آیا ریاضیات ما طبیعی است؟

بررسی موردی مکانیک آماری تعادل•

داوید روئل*
ترجمهٔ احمدرضا طاهری

۱. آیا ریاضیات ما طبیعی است؟

می‌گویند. وقتی ولفگانگ پاولی[1] به بهشت رسید از یکی از علمای سلف که مدتها در آنجا به‌سر برده بود پرسید که چرا عدد ثابت ساختار ریز الکترودینامیک مقدار تقریبی $\alpha \approx ۱/۱۳۷$ را دارد. او دو ساعتی را به محاسبه روی تخته‌سیاه گذراند که در آن مدت پاولی دم برنیاورد و مرتب سر تکان می‌داد. بالاخره وقتی جواب $\alpha^{-۱} = ۱۳۷{,}۰۳۵۹\ldots$ به‌دست آمد، پاولی از جایش بلند شد و در حالی‌که همچنان سرش را تکان می‌داد گچ را گرفت و به یک اشتباه اساسی در محاسبه اشاره کرد. من این داستان را از رز یوست[2] شنیدم و به اصالت کامل آن اعتماد ندارم. ولیکن بسیاری از ما بدمان نمی‌آید اگر فرصتی به‌دست آید از دانای مطلق سؤالهایی در مورد فیزیک و ریاضیات بپرسیم. چند سؤال فوراً به ذهن می‌رسد. به عنوان مثال، سازگاری نظام ریاضیات: مگر نمی‌شود آن‌طور که پیر کارتیه[3] گفته است [۱] خداوند ترتیبی داده باشد که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ناسازگار باشند ولی اثبات تناقض آن‌قدر طولانی باشد که انجام آن در جهان مادی ما میسر نباشد؟ آیا جهان ما بهترین دنیاهای ممکن است؟ آیا این تنها جهان از نوع خود است یا ممکن است ضریب ساختار ریز چیز دیگری باشد؟ چه نوع ریاضیاتی ممکن است به‌وسیلهٔ موجودات هوشمند در سیاره‌ای دوردست پدید آید؟ یا در جهانی دیگر با قوانین فیزیکی متفاوت؟

هانری پوانکاره یک بار اشاره کرد که برای اینکه سؤالی مفهوم داشته باشد، باید بتوان جوابی دارای مفهوم برای آن تصور کرد. این در مورد مسائلی که در بالا ذکر شد لزوماً صادق نیست. درواقع بسیاری اوقات نمی‌توان در مورد جالب توجه‌ترین مسائل به یک صورت‌بندی رضایت‌بخش رسید. در نتیجه معمولاً ما به کمتر از آن رضایت می‌دهیم، یعنی سؤالهایی را بررسی می‌کنیم که از نظر ریاضی بامفهوم‌اند ولی از نظر فلسفی کم‌وبیش بی‌ثمرند.

من قصد دارم در این سخنرانی گیبس به جنبه‌ای کوچک از یک سؤال بلندپروازانه بپردازم: ریاضیات انسان قرن بیستم تا چه حد طبیعی است؟ در اینجا آماده‌ام تعریف ریاضیات را به‌عنوان یک نظام منطقی مبتنی بر اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها بپذیرم. سؤال این است: تا چه حد این نظام به طبیعت و شرایط انسان وابسته است؟ شرایط خاص انسانی و تصادفات تاریخی نباید ارزش صدق قضایا را تغییر دهند ولیکن می‌توانند بر مسیری که تحقیقات ریاضی طی می‌کند و سازماندهی نتایج این تحقیقات تأثیر چشمگیری بگذارند. من مسألهٔ طبیعی بودن ریاضیات را با کلیتی بلندپروازانه عنوان کرده‌ام ولی درواقع به جنبهٔ محدودی از آن خواهم پرداخت. اما قبل از اینکه به این فروتنی نزول کنم بگذارید این پیش‌بینی جسورانه را مطرح سازم که شاید در چند دههٔ آینده نظاره‌گر شمه‌ای از ریاضیات غیربشری باشیم. من ورود قریب‌الوقوع انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی را پیش‌بینی نمی‌کنم، بلکه مقصودم تهاجم کامپیوتر به قلمرو ریاضیات است. از آنجا که مغز انسان نوعی کامپیوتر طبیعی است، دلیلی نمی‌بینم که نوع مصنوعی آن نتواند در امر تخصصی تحقیقات ریاضی بر انسان پیشی بگیرد. حدس من این است که بین ۵۰ تا ۱۰۰ (یا ۱۵۰) سال دیگر، کامپیوترها با انسان در انجام تحقیقات ریاضی به‌طور موفقیت‌آمیز رقابت خواهند کرد و سبک ریاضی آنها با آنچه ما عادت کرده‌ایم به نسبت متفاوت خواهد بود. برای کامپیوتر تحقیق محاسباتی نسبتاً طولانی (عددی یا ترکیبیاتی) دغدغه‌ای نخواهد بود و این امر نه تنها منجر به گونه‌های متفاوتی از اثبات خواهد شد، بلکه مهمتر از آن منجر به اثبات انواع جدیدی از قضایا خواهد گردید.

جدا از این موضوع، اکنون به ریاضیات انسانی باز می‌گردم. از نظر تاریخی، کاوش و تحقیق پیرامون دنیای فیزیکی که در آن زندگی می‌کنیم در شکل‌دادن به ریاضیات نقشی پراهمیت داشته است. هندسه از مطالعهٔ

1. Wolfgang Pauli 2. Res Jost 3. Pierre Cartier

فضای فیزیکی نشأت می‌گیرد، معادلات دیفرانسیل با مکانیک پیوند دارند، و غیره. ولی به همین ترتیب روشن است که ریاضیات قرن بیستم عمدتاً مسائل خود را خود تولید می‌کند و فیزیک تنها یک مرجع الهام ثانوی است. رؤیای بورباکی و چند نسل از ریاضیدانان این بوده است که ساختارهای طبیعی آنالیز را دریابند و به رشد و تکامل آنها برحسب شایستگی ذاتی‌شان بپردازند. شاید بتوان گفت که این رؤیا نیرومندترین و پربارترین منبع الهام برای ریاضیات قرن بیستم بوده است. نقش فیزیک، و اخیراً علوم کامپیوتر، مهم بوده است ولی کمتر مرکزیت داشته است. بدین ترتیب می‌توان تصور کرد که ریاضیات دارای نوعی هستهٔ مرکزی طبیعی است هر چند که ممکن است شاخه‌های مهمی از آن ازکاربرد در فیزیک یا محاسبه تأثیر یا انگیزه بگیرند. روابط متعددی که بین رشته‌های گوناگون ریاضیات مشاهده می‌شود مؤید وجود این هستهٔ مرکزی طبیعی‌اند. انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی باید هستهٔ مرکزی مشابهی برای ریاضیاتشان داشته باشند؛ ممکن است نمود ظاهری آن کاملاً متفاوت باشد، ولیکن در زبان خودشان باید قضیه‌ای داشته باشند که بگوید تصویر مجموعه‌های فشرده تحت نگاشتهای پیوسته، فشرده است.

همین اطمینان خاطر در مورد هستهٔ مرکزی طبیعی ریاضیات است که می‌خواهم آن را در این سخنرانی مورد سؤال قرار دهم. حدس من این است که هستهٔ مرکزی ریاضیات ما و ریاضیات انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی ممکن است وجه اشتراک چندانی نداشته باشند. اطمینان خاطر ما از طبیعی‌بودن ریاضیاتمان بر وحدت آن استوار است: روابط بسیاری بین رشته‌های مختلف مشاهده می‌شود. ولی وحدت ریاضیات نیست که نسبت به آن شک می‌ورزم؛ ریاضیات انسانهای کوچک سبزرنگ فضایی ممکن است با ریاضیات ما روابط بسیاری داشته باشد، هر چند که ممکن است اشتراک چندانی نداشته باشد. اگر بخواهیم یک تصویر هندسی از این وضعیت بدهیم، رشته‌های مختلف ریاضیات را گویهایی فرض کنید (با قطر برابر برای سهولت). حال می‌توان به هر تعداد از این گویها داشت به‌طوری که هر دو گوی بر هم مماس باشند (به شرطی‌که در فضایی با بعد به اندازهٔ کافی بزرگ باشیم). بدین‌ترتیب می‌توان به‌راحتی تجسم کرد که گویهای ما و گویهای سبزرنگ آنها همه نزدیک به هم باشند در عین حال که از هم مجزا هستند.

ممکن است بگویید «این درست»، اما چگونه می‌توان استدلال کرد که ریاضیات ما طبیعی نیست بدون اینکه به کامپیوتر یا موجودات کوچک سبزرنگ فضایی متوسل شویم؟ قصد من این است که همین استدلال را با توسل به فیزیک ریاضی انجام دهم. من مثالهایی از مفاهیم ریاضی را جستجو خواهم کرد که سرچشمهٔ فیزیکی دارند، از نظر ریاضی طبیعی و سودمند از آب درآمده‌اند، و در عین حال اگر از خارج ریاضیات وارد نشده بودند دستیابی به آنها آسان نمی‌بود. ادعای من این است که مکانیک آماریِ حالت تعادل مثالهایی این چنین فراهم می‌آورد.

ولی قبل از پرداختن به این ادعای به نسبت کوچک، باید مقصود از مفاهیم ریاضی دارای منشأ فیزیکی را تشریح کنم. درک جهان برحسب ساخته‌های ریاضی یا به اصطلاح قوانین، امر ساده‌ای نیست. واضح است که قوانین فیزیکی را انسان به دلخواه وضع نمی‌کند، همچنانکه طبیعت نیز خود آنها را بی‌ابهام آشکار نمی‌سازد. درواقع اینکه چرا طبیعت به این خوبی توسط ساخته‌های ریاضی توصیف می‌شود رازی دیرینه است (به مقالهٔ زیبای یوجین ویگنر زیرعنوان «کارایی نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی» [۲] مراجعه کنید). ما نه به این اسرار خواهیم پرداخت و نه به شناخت‌شناسی فیزیک. آنچه مدنظر ماست این است که در بعضی از شاخه‌های فیزیک ــ بالاخص در مکانیک آماریِ تعادل ــ مفاهیم ریاضی عمیقی پدیدار می‌شوند که مطالعهٔ قوانین فیزیک آنها را بر ما تحمیل کرده‌اند. بدون تأثیر فیزیک، مدت زمان رسیدن به این مفاهیم بسیار طولانی می‌بود.

۲. مکانیک آماری تعادل به‌عنوان سرمنشأ مفاهیم ریاضی

فیزیک ریاضی مشتمل است بر تحلیل مدلهای ریاضیِ دسته‌های گوناگونی از پدیده‌های طبیعی. این تحلیل در بدترین حالت منجر به جنگی پراکنده از مسائل کوچک ریاضی می‌شود که فاقد اهمیت‌اند. ولی بسیاری اوقات این مسائل کوچک نظریهٔ وسیعتری را می‌طلبند و این فرایند تجمّع به پیدایش یک رشتهٔ جدید ریاضی می‌انجامد که مفاهیم آن از فیزیک ــ ولی بنا به ضرورت اجتناب‌ناپذیر ریاضی ــ فراهم آمده است.

واقعیتی که در نگاه نخست حیرت‌آور به نظر می‌رسد این است که فرایند تجمع ذکرشده ممکن است به رشته‌های نامرتبط فیزیک وحدت ببخشد. بخشی از تبیین این امر جامعه‌شناختی است و متکی بر وجود جماعت فیزیک‌ـریاضی‌دان است. اما دلیل دیگر اینکه مفاهیم جدید منجر به سازماندهی رشته‌های نامرتبط فیزیک می‌شوند ــ و این دلیلی اساسی است ــ طبیعی‌بودن مفاهیم به لحاظ ریاضی است.

به‌عنوان مثال، در سالهای اخیر، مفاهیم و روشهای مکانیک آماری تعادل در حدی وارد نظریهٔ میدان کوانتوم نسبیتی شده‌اند که عملاً به تلفیق دو رشته انجامیده است. [این مطلب را می‌توان هم در سطح ایده‌های گروه بازهنجاری[1] کنت ویلسن[2] مشاهده کرد و هم درکارهای دقیقتر نظریه‌پردازان میدان سازنده[3].] در راستایی کاملاً متفاوت، مفاهیم مکانیک آماری حالت تعادل در مطالعهٔ دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر مفید واقع شده‌اند و از آنجا در بحث آشوب و تلاطم هیدرودینامیکی. توجه کنید که رابطه‌ای که در اینجا میان مکانیک آماری و دینامیک سیالات ایجاد می‌شود صرفاً ریاضی است: این هیچ ارتباطی با این مطلب ندارد که سیّال تحت مطالعه در سطح میکروسکوپی به‌وسیلهٔ مکانیک آماری (غیرتعادلی) توصیف می‌شود.

علاوه بر سهمی که مکانیک آماری تعادل در مطالعهٔ دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر داشته است که در بالا به آن اشاره شد، این رشته منشأ خدمت به بخشهای دیگری از ریاضیات نیز بوده است. یادآوری می‌کنیم که منشأ تاریخی نظریهٔ ارگودیک، مکانیک آماری است. همچنین یادآوری می‌کنیم که کلود شانُن از تعریف مکانیک آماری آنتروپی برای معرفی مفهوم اطّلاع استفاده کرده است، که این خودْ ناوردای کولموگوروف‌ـسینایی در نظریهٔ ارگودیک را به ارمغان آورده است. در جهتی کاملاً متفاوت، شرط تعادل KMS در مکانیک آماری کوانتومی نقش مهمی در رشد نظریهٔ تومیتاـتاکساکی[4] در باب خودریختی‌های پیمانه‌ای جبرهای فون‌نویمان داشته است (به مطالب بعدی مراجعه کنید).

1. renormalization group 2. Kenneth Wilson

3. constructive field 4. Tomita-Takesaki

در اینجا لازم است کمی صریحتر و مشخصتر صحبت کنم. من با توصیفی عمومی و کوتاه از موضوع مکانیک آماری تعادل آغاز می‌کنم[1] و سپس به سه نمونه از تأثیر مکانیک آماری تعادل در ریاضیات می‌پردازم.

مکانیک آماری با «دستگاههای بزرگ» سروکار دارد، یعنی گردایه‌های بزرگی از زیردستگاههای یکسانِ محصور در یک جعبهٔ $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^3$ وقتی‌که در حد Λ بینهایت بزرگ می‌شود. برای سهولت معمولاً به‌جای $\mathbb{R}^3$ از یک «شبکهٔ» $\mathbb{Z}^\nu$ (مثلاً $\mathbb{Z}$) استفاده می‌کنیم. نوعاً برای دستگاههای کلاسیک، یک مجموعهٔ فشردهٔ F و یک اندازه متناهی مثبت m روی F داده می‌شوند. یک پیکربندی دستگاه بوسیلهٔ نقطه‌ای چون $\xi_i \in F$ برای هر $i \in \Lambda$ مشخص می‌شود. هر حالت آماری در Λ چیزی جز یک اندازهٔ احتمال ρ_Λ روی F^Λ نیست. برای به‌دست آوردن ρ_Λ یک تابع انرژی $E_\Lambda : F^\Lambda \to \mathbb{R}$ و عددی چون $\beta > 0$ (عکس دما)، انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\rho_\Lambda(d\xi) = \frac{1}{Z_\Lambda}[\exp(-\beta E_\Lambda(\xi))]\prod_{i\in\Lambda} m(d\xi_i)$$

که در اینجا Z_Λ تابع افراز

$$Z_\Lambda = \int \exp[(-\beta E_\Lambda(\xi))]\prod_{i\in\Lambda} m(d\xi_i)$$

است. فرض کنیم E_Λ برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ داده شده باشد و در ویژگی جمع‌پذیری تقریبی $E_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \approx E_{\Lambda_1} + E_{\Lambda_2}$، برای Λ_1 و Λ_2 بزرگ، و مجزا، صدق کند. در این صورت می‌توان برای مطالعهٔ حد ρ_Λ وقتی $\Lambda \to \mathbb{Z}^\nu$، معنی قائل شد؛ اینها اندازه‌هایی روی $F^{\mathbb{Z}^\nu}$ هستند که تحت انتقالهای $\mathbb{Z}^\nu$ ناوردا می‌مانند، و حالات تعادل نام دارند. این اشیاء موضوع اصلی مکانیک آماری تعادل (کلاسیک) را تشکیل می‌دهند.

این واقعیت که حالات تعادل اشیائی طبیعی هستند به هم ارزیِ مجموعه‌های آماری[2] مربوط می‌شود. توصیف این موضوع وقتگیر است (به [۸ و ۹] مراجعه کنید) و احتمالاً به این دلیل است که مکانیک آماری تعادل بر مبنای ملاحظات فیزیکی رشد و تحول یافته است نه براساس ضرورت ریاضی.

میزان تصادفی‌بودن[3] در هر واحد حجم در یک حالت تعادل ρ کمیتی طبیعی از نظر فیزیکی است که متناظر است با آنتروپی ترمودینامیکی (بولتسمان[4]). همان‌طورکه قبلاً اشاره شد، مفهوم آنتروپی فیزیکی به تعریف ناوردای کولموگوروف-سینایی در نظریهٔ ارگودیک منجر می‌شود. بررسی وابستگی حالات تعادل به β از نظر ریاضی بسیار دشوار است ولی اهمیت فیزیکی دارد زیرا ناپیوستگی‌های این وابستگی متناظر گذارهای فاز هستند. حالات تعادل متفاوت (متناظر با βهای متفاوت یا اندرکنشهای متفاوت) معمولاً اندازه‌های توأماً تکین هستند. بدین ترتیب ضرورت فیزیکی ما را وادار می‌کند که به بررسی خانواده‌های اندازه‌های توأماً تکین بپردازیم و همین ضرورت فیزیکی رهنمودهایی برای حل مسأله ارائه می‌کند. روشهای نیرومندی که از این طریق به‌دست می‌آیند برای حل مسائل دیگر نیز مورد استفاده

۱. در بین آثار با جهتگیری ریاضی در زمینه‌های گوناگون مکانیک آماری تعادل می‌توان [۳، ۴، ۵، ۶، ۷] را نام برد.

2. ensembles 3. randomness 4. Boltzmann

قرار می‌گیرند، مثلاً در بررسی دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر هذلولوی (از طریق تناظر با مکانیک آماری که به یاری «افرازهای مارکوف» برپا می‌شود).

آنچه در بالا به‌طور خلاصه بیان شد مکانیک آماری دستگاههای کلاسیک است. برای دستگاههای کوانتومی، یک عملگر جایگزین تابع انرژی E_Λ می‌شود، ردّ[1] به‌جای انتگرالگیری می‌آید، و یک حالت تعادل ρ، حالتی روی یک جبر C^* است نه یک اندازهٔ احتمال.

۳. سه مثال و قدری تعمق

در اینجا به توصیف کوتاهی از سه مثال می‌پردازم که در مکانیک آماری ریشه دارند و کم و بیش در حال شکوفاشدن به‌صورت نظریات ریاضی هستند.

اولین مثال قضیهٔ لی-یانگ است که قضیهٔ زیبای ناکامی است.

قضیه (لی و یانگ [۱۰]). فرض کنید داریم $a(\{i,j\}) \in \mathbb{R}$ که $-1 \le a(\{i,j\}) \le 1$ به‌ازای $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$. می‌نویسیم:

$$P(z) = \sum_{X\subset\{1,\dots,n\}} z^{|X|}\prod_{i\in X}\prod_{j\notin X} a(\{i,j\})$$

که در اینجا $|X| = \mathrm{card}X$ و جملات درجهٔ ۰ و درجهٔ n به ترتیب ۱ و z^n محسوب می‌شوند، در این صورت همهٔ صفرهای P روی دایرهٔ $|z| = 1$ قرار دارند.

در کاربرد این قضیه در مکانیک آماری، P تابع افراز Z_Λ برای یک سیستم اسپینی فرومغناطیسی است و محل صفرهای Z_Λ گذارهای فاز را کنترل می‌کند. در ابتدا کوشش قابل ملاحظه‌ای صرف اثبات این قضیه شد که بر مبنای فیزیک طرح شده بود. ایدهٔ جدیدتری از تارو آسانو[2] اکنون اثباتی کوتاه را میسر ساخته است (به ضمیمه مراجعه کنید). من این نتیجهٔ زیبا را ناکام خوانده‌ام زیرا که علی‌رغم کاربردهای مهم آن در فیزیک، در این برهه از زمان، نقطه‌ای تکین و منزوی در ریاضیات است. قابل تصور است که ارتباطاتی با تابع زتا (و حدسهای ویل) داشته باشد؛ همچنان که مثال دوم نشان خواهد داد، ایدهٔ چنین ارتباطی نامعقول نیست. ولی این معجزه به‌وقوع نپیوسته است، و هنوز نمی‌دانیم با این قضیهٔ دایره چه کنیم.

مثال دوم کاربردی از ایده‌های مکانیک آماری در دستگاههای دینامیکی مشتق‌پذیر است که با معرفی‌کردن مفهوم افراز مارکوفی میسر شده است (سینایی [۱۱، ۱۲، ۱۳] و بوئن [۱۴، ۱۵]). افرازهای مارکوفی، مسائل نظریهٔ ارگودیک برای وابرریختی‌های هذلولوی[3] یا شاره‌ها را به مسائلی از مکانیک آماری روی «شبکهٔ» $\mathbb{Z}$ مبدل می‌کنند. در میان کاربردهای بسیار این روش می‌توان از اثبات زیبای سینایی [۱۳] از این مطلب نام برد که وابرریختی‌های هذلولوی لازم نیست دارای یک اندازهٔ ناوردای هموار باشند[4]. همچنین از آنجا که شارهٔ ژئودزیک روی خمینه‌های دارای انحنای منفی، هذلولوی است، امکان بررسی توابع زتا از نوع زلبرگ[5] پدید می‌آید. با استفاده

1. trace 2. Taro Asano 3. hyperbolic diffeomorphisms

۴. به عبارت دقیقتر، مجموعه‌ای باز و چگال از وابرریختی‌های آنوسوف C^∞ وجود دارد که فاقد یک اندازهٔ ناوردای به‌طور مطلق پیوسته نسبت به عنصر حجم ریمانی است.

5. Selberg

از افرازهای مارکوف، این توابع زتا را می‌توان به‌صورت نوعی توابع افراز بیان کرد که قابل بررسی در چارچوب مکانیک آماری هستند. بدین ترتیب نوعی «قضیهٔ اعداد اول» برای طول ژئودزیکهای بسته روی خمینه‌های فشردهٔ دارای انحنای منفی (نه لزوماً ثابت) به‌دست می‌آید — به [۱۶] نگاه کنید.

مثال سوم ما مربوط می‌شود به تعمیم مفاهیمی که در جبرهای جابه‌جایی [تعویض‌پذیر] طبیعی هستند به جبرهای ناجابه‌جایی [غیرتعویض‌پذیر]. (جبرهای جابه‌جایی رابطهٔ تنگاتنگی با هندسه دارند که منبعی غنی از مفاهیم طبیعی است.) همان‌طور که مکانیک آماری کلاسیک روشهای نیرومندی برای کارکردن با اندازه به‌دست می‌دهد (که آن‌را مسأله‌ای در جبر جابه‌جایی می‌توان تلقی کرد)، مکانیک آماری کوانتومی سرچشمه‌ای پربار از الهام برای جبرهای ناجابه‌جایی است. اکنون مثال سوم را تشریح می‌کنیم.

برای یک دستگاه کوانتومی در جعبهٔ Λ با عملگر انرژی E_Λ، تحول عملگر A برحسب زمان به‌صورت زیر داده می‌شود

$$A \mapsto \tau^t_\Lambda A = e^{iE_\Lambda t} A e^{-iE_\Lambda t}$$

از سوی دیگر (با مساوی واحد قراردادن عکس دما)، حالت ρ_Λ را با تعریف زیر داریم

$$\rho_\Lambda(A) = \frac{1}{Z_\Lambda}\mathrm{tr} A e^{-E_\Lambda}, \qquad Z_\Lambda = \mathrm{tr}\, e^{-E_\Lambda}$$

کوبو[1]، مارتین، و شوئینگر متوجه شده‌اند که تابعی کراندار و پیوسته چون F روی $\{z : 0 \le \mathrm{Im}\, z \le 1\}$ وجود دارد که در $0 < \mathrm{Im}\, z < 1$ تحلیلی است و به‌ازای هر مقدار حقیقی t

$$\rho_\Lambda(B\cdot\tau^t_\Lambda A) = F(t), \qquad \rho_\Lambda(\tau^t_\Lambda A\cdot B) = F(t+i)$$

این وضعیت همچنان پابرجا می‌ماند وقتی $\Lambda \to \infty$: حالت تعادل ρ در شرط حدّی KMS (کوبو-مارتین-شوئینگر) نسبت به خودریختی زمانی τ^t صدق می‌کند. از جنبهٔ ریاضی، تومیتا و تاکساکی کشف و ثابت کردند که اگر ρ یک حالت نرمال وفادار[2] روی یک جبر فون نویمان M باشد، آنگاه گروه خودریختی یکتایی (τ^t) از M وجود دارد که ρ در شرط KMS نسبت به (τ^t) صدق می‌کند. این ارتباط غیرمنتظره میان مکانیک آماری و نظریهٔ جبرهای فون نویمان پس از ده سال کار مستقل در جبهه‌های فیزیک و ریاضی پیدا شد. (این ارتباط البته برای هر دو طرف بسیار مفید واقع شد.) این داستان را هوزی‌هیرو آراکی[3] با تأکید برنقش اساسی مقاله‌ای از هوگن‌هولتس[4] و وینینک[5] [۱۸] به طرزی عالی نقل‌کرده است [۱۷]. کارهایی که به دنبال این ماجرا صورت گرفت منجر به احیاء نظریهٔ جبرهای فون نویمان شده است که در آن آثار الن کن[6] نقشی محوری دارد.

1. Kubo 2. faithful 3. Huzihiro Araki 4. Hugenholtz 5. Winnink 6. Alain Connes

سه مثال ما به‌طور تقریباً تصادفی از میان مثالهای ممکن انتخاب شدند[1]؛ هدف به نمایش گذاشتن سرنوشت مفاهیم گوناگون برگرفته از مکانیک آماری در ریاضیات محض بود. بدین ترتیب در مثال ۳، سهم مکانیک آماری کمتر از مثال ۲ اهمیت داشت زیرا که نظریهٔ تومیتا-تاکساکی مستقلاً رشد و قوام یافته بود. در همهٔ موارد، به هر صورت، اثر ایده‌های فیزیکی قابل ملاحظه بود. این نکته به ما چه می‌آموزد؟

بحثی نیست که در میان نظریات فیزیکی این قرن، مکانیک آماری تعادل از لحاظ تولید ایده‌های ریاضی عمیق فوق‌العاده باراور بوده است. نمی‌توانیم ادعا کنیم که دلیل این مطلب را کاملاً درک می‌کنیم. در مقایسه، مکانیک آماری غیرتعادلی از نظر ریاضی نسبتاً عقیم بوده است هر چند مسائلی مفهومی که مطرح می‌کند برای فیزیکدانان از اهمیت کمتری برخوردار نیستند. بعید نیست که این مبحث روزی به منبعی غنی از الهامات ریاضی بدل شود.

حال به سؤال اولیهٔ «طبیعی‌بودن» ریاضیات بازگردیم. برای رشد و نمو ریاضیات راههایی طبیعی وجود دارد: کوشش در حل مسائلی که جالب توجه به نظر می‌رسند از طریق روشهایی که عملی به نظر می‌رسند. بسیاری اوقات یک مسیر تحول طولانی منجر به نتیجه‌ای می‌شود که مرکزی به نظر می‌رسد، ولی بعداً با تغییر دیدگاه، راه کوتاه میان‌بُری به همان نتیجه گشوده می‌شود. این بدین معنی است که آنچه طبیعی به نظر می‌رسد به مرور زمان تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال، تناظر یا توازی میان دو نظریهٔ ریاضی (مانند «دوگانی» در هندسهٔ افکنشی) مدتهای طولانی است که مشاهده شده است و از آن به‌طور شهودی برای اکتشاف بهره‌گیری شده است. ولی امروز مضحک به‌نظر می‌رسد که دو رشتهٔ طولانی از قضایای موازی را جداگانه به‌دست آوریم و همواره از تناظر آنان در شگفت باشیم. بالعکس سعی ما این خواهد بود که یک یکریختی میان دو نظریه ایجاد کنیم و عملاً از یکی از آنها خلاصی یابیم.

حالا بیایید پای فیزیک را به میان کشیم. به خاطر تفاوت معیارها در مورد اهمیت و ذی‌ربط بودن، آنچه از دیدگاه فیزیک طبیعی است با آنچه در ریاضیات طبیعی به نظر می‌رسد بسیاری اوقات متفاوت است. بنابراین مداخلهٔ فیزیک، سیر تاریخی ریاضیات را تغییر می‌دهد. خاطرنشان کرده‌ام که در این قرن میزان مداخلهٔ فیزیک به نسبت اندک بوده است، که طبیعی‌بودن ریاضیاتمان را در معرض تردید قرار می‌دهد. همان‌طور که در مثالهای بالا اشاره شد، سیرهای تاریخی متفاوتی قابل تصورند، و راههای بسیار دیگری نیز می‌توان در نظر گرفت.

شاید وقت آن رسیده باشد که به نتیجه‌گیریهای محتاطانه‌ای اقدام کنیم در حالی‌که به خاطر داریم که طبیعی‌بودن ریاضیاتمان مسأله‌ای خوش‌طرح نیست. تأثیر حوادث تاریخی را نباید بیش از آنچه هست انگاشت. مفاهیمی مانند عدد و گروه به اجبار دیر یا زود وارد مسیر رشد ریاضیات بشری می‌شدند. با این‌حال اعجاب‌انگیز است که بعضی ایده‌های بسیار خوب ریاضیات از منطق درونی سیر تحول ریاضیات نشأت نگرفته‌اند، بلکه از بیرون به آن

۱. در این زمینه، تعریف اخیری که کُن، نارنهوفر، و تیرینگ [۱۹، ۲۰] از «ناوردای کولموگوروف-سینایی ناجابه‌جایی» ارائه کرده‌اند به ذهن می‌رسد، یا کاربردها در مکانیک کوانتومی نسبیتی که در مورد آن می‌توانید به [۲۱] نگاه کنید.

راه پیدا کرده‌اند. شرایط بیرونی متفاوتی می‌توان متصور شد که می‌توانسته‌اند منجر به ریاضیات متفاوتی بشوند. چه قدر متفاوت؟ قضاوت شخصی من این است که ریاضیات انسانی می‌تواند کاملاً متفاوت از آنچه هست باشد.

همچنین فکر می‌کنم تا جایی که ریاضیات ما طبیعی است، این طبیعی‌بودن بیش از آنکه مدیون ضرورت منطقی باشد، به طبیعت خاص ذهن انسان مربوط است. مقصودم طریقی است که «تفکر منطقی» ما با شهود بصری پیوند می‌خورد و با «زبانهای طبیعی» برون‌منطقی اتصال می‌یابد. همچنین مقصودم عشق غریب ما به صورتبندی‌های کوتاهی است که «زیبا» می‌نامیم و روشهای تکراری استدلال که «طبیعی» می‌خوانیم.

مقصود این نیست که ریاضیات یک ساختهٔ دلخواه است. البته که نیست: ریاضیات یک موضوع ساختاری است و به مفهومی چیزی جز ساختار نیست. فهم رمز این ساختار خارج از توان ماست، با این‌حال ذهن انسان می‌تواند آن‌را درک کند: این چیزی است که ریاضیات را این‌قدر جذاب و فریبنده می‌سازد. دوست داریم جریان کشف ساختار ریاضیات را پیمودن راهی تصور کنیم که خدایان برایمان گسترده‌اند. ولی همان‌طور که آنتونیو ماچادو[1] سروده است، شاید راهی در بین نباشد:

رهروا، گام تو
راه است، راه جز این نیست
رهروا، راهی نیست
راه را تو با گام برداشتنت می‌آفرینی[2]

ضمیمه: اثبات قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ. مجموعهٔ $\mathcal{A}$ از چندجمله‌ایهای $P_I(z_I)$ را در نظر بگیرید که در آن:

(i) I یک مجموعهٔ متناهی است.

(ii) $z_I = (z_i)_{i\in I}$.

(iii) $P_I(z_I)$ به‌طور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهای z_i مستوی است.

(iv) اگر $|z_i| < 1$ به‌ازای هر $i \in I$، آنگاه $P_I(z_I) \neq 0$.

به حقایق زیر توجه کنید:

I. برای $a \in [-1, 1]$ حقیقی، چندجمله‌ای

$$P_{\{1,2\}}(z_1, z_2) = z_1 z_2 + a z_1 + a z_2 + 1$$

در ردهٔ $\mathcal{A}$ است. [با در نظر گرفتن تبدیل از مرتبهٔ دوم افکنشی $z_1 \mapsto z_2$ که توسط $P_{\{z_1, z_2\}}(z_1, z_2) = 0$ تعریف می‌شود می‌توان این مطلب را به سهولت دید: نقاط ثابت روی دایرهٔ واحد قرار دارند.]

II. اگر I و J مجزا باشند و $P_I(z_I)$ و $P_J(z_J)$ در $\mathcal{A}$ باشند، حاصلضرب $P_{I\cup J}(z_{I\cup J}) = P_I(z_I) P_J(z_J)$ در $\mathcal{A}$ است.

III. فرض کنید $I \cap \{\alpha, \beta\} = \emptyset$ و بنویسید:

$$P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}(z_{I\cup\{\alpha,\beta\}}) = A z_\alpha z_\beta + B z_\alpha + C z_\beta + D$$

که در اینجا A، B، C، D چندجمله‌ایهایی برحسب z_I هستند. فرض کنید $\gamma \notin I$ و چندجمله‌ای منقبض‌شدهٔ آسانو را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$P^*_{I\cup\{\gamma\}}(z_{I\cup\{\gamma\}}) = A z_\gamma + D$$

در این صورت اگر $P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}$ در $\mathcal{A}$ باشد، $P^*_{I\cup\{\gamma\}}$ نیز هست. [برای $i \in I$، $|z_i| < 1$ را در نظر بگیرید، آنگاه $Az^2 + (B+C)z + D$ برای $|z| < 1$ صفر نمی‌شود. از این‌رو حاصلضرب ریشه‌های آن، یعنی D/A، در $|D/A| \geq 1$ صدق می‌کند، پس $A z_\gamma + D$ برای $|z_\gamma| < 1$ صفر نمی‌شود.]

قضیه. فرض کنید I یک مجموعهٔ متناهی باشد و $a(\{i,j\}) \in \mathbb{R}$ را به‌صورت $-1 \leq a(\{i,j\}) \leq 1$ به‌ازای هر $\{i,j\} \subset I$ انتخاب کنید. بنویسید:

$$P_I(z_I) = \sum_{X\subset I} z^X \prod_{i\in X} \prod_{j\notin X} a(\{i,j\})$$

که در آن $z^X = \prod_{i\in X} z_i$؛ در این صورت P_I در $\mathcal{A}$ است.

برای ملاحظهٔ این مطلب، به چندجمله‌ایهای $z_i z_j + a(\{i,j\})(z_i + z_j) + 1$ توجه کنید (که بنابر I در $\mathcal{A}$ هستند). با ضرب کردن متوالی این چندجمله‌ایها، انجام انقباض آسانو هرگاه که یک متغیر دو بار ظاهر شود، P_I به‌دست می‌آید. از II و III می‌توان نتیجه گرفت که P_I در $\mathcal{A}$ است.

قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ پیامد مستقیم نتایج بالاست. توجه کنید که آسانو مسألهٔ دشوارتری را حل کرد: او یک صورتبندی کوانتومی از قضیهٔ دایرهٔ لی-یانگ را ثابت کرد. (به مقالات آسانو [۲۲، ۲۳]، و همچنین مقالات سوزوکی و فیشر [۲۴] و روئل [۲۵] نگاه کنید.)

مراجع

1. P. Cartier, *La pratique—et les pratiques—des mathématiques*, Encyclopédie Philosophique Universelle, Presses Univ. de France, Paris, 1988 (to appear).
2. E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1-14.
3. D. Ruelle, *Statistical mechanics. Rigorous results*, Benjamin, New York, 1969.
4. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
5. D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 5, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1978.
6. R. Israel, *Convexity in the theory of lattice gases*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1979.

1. Antonio Machado

۲. اصل اسپانیایی این قطعه شعر این است:

Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.

7. Ia. G. Sinai, *Theory of phase transitions: Rigorous results*, Pergamon, Oxford, 1982.

8. D. Ruelle, *Correlation functionals*, J. Math. Phys. **6** (1965), 201-220.

9. O. E. Lanford, *Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics*, Statistical Mechanics and Mathematical Problems, Lecture Notes in Physics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 1-113.

10. T. D. Lee and C. N. Yang, *Statistical theory of equations of state and phase transitions*. II, *Lattice gas and Ising model*, Phys. Rev. **87** (1952), 410-419.

11. Ia. G. Sinai, *Markov partitions and C-diffeomorphisms*, Funktsional Anal. i Prilozhen 2 No. 1 (1968), 64-89; English transl., Functional Anal. Appl. **2** (1968), 61-82.

12. ———, *Construction of Markov partitions*, Funktsional Anal. i Prilozhen 2 No. 3 (1968), 70-80; English transl., Functional Anal. Appl. **2** (1968), 245-253.

13. ———, *Gibbs measures in ergodic theory*, Uspekhi Mat. Nauk **27** No. 4 (1972), 21-64; English transl., Russian Math. Surveys **27** No. 4 (1972), 21-69.

14. R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. Math. **92** (1970), 725-747.

15. ———, *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **95** (1973). 429-459.

16. W. Parry and M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), 573-591.

17. H. Araki, *Some contact points of mathematics and physics*, Invited talk, First Pan-African Congress of Mathematicians, Rabat, 1976 (Zi F, Bielefeld, preprint).

18. R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink, *On the equilibrium states in quantum statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **5** (1967), 215-236.

19. A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring, *Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras*, Comm. Math. Phys. **112** (1987), 691-719.

20. ———, *The dynamical entropy of quantum systems*, preprint.

21. J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum physics: a functional integral point of view*, Springer-Verlag, New York, 1981.

22. T. Asano, *Lee-Yang theorem and the Griffiths inequality for the anisotropic Heisenberg ferromagnet*, Phys. Rev. Letters **24** (1970), 1409-1411.

23. ———, *Theorems on the partition functions of the Heisenberg ferromagnets*, J. Phys. Soc. Japan **29** (1970), 350-359.

24. M. Suzuki and M. E. Fisher, *Zeros of the partition function for the Heisenberg, Ferroelectric, and general Ising models*, J. Math. Phys. **12** (1971), 235-246.

25. D. Ruelle, *Extension of the Lee-Yang circle theorem*, Phys. Rev. Letters **26** (1971), 303-304.

******

• این مقاله مبتنی است بر متن ششمین سخنرانی از سلسله سخنرانیهای گیبس (Josiah Willard Gibbs) که مؤلف آن را در نودوچهارمین نشست سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکا (AMS) در آتلانتای جورجیا، به تاریخ ۶ ژانویهٔ ۱۹۸۸ ایراد کرده است. منبع مقاله این است:

David Ruelle, "Is our mathematics natural?: the case of equilibrium statistical mechanics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, (1) **19** (1988) 259-268.

* داوید روئل، مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES)، فرانسه