وقتی که شبه‌نرمال بودن بر نرمال بودن دلالت می‌کند*

دین هیکرسن، شرمن استاین، کنیا یاماتوکا*

ترجمهٔ طیبه کوچکپور

اره در ۱۹۳۷ در مقالهٔ «ساختارها، و نظریهٔ گروهها» [۷] مفهوم زیرگروه شبه‌نرمال یك گروه را به‌عنوان تعمیمی از زیرگروه نرمال معرفی کرد. دراینجا ما شرطی‌را ارائه می‌کنیم که برحسب شاخص زیرگروه بیان می‌شود وضامن نرمال بودن یك زیرگروه‌شبه نرمال است. بحثها و استدلالهایی که در زیر می‌آید، الهام‌بخش تمرینهای متعددی در درس نظریهٔ گروهها و نظریهٔ گالواست.

۰. تعریف زیرگروه شبه نرمال. فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G است. اگر به‌ازای هر $g\in G$ داشته باشیم $gH=Hg$، آنگاه H یك زیرگروه نرمال G است. این نشان می‌دهد که برای همهٔ زیرگروههای J از G داریم

$$JH=HJ. \qquad (*)$$

(به‌ازای زیرمجموعه‌های $A, B\subset G$، $AB=\{ab: a\in A,\ b\in B\}$.)

هر زیرگروه H از G که به‌ازای همهٔ زیرگروههای J از G در (*) صادق باشد، یك زیرگروه شبه نرمال نامیده می‌شود. اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند

(۰) H در G شبه نرمال است.

(۱) برای هر زیرگروه دوری J از G، $JH=HJ$.

(۲) برای هر $g\in G$ و $h\in H$، $r\in \mathbf{Z}$ و $h'\in H$ موجودند به‌طوری که $hg=g^r h'$.

(۳) برای هر زیرگروه J از G، $HJ=\langle H, J\rangle$ زیرگروه تولید شده توسط J و H است.

اگر G متناهی باشد، شرایط بالا همچنین با شرط زیر هم‌ارزند

(۴) برای هر زیرگروه J از G،

$$[\langle H, J\rangle : H]=[J : H\cap J].$$

هم‌ارزی (۰) و (۱) ازاین واقعیت ناشی می‌شود که هر زیرگروه G اجتماعی اززیرگروههای دوری‌است. شرط(۲) همان شرط (۱) است که برحسب عناصر بیان شده. شرط (۳) به این واقعیت ارتباط پیدا می‌کند که $HJ=JH$ اگر و تنها اگر HJ یك گروه‌باشد. شرط(۴) از تساوی $|HJ|=|H||J|/|H\cap J|$ نتیجه می‌شود که برای زیرگروههای متناهی J و H معتبراست.

زیرگروههای شبه نرمال، موضوع تحقیقات زیادی بوده‌اند (نگاه‌کنید به [۳، ۷، ۹، ۱۱] ومقالهٔ دسکینز و ونتسکه در [۱۲]).

۱. چه وقت شبه نرمال بودن بر نرمال بودن دلالت می‌کند؟

اره در [۷] نشان دادکه زیرگروه شبه نرمال یك گروه متقارن، نرمال است. ما به‌روشی مشابه نشان می‌دهیم که اگر H یك زیرگروه شبه نرمال G باشد و $[G:H]$ یك‌عدد صحیح بی‌مجذور[۱] یا دوبرابر یك‌عدد بی‌مجذور باشد، آنگاه H یك زیرگروه نرمال G است. چگالی چنین اعداد صحیحی برابر است با

$$7/\pi^2 \cong 0.71 .$$

لم ۱.۱. یك زیرگروه شبه نرمال H از گروه G به‌طوری که $[G:H]$ اول باشد، زیرگروه نرمالی از G است.

برهان. فرض کنیم که H در G نرمال‌نباشد و $H'=a^{-1}Ha$ زیرگروهی مزدوج با H و مجزا از H باشد و نیز فرض کنیم $K=HH'=H'H$. چون $[G:H]$ اول‌است و $H\subset K\subset G$، پس $K=G$. به‌ازای یك $h'\in H'$، $h\in H$ داریم $a^{-1}=h'h$ یعنی $a^{-1}=a^{-1}h^*ah$ به‌ازای $h^*, h\in H$. ازاین نتیجه می‌شود که $a\in H$ که با فرض $a^{-1}Ha\neq H$ متناقض است. پس H در G نرمال است.

در لم بعدی ازاین‌مطلب استفاده می‌کنیم که اگر G یك گروه، $N\subset H\subset G$ زیرگروههایی از آن، و N در G نرمال باشد، آنگاه H یك زیرگروه شبه‌نرمال G است اگر وتنها اگر H/N در G/N شبه نرمال باشد. اثبات به‌خواننده واگذار می‌شود.

لم ۲.۱. هر زیرگروه شبه نرمال H از گروه G به‌طوری که $[G:H]=4$، زیرگروه نرمال G است.

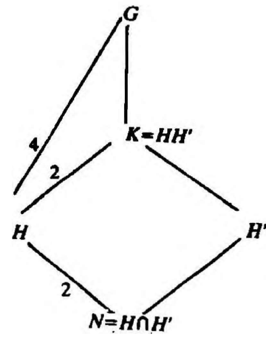
برهان. فرض می‌کنیم که H در G نرمال نباشد؛ و $a\in H'$ و K را مطابق برهان لم ۱.۱ تعریف می‌کنیم. چون $H\subset K\subset G$ و $[G:H]=4$، نتیجه می‌شود که K یا با H یا با G مساوی است ویا $[K:H]=2$. مانند اثبات لم ۱.۱ حالتهای اول و دوم نمی‌توانند اتفاق‌بیفتند، پس $[K:H]=2$ و H در K نرمال‌است. به‌این ترتیب K نرمالساز H است و در نتیجه دقیقاً دو مزدوج H وجود داردکه عبارت‌اند از: H و H'.

حال قرار می‌دهیم $N=H\cap H'$. دراین صورت

$$N=\cap\{g^{-1}Hg : g\in G\}$$

و لذا N زیرگروه نرمال G است. به‌علاوه چون H در G شبه‌نرمال است، $[K:H]=[H':N]=[H:N]$ و بنابراین $[H:N]=2$. (نگاه‌کنید به‌شکل ۱)

۱. مخفف «بی عامل مجذور»؛ منظور، عدد صحیحی است که بر مجذور هیچ عدد صحیحی تقسیم‌پذیر نباشد.



شکل ۱

داریم $N \subset H \subset G$ و $[G:H]=۴$ و $[H:N]=۲$، و N در G نرمال است. پس گروه G/N دارای مرتبهٔ ۸ است، H/N در G/N شبه نرمال است و شاخص آن در G/N، ۴ می‌باشد. با آزمایش پنج گروه مرتبهٔ ۸ معلوم می‌شود که یك زیرگروه شبه نرمال با شاخص ۴ در یك گروه مرتبهٔ ۸ نرمال است. (۳ تا از این گروهها آبلی هستند. دوتای دیگر را می‌توان به‌طورمستقیم یا به‌کمك[۱۰] بررسی کرد. مرجع [۱۰] شبکه‌های زیرگروههای گروههای با مرتبهٔ پایین را نشان می‌دهد.)

بنابراین H/N در G/N نرمال است و لذا H در G نرمال است که با فرض اولیه متناقض است. ازاین نتیجه می‌گیریم H در G نرمال است.

همان‌طوری‌که داور این مقاله متذکر شده است، می‌توانیم به‌روش زیر نیز استدلال کنیم. گیریم $\bar{G}=G/N$ و $\bar{H}=H/N=\langle \bar{h}\rangle$. برای هرعضو $\bar{a}\in\bar{G}$ گروه $\langle \bar{a},\bar{h}\rangle$ را درنظر می‌گیریم. اگر این گروه $\bar{G}$ نباشد، یك‌گروه مرتبهٔ ۲ یا مرتبهٔ۴ است و بنابراین آبلی بوده و $\bar{a}$ و $\bar{h}$ باهم‌تعویض می‌شوند. پس $\bar{H}$ در $\bar{G}$ نرمال است. بنابراین H در G نرمال است. از طرف دیگر فرض‌کنیم $\langle\bar{a},\bar{h}\rangle=\bar{G}$. حال $\bar{a}$ ازمرتبهٔ ۲، ۴، یا ۸ است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۸ باشد، $\bar{G}$ آبلی است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۲ باشد شرط (۲) نتیجه می‌دهد که $\bar{h}\bar{a}=\bar{a}\bar{h}$ و بنابراین $\bar{G}$ آبلی است. اگر $\bar{a}$ از مرتبهٔ ۴ باشد، $\langle\bar{a}\rangle$ یك زیرگروه نرمال $\bar{G}$ است. پس $\bar{h}^{-1}\bar{a}\bar{h}=\bar{a}$ یا $\bar{h}^{-1}\bar{a}\bar{h}=\bar{a}^3$. از حالت اول نتیجه می‌شود که $\bar{G}$ آبلی است. در حالت دوم داریم $\bar{a}\bar{h}=\bar{h}\bar{a}^3$ و از این‌رو $\bar{h}\bar{a}\bar{h}\bar{a}=\bar{a}^4=1$. با به‌کار بردن شرط (۲) برای $\bar{h}$ و $\bar{h}\bar{a}$ داریم $\bar{h}\bar{h}\bar{a}=\bar{h}\bar{a}\bar{h}$. به این ترتیب $\bar{h}\bar{a}=\bar{a}\bar{h}=\bar{h}\bar{a}^3$ و $\bar{a}=\bar{a}^3$ که یك تناقض است.

قضیهٔ ۳.۱. اگر H یك زیرگروه شبه نرمال از G باشد و $[G:H]=n$ یك عدد صحیح بی مجذور یا دوبرابر یك عدد صحیح بی مجذور باشد، آنگاه H زیرگروه نرمال G است.

برهان. قضیه را با استقرا نسبت به‌آن نوع nی که در قضیه مشخص‌شده ثابت می‌کنیم. اگر $n=1$، قضیه بدیهی است. برای $n=2$، درستی قضیه از لم ۲.۱ نتیجه می‌شود. لذا فرض‌می‌کنیم n عدد صحیح دیگری از نوع مشخص شده در صورت قضیه باشد و ادعای‌ما برای تمام اعدادکوچکتر از n که به‌شکل مشخص شدهٔ فوق هستند صادق باشد. قرار می‌دهیم $n=pm$ که در آن p اول است و m را عاد نمی‌کند.

فرض می‌کنیم که H زیرگروه شبه نرمالی در G است، و $[G:H]=n$. عضو دلخواه $g\in G$ را درنظر می‌گیریم. چون H در G شبه نرمال است، پس $H\langle g\rangle$ یك زیرگروه G است و H در $H\langle g\rangle$ شبه نرمال است. اگر $H\langle g\rangle\neq G$، بنابه‌فرض استقرا، H در $H\langle g\rangle$ نرمال است و $Hg=gH$.

اگر $H\langle g\rangle=G$ آنگاه $[H\langle g\rangle:H]=n$، و این دلالت می‌کند‌که n کوچکترین عدد صحیح مثبت k است به‌طوری‌که $g^k\in H$. گیریم $x=g^p$ و $y=g^m$. دراین صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت k به‌طوری‌که $x^k\in H$ عبارت است از $n/p=m$. لذا $[H\langle x\rangle:H]=m$. همین‌طور، $[H\langle y\rangle:H]=p$. چون H در هردوی $H\langle y\rangle$ و $H\langle x\rangle$ شبه نرمال است، فرض استقرا نشان می‌دهد‌که $Hx=xH$ و $Hy=yH$. ازاین‌واقعیت که $(p,m)=1$، نتیجه می‌شود $g\in\langle x,y\rangle$ وبنا براین $gH=Hg$.

۴. چه وقت شبه نرمال بودن دلیل نرمال بودن نیست؟

برای هرعدد صحیح مثبت m که بر ۸ یا برمربع یك عدد اول فرد تقسیم‌پذیر باشد یك‌گروه متناهی چون G داریم‌که H زیرگروه شبه نرمال آن باشد به‌طوری‌که $[G:H]=m$ و H در G نرمال نباشد. در لم بعدی، گروه توصیف شده در [۲، ص. ۱۳۴؛ ۴، ص. ۱۸۷] را به‌کار می‌بریم.

در برهان لم دو خاصیت از تعویضگرها را به‌کار خواهیم برد. به‌ازای گروه داده شدهٔ G و $a, b\in G$، تعویضگر a و b که با $[a,b]$ نشان داده‌می‌شود عبارت از $a^{-1}b^{-1}ab$ است. آنگاه داریم ([۵، ص. ۲۵۳؛ ۱، ص. ۲۶؛ ۸، ص. ۱۷۷])

(i) اگر $[a,b]$ با a تعویض شود آنگاه برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $[a,b]^n=[a^n,b]$.

(ii) اگر $[a,b]$ با a وبا b تعویض شود آنگاه برای هر $n\geqslant 0$،

$$(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}.$$

لم ۱.۲. برای هرعدد اول فرد p و $n\geqslant 3$ یا برای $p=2$ و $n\geqslant 4$ فرض می‌کنیم G گروهی ازمرتبهٔ p^n با مولدهای a و b و روابط $a^{p^{n-1}}=1$ و $b^p=1$ و $ba=a^{1+p^{n-2}}$ است. و قرار می‌دهیم $H=\langle b\rangle$. آنگاه $[G:H]=p^{n-1}$، و H در G شبه‌نرمال است اما نرمال نیست.

برهان. هرعضو G نمایش یکتایی به‌شکل a^ib^j با ضوابط $0\leqslant i<p^{n-1}$ و $0\leqslant j<p$ دارد. چون

$$a^{-1}ba=a^{p^{n-2}}b\notin H$$

H در G نرمال نیست.

برای نشان دادن این مطلب که H در G شبه نرمال است، ابتدا به‌نکات زیر توجه می‌کنیم. چون

$$ba^pb^{-1}=(bab^{-1})^p=(a^{1+p^{n-2}})^p=a^{p+p^{n-1}}=a^p$$

داریم $a^p\in Z(G)$ و $a^{p^{n-2}}\in Z(G)$. و چون

$$[b,a]=b^{-1}(a^{-1}ba)=b^{-1}a^{p^{n-2}}b=a^{p^{n-2}}$$

داریم $[a,b], [b,a]\in Z(G)$ (زیرا $[a,b]=[b,a]^{-1}$). (نگاه‌کنید به[۱، صص. ۱۵۵، ۱۵۷، وتمرین ۲.۸، ص. ۱۱۵].)

لذا به‌ازای هر $i, j \in \mathbb{Z}$، بنابه (i) داریم

$$[b^j, a^i] = [b, a]^{ij} \in Z(G)$$

و همین‌طور $[a^i, b^j] \in Z(G)$. همچنین

$$[b, a]^p = (a^{p^{n-2}})^p = a^{p^{n-1}} = 1.$$

فرض می‌کنیم $g \in G$ و $h \in H$. در این صورت $g = a^i b^j$ و $h = b^k$ ($i, j, k \geqslant 0$). قرار می‌دهیم $r = 1 + p^{n-2}k$. بنابه شرط (۲) در بخش صفر کافی است نشان دهیم که

$$hg = g^r h.$$

بنابه (ii)

$$g^r = (a^i b^j)^r = a^{ir} b^{jr} [b^j, a^i]^{\binom{r}{2}}.$$

توجه کنید که

$$a^{ir} = a^i (a^{p^{n-2}})^{ik} = a^i [b, a]^{ik} = a^i [b^k, a^i]$$

و اینکه

$$b^{jr} = b^{j + p^{n-2} jk} = b^j.$$

همچنین با توجه به‌شرایطی که درصورت قضیه روی p و n گذاشته شده‌است، p عدد $\binom{r}{2}$ را عاد می‌کند و

$$[b^j, a^i]^{\binom{r}{2}} = [b, a]^{ij\binom{r}{2}} = 1$$

زیرا $[b, a]^p = 1$. پس $g^r = a^i [b^k, a^i] b^j$. درنتیجه

$$g^r h = g^r b^k = a^i [b^k, a^i] b^{j+k} = a^i b^k [b^k, a^i] b^j$$

$$= a^i b^k (b^{-k} a^{-i} b^k a^i) b^j = b^k a^i b^j = hg.$$

لم ۲.۲. فرض کنید که H یك زیرگروه شبه نرمال از گروه متناهی G است. اگر $(n, |G|) = 1$، آنگاه H در گروه $G \times C(n)$ شبه‌نرمال است، که درآن $C(n)$ گروه دوری از مرتبهٔ n است.

برهان. فرض می‌کنیم $k \in G \times C(n)$ و $h \in H$. ما باید نشان دهیم که به ازای عدد صحیحی چون r' و $h' \in H$ داریم $hk = k^{r'} h'$.

به ازای gیی متعلق به G و عدد صحیح s داریم $k = ga^s$ که درآن $\langle a \rangle = C(n)$. چون H در G شبه نرمال است، برای عددی صحیح چون r و $h' \in H$ داریم $hg = g^r h'$. چون‌که $(n, |G|) = 1$، عددی صحیح چون r' موجود است به طوری‌که $r' \equiv r \pmod{|G|}$ و $r' \equiv 1 \pmod{n}$. ازاین‌رو

$$hk = hga^s = g^r h' a^s = g^{r'} h' a^s = g^{r'} a^s h' = g^{r'} a^{r's} h'$$

$$= (ga^s)^{r'} h' = k^{r'} h'.$$

و H در $G \times C(n)$ شبه نرمال است.

دو لم بالا قضیهٔ زیر را نتیجه می‌دهند.

قضیهٔ ۲.۳. عدد صحیح مثبت m را کــه نه بی‌مجذور و نه دو برابر یك عدد بی‌مجذور است در نظر می‌گیریم. آنگاه گروه متناهی G و یك زیرگروه شبه نرمال H وجود دارند به‌طوری که $[G:H] = m$ و H در G نرمال نباشد.

۳. توسیعهای شبه نرمال هیأت. مفهوم توسیع شبه نرمال هیأت را می‌توان در درسی درنظریهٔ گالوا به‌شرح زیر معرفی کرد.

فرض کنیم F یك هیأت و S یك توسیع نرمال F بــا بعد متناهی بــاشد. می‌گوییم E توسیع شبه نرمال F است هرگاه $F \subset E \subset S$ و بــرای همهٔ هیأتهای K بــا فرض $F \subset K \subset S$ داشته باشیم

$$[EK : K] = [E : E \cap K]. \qquad (**)$$

(EK هیأت تولید شده توسط K و E است.) می‌توان نشان داد کــه این تعریف مستقل از توسیع نرمال S است. بــا استفاده از «قضیهٔ اصمیت طبیعی» (ر. ك. [۶، ص. ۱۹۶])، اگــر E توسیع نرمال F باشد، یك توسیع شبه نرمال F نیز هست.

گیریــم $G = G(S, F)$ گروه گالوای S روی F باشد. و نیز فرض‌کنیم $H = G(S, E)$ گروه‌گالوای S روی E باشد و قرار می‌دهیم $J = G(S, K)$. آنگاه $G(S, EK) = H \cap J$ و $G(S, E \cap K) = \langle H, J \rangle$. بــا تــوجــه به (**) برای تمام زیر گروههای J در G داریم $|\langle H,J \rangle| / |H| = |J| / |H \cap J|$.

بنا به‌شرط(۴) در بخش صفر، H یك زیرگروه شبه نرمال G است. برعکس، اگر H زیر گروه شبه نرمال G باشد، هیأت ثابت آن یك زیر هیأت شبه نرمال از S است.

مراجع

1. M. Aschbacher, Finite Group Theory, Cambridge, N. Y., 1986.
2. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2nd Edition, Dover, N.Y., 1911 or 1955.
3. W. E. Deskins, Quasinormal subgroups of finite groups, *Math Z.*, 82 (1963) 125-132.
4. M. Hall, The Theory of Groups, Macmillan, N.Y., 1959.
5. B.Huppert Endliche Gruppen I. Springer; N.Y., 1967.
6. S. Lang. Algebra, Addison-Wesley, Reading,, Mass., 1965.
7. O.Ore, Structures and group theory I. ***Duke Math. J.***, 3(1937) 149-174.
8. E. Schenkman,, Group Theory, D. Van Nostrand, N.Y., 1965.
9. S.E. Stonehewer, Permutable subgroups of infinite groups, *Math Z.*, 125 (1972) 1-16.
10. A.D. Thomas and G. V. Wood, Group Tables, Shiva Publishing, Orpington, England, 1980.
11. J. G. Thompson, An example of core-free quasinormal subgroups of *p*-groups, *Math Z.*, 96(1967) 225-227.
12. M. Weinstein,, editor, Between Nilpotent and Solvable, Polygonal Pub., Passaic, N.J., 1982.

****

• Dean Hickerson, Sherman Stein, Kenya Yamaoka, "When quasinormal implies normal," *The Teaching of Mathematics*, (June-July 1990), 514-518.

★ هیکرسن، استاین، یاماتوکا، دانشگاه کالیفرنیا در دیویس، آمریکا