌صورت زیر مورد استفاده قرار گرفته است. یک عدد صحیح مثبت  $k$  را ثابت نگاه دارید. برای هر نقطه  $x_\alpha$  در مجموعه داده‌ها،  $\delta_k(x_\alpha)$  را به‌عنوان فاصله در  $\mathbb{R}^n$  از  $x_\alpha$  تا  $k$ مین همسایه  $x_\alpha$  از لحاظ نزدیکی تعریف کنید. برای یک مقدار ثابت  $k$ ،  $\delta_k$  توزیعی مثبت روی توده نقطه‌ست، که شعاع گویی را که برای دربرگرفتن  $k$ -همسایه مورد نیاز است اندازه می‌گیرد. (به این ترتیب) مقادیر  $\delta_k$  با چگالی توده نقطه رابطه معکوس دارند. با استفاده از مقدار بزرگ‌تر برای  $k$ ، میانگین‌گیری از نقاط بیشتری در میان همسایه‌ها صورت می‌گیرد که تغییرات ظریف‌تر را نامشخص می‌کند. هم‌چگالی به‌صورت زیر برای پالودن داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. زیرمجموعه  $M$  در  $T$  درصد بالایی چگالی، آن‌طور که با  $\delta_k$  اندازه‌گیری شده، را با  $M[k, T]$  نمایش می‌دهیم. این یک زیرمجموعه دو پارامتری از توده نقطه است که برای مقادیر قابل قبول  $k$  و  $T$ ، هسته مناسبی را نمایش می‌دهد.

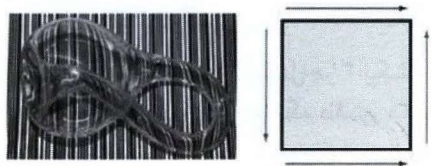
#### ۳.۳. بازگشت به آغاز: وضوح بیشتر

محاسبه اولین مانستگی ماندگار جالب روی این مجموعه داده‌ها در سطح  $H_1$  روی می‌دهد. تا چه میزان «طوقه» در مجموعه داده‌ها وجود دارد که در امتداد آنها توده داده متمرکز شده است؟

با در نظر گرفتن آستانه چگالی  $T = 25$  به‌ازای پارامتر همسایگی  $k = 300$ ، با ۵۰۰۰ نقطه که به‌تصادف از  $M[k, T]$  نمونه‌گیری شده‌اند، محاسبه کدهای میله‌ای برای اولین مانستگی  $H_1$  یک مولد ماندگار یکتا را آشکار می‌کند [۳]. شکل ۵ را ببینید. این دلالت بر آن دارد که مجموعه داده‌ها حول دایره اولیه‌ای در کره ۷ بُعدی پراکنده شده‌اند. ساختار کدهای میله‌ای نسبت به نمونه‌گیری تصادفی نقاط در  $M[k, T]$  استوار<sup>۳</sup> است.

1. nodal curve 2. heuristic

1. Lee 2. Pederson 3. robust



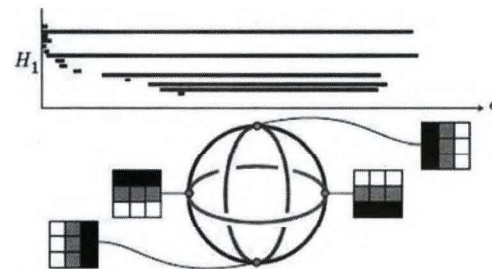
شکل ۸ [چپ] یک بطری کلاین (تصویر شده در برابر کد میله‌ای‌اش). [راست] رویه جهت‌ناپذیری که از یکی گرفتن ضلعهای مقابل یک مربع طبق شکل به‌دست می‌آید.

از اینجاست که بصیرتی عمیق‌تر در مورد مجموعه داده‌ها پیدا می‌کنیم. با الهام گرفتن از معنای کدهای میله‌ای  $H_1$  متعلق  $M$  و بررسی بیشتر، گرایش ذاتی به سمت راست‌های افقی و عمودی در داده‌های تصویری طبیعی، در مقابل زاویه قراردادی قائمه که دورین در آن وضعیت نگاه داشته می‌شود، آشکار می‌گردد: مرجع [۳] گزارش می‌دهد که با تکرار آزمایش عکس‌برداری با دوربینی که در زاویه  $\pi/4$  قرار داده شده است، مجموعه‌ای از داده‌ها به‌دست می‌آید که مولدهای ماندگار آن گرایشی به سمت راستی افقی واقعی و عمودی واقعی را نشان می‌دهد: محور پیکسل‌بندی، کمتر از محور گرانی در داده‌های تصویری طبیعی مطرح است.

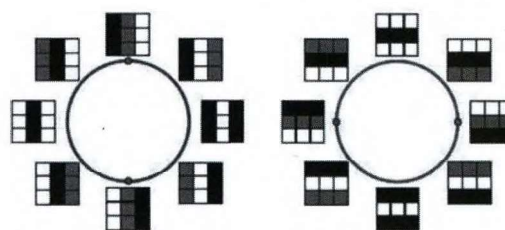
آیا قدرتی پیشگویانه در کدهای میله‌ای مجموعه داده‌ها نهفته است؟ پیشرفت اخیر [۳] چشم‌اندازی از این‌گونه قابلیت رویکرد توپولوژی ماندگار را نشان می‌دهد. کدهای میله‌ای برای دومین مانستگی ماندگار  $H_2$ ، برحسب تغییرات چگالی و آستانه بی‌ثبات‌ترند. جای تعجب نیست: جملات از کمترین مرتبه در هر بسط به سری، همیشه به آسانی درک می‌شوند. اما نشانی از یک مولد ماندگار  $H_2$  (با ضرایب متعلق به  $\mathbb{Z}_2$ ) در وضعیتهای معینی از  $k$  و  $T$  وجود دارد که همراه با مولدهای پایه  $H_1$ ، بصیرتی در پیش‌بینی ساختار فضای قطعات با تباین زیاد به‌دست می‌دهد. در آستانه‌های چگالی معین، کد میله‌ای  $H_2$  که به‌طور مناسب با تیغ اکام<sup>۱</sup> بریده شده باشد، کامل شده دو بعدی پایه مانستگی ماندگار  $H_1$  به‌ازای  $k$  کوچک را به‌صورت **بطری کلاین** (شکل ۸) القاء می‌کند. به‌یاد آورید که این رویه جهت‌ناپذیر می‌تواند به عنوان فضای یکی‌سازی<sup>۲</sup> یک مربع، به‌صورتی که در شکل نشان داده شده، محقق شود. شکل ۹ نمایشی از نشان دادن این رویه در فضای تصاویر پیکسل‌بندی شده را نشان می‌دهد. باید توجه کرد که این کامل‌سازی طبیعی چگالی پایین تعبیر مانستگی ماندگار  $H_1$  است: دایره‌های اولیه و ثانویه با خواص تقاطعی مناسب ظاهر می‌شوند. خوشبختانه محاسبات یک زوج مانستگی با ضرایب متعلق  $\mathbb{Z}_2$  — طبیعی‌ترین میدان متناهی موجود برای آزمایشهای رایانه‌ای — در بررسی اینکه رویه ماندگار پیدا شده یک بطری کلاین است، سودمند می‌باشد.

تاکید می‌کنیم که مجموعه داده‌های توده‌نقطه‌ای  $M$ ، گسترده و از بُعد بالاست و به هیچ‌وجه به‌طور واضح ویژگیهای متمایز را مشخص نمی‌کند. یک نگاه گذرا به داده‌ها، چنین می‌نمایاند که کره<sup>۷</sup> بعدی به‌طور چگال با نقاط داده‌ای پر می‌شود و ظاهراً در آن هیچ ساختار روشنی نمی‌توان پیدا کرد. از طریق عدسی مانستگی ماندگار — که به‌طور مناسب تنظیم و هدف‌گذاری شده

۱. Occam's razor، اصلی منسوب به ویلیام اکام، فیلسوف و منطق‌دان انگلیسی قرن ۱۴ حاکی از آنکه از میان دو نظریه که توان توصیف و پیش‌بینی یکسان دارند، ساده‌ترین را باید برگزید — م.



شکل ۶ کد میله‌ای  $H_1$  برای  $M[15, 25]$  پنج مولد ماندگار را آشکار می‌کند که از اینجا وجود دو دایره ثانویه معلوم می‌شود که هریک دایره سوم را قطع می‌کند. به‌ازای  $k$  بزرگ، دایره اولیه دوبار قطع می‌شود.



شکل ۷ مولدهای ثانویه  $H_1$  برای  $M[15, 25]$  به‌عنوان تنظیم‌کننده تغییرات از قطعه دوگان به قطعه سه‌گانه نواحی با تباین بالا، به ترتیب با گرایشهای افقی و عمودی تعبیر می‌شوند.

برای مجموعه‌های داده‌های از بعد بالا که تجسم آنها دشوار است، می‌انجامد؟ هرچند تحقیقات کارلسن و همکارانش خیلی جدید است، رویکرد توپولوژیک به تحلیل داده‌ها کاربردهای متعددی دارد که مؤید این گزاره‌اند که ساختارهای مانستگی در مجموعه‌های داده‌های از بعد بالا اهمیت علمی دارند. علاوه بر مجموعه داده‌های مامفرد که در اینجا بررسی شد، محاسبات مانستگی ماندگار در چندین زمینه متفاوت به‌کار می‌روند، از جمله، ویژگیهای هندسی خمها (برای مثال، تشخیص اپتیکی نویسه‌ها) [۵] و دنباله داده‌های حاصل از آرایه‌های الکترونی کاشته شده در قشر بینایی نخستین مغز میمونهای ماکاک<sup>۱</sup> [۴]. یکی از اهداف طرح تحقیقاتی اخیر، پی بردن به این نکته بود که چگونه توپولوژی یک فضای پارامتری شده تصاویر در داده‌های عصبی ظاهر می‌شود. درست همان‌گونه که عدسی چشم تصاویر را کنترل می‌کند و روی شبکه می‌اندازد. فضای پارامتری تصویر تبدیل می‌شود و در قشر بینایی انعکاس می‌یابد.

در مورد داده‌های تصویری طبیعی، آموزنده خواهد بود که مانستگی ماندگار  $M$  را چیزی شبیه بسط سری فضای واقعی بینگاریم. فروکاهش مجموعه کامل داده‌ها به یک  $S^7$  از طریق تصویر کردن، در واقع یک نوع بهنجارسازی برای حذف جملات از مرتبه صفر (یا «تک‌قطعه») در یک مجموعه داده‌هاست. به پیروی از این تشبیه، مولد اولیه  $H_1$ ، نقش جمله بعدی را در بسط نوع هوموتوبی مجموعه داده‌ها ایفا می‌کند، خم گرهی دو قطعه متباین را از هم متمایز می‌کند. دایره‌های ثانویه با درون‌یابی بین خمهای گرهی منفرد و دوگان آنها، به عنوان جملات از مرتبه بالاتر بسط عمل می‌کنند که در آنها انحرافهای عمودی و افقی پیش می‌آید.

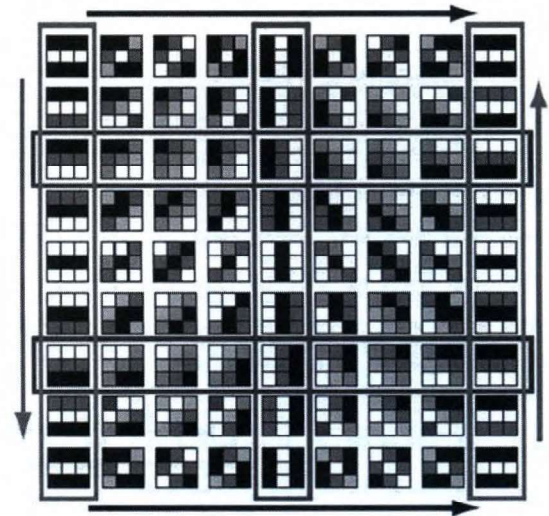
8. V. de Silva, "A weak definition of Delaunay triangulation", preprint (2003).
9. V. de Silva and G. Carlsson, "Topological estimation using witness complexes", in *SPBG04 Symposium on Point-Based Graphics* (2004), 157-166.
10. V. de Silva and R. Ghrist, "Coverage in sensor networks via persistent homology", *Alg. & Geom. Topology*, 7 (2007), 339-358.
11. V. de Silva and P. Perry, PLEX home page, <http://math.stanford.edu/comptop/programs/plex/>.
12. H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian, "Topological persistence and simplification", *Discrete Comput. Geom.*, 28:4 (2002), 511-533. MR1949898 (2003m: 52019).
13. H. Edelsbrunner and E. P. Mücke, "Three-dimensional alpha shapes", *ACM Transactions on Graphics*, 13:1 (1994), 43-72.
14. L. Guibas and S. Oudot, "Reconstruction using witness complexes", in *Proc 18th ACM SIAM Sympos. on Discrete Algorithms* (2007).
15. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). MR1867354 (2002 k:55001)
16. T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, 157, Springer-Verlag (2004). MR2028588 (2005g:55001)
17. D. Mumford, "Pattern Theory: The Mathematics of Perception", *Proc. Intl. Congress of Mathematicians*, Vol. I (2002), 401-422. MR1989195 (2004k:91168)
18. D. Mumford, A. Lee, and K. Pedersen, "The nonlinear statistics of high-contrast patches in natural images", *Intl. J. Computer Vision*, 54 (2003), 83-103.
19. B. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC (1986). MR848134 (87k:62074)
20. J. van Hateren and A. van der Schaff, "Independent Component Filters of Natural Images Compared with Simple Cells in Primary Visual Cortex", *Proc. R. Soc. London*, B 265 (1998), 359-366.
21. L. Vietoris, "Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen", *Math. Ann.*, 97 (1927), 454-472. MR1512371.
22. A. Zomorodian and G. Carlsson, "Computing persistent homology", *Discrete Comput. Geom.*, 33 (2005), 249-274. MR2121296 (2005j:55004).
23. A. Zomorodian and G. Carlsson, "Localized homology", *Proc. Shape Modeling International* (2007), 189-198.
24. A. Zomorodian and G. Carlsson, "The theory of multidimensional persistence", *Proc Symposium on Computational Geometry* (2007), 184-193.

\*\*\*\*\*

- Robert Ghrist, "Barcodes: the persistent topology of data", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, (1) 45 (2008) 61-75.

\* رابرت گریست، دانشگاه ایلینوی، آربانا، آمریکا

ghrist@math.uiuc.edu



شکل ۹ یک بطری کلاین به طور طبیعی در فضای پارامتر، به عنوان کامل شده مدل ۳-دایره، نشانده می‌شود. در فضای یکی‌سازی نتابیده نشان داده شده، دایره اولیه دور محور افقی دوبار می‌پیچد. دو دایره ثانویه هریک حول محور عمودی یک بار می‌پیچند (توجه: دایره‌های واقع در منتهی‌الیه چپ و راست با جهت‌های مخالف به یکدیگر چسبانده شده‌اند). هر دایره ثانویه، دایره اولیه را دوبار قطع می‌کند.

باشد—ویژگی‌های بارزی ظاهر و محو می‌شوند. به محض بررسی دقیق، معلوم می‌شود که این مولدهای ماندگار با ساختارهای معنی‌داری در داده‌ها متناظر می‌شوند و الهامبخش پارامتری‌سازی قابل درکی از ساختار کلی مجموعه داده‌ها هستند. این است آن نوع قدرت توصیفی که هر مثال خوب ریاضیات کاربردی به چالش علمی عرضه می‌کند.

#### مراجع

1. P. Bubenik and P. Kim, "A statistical approach to persistent homology", preprint (2006), [math.AT/0607634](http://math.AT/0607634).
2. E. Carlsson, G. Carlsson, and V. de Silva, "An algebraic topological method for feature identification", *Intl. J. Computational Geometry and Applications* 16:4 (2006), 291-314. MR2250511 (2007c: 52015)
3. G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. de Silva, and A. Zomorodian, "On the local behavior of spaces of natural images", *Intl. J. Computer Vision*, in press.
4. G. Carlsson, T. Ishkhanov, F. Mémoli, D. Ringach, and G. Sapiro, "Topological analysis of the responses of neurons in V1", in preparation (2007).
5. G. Carlsson, A. Zomorodian, A. Collins, and L. Guibas, "Persistence barcodes for shapes", *Intl. J. Shape Modeling*, 11(2005), 149-187.
6. F. Chazal and A. Lieutier, "Weak feature size and persistent homology: computing homology of solids in  $\mathbb{R}^n$  from noisy data samples", in *Proc. 21st Sympos. Comput. Geom.* (2005).
7. D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer, "Stability of persistence diagrams", in *Proc. 21st Sympos. Comput. Geom.* (2005), 263-271.