ریاضیات تجربی:

تحولات اخیر و چشم‌انداز آینده•

دیوید بیلی*، جاناتان بوروایِن**
ترجمهٔ سیدعباس موسوی

۱. مقدمه

در حالی‌که استفادهٔ گسترده از محاسبات سریع رایانه‌ای مدتهاست به موضوعی اساسی در اغلب شاخه‌های علوم و مهندسی تبدیل شده است، ریاضیاتِ تحقیقاتی جزو رشته‌هایی است که هنوز بهرهٔ لازم را از این امکان جدید نگرفته است. با این حال، با دسترسی به ابزارها و محیطهای محاسباتی پیچیده از طریق رایانه‌های رومیزی، این روزها شاهد به‌دست آمدن تعداد روزافزونی نتیجهٔ ریاضی جدید و قابل توجه هستیم که تماماً یا جزئاً به کمک این ابزارها کشف شده‌اند. با توجه به طرحهایی که برای بهسازی این ابزارها وجود دارد و همچنین رشد مورد انتظار قدرت محاسباتی رایانه بر طبق قانون مور و امکان پیاده‌سازی این محیطها روی ابررایانه‌های موازی، می‌توانیم انتظار پیشرفتهای چشمگیرتری را در سالهای آینده داشته باشیم.

در این مقاله ابتدا به‌طور خلاصه دربارهٔ ماهیت تجربهٔ ریاضی بحث می‌کنیم و سپس چند مثال از کشفیات اخیر به کمک رایانه که عمدتاً به تحقیقات خود ما مربوط است می‌آوریم و آنگاه چشم‌اندازی از آینده ترسیم می‌کنیم. مثالهای بیشتری از این موضوع در شاخه‌های مختلف و فهرستی وسیع‌تر از مراجع مربوط را می‌توانید در [۱۶] بیابید.

۲. تجربهٔ ریاضی

امروز نقش اساسی محاسبات سریع رایانه‌ای در تمام علوم فیزیکی، زیستی، و مهندسی قبول عام یافته است. در زمینه‌هایی مثل مهندسی برق و هوانوردی، آزمایشهای عددی با استفاده از برنامه‌های شبیه‌سازی سه‌بعدی، که روز به‌روز دامنهٔ وسیع‌تری پیدا می‌کنند، جزء اصلی کارند و محققان برای جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها و بررسی پیامدهای نظریه‌های مختلف فیزیکی استفادهٔ گسترده‌ای از فناوری محاسباتی می‌کنند.

ولی ریاضیات «محض» (و زمینه‌های نزدیک به آن مانند فیزیک نظری) سرمایه‌گذاری روی این فناوری نوین را تنها در همین اواخر آغاز کرده‌اند. این امر قدری عجیب به نظر می‌رسد زیرا بنیانهای نظری فناوری رایانه‌ای جدید چند دههٔ پیش به‌وسیلهٔ ریاضیدانانی چون تورینگ و فون نویمان بنا نهاده شده است. اما این فناوری تنها در دههٔ اخیر، با پیدایش ابزارها و محیطهای محاسباتی کارامد و دسترسی فزاینده به رایانه‌های رومیزیِ بسیار سریع و ابررایانه‌های موازی و همچنین حضور فراگیر اینترنت به سطحی رسیده است که به ریاضیدانان پژوهشگر امکان می‌دهد به اندازهٔ همکارانشان در سایر رشته‌ها از این کمک‌کار هوشمند استفاده کنند.

این رویکرد نو، یعنی به‌کارگیری فناوری پیشرفتهٔ محاسبه برای بررسی ساختارهای ریاضی، آزمودن درستی حدسها و در پیش نهادن تعمیمها معمولاً ریاضیات تجربی نامیده می‌شود و اکنون یک مجلهٔ فعال و موفق با عنوان ریاضیات تجربی [*Experimental Mathematics*] وجود دارد. از یک لحاظ، چیز جدیدی در این رویکرد نیست. این همان کاری است که ریاضیدانان قرنهاست انجام می‌دهند. گاوس یک بار اعتراف کرد که: «نتیجه را می‌دانم اما نمی‌دانم چطور آن را به‌دست آورم.» [۲]. و از آدامار

هم نقل شده است که «هدف دقت ریاضی تصویب دستاوردهای شهود و مشروعیت بخشیدن به آنهاست و هرگز هدف دیگری برای آن متصور نبوده است.» [۳۴]. در دورهٔ اخیر، میلنر این فلسفه را به روشنی بیان کرده است:

> اگر بتوانم اثباتی مجرد برای چیزی ارائه کنم، البته خوشحال می‌شوم. اما خیلی خوشحال‌تر خواهم شد اگر بتوانم اثباتی محاسباتی و ملموس که واقعاً اعدادی تولید کند ارائه دهم. من به انجام دادن کارها با رایانه عادت کرده‌ام زیرا محک صریحی برای بررسی آنچه اتفاق می‌افتد به‌دست می‌دهد. من روشی بصری برای تفکر دارم. بنابراین خوشحال می‌شوم اگر بتوانم تصویری از چیزی که روی آن کار می‌کنم ببینم.

واقعاً منظور از تجربه [آزمایش] در ریاضیات چیست؟ پیتر مدوار در نصایحی به دانشمند جوان [۳۱] چهار نوع تجربه را مشخص می‌کند:

۱. تجربهٔ کانتی چیزی از نوع تولید «هندسه‌های نااقلیدسی کلاسیک (هندسه‌های هذلولوی و کروی) با کنارگذاشتن اصل توازی اقلیدس (یا چیزی معادل آن) و جانشین کردن اصلی دیگر» است.

۲. تجربهٔ بیکنی چیزی در مقابل یک رویداد طبیعی است، «نتیجهٔ 'آزمایش کردن چیزها از سرکنجکاوی' یا حتی پرسه‌زدن در اطراف آنها»ست.

۳. تجربهٔ ارسطویی یک نوع اثبات از طریق نمایش است «الکترودی را به عصب سیاتیک یک قورباغه نزدیک کنید و ببینید که پای قورباغه تکان می‌خورد. همیشه قبل از غذا دادن به سگ، زنگی را به صدا در آورید و خواهید دید که تنها صدای زنگ آب دهان سگ را جاری می‌کند».

۴. تجربهٔ گالیله‌ای «یک تجربهٔ انتقادی است، تجربه‌ای که امکانات و احتمالات مختلف را از هم متمایز می‌کند و از این طریق یا به ما اطمینان می‌دهد که دیدگاه درستی اتخاذ کرده‌ایم و یا وادارمان می‌کند آن را تصحیح کنیم.»

البته سه نوع اول تجربه در ریاضیات معمول هستند اما همان‌طور که به تفصیل در [۱۵] بحث شده است تجربهٔ گالیله‌ای تنها نوع از این چهار نوع است که تجربهٔ ریاضی می‌تواند با الگو گرفتن از آن به یک امر واقعاً جدی تبدیل شود.

۳. ابزارهای کار

بارزترین پیشرفت در فناوری محاسبهٔ رایانه‌ای، دسترس‌پذیری فزایندهٔ ابزارهای نیرومند برای محاسبات نمادین بوده است. وقتی اولین ابزارهای محاسبات نمادین در دههٔ هفتاد پدید آمدند، محدودیتهای کاملاً آشکاری داشتند ــ در بیشتر موارد از انجام دادن عملیاتی که اجرای آنها با دست ممکن بود عاجز بودند. در سالهای بعد این برنامه‌ها، به‌خصوص انواع تجاری آنها مثل Maple و Mathematica تکامل چشمگیری یافته‌اند و با وجود نقایص متعددی که هنوز دارند، به‌طور معمول عملیات زیادی را به‌درستی و با سرعت انجام می‌دهند که انسان با تلاشی در حد معقول نمی‌تواند انجام دهد.

پیشرفت دیگری که رهگشایِ تعدادی از کشفیات جدید بوده است ظهور الگوریتمهای کارامد تشخیص رابطهٔ صحیح[1] است. فرض کنید $x=(x_{۱},x_{۲},\ldots,x_n)$ برداری از اعداد حقیقی یا مختلط باشد. می‌گوییم x دارای یک رابطهٔ صحیح است اگر اعداد صحیح a_i، که همگی صفر نباشند، وجود داشته باشند به‌طوری که $a_{۱}x_{۱}+a_{۲}x_{۲}+\cdots+a_nx_n=۰$. منظور از الگوریتم تشخیص رابطهٔ صحیح یک روش محاسباتی کارامد است که بتواند بردار اعداد صحیح a_i را در صورت وجود بیابد و یا کرانهایی بیابد که بین آنها هیچ رابطهٔ صحیحی وجود ندارد. مسألهٔ یافتن رابطهٔ صحیح، مورد مطالعهٔ ریاضیدانان بسیار از جمله اقلیدس و اویلر قرار گرفته است. اولین الگوریتم کلی تشخیص رابطهٔ صحیح در سال ۱۹۷۷ به‌وسیلهٔ فرگوسن و فورکاده [۲۴] کشف شد. رابطهٔ نزدیکی میان تشخیص رابطهٔ صحیح و یافتن بردارهای کوچکی در یک مشبکهٔ صحیح[1] وجود دارد. بنابراین یک راه‌حل معمول برای مسألهٔ رابطهٔ صحیح به‌کار گرفتن الگوریتم فروکاهش مشبکهٔ[2] لنسترا-لنسترا-لواش (LLL) است [۳۰]. در حال حاضر کاراترین روش برای تشخیص رابطهٔ صحیح، الگوریتم PSLQی فرگوسن است [۲۳، ۶].

تشخیص رابطهٔ صحیح، مثل تعدادی دیگر از تکنیکهای مورد استفاده در ریاضیات تجربی جدید، اتکای زیادی به حساب بسیار دقیق[3] دارد. در پیشرفته‌ترین ابزارهای حساب بسیار دقیق برای عمل ضرب از تبدیل فوریهٔ سریع (FFT) استفاده می‌شود. محقق در بسیاری موارد می‌تواند با استفاده از یکی از این برنامه‌ها، توابع و ثابتهای ریاضی را به‌راحتی با دقت چند هزار رقم اعشار محاسبه کند. محصولات نرم‌افزاریِ Maple و Mathematica شامل امکانات نسبتاً کامل و یکپارچهٔ حسابِ با دقت دلخواه[4] هستند. البته در آنها تا همین اواخر از FFT یا دیگر روشهای سریع ضرب استفاده نمی‌شد. همچنین می‌توان از هر کدام از بسته‌های نرم‌افزاری رایگان [۳، ۲۲] حساب با دقت دلخواه استفاده کرد و نیز برای بسیاری از مقاصد از ابزارهایی مثل Matlab یا MuPAD یا بسته‌های تخصصی‌تر مثل Pari-GP بهره گرفت.

حساب بسیار دقیق وقتی به‌طور هوشمندانه همراه با برنامه‌های تشخیص رابطهٔ صحیح به‌کار گرفته شود، به محققان امکان می‌دهد اتحادهای ریاضی ناشناخته‌ای را کشف کنند. باید بر این نکته تأکید کرد که «اتحادها»یی که به‌صورت عددی کشف شده‌اند، فقط به‌طور تقریبی برقرارند. با این حال در مواردی که ما اطلاع داریم نتایج به‌صورت عددی تا صدها و در بعضی موارد هزاران رقم اعشار فراتر از حدی که بتوان منطقاً آنها را به‌عنوان پدیده‌های کاذب عددی[5] کنار گذاشت تأیید شده‌اند. بنابراین با وجود اینکه این «اتحادها» به‌صورت رسمی و قطعی ثابت نشده‌اند، شواهد عددی قانع‌کننده‌ای در تأیید آنها وجود دارد. از اینها گذشته، کدام‌یک از این دو قانع‌کننده‌تر است: یک اثبات رسمی که شرح کامل آن نیازمندِ صدها صفحه استدلال مشکل است که تنها دو سه همکار آن را کاملاً درک می‌کنند یا تأیید عددی یک حدس تا ۱۰۰۰۰۰ رقم اعشار که اعتبار آن به‌وسیلهٔ محاسبات تکمیلی دیگر هم تأیید شود؟ فایدهٔ مهمتر این ابزارها آن است که در بسیاری موارد برای نفی امکان برقراری رابطه‌ای مورد انتظار به‌کار می‌روند.

موضوعی که در ذکر آن نباید کوتاهی کرد قدرت روزافزون مجسم‌سازی[6] است، به‌خصوص وقتی در کنار محاسبات سریع قرار می‌گیرد. مثلاً ترسیم نمودار همهٔ چندجمله‌ای‌هایِ با ضرایب ۱± از درجهٔ حداکثر ۱۸، علاوه

---

[1] integer relation detection

[1] integer lattice

[2] lattice reduction

[3] high precision arithmetic

[4] multiple precision arithmetic

[5] numerical artifacts

[6] visualization

بر نمایش جنبهٔ برخالی شکل حاصل که قابل انتظار بود، وجود حفره‌هایی با اندازه‌های مختلف را در جاهایی که معلوم شده ریشه‌های واحد هستند آشکار کرد [شکل روی جلد؛ برای توضیح شکل به انتهای مقاله مراجعه کنید]. این مشاهده که دستیابی به آن بدون اتکا به تصویر خیلی مشکل می‌بود از طریق نرم‌افزاری که برای مقالهٔ اینترنتی تأثیرگذار اندرو اُدلیزکو ساخته شده بود صورت گرفت [۳۲] و منجر به بررسی دقیق و مفصل این پدیده و موضوعاتی فراتر از آن شد [۱۷، ۲۷].

ابزار دیگری که در تعداد رو به افزایشی از بررسیها به‌کار گرفته شده است «دایرةالمعارف دنباله‌های صحیح»[1] استون و پلوفی است [۳۶]. این دایرةالمعارف، همان‌طور که از عنوان آن پیداست تعداد زیادی از دنباله‌های صحیح را براساس چند جملهٔ اول دسته‌بندی می‌کند. یک نسخهٔ اینترنتی کارامد هم از این دایرةالمعارف در دسترس است که نمونهٔ خوبی از پارادیمِ در حال تغییر تحقیق است. منبع عالی دیگر، «ثابتهای مطلوب ریاضی»[2] اثر استیون فینچ است که شامل انبوهی از اطلاعات، پیوندها [لینک‌ها] و ارجاعات دربارهٔ ۱۲۵ ثابت ریاضی است، از قبیل «ثابت شش‌ضلعی سخت»[3] $\kappa \approx$ ۱٫۳۹۵۴۸۵۹۷۲ که زیمرمن در سال ۱۹۹۶ یک چندجمله‌ای مینیمال از درجهٔ ۲۴ برای آن پیدا کرد.[4] این اطلاعات مرتباً روزآمد می‌شوند [۲۵].

در ادامه، به کمک تعدادی مثال که شخصاً با آنها آشناتریم، این رویکرد را ــ که هم جدید و هم قدیمی است ــ توضیح می‌دهیم. بعد از آن طرحی از راههای پیش‌رو در این رویکرد نوظهور ترسیم می‌کنیم. توجه ما معطوف به تحقیقاتی خواهد بود که در حلقهٔ همکاران مستقیم خودمان صورت گرفته و این به دلیل آشنایی ما با این تحقیقات و نیز از آن جهت است که معتقدیم این کارها معرف خوبی برای تغییر عمده در روش پرداختن به ریاضیات است، نه اینکه تقدمی برای مهارتها و تخصصهای خود قائل باشیم.

۴. فرمول جدیدی برای عدد پی

در طول قرنها ریاضیدانان می‌پنداشته‌اند که هیچ راه میانبری برای محاسبهٔ nامین رقم π وجود ندارد. بنابراین، کشف چنین روشی در همین اواخر بسیار غیرمنتظره بود [۵]، به‌خصوص که با این الگوریتم ساده می‌توان nامین رقم π را در پایهٔ ۲ یا ۱۶ بدون محاسبهٔ هیچ‌کدام از $n - ۱$ رقم قبل و بدون نیاز به نرم‌افزارهای حساب بسیار دقیق و با استفاده از مقدار کمی حافظه محاسبه کرد. با این روش می‌توان رقم $۱۰^۶$ام π در پایهٔ ۱۶ را به‌وسیلهٔ یک رایانهٔ شخصی معمولی در ۳۰ ثانیه حساب کرد.

این روش بر فرمول جالب توجه زیر استوار است که اثبات رسمی آن به چیزی پیچیده‌تر از حسابان سال اول نیاز ندارد:

$$\pi = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{۱۶^k} \left[\frac{۴}{۸k+۱} - \frac{۲}{۸k+۴} - \frac{۱}{۸k+۵} - \frac{۱}{۸k+۶}\right]$$

این فرمول نتیجهٔ ماهها محاسبه به کمک الگوریتم PSLQ است و پس از آن به‌دست آمد که فرمولهای مشابه ولی ساده‌تری برای رقم nام ثابتهای دیگری از جمله $\log(۲)$ شناسایی شدند. این احتمالاً اولین بار در تاریخ است که یک فرمول مهم جدید برای π به‌وسیلهٔ رایانه به‌دست می‌آید.

در [۵، ۲۱] فرمولهای دودویی مشابهی برای تعدادی از ثابتهای ریاضی دیگر آمده است. در [۲۰] هم چند فرمول در پایهٔ سه به‌دست آمده است، از جمله

$$\begin{aligned}\pi^۲ = \frac{۲}{۲۷} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{۷۲۹^k} \Bigg[& \frac{۲۴۳}{(۱۲k+۱)^۲} - \frac{۴۰۵}{(۱۲k+۲)^۲} - \frac{۸۱}{(۱۲k+۴)^۲} \\ & - \frac{۲۷}{(۱۲k+۵)^۲} - \frac{۷۲}{(۱۲k+۶)^۲} - \frac{۹}{(۱۲k+۷)^۲} \\ & - \frac{۹}{(۱۲k+۸)^۲} - \frac{۵}{(۱۲k+۱۰)^۲} + \frac{۱}{(۱۲k+۱۱)^۲} \Bigg].\end{aligned}$$

در [۸] نشان داده شده است که مسألهٔ نرمال بودن π، $\log ۲$ و بعضی از ثابتهای خاص دیگر را می‌توان به حدسی موجه در مورد سیستم دینامیکیِ تکّریِ

$$\begin{aligned}x_۰ &= ۰ \\ x_n &= ۳D(bx_{n-۱} + r_n) \bmod ۱\end{aligned}$$

تحویل کرد که در آن b عددی صحیح و $r_n = ۳Dp(n)/q(n)$ نسبت دو چندجمله‌ای ناصفر است که $\deg(p) < \deg(q)$. حدس این است که این سیستم یا مجموعه‌ای متناهی از رباینده‌ها دارد و یا به‌صورت یکنواخت در بازهٔ واحد پخش می‌شود. به‌خصوص نشان داده شده است که نرمال بودن π در پایهٔ ۱۶ (و در نتیجه در پایهٔ ۲) می‌تواند به این گزاره تحویل شود که سیستم دینامیکی تکرری

$$x_n = ۳D\left(۱۶x_{n-۱} + \frac{۱۲۰n^۲ - ۸۹n + ۱۶}{۵۱۲n^۴ - ۱۰۲۴n^۳ + ۷۱۲n^۲ - ۲۰۶n + ۲۱}\right) \bmod ۱$$

به‌صورت یکنواختی در $[۰, ۱)$ پخش می‌شود. همچنین ارتباطاتی میان مسألهٔ نرمال بودن بعضی ثابتها و نظریهٔ «مولدهای همنهشت خطی اعداد شبه تصادفی»[1] وجود دارد. همهٔ این نتایج از کشف فرمولهای محاسبهٔ تک‌رقم که در بالا به آن اشاره شد به‌دست آمده‌اند.

۵. اتحادهایی برای تابع زتای ریمان

کاربرد دیگری از فناوری رایانه‌ای در ریاضیات، حل این مسأله است که ثابت داده‌شده‌ای مانند α، که مقدار آن را می‌توان با دقت زیاد حساب کرد، جبری و از درجهٔ n یا کمتر از n هست یا نه. این مسأله را می‌توان با محاسبهٔ بردار $x = (۱, \alpha, \alpha^۲, \ldots, \alpha^n)$ با دقت زیاد و سپس اِعمال یک الگوریتم تشخیص رابطهٔ صحیح حل کرد. اگر رابطه‌ای برای x پیدا شود آنگاه این بردار رابطه دقیقاً مجموعهٔ ضرایب صحیح یک چندجمله‌ای است که α در

---

[1] Encyclopedia of Integer Sequences

[2] Favorite Mathematical Constants

[3] hard hexagon constant

[4] نگاه کنید به

http://www.mathsoft.com/asolve/constant/square/square.html.

[1] linear congruential pseudorandom number generators

آن صدق می‌کند. حتی اگر هیچ رابطه‌ای پیدا نشود، الگوریتمهای تشخیص رابطهٔ صحیح می‌توانند کرانهایی پیدا کنند که در محدودهٔ بین آنها هیچ رابطهٔ صحیحی وجود ندارد. در واقع همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این‌گونه نفی وجود رابطه به‌وسیلهٔ محاسبات رابطهٔ صحیح به دقت ثابت می‌شود در حالی‌که اتحادهایی که با این روش کشف می‌شوند تقریبی هستند.

برای مثال، اتحادهای زیر را در نظر بگیرید. اتحاد میانی متعلق به اپری[1] [۱۰، ۱۴] است:

$$\zeta(۲) = ۳\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲\binom{۲k}{k}}$$

$$\zeta(۳) = \frac{۵}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k^۳\binom{۲k}{k}}$$

$$\zeta(۴) = \frac{۳۶}{۱۷}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۴\binom{۲k}{k}}$$

که در آن $\zeta(n) = \sum_k k^{-n}$ تابع زتای ریمان در n است. این نتایج باعث امیدواری زیادی شد که عدد

$$Z_۵ = \zeta(۵)/\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k^۵\binom{۲k}{k}} \qquad (۱)$$

هم یک عدد سادهٔ گویا یا جبری باشد. ولی محاسبه با الگوریتم PSLQ نشان داد که مثلاً اگر $Z_۵$ در یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲۵ یا کمتر صدق کند نرم اقلیدسی ضرایب چندجمله‌ای از ۲×۱۰^{۳۷} بیشتر خواهد بود. با توجه به این نتایج، هیچ اتحاد «ساده»ای وجود ندارد و محققان مجازند امکان وجود روابط چندقسمتی[2] برای $\zeta(۵)$ را بررسی کنند. یکی از همین روابط که به‌تازگی به‌وسیلهٔ یک محاسبهٔ PSLQ کشف شده است [۱۴] تساوی بس‌لگاریتمی[3] زیر است

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k+۱}}{k^۵\binom{۲k}{k}} = ۲\zeta(۵) + ۸۰\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{(۲k)^۵} - \frac{L}{(۲k)^۴}\right]\rho^{۲k}$$
$$- \frac{۴}{۳}L^۵ + \frac{۸}{۳}L^۳\zeta(۲) + ۴L^۲\zeta(۳)$$

که در آن $\rho = (\sqrt{۵} - ۱)/۲$ و $L = \log(\rho)$. این ماجرا به روشنی نشان می‌دهد که تنها وقتی می‌توان یک فرم بسته پیدا کرد که بدانیم آن را در کجا باید جستجو کرد.

بر اساس محاسبات اولیهٔ دیگر در مورد ضریب مرکزی دوجمله‌ای[4] فرمولهایی عمومی مطرح شد که بررسی آنها به‌وسیلهٔ ترکیبی از محاسبات PSLQ و محاسبات نمادینِ سنگین پیگیری شد و به‌طور غیرمنتظره‌ای به اتحاد زیر انجامید

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\zeta(۴k+۳)z^{۴k} = \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۳(۱ - z^۴/k^۴)}$$
$$= \frac{۵}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}}{k^۳\binom{۲k}{k}(۱ - z^۴/k^۴)}\prod_{m=۱}^{k-۱}\frac{۱ + ۴z^۴/m^۴}{۱ - z^۴/m^۴}$$

تحلیل تجربی ۱۰ جملهٔ اول نشان داد که سری سمت راست لزوماً شکل زیر را دارد

$$\frac{۵}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k-۱}P_k(z)}{k^۳\binom{۲k}{k}(۱ - z^۴/k^۴)}$$

که در آن

$$P_k(z) = \prod_{j=۱}^{k-۱}\frac{۱ + ۴z^۴/j^۴}{۱ - z^۴/j^۴}$$

همچنین طی این فرایند، اتحاد ترکیبیاتی جالب زیر که معادل آن است کشف شد

$$\binom{۲n}{n} = \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲n^۲\prod_{i=۱}^{n-۱}(۴k^۴ + i^۴)}{k^۲\prod_{i=۱, i\neq k}^{n}(k^۴ - i^۴)}$$

این عبارت در نتیجهٔ اشتباهی خوش‌فرجام در یک ورودی برنامه Maple کشف شد[۱]، مانند کشف پنی‌سیلین بر اثر اشتباهی در ظرفِ کِشت.

اخیراً اثبات دقیقی از اتحاد بالا به‌وسیلهٔ آلمکویست و گرانویل [۱] ارائه شده است. اما اتحادهای دیگری از این نوع که به‌طور عددی کشف شده‌اند، به کلی خارج از دسترس روشهای فعلیِ اثبات رسمی به نظر می‌رسند. به‌عنوان مثال فیزیکدان انگلیسی دیوید برودهرست در سال ۱۹۹۹ با استفاده از یک برنامهٔ PSLQ عبارت صریحی شامل ۱۱۸ جمله برای $\zeta(۲۰)$ پیدا کرد. این مسأله نیازمند محاسبه با اعداد ۵۰۰۰ رقمی و شش ساعت وقت رایانه بود. راه حل کامل آن در [۶] آمده است.

۶. شناسایی ثابتهای مجموع چندگانه

اتحادهای زیادی در جریان تحقیقات اخیر روی ثابتهای مجموع چندگانه[۲] به طریق تجربی کشف شده‌اند. بعد از محاسبهٔ مقدار عددی این ثابتها با دقت زیاد، برای بررسی اینکه یک ثابت خاص در یک اتحادِ حدس زده‌شده صدق می‌کند یا نه، از یک برنامهٔ PSLQ استفاده می‌شد. این تلاشها منجر به برآوردهایی تجربی و در پیش نهادن نتایجی کلی شدند [۴]. بعداً با ترکیبی از شهود انسانی و عملیات نمادین رایانه‌ای اثباتهای زیبایی برای بسیاری از این نتایج خاص یا کلی به‌دست آمد. سه مثال از تساویهایی را که ابتدا به‌طور تجربی کشف و سپس اثبات شدند در زیر می‌بینید

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{k}\right)^۲(k+۱)^{-۴} = \frac{۳۷}{۲۲۶۸۰}\pi^۶ - \zeta^۲(۳)$$

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{k}\right)^۳(k+۱)^{-۶} = \zeta^۳(۳) + \frac{۱۹۷}{۲۴}\zeta(۹)$$
$$+ \frac{۱}{۲}\pi^۲\zeta(۷) - \frac{۱۱}{۱۲۰}\pi^۴\zeta(۵) - \frac{۳۷}{۷۵۶۰}\pi^۶\zeta(۳)$$

---

1. Apéry 2. multi-term 3. polylogarithmic

4. central binomial coefficient

۱. با تایپ کردن infty به‌جای infinity آشکار شد که برنامه الگوریتم خاصی برای متغیرهای صوری دارد.

2. multiple sum

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right)^{2}(k+1)^{-3}$$
$$=4\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{30}\ln^5(2)$$
$$-\frac{17}{32}\zeta(5)-\frac{11}{720}\pi^4\ln(2)$$
$$+\frac{7}{4}\zeta(3)\ln^2(2)+\frac{1}{18}\pi^2\ln^3(2)-\frac{1}{8}\pi^2\zeta(3)$$

که در آنها باز $\zeta(n)=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-n}$ مقداری از تابع زتای ریمان و $\mathrm{Li}_n(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x^j j^{-n}$ تابع بس‌لگاریتمی کلاسیک است.

به‌طورکلی می‌توان مجموعهای اویلر چندبعدی (یا مقادیر زتای چندگانه) را به‌صورت

$$\zeta\begin{pmatrix} s_1, & s_2 & \cdots & s_r \\ \sigma_1, & \sigma_2 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}:=\sum_{k_1>k_2>\cdots>k_r>0}\frac{\sigma_1^{k_1}}{k_1^{s_1}}\frac{\sigma_2^{k_2}}{k_2^{s_2}}\cdots\frac{\sigma_r^{k_r}}{k_r^{s_r}}$$

تعریف کرد که در آن $\sigma_j=\pm 1$ علامتها و $s_j>0$ها اعداد صحیح هستند. وقتی همهٔ علامتها مثبت‌اند یک مقدار زتای چندگانه داریم. عدد صحیح r عمق مجموع و $s_1+s_2+\cdots+s_r$ وزن آن است. این مجموعها با زمینه‌های مختلفی مثل نظریهٔ گرهها، نظریهٔ میدان کوانتومی و ترکیبیات ارتباط دارند. ثابتهایی به این شکل با علائم متناوب در مسأله‌هایی از قبیل محاسبهٔ گشتاور مغناطیسی الکترون مطرح می‌شوند.

مجموعهای اویلر چندبعدی در اتحادهای جالب‌توجهی صدق می‌کنند. پیدایش الگوریتمهای پیچش هُلدر[1] که با آنها می‌توان مقادیر عددی بسیار دقیق را به سرعت محاسبه کرد کشف اتحادهای بغرنج‌تری را تسهیل کرد. در این مورد به [۱۳] و یک رابط[2] محاسباتی در `www.cecm.sfu.ca/projects/ezface+/` مراجعه کنید. یک تساوی کلی زیبا که به‌وسیلهٔ تساگیر [۳۷] در حین تحقیقات مشابهی کشف شد این است

$$\zeta(3,1,3,1,\ldots,3,1)=\frac{1}{2n+1}\zeta(2,2,\ldots,2)=\frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}$$

که در آن '(۳, ۱)' و '۲'، n بار در شناسهٔ $\zeta(\cdot)$ تکرار می‌شوند. اکنون این رابطه اثبات شده است [۱۳] و اثبات با وجود آنکه کاملاً رسمی و دقیق است، به‌وسیلهٔ آزمایشهای هدایت‌شده به‌دست آمده است. حدسی وابسته به این رابطه که شواهد متقنی برای آن موجود است ولی هیچ سرنخی از اثبات آن در دست نیست «اتحاد» زیر است

$$8^n\zeta\begin{pmatrix} 2, & 1, & 2, & 1, & \ldots, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & \ldots, & -1, & 1 \end{pmatrix}=\zeta(2,1,2,1,\ldots,2,1).$$

در همین راستا برودهرست بر اساس نتایجی عددی از درجهٔ پایین حدس زد که بعد فضای مجموعهای اویلر با وزن w، عدد فیبوناتچی $F_{w+1}=F_w+F_{w-1}$ با $F_1=F_2=1$ است. در آزمودن این حدس به‌وسیلهٔ محاسبات PSLQ مجموعهای اویلر با وزن $w\leq 9$ به‌طورکامل به پایه‌ای به اندازهٔ F_{w+1} فروکاسته شدند. در وزنهای $w=10$ و $w=11$، این حدس با به‌کارگرفتن روشهای PSLQ در بیش از ۶۰۰ حالت به دقت آزمون شد. در وزن $w=11$ این آزمونها مستلزم حل کردن روابط صحیح با اندازهٔ $n=F_{12}+1=145$ است. در یک مورد نوعی، هر کدام از ۱۴۵ ثابت با دقت بیش از ۵۰۰۰ رقم محاسبه و با دقت ۵۰۰۰ رقم در یک برنامهٔ PSLQ چندجفتی[1] پیشرفته به‌کارگرفته شدند. در این مسأله‌ها نسبت ضرایب هم‌جوار در بردار صحیح به‌دست آمده معمولاً مقادیر خاصی مثل $11!=39916800$ دارد. این حقایق به همراه نسبت اطمینانی از مرتبهٔ 10^{-300} در رابطه‌های کشف‌شده احتمال آن را که این تساویها فقط پدیده‌های کاذب عددی باشند کاملاً از نظر دور می‌کند و پشتوانه‌ای اساسی برای درستی این حدس فراهم می‌سازد [۶].

۷. پردازش موازی در خدمت محاسبات ریاضی

قدرت بالقوهٔ محاسبهٔ موازی در تعدادی از نتایج اخیر به روشنی مشهود است. بسیاری از این محاسبات با ثابت π سروکار دارند که البته جای تعجب ندارد و نشان‌دهندهٔ علاقهٔ مستمر به این مشهورترین ثابت ریاضی است. در سال ۱۹۹۷، فابریس بلار[2] در INRIA با استفاده از یک الگوریتم کاراتر ــ شبیه به فرمولی که در بخش سه به آن اشاره شد ــ که روی شبکه‌ای از ایستگاههای کاری برنامه‌ریزی شده بود ۱۵۰ رقم دودویی π را که از رقم 10^{12}ام شروع می‌شد محاسبه کرد. کالین پرسیوال ۱۷ ساله در دانشگاه سایمن فریزرکانادا هم، برای عقب نماندن از قافله، محاسبهٔ ۸۰ رقم دودویی π را که از رقم 5×10^{12}ام شروع می‌شد سازماندهی کرد (با استفاده از ۲۵ رایانهٔ آزمایشگاهی). در حال حاضر او و بسیاری افراد دیگر مشغول محاسبهٔ ارقام دودویی π از رقم 10^{15}ام روی اینترنت هستند [۳۳]. در زمان نوشتن این متن، آخرین نتیجهٔ محاسباتی (سپتامبر ۱۹۹۹) محاسبهٔ ۲۰۶ میلیارد رقم اعشاری اول عدد π به‌وسیلهٔ یاسوماسا کانادا[3] است. این محاسبهٔ اعجاب‌آور با یک ابررایانهٔ هیتاچی با ۱۲۸ پردازنده در طول یک روز به کمک الگوریتم سالامن-برنت [۱۰] و الگوریتمی با همگرایی درجهٔ چهار از [۱۰] به‌عنوان شاهد، انجام شده است.

چند محاسبهٔ بزرگ مقیاس موازی برای تشخیص رابطهٔ صحیح در یکی دو سال گذشته انجام شده است. یکی از آنها از این کشف برودهرست سرچشمه گرفت که

$$\alpha^{630}-1=\frac{(\alpha^{315}-1)(\alpha^{210}-1)(\alpha^{126}-1)^2(\alpha^{90}-1)(\alpha^3-1)^3(\alpha^2-1)^5(\alpha-1)^3}{(\alpha^{35}-1)(\alpha^{15}-1)^2(\alpha^{14}-1)^2(\alpha^5-1)^6\alpha^{68}}$$

که در آن $\alpha=1{,}176280818000$ بزرگترین ریشهٔ حقیقی چندجمله‌ای لمر است [۲۹]:

$$0=1+\alpha-\alpha^3-\alpha^4-\alpha^5-\alpha^6-\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}.$$

رابطهٔ دایره‌بری[4] بالا اول بار به‌وسیلهٔ یک محاسبهٔ PSLQ کشف و بعداً ثابت شد. سپس برودهرست حدس زد که باید اعداد صحیح a، b_j، c_k

---

[1] Hölder convolution algorithms

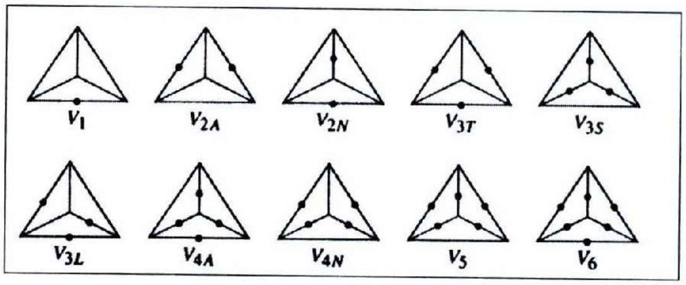
[2] interface

[1] multi-pair

[2] Fabrice Bellard

[3] Yasumasa Kanada

[4] cyclotomic



شکل ۱ ده حالت چهاروجهی.

وجود داشته باشند به‌طوری که

$$a\zeta(۱۷) = \sum_{j=۰}^{۸} b_j \pi^{۲j} (\log \alpha)^{۱۷-۲j} + \sum_{k \in D(\mathscr{S})} c_k \mathrm{Li}_{۱۷}(\alpha^{-k})$$

که در آن ۱۱۵ اندیس k از مجموعهٔ $D(\mathscr{S})$ گرفته می‌شوند که مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبتی است که لااقل یکی از اعضای مجموعهٔ زیر را می‌شمارند

$$\begin{aligned}\mathscr{S} = \{&۲۹, ۴۷, ۵۰, ۵۲, ۵۶, ۵۷, ۶۴, ۷۴, ۷۵, ۷۶, ۷۸, ۸۴, ۸۶,\\ &۹۲, ۹۶, ۹۸, ۱۰۸, ۱۱۰, ۱۱۸, ۱۲۴, ۱۳۰, ۱۳۲, ۱۳۸,\\ &۱۴۴, ۱۵۴, ۱۶۰, ۱۶۵, ۱۷۵, ۱۸۲, ۱۸۶, ۱۹۵, ۲۰۴, ۲۱۲,\\ &۲۴۰, ۲۴۶, ۲۷۰, ۲۸۶, ۳۶۰, ۶۳۰\}.\end{aligned}$$

البته چنین رابطه‌ای به کمک یک برنامهٔ PSLQ چندجفتی موازی که روی یک سیستم رایانه‌ای SGI/Cray T3E در آزمایشگاه لارنس برکلی اجرا شد به‌دست آمده است. در برنامه از محاسباتی با ۵۰۰۰۰ رقم اعشار و ۴۴ ساعت وقتِ ۳۲ پردازنده استفاده شد. ضرایب صحیح به‌دست آمده به بزرگی $۱۰^{۲۹۲}$ هستند، اما در هر حال درستی تساوی تا ۱۳۰۰۰ رقم فراتر از سطح اعوجاجات عددی تأیید شد. [۷].

۸. ارتباط با نظریهٔ میدان کوانتومی

در یک پیشرفت شگفت‌انگیز دیگر، دیوید برودهرست با استفاده از همین روشها به این نتیجه رسید که رابطهٔ نزدیکی بین مجموعهای اویلر و بعضی ثابتهای حاصل از محاسبهٔ نمودارهای فاینمن در نظریهٔ میدان کوانتومی وجود دارد [۱۹،۱۸]. به‌خصوص فرایند بازبهنجارش[1] (که نقاط بینهایت را از بسط اختلال[2] حذف می‌کند) شامل مقادیر زتای چندگانه می‌شود. باز مثل قبل، یک نظریهٔ ثمربخش شامل انبوهی نتایج خاص و کلی پدیدار شده است [۱۳].

بعضی نتایج اخیر در نظریهٔ میدانهای کوانتومی از این هم جالب‌ترند. برودهرست [۲۰] به کمک محاسبات PSLQ نشان داده است که در هر کدام از ۱۰ حالت با جرم صفر یا واحد، بخش متناهی نمودار فاینمنِ خلأ چهاروجهیِ ۳حلقه‌ای اسکالر[3] به «کلمه‌ها»ی ۴ حرفی فرو می‌کاهد که نمایشی از انتگرالهای مکرر برحسب الفبایی ۷ حرفی، متشکل از ۱ـفرمهای $\Omega := dx/x$ و $\omega_k := dx/(\lambda^{-k} - x)$ است که در آن $\lambda := (۱ + \sqrt{-۳})/۲$ ریشهٔ ششم اولیهٔ واحد است و k از ۰ تا ۵ تغییر می‌کند. کلمهٔ ۴ حرفی یک انتگرال مکرر ۴بعدی مثل

$$\begin{aligned}U &:= \zeta(\Omega^۲\omega_۳\omega_۰)\\ &= \int_۰^۱ \frac{dx_۱}{x_۱} \int_۰^{x_۱} \frac{dx_۲}{x_۲} \int_۰^{x_۲} \frac{dx_۳}{(-۱ - x_۳)} \int_۰^{x_۳} \frac{dx_۴}{(۱ - x_۴)}\\ &= \sum_{j>k>۰} \frac{(-۱)^{j+k}}{j^۳k}\end{aligned}$$

است. $۷^۴$ تا از این کلمات چهار حرفی وجود دارد. اما تنها دو تا از آنها جملات اولیه‌ای هستند که در نمودارهای فاینمن ۳حلقه‌ای ظاهر می‌شوند، یکی U که در بالا آمد و دیگری

$$V := \mathrm{Real}\,[\zeta(\Omega^۲\omega_۳\omega_۱)] = \sum_{j>k>۰} \frac{(-۱)^j \cos(۲\pi k/۳)}{j^۳k}$$

جمله‌های باقیمانده در نمودارها به حاصلضربهای ثابتهایی که در نمودارهای با حلقه‌های کمتر پیدا می‌شوند تبدیل می‌یابند. این ده حالت در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. در این نمودارها نقطه‌ها نمایانگر ذره‌هایی با جرم سکون ناصفر هستند. فرمولهایی که با محاسبات PSLQ برای ثابتهای متناظر پیدا شده‌اند در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. در این جدول، $C = \sum_{k>۰} \sin(\pi k/۳)/k^۲$.

جدول ۱ فرمولهای پیداشده به‌وسیلهٔ PSLQ برای حالتهای شکل ۱

$V_{۳L} = ۶\zeta(۳) - \frac{۱۵}{۴}\zeta(۴) - ۶C^۲$	$V_۱ = ۶\zeta(۳) + ۳\zeta(۴)$
$V_{۴A} = ۶\zeta(۳) - \frac{۷۷}{۱۲}\zeta(۴) - ۶C^۲$	$V_{۲A} = ۶\zeta(۳) - ۵\zeta(۴)$
$V_{۴N} = ۶\zeta(۳) - ۱۴\zeta(۴) - ۱۶U$	$V_{۲N} = ۶\zeta(۳) - \frac{۱۳}{۲}\zeta(۴) - ۸U$
$V_۵ = ۶\zeta(۳) - \frac{۴۶۹}{۲۷}\zeta(۴) + \frac{۸}{۳}C^۲ - ۱۶V$	$V_{۳T} = ۶\zeta(۳) - ۹\zeta(۴)$
$V_۶ = ۶\zeta(۳) - ۱۳\zeta(۴) - ۸U - ۴C^۲$	$V_{۳S} = ۶\zeta(۳) - \frac{۱۱}{۲}\zeta(۴) - ۴C^۲$

۹. هشدار

علی‌رغم موفقیتهای قابل توجه این روش، احتیاطهایی لازم است. پیش از همه، این حقیقت که یک تساوی با دقت زیادی درست به نظر می‌رسد، تضمینی برای درستی آن نیست. یک مثال، رابطهٔ

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{[n\,\tanh \pi]}{۱۰^n} \approx \frac{۱}{۸۱}$$

---

[1] renormalization

[2] perturbation expansion

[3] scalar 3-loop tetrahedral vacuum Feynman diagram

است که تا ۲۶۷ رقم اعشار درست است، بااین حال رابطهٔ کاملاً دقیقی نیست و از رقم ۲۶۸ام غلط است. تعداد دیگری از این «اتحاد»های غلط در [۱۱] نشان داده شده‌اند.

به‌طور کلی در تعمیم نتایجی که برای nهای کوچک درست هستند به همهٔ nها باید احتیاط کرد مثلاً

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, \frac{\sin(x/۳)}{x/۳}\, dx = \frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, \frac{\sin(x/۳)}{x/۳} \cdots \frac{\sin(x/۱۳)}{x/۱۳}\, dx = \frac{\pi}{۲}$$

اما

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, \frac{\sin(x/۳)}{x/۳} \cdots \frac{\sin(x/۱۵)}{x/۱۵}\, dx =$$

$$\frac{۴۶۷۸۰۷۹۲۴۷۱۳۴۴۰۷۳۸۶۹۶۵۳۷۸۶۴۴۶۹}{۹۳۵۶۱۵۸۴۹۴۴۰۶۴۰۹۰۷۳۱۰۵۲۱۷۵۰۰۰۰}\pi$$

اخیراً وقتی محققی به کمک یک بستهٔ نرم‌افزاری ریاضی به این رابطه رسید نتیجه گرفت که اشکالی در نرم‌افزار موجود است، اما این‌طور نبود. واقعیت این بود که تساوی

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, \frac{\sin(x/h_۱)}{x/h_۱} \cdots \frac{\sin(x/h_n)}{x/h_n}\, dx = \frac{\pi}{۲}$$

تنها تا وقتی درست است که $۱/h_۱ + ۱/h_۲ + \cdots + ۱/h_n < ۱$. در مثال بالا داریم $۱/۳ + ۱/۵ + \cdots + ۱/۱۳ < ۱$ ولی با اضافه کردن ۱/۱۵، مجموع از ۱ بزرگتر می‌شود و تساوی دیگر برقرار نیست [۹]. با عوض کردن h_n می‌توانیم این تساوی را تا هر مقدار n که بخواهیم درست نگه داریم اما در هر صورت از جایی به بعد غلط خواهد بود.

۱۰. چشم‌انداز آینده

نرم‌افزارهای ریاضی این روزها به عنصری اساسی در مراکز دانشگاهی و آزمایشگاههای تحقیقاتی دولتی تبدیل شده‌اند. بسیاری از مراکز دانشگاهی درسهایی ارائه می‌کنند که استفاده از یکی از این بسته‌های نرم‌افزاری بخش عمده‌ای از آنهاست. اما ترویج استفاده از آنها در سطح دبیرستانها با موانع مختلفی از جمله گران بودن نسبی این نرم‌افزارها، فقدان تجهیزات رایانه‌ای مناسب، مشکلات استانداردسازی دوره‌های آموزشی این نرم‌افزارها در سطوح منطقه‌ای یا ملی، کمبود متنهای درسی که این ابزارها را وارد یک برنامهٔ درسی واقع‌بینانه کنند، کمبود معلمان آموزش‌دیده و پاره‌ای مسائل دیگر روبه‌روست.

اما قیمت سخت‌افزار رایانه هر روز کاهش می‌یابد و توان آن پیوسته افزایش پیدا می‌کند. پس به نظر می‌رسد طی همین چند سال آینده بتوان ابزارهای محاسبات نمادین با قدرت متوسط را در ماشین حسابهای دستی نسبتاً ارزان تعبیه کرد. آنگاه وارد کردن این ابزارها به برنامهٔ درسی دبیرستانی بسیار آسان‌تر خواهد بود. بنابراین به نظر می‌رسد که ما باید آمادهٔ استقبال از نسل جدیدی از دانشجویان باشیم که وارد دوره‌های دانشگاهی ریاضیات و علوم خواهند شد و هیچ مشکلی با کاربرد این ابزارها نخواهند داشت. این پیشرفت مسلماً تأثیری عمیق بر آیندهٔ تدریس، یادگیری و روش پرداختن به ریاضیات خواهد داشت.

یکی از فواید جنبیِ احتمالیِ این پیشرفت، رشد بنیهٔ مالی تولیدکنندگان تجاری این نرم‌افزارهاست که به کمک آن قادر به بهسازی محصولات خود متناسب با نیازهای پژوهشگران جدی خواهند بود. حاصل بهسازیهای آینده احتمالاً الگوریتمهای کاراتر، ظرفیتهای گسترده‌تر که با ترکیب محاسبات عددی و نمادین به‌دست خواهد آمد، امکانات مجسم‌سازی پیشرفته‌تر، و نرم‌افزارهای بهینه برای کار با سیستمهای رایانه‌ای چند پردازهٔ موازی با حافظهٔ نامتمرکز خواهند بود. از ترکیب این پیشرفتها با رشد قابل انتظارِ توان خالص محاسباتی‌طبق قانون مور ــ رشدی که مطمئناً طی ده سال یا حتی بیشتر بدون افت ادامه خواهد داشت ــ نتیجه می‌گیریم که سیستمهای ریاضی رایانه‌ای فوق‌العاده قویتری در آینده در دسترس خواهند بود.

ما هنوز در آغاز راهِ تجربه و درکِ تأثیری هستیم که سیستمهای رایانه‌ای بر تحقیقات ریاضی خواهند داشت. در ده سال آینده نسل جدیدی از ریاضیدانانِ برخوردار از سواد رایانه‌ای مجهز به نرم‌افزارهایی که به مقدار قابل توجهی تقویت شده‌اند به کمک رایانه‌هایی با قدرت اعجاب‌آور، کشفیاتی در ریاضیات خواهند کرد که در حال حاضر برای ما تنها در رؤیا ممکن است. آیا ریاضیات رایانه‌ای در نهایت، تقریباً به تمامی جایگزین شکل کاملاً انسانی تحقیق، مثلاً از نوع اثبات اندرو وایلز از قضیهٔ آخر فرما، خواهد شد؟ آیا سیستمهای رایانه‌ای ریاضی در نهایت از چنان هوشی برخوردار خواهند شد که بتوانند بدون کمک انسانی نتایج عمیق تازه‌ای در ریاضیات به‌دست آورند؟ آیا روشهای رایانه‌ای کشف ریاضیات، ریاضیدانان را قادر خواهد ساخت به قلمروهایی که وجود آنها به‌وسیلهٔ گودل، چایتین[1] و دیگران ثابت شده است و اصولاً فراتر از دسترس استدلال صوری هستند سرک بکشند؟

۱۱. نتیجه‌گیری

شمه‌ای از تواناییهای امروز و امکانات فردا را شرح دادیم که امیدواریم قانع‌کننده بوده باشد. ولی به رواج گسترده و روزافزون محاسبه با استفاده از وب یا دسترسی عام به پایگاههای اطلاعاتی بسیار بزرگ، چه عمومی چه تجاری، اشاره‌ای نکردیم. همچنین به مسائل مربوط به ارتباط انسان با رایانه، مالکیت معنوی و هزاران مسألهٔ ناشی از آنها که جنبهٔ کاملاً فنی هم ندارند، نپرداختیم.

نتیجهٔ این پیشرفتها هر چه باشد، ما همچنان معتقدیم که ریاضیات امری منحصراً انسانی هست و خواهد بود حتی شاید بتوان ادعا کرد که این پیشرفتها خود تأییدی بر طبیعتِ ذاتاً انسانی ریاضیات است.

در واقع بحث روبن هرش دربارهٔ یک فلسفهٔ انسانگرایانه برای ریاضیات، که مضمون آن در زیر می‌آید، در اینجا قانع‌کننده‌تر می‌نماید:

۱. *ریاضیات انسانی است*؛ قسمتی از فرهنگ بشری و همساز با سایر اجزای این فرهنگ است، و با ایدهٔ فرگه که ریاضیات را یک واقعیت عینی، بی زمان، و مجرد می‌دانست، تطابق ندارد.

---

[1] Chaitin

۲. *معرفت ریاضی خطاپذیر است.* مثل علوم دیگر، ریاضیات می‌تواند با اشتباه کردن، تصحیح کردن، و حتی دوباره تصحیح کردن اشتباهات پیشرفت کند. نظریهٔ خطاپذیری[1] ریاضیات در اثباتها و ابطالها[2]ی لاکوتوش استادانه توصیف شده است [۲۸].

۳. *روایتهای مختلفی از اثبات و دقت وجود دارد.* استانداردهای دقت ممکن است بسته به زمان، مکان و چیزهای دیگر تغییر کند. استفاده از رایانه در اثباتهای رسمی، که نمونه‌ای از آن اثبات قضیهٔ چهار رنگ به کمک رایانه در سال ۱۹۷۷ است، تنها یک مثال از استانداردهای غیرسنتی دقت است.

۴. *شواهد تجربی، آزمایش عددی و اثبات احتمالاتی هم می‌تواند در تصمیم‌گیری راجع به اینکه چه چیزی را بپذیریم، به ما کمک کند.* منطق ارسطویی همیشه بهترین راه تصمیم‌گیری نیست.

۵. *اشیای ریاضی گونه‌ای خاص از اشیای اجتماعی-فرهنگی-تاریخی هستند.* بر خلاف ادعای بعضی از منتقدان پست مدرن، نمی‌توان ریاضیات را تنها شکل جدیدی از ادبیات یا مذهب قلمداد کرد. با این حال خیلی از مفاهیم ریاضی را می‌توان ایده‌های مشترک دانست، مانند موبی دیک در ادبیات یا لقاح مقدس در مسیحیت.

قطعاً به رسمیت شناختن اینکه می‌توان از قیاسهای «نیمه‌شهودی» برای به‌دست آوردن بصیرت در ریاضیات استفاده کرد، می‌تواند به یادگیری ریاضیات کمک کند و ریاضیدانان صادق نقش آن را در اکتشافات ریاضی ارج خواهند نهاد.

به پیش می‌نگریم، به آنچه آینده با خود خواهد آورد.

مراجع

1. G. Almkvist and A. Granville: Borwein and Bradley's Apéry-like formulae for $\zeta(4n+3)$. Experimental Mathematics **8** (1999) 197-204.

2. Issac Asimov and J. A. Shulman, eds.: Isaac Asimov's Book of Science and Nature Quotations. Weidenfield and Nicolson, New York 1988, p. 115.

3. David H. Bailey: A Fortran-90 based multiprecision system. ACM Transactions on Mathematical Software **21** (1995) 379-387, Available from `http://www.nersc.gov/dhbailey`

4. David H. Bailey, Jonathan M. Borwein and Roland Girgensohn: Experimental evaluation of Euler sums. Experimental Mathematics **4** (1994) 17-30.

5. David H. Bailey, Peter B. Borwein and Simon Plouffe: On the rapid computation of various polylogarithmic constants. Matematics of Computation **66** (1997) 903-913.

6. David H. Bailey and David Broadhurst: Parallel Integer Relation Detection: Techniques and Applications. Available from http://www.nersc.gov/dhbailey.

7. David. H. Bailey and David Broadhurst: A Seventeenth-Order Polylogarithm Ladder. Available from `http://www.nersc.gov/dhbailey`.

8. David H. Bailey and Richard E. Crandall, "On the Random Character of Fundamental Constant Expansions", manuscript (2000). Available from `http://www.nersc.gov/dhbailey`.

9. David Borwein and Jonathan M. Borwein: Some remarkable properties of sinc and related integrals. The Ramanujan Journal, in press. CECM Preprint **99** 142, available from `http://www.cecm.sfu.ca/preprints`.

10. Jonathan M. Borwein and Peter B. Borwein: Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. Wiley, New York 1987.

11. J.M. Borwein and P. B. Borwein: Strange series and high precision Fraud. American Mathematical Monthly **99** (1992) 622-640.

12. J. M. Borwein and D. M. Bradley: Empirically determined Apéry-like formulae for zeta(4n+3). Experimental Mathematics **6** (1997) 181-194.

13. Jonathan M. Borwein, David M. Bradley, David J. Broadhurst and Peter Lisonek: Special values of multidimensional polylogarithms. Trans. Amer, Math. Soc., in press. CECM Preprint **98** 106, available from `http://www.cecm.sfu.ca/preprints`.

14. Jonathan M. Borwein. David J. Broadhurst and Joel Kamnitzer: Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values. Experimental Mathematics, in press. Preprint, November 1999. CECM Preprint **99** 137, available from `http://www.cecm.sfu.ca/preprints`.

15. J. M. Borwein, P. B. Borwein, R. Girgensohn and S. Parnes: Making sense of experimental mathematics. Mathematical Intelligencer **18**, no. 4 (Fall 1996) 12-18.

16. Jonathan M. Borwein and Robert Corless: Emerging tools for experimental mathematics. MAA Monthly **106** (1999) 889-909. CECM Preprint **98** 110, available from `http://www.cecm.sfu.ca/preprints`.

17. Peter B. Borwein and Christopher Pinner: Polynomials with {0, +1, -1} coefficients and root close to a given point. Canadian J. Mathematics **49** (1998) 887-915.

18. David J. Broadhurst, John A. Gracey and Dirk Kreimer: Beyond the triangle and uniquenecess relations: Non-zeta counterterms at large N from positive knots. Zeitschrift für Physik **C75** (1997) 559-574.

19. David J. Broadhurst and Dirk Kreimer: Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops. Physics Letters **B383** (1997) 403-412.

20. David J. Broadhurst: Massive 3-loop Feynman diagrams reducible to SC* primitives of algebras of the sixth root of unity. Preprint, March 1998, to appear in European Physical Journal C. Available from `http://xxx.lanl.gov/ abs/hep-th/9803091`.

---

[1] fallibilism

[2] Proofs and Refutations

21. David J. Broadhurst: Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of $\zeta(3)$ and $\zeta(5)$. Preprint, March 1998. Available from `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9803067`.

22. Sid Chatterjee and Herman Harjono: MPFUN++: A multiple precision floating point computation package in C++. University of North Carolina, Sept. 1998. Available from `http://www.cs.unc.edu/Research/HARPOON/mpfun++`.

23. Helaman R. P. Ferguson, David H. Bailey and Stephen Arno: Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm. Mathematics of Computation **68** (1999) 351-369.

24. Helaman R. P. Ferguson and Rodney W. Forcade: Generalization of the Euclidean algorithm for real numbers to all dimensions higher than two. Bulletin of the American Mathematical Society **1** (1979) 912-914.

25. Stephen Finch: Favorite mathematical constants. `http://www.mathsoft.com /asolve/constant/constant.html`.

26. Reuben Hersh: Fresh breezes in the philosophy of mathematics. The American Mathematical Monthly, August-September 1995, 589-594.

27. Loki Jörgenson: Zeros of polynomials with constrained roots. `http//www.cecm.sfu.ca/personal/loki/Projects/Roots/Book`.

28. Imre Lakatos: Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge Univesity Press, 1977.

29. Derrick H. Lehmer: Factorization of certain cyclotomic functions. Annals of Mathematics **34** (1933) 461-479.

30. A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr. and L. Lovasz: Factoring polynomials with rational coefficients. Mathematische Annalen **261** (1982) 515-534.

31. P. B. Medawar: Advice to a young scientist. Harper Colophon, New York 1981.

32. Andrew Odlyzko: Zeros of polynomials with 0,1 coefficients. `http://www.cecm.sfu.ca/organics/authors/odlyzko/and/organics/papers/odlyzko/support/poly form.html`.

33. Colin Percival: Pihex: A Distributed Effort To Calculate Pi. `http://www.cecm. sfu.ca/projects/pihex/`

34. George Polya: Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined Edition, Wiley, New York 1981, p. 129.

35. Ed Regis: Who Got Einstein's Office? Addison-Wesley, 1986, p. 78.

36. N. J. A. Sloane and Simon Plouffe: The Encyclopedia of Integer Sequences. Academic Press, 1995. The on-line version can be accessed at `http://www.research.att.com/njas/sequences/Seis.html`.

37. Don Zagier: Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics, Vol. II. Birkhäuser, Boston 1994, pp. 497-512.

* * * * * *

David H. Bailey; Jonathan M. Borwein, "Experimental mathematics: Recent developments and future outlook", in *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid (eds.), Springer (2001) 51-66.

* دیوید بورواین، آزمایشگاههای ملی لارنس برکلی، آمریکا
dhbailey@lbl.gov

* جاناتان بورواین، دانشگاه دالهوزی کانادا
jborwein@cs.dal.ca