آنالیز با پرتاب سکه•

دانیل استروک*

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

این نوشتهٔ کوتاه بر مبنای یک سخنرانی توصیفی تهیه شده است که در ژانویهٔ سال ۱۹۹۹ برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی در دانشگاه ام. آی. تی. ارائه دادم. در آن سخنرانی هدفم آن بود که با بیان یک مثال مقدماتی نشان دهم که چگونه ملاحظات طبیعی احتمالاتی، به بینشهای جالب و گاه ژرفی در بارهٔ آنالیز حقیقی منجر می‌شود. برای آنکه همه چیز تا آنجا که ممکن است در سطحی مقدماتی باشد، مثال ارائه‌شده مبتنی بر پرتاب سکه [شیر یا خط] بود. البته اگر به جای پرتاب سکه به مطالعهٔ چیزهای پیچیده‌تری چون مسیرهای براونی بپردازیم، مجموعه‌ای غنی‌تر از مثالها در اختیار خواهیم داشت(۱).

تقریباً تمام ریاضیدانان در مرحله‌ای از دوران تحصیل خود می‌آموزند که هر تابع یکنوا تقریباً همه‌جا (به مفهوم لبگ) مشتق‌پذیر است(۲). به دنبال اطلاع از این کشف دلگرم‌کننده، خبر ناراحت‌کننده‌ای می‌رسد حاکی از اینکه توابع غیرثابت پیوستهٔ یکنوایی وجود دارند که تکین‌اند به این معنی که مشتق آنها در تقریباً هر نقطه صفر می‌شود(۳). چون این قبیل توابع درکاربردپذیریِ عام قضیهٔ اساسی حسابان تردید ایجاد می‌کنند، آنها را عجیب و غریب تلقی می‌کنیم، به این معنی که غالب افراد انتظار ندارند این توابع جزء آن دسته‌ای باشند که به‌طور عادی به آنها برمی‌خوریم. بدتر اینکه در ساده‌ترین مثال از این دست توابع، اجتماع بازه‌هایی که تابع روی آنها ثابت است، اندازهٔ کامل دارند. این مرض را می‌شود درمان کرد لکن درمان آن چندان طبیعی نیست.

اگر این نوشته هیچ فایدهٔ دیگری نداشته باشد، دست‌کم امیدوارم وجههٔ بهتری برای توابع پیوستهٔ یکنوای تکین فراهم کند. در واقع نشان خواهیم داد که در بررسی بی‌نهایت بار پرتاب یک سکهٔ نامتعادل، ظهور چنین توابعی اجتناب‌ناپذیر است. بورکل به من یادآور شد که پاتریک بیلینگزلی هم تلاش مشابهی کرده بود تا از طریق پرتاب سکه به توابع تکین برسد [B].

قانون ضعیف اعداد بزرگ

در الگوی ریاضی بازی پرتاب سکه [شیر یا خط] که در آن سکه با احتمال p $(0 < p < 1)$ «شیر» و با احتمال $q = 1 - p$ «خط» می‌آید، برآمدها با دنبالهٔ متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل X_1، X_2، ...، X_n، ... نشان داده می‌شوند که در آن $X_n = 1$ اگر نتیجهٔ nامین پرتاب «شیر» و $X_n = 0$ اگر نتیجهٔ nامین پرتاب «خط» باشد. یعنی اگر $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ رشته‌ای از ۰ها و ۱ها باشد، آنگاه(۴)

$$\mathbb{P}_p(X_1 = \epsilon_1, \dots, X_n = \epsilon_n) = p^{\sum_{m=1}^n \epsilon_m} q^{n - \sum_{m=1}^n \epsilon_m}$$

حال فرض کنید $S_n = \sum_{m=1}^n X_m$ تعداد «شیرها»ی ظاهرشده در n پرتاب اول باشد. چون $\mathbb{E}_p[X_m] = 1p + 0q = p$(۵)، داریم

$$\mathbb{E}_p[S_n] = \mathbb{E}_p\left[\sum_{m=1}^n X_m\right] = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}_p[X_m] = np$$

همین‌طور اگر $\overline{X}_m \equiv X_m - \mathbb{E}_p[X_m] = X_m - p$ و $\overline{S}_n = \sum_{m=1}^n \overline{X}_m$، آنگاه

$$E_p[\overline{S}_n] = 0, \qquad \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] = \sum_{m,m'=1}^n \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}]$$

اما

$$\begin{aligned} m = m' &\Rightarrow \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}] = \mathbb{E}_p[\overline{X}_m^2] \\ &= q^2 p + p^2 q = pq(p+q) = pq \\ m \neq m' &\Rightarrow \mathbb{E}_p[\overline{X}_m \overline{X}_{m'}] = q^2 p^2 - 2(pq)^2 + p^2 q^2 = 0 \end{aligned}$$

و بنابراین $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n] = 0$ و

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] = npq = np(1-p)] \leqslant \frac{n}{4} \qquad (۱.۱)$$

اینجا نکتهٔ ظریفی مطرح می‌شود. چون $\overline{S}_n^2$ شامل n^2 جمله است، به‌طور پیشینی [مقدم بر تجربه] انتظار داریم رشد $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2]$ نسبت به n از درجهٔ دوم باشد، ولی در واقع به‌جای $\overline{S}_n^2$، برای S_n^2 چنین وضعیتی رخ می‌دهد:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[S_n^2] &= \mathbb{E}_p[(\overline{S}_n + np)^2] \\ &= \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] + np\mathbb{E}_p[\overline{S}_n] + (np)^2 \\ &= npq + n^2p^2\end{aligned}$$

البته دلیل این اختلاف، صفر شدن میانگین $\overline{X}_m$هاست که همراه با فرض استقلال، منجر به صفر شدن جملات غیر قطری در بسط $\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2]$ می‌شود. چون به‌ازای هر $R > 0$ [۶]

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] \geqslant \mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2, |\overline{S}_n| \geqslant R] \geqslant R^2\mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant R)$$

از (۱.۱) نتیجه می‌شود

$$\mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant R) \leqslant R^{-2}\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^2] \leqslant \frac{npq}{R^2} \leqslant \frac{n}{4R^2} \qquad (۲.۱)$$

یکی از کاربردهای این رابطه این است که

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - P\right| \geqslant R\right) &= \mathbb{P}_p(|S_n - np| \geqslant nR) \qquad (۳.۱)\\ &= \mathbb{P}_p(|\overline{S}_n| \geqslant nR) \leqslant \frac{pq}{nR^2} \leqslant \frac{1}{4nR^2}\end{aligned}$$

یعنی با احتمال حداکثر $\frac{1}{4nR^2}$، اختلاف بین $n^{-1}S_n$ (که متوسط تعداد «شیر»های ظاهر شده است) و p دست‌کم برابر است با R. نتیجهٔ کیفیِ

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \epsilon\right) = 0 \quad \text{، به‌ازای هر } \epsilon > 0 \qquad (۴.۱)$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ نامیده می‌شود.

یک ظریف‌کاری کوچک اما مهم

این سؤال پیش می‌آید که آیا براورد به‌دست آمده در (۳.۱) براورد خوبی است؟ به‌ویژه اینکه آیا n^{-1} آهنگ واقعی همگرایی سمت چپ رابطهٔ (۳.۱) به صفر است؟ به امید اینکه موضوع روشنتر شود، به‌جای $\overline{S}_n^2$، مقدار مورد انتظار $\overline{S}_n^4$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^4] = \sum_{\mathbf{m}} \mathbb{E}_p[\overline{X}_{m_1} \dots \overline{X}_{m_4}]$$

که در آن مجموع روی همهٔ $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$هایی گرفته می‌شود که $1 \leqslant m_i \leqslant n$ به‌ازای $i \in \{1,2,3,4\}$. توجه کنید که با محاسبهٔ مستقیم یا بنا به خاصیت صفر شدن میانگین $\overline{X}_m$ها و استقلال داریم

$$\mathbb{E}_p[\overline{X}_{m_1} \dots \overline{X}_{m_4}] = 0 \qquad (۱.۲)$$

مگر اینکه به‌ازای جایگشتی چون σ از $\{1,2,3,4\}$ داشته باشیم

$$m_{\sigma_1} = m_{\sigma_2} \quad \text{و} \quad m_{\sigma_3} = m_{\sigma_4}$$

از این رو حداکثر $4!n^2$ جملهٔ ناصفر وجود دارد و هر یک از آنها از $\mathbb{E}_p[\overline{X}_1^4] \leqslant pq(1-pq) \leqslant \frac{3}{16}$ بیشتر نیست. به عبارت دیگر

$$\mathbb{E}_p[\overline{S}_n^4] \leqslant \frac{9}{2}n^2 \qquad (۲.۲)$$

اکنون با تکرار همان استدلالی که به کمک آن از (۱.۱) و (۲.۱) به (۳.۱) رسیدیم، مشاهده می‌کنیم که

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant R\right) \leqslant \frac{9}{2n^2R^4} \qquad (۳.۲)$$

روشن است که در پی این توفیق، انتظار داریم آهنگی بهتر از n^{-2} برای همگرایی بیابیم و واقعاً هم می‌یابیم. در واقع از

$$\mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{S}_n}] = \Pi_{m=1}^n \mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{X}_m}] = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

به‌ازای $\lambda \in \mathbb{R}$، ابتدا می‌توان دید که به‌ازای یک $\beta_p \in (0,1]$،

$$\mathbb{E}_p[e^{\lambda\overline{S}_n}] \leqslant e^{n\beta_p\lambda^2}$$

و در نتیجه به‌ازای هر $\lambda > 0$،

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{S_n}{n} - p \geqslant R\right) \vee \mathbb{P}_p\left(\frac{S_n}{n} - p \leqslant -R\right) \leqslant \exp[-n(\lambda R + \beta_p\lambda^2)]$$

و بعد با قراردادن $\lambda = \frac{R}{2\beta_p}$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant R\right) \leqslant 2\exp\left[-\frac{nR^2}{4\beta_p}\right]$$

با این حال، برای مقاصدی که ما در این نوشته داریم، (۳.۲) کفایت می‌کند. ما به‌دنبال آنیم که قانون قوی اعداد بزرگ[۷] را جانشین قانون ضعیف (ر.ک. (۴.۱)) کنیم، یعنی می‌خواهیم نشان می‌دهیم که

$$\mathbb{P}_p\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\right) = 1 \qquad (۴.۲)$$

به این منظور، مشاهده کنید که بنابر (۳.۲) داریم

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant n^{-1/8} \quad \text{،}n \geqslant m \quad \text{به‌ازای یک}\right) \\ &\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant n^{-1/8}\right) \\ &\leqslant \frac{9}{2}\sum_{n=m}^{\infty} n^{-3/2} \to 0 \qquad \text{،}m \to \infty \quad \text{وقتی}\end{aligned}$$

از این رو به‌ازای هر $\epsilon \in (0,1)$، با در نظر گرفتن m به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant n^{-1/8} \quad \text{،}n \geqslant m \quad \text{به‌ازای هر}\right) \geqslant 1 - \epsilon$$

و لذا با احتمال نزدیک به ۱، $\frac{S_n}{n} \to p$ وقتی $n \to \infty$.

نمایش دیگری از پرتاب سکه

مرحلهٔ بعدی برنامهٔ ما مستلزم کدگذاری برآمدهایِ بی‌نهایت بار پرتاب یک سکه به‌صورت یک عدد حقیقی است. در واقع می‌خواهیم به متغیرهای تصادفی $\{0,1\}$-مقداری $\{X_m : m \geqslant 1\}$ به چشم ضرایب بسط دودویی عدد تصادفی

$$Y=\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} X_m \in [0,1] \qquad (۱.۳)$$

نگاه کنیم. البته این شیوهٔ کدگذاری کامل نیست، زیرا گرچه X_mها Y را به‌طور یکتا معلوم می‌کنند، Y همیشه X_mها را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند. مشکل مربوط به آن tهایی از $[0,1)$ است که برایشان $n \geqslant 0$ موجود است به طوری که $2^n t$ عددی صحیح است. برای رفع ابهامی که از این دست tها پیش می‌آید، قرارداد می‌کنیم که ضریب mام، $\epsilon_m(t)$، در بسط دو دویی $t \in [0,1)$ طوری معین شود که

$$0 \leqslant t-\sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\epsilon_m(t) < 2^{-n} \quad \text{به‌ازای هر } n \geqslant 1 \qquad (۲.۳)$$

در این صورت هر $t \in [0,1)$، مجموعهٔ $\{\epsilon_m(t) : m \geqslant 1\} \subseteq \{0,1\}$ را به‌طور کامل معین می‌کند. در واقع $\epsilon_m(t)$ها به‌طور استقرایی با قواعد

$$\epsilon_1(t)=\begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < 2^{-1} \\ 1 & 2^{-1} \leqslant x < 1 \end{cases}$$

و

$$\epsilon_{n+1}(t)=\begin{cases} 0 & 0 \leqslant t-\sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\epsilon_m(t) < 2^{-n-1} \\ 1 & 2^{-n-1} \leqslant t-\sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\epsilon_m(t) < 2^{-n} \end{cases}$$

تولید می‌شوند. به‌صورت نموداری داریم

$$[\quad \epsilon_1=0 \quad)[\quad \epsilon_1=1 \quad)$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{2} \qquad 1$$

$$[\epsilon_1=0,\ \epsilon_2=0)[\epsilon_1=0,\ \epsilon_2=1)[\epsilon_1=1,\ \epsilon_2=0)[\epsilon_1=1,\ \epsilon_2=1)$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{3}{4} \qquad 1$$

و غیره

اهمیت این ملاحظات به خاطر این است که از آنها نتیجه می‌گیریم

$$\mathbb{P}_p(X_n=\epsilon_n(Y),\ n \geqslant 1 \text{ به‌ازای هر}) = 1 \qquad (۳.۳)$$

برای اثبات درستی این مطلب توجه کنید که

$$Y-\sum_{m=1}^{n} 2^{-m}X_m=\sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m}X_m \leqslant 2^{-n}$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که به‌ازای هر $m \geqslant n+1$ داشته باشیم $X_m=1$. اما

$$\mathbb{P}_p(\text{ی‌موجود است که به‌ازای هر } n \geqslant 1,\ m \geqslant n+1,\ X_m=1)$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(X_n=1,\ n>m \text{ به‌ازای هر}) = 0$$

زیرا

$$\mathbb{P}_p(X_n=1 \quad n>m \text{ به‌ازای هر})$$
$$= \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}_p(X_n=1 \quad ,m<n\leqslant m+M \text{ به‌ازای})$$
$$= \lim_{M\to\infty} p^M = 0$$

از این رو

$$\mathbb{P}_p\Big(Y-\sum_{m=1}^{n} 2^{-m}X_m=\sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m}X_m < 2^{-n},\ n \geqslant 1 \text{ به‌ازای هر}\Big) = 1$$

و این معادل است با (۳.۳).

یک نتیجهٔ مستقیم (۳.۳) همراه با قانون قوی اعداد بزرگ (رابطهٔ (۴.۲)) این است که

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{\Sigma_n(Y)}{n}=\frac{S_n}{n} \to p\right)=1 \qquad (۴.۳)$$

که در آن (ر.ک. (۲.۳))

$$\Sigma_n(t) \equiv \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m(t) \qquad t \in [0,1) \text{ به‌ازای هر} \qquad (۵.۳)$$

برای اینکه بفهمید چرا این گزاره جالب است، توجه کنید که به‌ازای هر $n \geqslant 1$ و $0 \leqslant m < 2^n$،

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(2^{-n}m \leqslant Y \leqslant 2^{-n}(m+1)) \\ = p^{\Sigma_n(2^{-n}m)} q^{n-\Sigma_n(2^{-n}m)}\end{aligned} \qquad (۶.۳)$$

از این رو اگر $0 \leqslant a \leqslant b < 1$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(a \leqslant Y \leqslant b) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(L_n(a) \leqslant Y \leqslant R_n(b)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} p^{\Sigma_n(2^{-n}m)} q^{n-\Sigma_n(2^{-n}m)}\end{aligned} \qquad (۷.۳)$$

که در آن

$$L_n(t) \equiv \sum_{m=1}^{n} 2^{-m}\epsilon_m(t) \quad \text{و} \quad R_n(t) \equiv L_n(t)+2^{-n} \qquad (۸.۳)$$

به‌ترتیب، عبارت‌اند از نزدیکترین ممیزهای دودویی مرتبهٔ nام چپ و راست $t \in [0,1)$. محاسبهٔ حدِ (۷.۳) در حالت کلی اساساً کار غیرممکنی است، اما اگر $a=b$، مجموع بالا به یک جمله تبدیل می‌شود که آن تک جمله هم

به دلیل اینکه $\max\{p,q\} < ۱$، وقتی $n \to \infty$ با سرعت نمایی به صفر میل می‌کند، و درنتیجه

$$\mathbb{P}_p(Y=x)=۰ \quad \text{بازای هر } x\in[۰,۱] \text{ و هر } p\in(۰,۱) \qquad (۹.۳)$$

حالت دیگری که در آن محاسبهٔ حد فوق امکان‌پذیر است، وقتی است که سکهٔ پرتاب‌شده متعادل باشد که در این صورت $p=\frac{۱}{۲}$. در این حالت همهٔ جملات مجموع فوق برابرند با ۲^{-n}. لذا، چون تعداد جملات بین $۲^n(b-a)$ و $۲^n(b-a)+۱$ است، نتیجه می‌گیریم که برای $۰\leqslant a\leqslant b\leqslant ۱$،

$$\mathbb{P}_{۱/۲}(a<Y\leqslant b)=\mathbb{P}_{۱/۲}(a\leqslant Y\leqslant b)=b-a \qquad (۱۰.۳)$$

یا معادلش

$$p=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{ متغیر تصادفی یکنواختی روی } [۰,۱] \text{ است } Y \qquad (۱۱.۳)$$

اما متغیر تصادفی یکنواخت الگوی معقولی برای نمایش نقطه‌ای است که به تصادف از بازهٔ $[۰,۱]$ انتخاب می‌شود. لذا وقتی $p=\frac{۱}{۲}$، رابطهٔ (۳. ۴) حاکی است که نسبت ۰ها به ۱ها در بسط دودویی نقطهٔ نوعی $x\in[۰,۱]$ برابر است با ۱. دقیقتر اینکه، اگر یک x تصادفی را به‌طور یکنواخت از بازهٔ $[۰,۱]$ برگزینیم، آنگاه $\frac{۱}{n}\Sigma_n(x)\to\frac{۱}{۲}$. حوالی ابتدای قرن بیستم بود که امیل بورل این مطلب را عنوان کرد و بعدها مارک کاتس [K] جزئیات آن را به زیبایی توصیف نمود. اخیراً هم گودمن [G] صورتهای جالب دیگری از ایدهٔ بورل و کاتس را ارائه داده است.

مسأله‌ای در نظریهٔ اندازه

با الهام از ملاحظات فوق ممکن است بخواهیم بدانیم که چند تا از اعداد $x\in[۰,۱]$ غیرعادی‌اند. به‌ویژه اینکه اگر (رجوع کنید به (۳. ۵)) تعریف کنیم

$$\Delta_p\equiv\left\{t\in[۰,۱]:\lim_{n\to\infty}\frac{\Sigma_n(t)}{n}=p\right\} \qquad (۱.۴)$$

مکمل $\Delta_{۱/۲}$، یعنی $\Delta^c_{۱/۲}$ چقدر بزرگ است؟ دادن پاسخ کامل به این پرسش کار خیلی مشکلی است. (برای ملاحظهٔ شرح جالبی از این مطلب از دیدی کاملاً متفاوت رجوع کنید به [DR].) با این حال، چند گزارهٔ کیفی را می‌توان بدون تلاش چندانی به دست داد.

ابتدا نشان می‌دهم که $\Delta^c_{۱/۲}$ نسبتاً بزرگ است، به این معنی که شامل تعداد ناشمارایی نقطه است. در واقع بازای هر $p\in(۰,۱)\backslash\{\frac{۱}{۲}\}$، داریم $\Delta_p\subseteq\Delta^c_{۱/۲}$. بنابراین اگر نشان دهیم که مثلاً $\Delta_{۱/۳}$ ناشماراست، ثابت خواهد شد که $\Delta^c_{۱/۲}$ نیز ناشماراست. اما فرض کنید نقاط $\Delta_{۱/۳}$ را بتوانیم بشماریم و $\{x_n\}_۱^\infty$ شمارشی از نقاط آن باشد. در این صورت از (۳. ۴) و (۳. ۹) بازای $p=\frac{۱}{۳}$ تناقض

$$۱=\mathbb{P}_{۱/۳}(Y\in\Delta_{۱/۳})=\sum_{n=۱}^{\infty}\mathbb{P}_{۱/۳}(Y=x_n)=۰$$

نتیجه خواهد شد. به این ترتیب $\Delta^c_{۱/۲}$ ناشماراست. البته، دقیقاً همین استدلال نشان می‌دهد که بازای هر $p\in(۰,۱)$، Δ_p ناشماراست و واضح است که اگر $p\neq p'$، دو مجموعهٔ Δ_p و $\Delta_{p'}$ جدا از هم‌اند. اینکه $\bigcup_{p\neq\frac{۱}{۲}}\Delta_p\subseteq\Delta^c_{۱/۲}$ و Δ_pها مجموعه‌هایی دو به دو جدا از هم و هر یک ناشمارا هستند، این اعتقاد را به‌وجود می‌آورد که $\Delta^c_{۱/۲}$ نسبتاً بزرگ است.

اما شواهدی بر خلاف این هم وجود دارند که بر مبنای آنها می‌توان نتیجه گرفت که $\Delta^c_{۱/۲}$ باید خیلی کوچک باشد. در واقع می‌دانیم که یک متغیر تصادفی یکنواخت با احتمال یک در مجموعهٔ $\Delta^c_{۱/۲}$ مقداری اختیار نمی‌کند. به زبان نظریهٔ اندازهٔ لبگ، $\Delta^c_{۱/۲}$ مجموعه‌ای با اندازه صفر است، و مجموعه‌های با اندازهٔ صفر با این ویژگی مشخص می‌شوند که می‌توان آنها را با تعداد شمارش‌پذیری بازه که مجموع طولهاشان به دلخواه کوچک است، پوشاند. یعنی بازای هر $\epsilon>۰$، دنبالهٔ $\{I_n\}_۱^\infty$ از بازه‌های باز موجود است به طوری که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}|I_n|<\epsilon \quad \text{و} \quad \Delta^c_{۱/۲}\subseteq\bigcup_{n=۱}^{\infty}I_n$$

که در آن $|I_n|$ طول بازهٔ I_n است. خلاصه اینکه، هر چند $\Delta^c_{۱/۲}$ شمارا نیست ولی می‌توان آن را با تعداد شمارایی بازه که مجموع طولهاشان به دلخواه کوچک است، پوشاند.

یک دسته تابع صعودیِ نامتعارف

بازای هر $۰<p<۱$، تابع $F_p:[۰,۱]\to[۰,۱]$ را در نظر بگیرید که با رابطهٔ

$$F_p(x)=\mathbb{P}_p(Y\leqslant x) \qquad (۱.۵)$$

تعریف می‌شود و Y متغیر تصادفی معرفی شده در (۳. ۱) است. روشن است که F_p نانزولی است، $F_p(۰)=۰$ و $F_p(۱)=۱$. از (۳. ۷) به راحتی نتیجه می‌شود که

$$x<y \;\Rightarrow\; F_p(x)<F_p(y) \qquad (۲.۵)$$

یعنی F_p اکیداً صعودی است. به علاوه چون بنا بر (۳. ۹)

$$\begin{aligned}\lim_{y\searrow x}F_p(y)&=\mathbb{P}_p(Y\leqslant x)=\mathbb{P}_p(Y<x)+\mathbb{P}_p(Y=x)\\&=\mathbb{P}_p(Y<x)=\lim_{y\nearrow x}F_p(y)\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که F_p پیوسته است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که بازای هر $p\in(۰,۱)$، F_p تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است که $F_p(۰)=۰$ و $F_p(۱)=۱$.

وقتی $p=\frac{۱}{۲}$، بیشتر از اینها می‌توان گفت: بنا بر (۳. ۱۰)، بازای هر $x\in[۰,۱]$، $F_{۱/۲}(x)=x$. اما وقتی $p\neq\frac{۱}{۲}$، تابع F_p تا حدی مرموز است؛ رسم نمودارش مشکل است. مثلاً فرض کنید بخواهیم طول کمان

آن را بیابیم. یادآوری می‌کنیم که برای هر تابع پیوستهٔ $F:[۰,۱]\to\mathbb{R}$، طول کمان نمودار تابع، $\mathrm{Arc}(F)$، را می‌توان با محاسبهٔ حد[۸]

$$\mathrm{Arc}(F)\equiv\lim_{n\to\infty}\sum_{m=۰}^{۲^n-۱}\sqrt{(۲^{-n})^۲+[F((m+۱)۲^{-n})-F(m۲^{-n})]^۲}$$

به‌دست آورد که ممکن است موجود یا $+\infty$ باشد. چون به‌ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی a و b داریم $\frac{a+b}{\sqrt{۲}}\leqslant\sqrt{a^۲+b^۲}\leqslant a+b$، برای هر تابع نازنولی F به‌دست می‌آوریم

$$F(۱)-F(۰)=۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\leqslant \mathrm{Arc}(F)\leqslant ۲$$

با محاسبهٔ مستقیم (یا به کمک قضیهٔ فیثاغورس) معلوم می‌شود که کران پایین $\sqrt{۲}$ به‌ازای $F=F_{۱/۲}$ کسب می‌شود. از طرف دیگر، به سختی می‌توان تابع پیوستهٔ Fای را تصور کرد که به‌ازای آن کران بالای ۲ در نابرابری فوق به‌دست آید. به نظر می‌رسد که نمودار چنین تابعی باید در هر نقطه یا افقی حرکت کند و یا عمودی؛ و خوب، تابعی که نمودارش این‌گونه است نمی‌تواند پیوسته باشد. اما جالب است که بدانید

$$p\in(۰,۱)\setminus\{۱/۲\} \Rightarrow \mathrm{Arc}(F_p)=۲ \qquad (۳.۵)$$

برای اثبات (۵. ۳) می‌توانیم به این صورت عمل کنیم[۹]: می‌خواهیم حدِ

$$L_n\equiv\sum_{m=۰}^{۲^n-۱}\sqrt{۴^{-n}+[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})]^۲}$$

را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم

$$A_n(R)=\{۰\leqslant m<۲^n : F_p((m+۱)۲^{-n}) - F_p(m۲^{-n})>۲^{-n}R\}$$

$$B_n(R)=\{۰\leqslant m<۲^n : F_p((m+۱)۲^{-n}) - F_p(m۲^{-n})\leqslant ۲^{-n}R\}$$

روشن است که به‌ازای هر $R>۰$،

$$L_n \geqslant \sum_{m\in A_n(R)}\sqrt{۴^{-n}+[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})]^۲} + \sum_{m\in B_n(R)}۲^{-n}$$

بنابراین چون از $x\geqslant R$ نتیجه می‌شود که[۱۰]

$$(۱+R^{-۱})(۱+x^۲)^{۱/۲}\geqslant(۱+x)$$

داریم

$$L_n\geqslant(۱+R^{-۱})^{-۱}\sum_{m\in A_n(R)}(۲^{-n}+F_p((m+۱)۲^{-n}) - F_p(m۲^{-n}))+\sum_{m\in B_n(R)}۲^{-n}$$

$$\geqslant(۱+R^{-۱})^{-۱}[۱+\sum_{m\in A_n(R)}(F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n}))]$$

اما واضح است که

$$\sum_{m\in A_n(R)}[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})] = ۱-\sum_{m\in B_n(R)}[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})]$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $R>۰$،

$$L_n\geqslant(۱+R^{-۱})^{-۱}(۲-\sum_{m\in B_n(R)}[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})])$$

از طرف دیگر بنا بر (۳. ۳) و (۳. ۶)،

$$\sum_{m\in B_n(R)}[F_p((m+۱)۲^{-n})-F_p(m۲^{-n})]$$

$$=\mathbb{P}_p(p^{S_n}q^{n-S_n}\leqslant ۲^{-n}R)$$

$$=\mathbb{P}_p\left(((۲p)^{n^{-۱}S_n}(۲q)^{۱-n^{-۱}S_n})^n\leqslant R\right)$$

که در به‌دست آوردن برابری اول از این واقعیت سود جسته‌ایم که $\bigcup_{m\in B_n(R)}[m۲^{-n},(m+۱)۲^{-n})$ دقیقاً مجموعهٔ همهٔ آن $x\in[۰,۱)$هایی است که به‌ازای آنها $p^{\Sigma_n(x)}q^{n-\Sigma_n(x)}\leqslant ۲^{-n}R$. از این رو نتیجه خواهیم گرفت که

$$\mathrm{Arc}(F_p)\geqslant ۲(۱+R^{-۱})^{-۱} \qquad \text{به‌ازای هر } R>۰\text{،}$$

به شرط اینکه نشان دهیم به‌ازای $R>۰$ به دلخواه بزرگ،

$$\mathbb{P}_p\left(((۲p)^{n^{-۱}S_n}(۲q)^{۱-n^{-۱}S_n})^n\leqslant R\right)\to ۰$$

به‌این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که

$$p\in(۰,۱)\setminus\{۱/۲\}\Rightarrow (۲p)^p(۲q)^q>۱ \qquad (۴.۵)$$

دلیلش این است که (۵. ۴) معادل است با

$$p\log ۲p+q\log ۲q = \frac{۲p\log ۲p+۲q\log ۲q}{۲}>۰$$

و تابع $x\in(۰,۲)\mapsto x\log x\in\mathbb{R}$ تابعی اکیداً محدب است که در $x=۱$ صفر می‌شود. بالاخره با ترکیب کردن (۲. ۴) و (۵. ۴) به این نتیجه می‌رسیم که

$$\lim_{n\to\infty}((۲p)^{n^{-۱}S_n}(۲q)^{۱-n^{-۱}S_n})^n=\infty \qquad \text{با احتمال یک،}$$

و روشن است که با این نتیجه، اثبات حکم $\mathrm{Arc}(F_p)\geqslant ۲$ کامل می‌شود. چون از قبل می‌دانیم که این نابرابری در جهت عکس نیز برقرار است، (۵. ۳) به اثبات می‌رسد.

مشتق مرتبهٔ اول F_p

مطالب بالا دلیلی است بر اینکه رفتار نمودار تابع F_p به‌ازای $p \neq \frac{1}{2}$ را خیلی عجیب بشماریم. در حقیقت (۵. ۳) نشان می‌دهد که اساساً در هر نقطه‌ای، مماس بر نمودار تابع F_p یا باید افقی باشد یا عمودی. در این بخش شواهد دیگری حاکی از صحت این تصور ارائه خواهم داد. دقیق‌تر اینکه، اگر مجموعه‌های Δ_p را که در (۴. ۱) تعریف شدند به خاطر آورید، آنچه می‌خواهیم در اینجا بررسی کنیم، این است که

$$p\in(0,1)\setminus\{1/2\} \Rightarrow F'_p(x)=\begin{cases}0 & x\in\Delta_{1/2}\\ \infty & x\in\Delta_p\end{cases} \tag{6.1}$$

که در آن

$$F'_p(x)\equiv\lim_{h\to 0}\frac{F_p(x+h)-F_p(x)}{h}$$

مشتق F_p در x است (البته بخشی از ادعا این است که این حد در نقاط موردنظر موجود است).

برای اثبات (۶. ۱) کافی است صحت آن را در مورد مشتق چپ تحقیق کنیم، یعنی کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F_p(x)-F_p(x-h)}{h}=\begin{cases}0 & x\in\Delta_{1/2}\\ \infty & x\in\Delta_p\end{cases} \tag{6.2}$$

در واقع اگر (۶. ۲) به‌ازای هر $p\in(0,1)\setminus\{1/2\}$ درست باشد، آنگاه چون

$$\Delta_q=\{1-x : x\in\Delta_p\} \quad , \quad F_q(x)=1-F_p(1-x)$$

نتیجه خواهد شد که

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F_p(x+h)-F_p(x)}{h}=\begin{cases}0 & x\in\Delta_{1/2}\\ \infty & x\in\Delta_p\end{cases}$$

به عبارت دیگر همه چیز برمی‌گردد به اثبات (۶. ۲).

اکنون فرض کنید $p\in(0,1)\setminus\{1/2\}$ و $x\in\Delta_{1/2}$ داده شده باشند. بنابر نمادگذاری (۳. ۸) و به کمک (۳. ۶) داریم

$$\begin{aligned}\frac{F_p(R_n(x))-F_p(L_n(x))}{R_n(x)-L_n(x)} &= 2^n\mathbb{P}_p(L_n(x)<Y\leqslant R_n(x))\\ &= 2^n p^{\Sigma_n(x)}q^{n-\Sigma_n(x)}\\ &= (2\sqrt{pq})^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x)-n/2}\end{aligned}$$

چون $p\neq\frac{1}{2}$، پس $pq<\frac{1}{4}$ و بنابراین $\rho_p\equiv 2\sqrt{pq}<1$. از این رو، چون $\frac{1}{n}\Sigma_n(x)\to\frac{1}{2}$،

$$\begin{aligned}&\log\left[(2\sqrt{pq})^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x)-n/2}\right]\\ &\qquad = n\left[\log\rho_p+\left(\frac{\Sigma_n(x)}{n}-\frac{1}{2}\right)\log\frac{p}{q}\right]\to-\infty\end{aligned}$$

که بدین معنی است که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_p(R_n(x))-F_p(L_n(x))}{R_n(x)-L_n(x)}=0 \quad \text{با سرعت نمایی} \tag{6.3}$$

هرچند این محاسبات جای اثبات دقیق را نمی‌گیرد، با این حال قویاً دلالت می‌کند که (۶. ۲) به ازای هر $x\in\Delta_{1/2}$ برقرار است. برای تکمیل اثبات، $n(x)$ را کوچک‌ترین عدد طبیعی $n>1$ بگیرید که $\Sigma_n(x)\geqslant 2$ و به‌ازای $n\geqslant n(x)$ فرض کنید $M_n(x)$ بزرگ‌ترین $1\leqslant m\leqslant n$ باشد که برای آن $\Sigma_n(x)-\Sigma_m(x)=1$. ملاحظه کنید که چون

$$n\geqslant n(x) \Rightarrow L_{M_n(x)}(x)\leqslant x-2^{-n}<x\leqslant R_{M_n(x)}(x)$$

اگر $n\geqslant n(x)$ و $2^{-n-1}<h\leqslant 2^{-n}$، آنگاه

$$\frac{F_p(x)-F_p(x-h)}{h}\leqslant 2^{n-M_n(x)+1}\frac{F_p(R_{M_n(x)}(x))-F_p(L_{M_n(x)}(x))}{R_{M_n(x)}(x)-L_{M_n(x)}(x)}$$

بنابراین نتیجه و (۶. ۳)، کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n(x)}{n}=1 \tag{*}$$

اما برقرار نبودن (*) به چه معناست؟ در چنین صورتی باید $r<1$ و بینهایت مقدار از n موجود باشند که به‌ازای آنها آمدن «شیر» در پرتاب $n+1$ام ($\epsilon_{n+1}(x)=1$) پس از آن رخ دهد که بیش از $(1-r)n$ بار متوالی «خط» آمده است (به‌ازای $rn\leqslant k\leqslant n$، $\epsilon_k(x)=0$، پس به‌ازای این kها مجموع $\Sigma_k(x)$ ثابت است). اما به‌ازای kی مربوط به شروع این توالی از «خط»ها داریم

$$\frac{\Sigma_k(x)}{k}-\frac{\Sigma_n(x)}{n}\geqslant\frac{\Sigma_n(x)}{n}\left|\frac{1}{r}-1\right|$$

برای اینکه $n^{-1}\Sigma_n(x)$ همگرا به $\frac{1}{2}$ باشد، که لازمهٔ فرض ما مبنی بر $x\in\Delta_{1/2}$ است، باید طرف چپ به صفر میل کند (محک کوشی) و طرف راست حدی ناصفر داشته باشد که این تناقض است. لذا (*) برقرار است.

پس (۶. ۲) و بنابراین نیمهٔ اول (۶. ۱) را به‌ازای هر $x\in\Delta_{1/2}$ ثابت کرده‌ایم.

برای تکمیل اثبات (۶. ۱) دوباره فرض می‌کنیم $p\in(0,1)\setminus\{1/2\}$ داده شده باشد، اما اکنون $x\in\Delta_p$. به‌ازای هر $n\geqslant 1$، فرض می‌کنیم $N_n(x)$ کوچک‌ترین $m>n$ باشد به طوری که $\Sigma_m(x)-\Sigma_n(x)=1$ و ملاحظه می‌کنیم که چون

$$x-2^{-n}\leqslant L_n(x)<L_{N_n(x)}(x)\leqslant x$$

از $2^{-n+1}>h\geqslant 2^{-n}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{F_p(x)-F_p(x-h)}{h} &\geqslant \frac{F_p(L_{N_n(x)}(x))-F_p(L_n(x))}{h}\\ &\geqslant 2^{n-1}p^{\Sigma_n(x)}q^{N_n(x)-\Sigma_n(x)}\end{aligned}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که وقتی $n \to \infty$،

$$۲^n p^{\Sigma_n(x)} p^{N_n(x)-\Sigma_n(x)} = \left[(۲p)^p(۲q)^q \left(\frac{p}{q}\right)^{\Sigma_n(x)/n-p} q^{N_n(x)/n-۱}\right]^n \to +\infty$$

چون $n^{-۱}\Sigma_n(x) - p \to ۰$، اگر درست همانند اثبات رابطهٔ (*) در بالا پیش برویم، می‌توانیم ثابت کنیم که $n^{-۱}N_n(x) - ۱ \to ۰$. در نهایت، همان‌طور که در (۵. ۴) دیدیم، $(۲p)^p(۲q)^q > ۱$ و اکنون حکم موردنظر بدیهی است.

خلاصهٔ کلام اینکه بخش اول (۶. ۱) نشان می‌دهد که اگر $p \neq \frac{۱}{۲}$، $F'_p(x) = ۰$ به‌ازای $x \in \Delta_{۱/۲}$ (چیزی که آن را در (۳. ۱۱) «به تصادف» انتخاب شده نامیدیم). از طرف دیگر به تلافی قسمت اول و برای اینکه تابع F_p اکیداً صعودی باقی بماند، $F'_p(x) = \infty$ وقتی $x \in \Delta_p$. هر دو مجموعه چگال‌اند.

پیوست

فرض کنید F تابعی پیوسته و نانزولی روی $[۰,۱]$ باشد که $F(۰) = ۰$ و $F(۱) = ۱$. قرار دهید

$$\sum = \left\{x \in [۰,۱] \ : \ \lim_{h\to ۰} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = ۰\right\}$$

می‌گوییم که تابع F، لبگ‌ـتکین است اگر مجموعهٔ Σ دارای اندازهٔ لبگ ۱ باشد. به عبارت دیگر، اگر μ نشان‌دهندهٔ اندازهٔ بورل روی $[۰,۱]$ باشد که با

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) \qquad ۰ \leqslant a < b \leqslant ۱$$

تعریف می‌شود. لبگ‌ـتکین‌بودن F معادل است با اینکه μ نسبت به‌اندازهٔ لبگ، تکین باشد[11]. هدف این پیوست این است که ثابت کنیم

(پ.۱) $\mathrm{Arc}(F) = ۲$ اگر و فقط اگر F لبگ‌ـتکین باشد.

کار را با یک نمادگذاری مختصر آغاز می‌کنیم. به‌ازای هر $n \geqslant ۰$ و $۰ \leqslant m < ۲^n$ قرار می‌دهیم

$$\Delta_{m,n} = F((m+۱)۲^{-n}) - F(m۲^{-n})$$

بنا بر تعریف، $\mathrm{Arc}(F) = \lim_{n\to\infty} L_n$ که در آن

$$L_n \equiv \sum_{m=۰}^{۲^n-۱} \sqrt{۴^{-n} + \Delta_{m,n}^۲}$$

و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، $\mathrm{Arc}(F)$ بین $\sqrt{۲}$ و ۲ واقع است. حال توجه کنید که

$$۲ - L_n = ۲^{-n}\sum_{m=۰}^{۲^n-۱}\left[(۱+۲^n\Delta_{m,n}) - \sqrt{۱+(۲^n\Delta_{m,n})^۲}\right]$$

اما به‌ازای هر عدد نامنفی a داریم

$$(۱+a) - \sqrt{۱+a^۲} = \frac{۲a}{(۱+a)+\sqrt{۱+a^۲}} \begin{cases} \geqslant \frac{a}{۱+a} \\ \leqslant \frac{۲a}{۱+a}\end{cases}$$

لذا به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۲-L_n}{۲} \leqslant ۲^{-n}\sum_{m=۰}^{۲^n-۱}\frac{۲^n\Delta_{m,n}}{۱+۲^n\Delta_{m,n}} \leqslant ۲ - L_n$$

به عبارت دیگر، اگر تابع $f_n : [۰,۱) \to [۰,\infty)$ را به این صورت تعریف کنیم که $f_n(x) = ۲^n\Delta_{m,n}$ به‌ازای $m۲^{-n} \leqslant x < (m+۱)۲^{-n}$، آنگاه

$$\frac{۲-L_n}{۲} \leqslant \int_{[۰,۱)} \frac{f_n(x)}{۱+f_n(x)}dx \leqslant ۲ - L_n \qquad (\text{پ.۲})$$

برای تکمیل برنامه‌مان از (پ.۲) شروع می‌کنیم و قدری هم از نظریهٔ اندازه کمک می‌گیریم. در وهلهٔ اول، یک نتیجهٔ بلاواسطهٔ (پ.۲) این است که

$$L_n \to ۲ \iff f_n \to ۰ \quad \text{در اندازهٔ لبگ} \qquad (\text{پ.۳})$$

ثانیاً لازم است از این مطلب استفاده کنیم که f_n در اندازهٔ لبگ به صفر میل می‌کند، اگر و فقط اگر اندازهٔ μ نسبت به اندازهٔ لبگ، تکین باشد. این واقعیت، که مبنای پانوشت ۱۱ نیز هست، نتیجه‌ای است از یکی از صورتهای قضیهٔ مشتق‌گیری لبگ (قضیهٔ ۵. ۲. ۲۶ در مرجع [S1])، یعنی f_n به مفهوم لبگ تقریباً همه‌جا به مشتق رادُن‌ـنیکودیم بخش مطلقاً پیوستهٔ اندازهٔ μ همگراست. از این رو، f_n در اندازهٔ لبگ به صفر میل می‌کند اگر و فقط اگر بخش مطلقاً پیوستهٔ μ صفر شود. با دانستن این مطلب، (پ.۱) مستقیماً (پ.۳) نتیجه می‌شود.

پانوشتها

(۱) می‌توانید، مثلاً رجوع کنید به [D] یا [S2].

(۲) می‌توانید، مثلاً رجوع کنید به به بخش ۱. ۲ در [RN].

(۳) مثال مشهورش، تابع کانتور‌ـلبگ است. مثلاً تمرین ۸. ۲. ۱۲ در [S1] را ملاحظه کنید.

(۴) اینجا، و در همه جای این مقاله، $\mathbb{P}_p$ برای نشان‌دادن اندازهٔ احتمالی به کار می‌رود که با پرتابهای مستقل یک سکه مشخص می‌شود که در هر پرتاب، با احتمال p شیر می‌آید و اگر Γ پیشامدی بر مبنای این‌گونه پرتاب سکه باشد، آنگاه $\mathbb{P}_p(\Gamma)$ احتمال رخ‌دادن Γ است. از این رو در فرمولی که در پی می‌آید، طرف چپ را باید چنین خواند: «احتمال اینکه $X_۱ = \epsilon_۱$، $X_۲ = \epsilon_۲$، ...، $X_n = \epsilon_n$.»

(۵) از حرف $\mathbb{E}_p$ برای نشان‌دادن مقدارهای مورد انتظاری که نسبت به $\mathbb{P}_p$ محاسبه می‌شوند، استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر X یک متغیر تصادفی باشد، مقدار مورد انتظار آن نسبت به اندازهٔ احتمال $\mathbb{P}$ چیزی نیست جز انتگرال $\int XdP$. به ویژه اگر X فقط تعداد شمارایی مقدار داشته باشد، آنگاه $\mathbb{E}[X] = \Sigma_x x\mathbb{P}(X = x)$.

(۶) نماد $\mathbb{E}[X, A]$ به این معنی است که مقادیر موردانتظار [امید] متغیر تصادفی X روی مجموعهٔ A حساب می‌شود. به عبارت دیگر، $\mathbb{E}[X, A] = \int_A Xd\mathbb{P}$.

(۷) معنای قوی‌تر بودن قانون قوی از قانون ضعیف، قدری ظریف و مستلزم درک تفاوت بین همگرایی در تقریباً همه جا و همگرایی در اندازه، است. مثلاً رجوع کنید به بخش ۳. ۳ در [S1].

(۸) این حد مطمئناً وجود دارد چون عبارت سمت راست با افزایش n، کاهش نمی‌یابد. برای ملاحظهٔ این مطلب، mامین جمعوند در nامین مجموع را طول یک بردار دو بعدی تصور کنید که مؤلفه‌های آن 2^{-n} و $F((m+1)2^{-n}) - F(m2^{-n})$ هستند، و توجه کنید که این بردار، مجموع بردارهای $2m$ام و $(2m+1)$ام در مجموع $(n+1)$ام است. از این رو، یکنوایی مورد ادعا دقیقاً نابرابری مثلثی برای طول بردارها در صفحه است.

(۹) استدلال زیبایی را که در پی می‌آید آلکس، پراین (Perlin) برایم مطرح کرد. برای آنان که اطلاعاتشان از آنالیز کلاسیک قدری بیشتر است، در پیوست مقاله نشان داده‌ام که طول کمان نمودار هر تابع پیوستهٔ نانزولی F روی $[0,1]$ برابر است با $1 + F(1) - F(0)$ اگر و فقط اگر F ابگدتکین باشد.

(۱۰) برای بررسی صحت این مدعا، دو طرف را به توان دو برسانید.

(۱۱) در واقع می‌توان نشان داد که بخش مطلقاً پیوستهٔ μ به مجموعهٔ Σ اندازهٔ ۰ نسبت می‌دهد.

مراجع

[B] Billingsley, P., *The singular function of bold play*, American Scientist 71 (1983), 392-397.

[DR] de Rham, G., *Sur certaines équations fonctionnelles*, l'Ouvrage publié á i'occasion de son centenaire par l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, pp. 95-97.

[D] Durrett, R., *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, Wadsworth, Belmont, CA, 1984.

[G] Goodman, G., *Statistical independence and normal numbers, an aftermath to Mark Kac's Carus monograph*, American Math. Monthly (1999), 112-126.

[K] Kac, M., *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, Carus Math. Monograph Series #12, J. Wiley, NY, 1959.

[RN] Riesz, F. & Sz-Nagy, B., *Functional Analysis*, translated from the 2nd French edition, Frederick Ungar, New York, 1955.

[S1] Stroock, D., *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, 3rd Edition, Birkhäuser, Boston, 1999.

[S2] ———. *Probability Theory, an Analytic View*, Cambridge U. Press, Cambridge, UK and NY, USA, 1991.

******

• Daniel W. Stroock, "Doing analysis by tossing a coin", *The Math. Intelligencer*, (2) **22** (2000) 66-72.

* دانیل استروک، دانشگاه ام. آی. تی.، آمریکا
dws@math.mit.edu.