نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۷

الگوریتم در ریاضیات جدید و علم کامپیوتر*

دانلد کنوت

دانلد کنوت استاد علم کامپیوتر در دانشگاه استنفرد آمریکاست. وی بـه‌خاطر اثر بزرگـ هفت جلدی خود به نـام هنر برنامه‌نویسی کامپیوتر (که تاکنون سه جلد آن منتشرشده) برندهٔ جایزهٔ تورینگ شده است که از مهمترین جوایز رشتهٔ کامپیوتر به‌شمارمی‌رود. مقالـهٔ حاضر متن سخنرانی کنوت در سمپوزیومی است که در سال ۱۹۷۹ به‌ابتکار او و آکادمیسین ارشف (از شوروی) درشهرخیوه برای بررسی مسائل مربوط به‌رابطهٔ ریاضیات و علم‌کامپیوتر برگزارشد.

هدف از این مقاله مطرح کردن بحثی دربارهٔ یك مسألهٔ فلسفی است که مدتها ذهن مرا به‌خود مشغول داشته است و آن این‌است که نقش واقعی مفهوم الگوریتم درعلوم ریاضی چیست.

من سالهاست براین‌اعتقادم که علم کامپیوتر عمدتاً همان مطالعهٔ الگوریتمهاست. همکاران من همگی در این نظر با من موافق نیستند ولی واقعیت این‌است که ریشهٔ‌اختلاف ما فقط در این است که‌تعریف من از الگوریتم خیلی وسیعتر از چیزی است که آنان درنظر دارند: مـن الگوریتم را در برگیرنـدهٔ تمام مفهومهایی می‌دانـم کـه در فرایندهــای خوشتعریف مطرح‌اند؛ از جمله، ساختار داده‌هایی کـه روی آنها عمل می‌شود و نیز ترتیب عملیاتی که انجام می‌شوند. اما بعضیها الگوریتمها راصرفاً روشهای‌مختلفی‌می‌دانند که‌برای حل‌مسائل خاص به‌کارمی‌روند، تقریباً مثل هر یك از قضایای ریاضی.

درایالات‌متحدهٔ آمریکاکارهایی راکه من وهمکارانم انجام‌می‌دهیم علم کامپیوتر می‌خوانند. در این نامگذاری بر جنبهٔ اجرای الگوریتم توسط ماشین تأکید مـی‌شود. ولی اگر در آلمان یا فرانسه زندگی می‌کردم، رشتهٔ‌کاری من اینفرماتیك[1] یا انفرماتیك[2] خوانده می‌شد؛ که در این‌نامگذاری برموضوعی که‌الگوریتم روی آن عمل می‌کند، بیش از خود فرایند عمل تأکید می‌شود. در اتحاد شوروی حالا همین‌رشته را یا کیبرنتیکا[3] می‌خوانند که برکنترل فرایند تأکید دارد و یا آن را پریکلادنایا ماتماتیکا[4] (ریاضی کاربسته) می‌نـامند که در آن بـر سودمندی‌موضوع وپیوند آن با ریاضی به‌طوراعم تکیه می‌شود. فکر می‌کنم که نام رشتهٔ ما اهمیت حیاتی ندارد، زیرا نام این رشته هرچه باشد ماکار خودمان را خواهیم کرد. گذشته از این، رشته‌های دیگری نظیر ریاضی وشیمی هم دیگر پیوند خیلی محکمی با ریشهٔ نام خود ندارند. بااین‌همه، اگربنا بودکه من‌نامی برای‌رشتهٔ خود انتخاب کنم، اصطلاح علم‌الگوریتم[5] را برمی‌گزیدم که حدود۱۶سال پیش‌تراوب[6] [۳۷، ص ۱] آن را به‌کار برد.

محل برگزاری سمپوزیوم ما، چه به‌خاطر تاریخ‌غنی آن وچه‌به‌دلیل شکوه مناظر آن، برای بحثهای فلسفیی که من مایل به‌مطرح کردن آنها هستم، محل بسیار مناسبی‌است. اکنون موقعیت مطلوبی است که به‌طیف وسیع جنبه‌های کار خود بنگریم، زیرا معمولاً در زندگی پرمشغلهٔ‌روزمره درکشور خود مجال اندیشیدن به‌این مطالب را نداریم. طی هفتهٔ‌آینده فرصت‌کاملی داریم که‌هم به عقب برگردیم و ریشه‌های موضوع کارمان را وارسی کنیم و هم به جلو بنگریم و راجع به اینکه اصلاً کار ما راجع به‌چیست فکر کنیم.

سالها بودکه می‌خواستم این محل‌را زیارت کنم ــ یعنی اززمانی که‌فهمیدم کلمهٔ "الگوریتم" از نام خوارزمی، دانشمند بزرگـ قرن‌نهم میلادی، که نامش به معنی "اهل خوارزم" است، گرفته شده است. کلمهٔ اسپانیولـی "گوارزیسمو"[1] ("عدد دهدهی") نیز از همین ریشه است. خوارزم، برخلاف تصور بسیاری از نویسندگان غربی، فقط نام یك شهر مهم (یعنی خیوه) نیست، بلکه نام منطقهٔ نسبتاً بـزرگی بوده (و هنوز هم‌هست). در واقع‌دریای‌آرال زمانی به‌دریاچهٔ خوارزم‌مشهور بوده‌است (مثلاً به[۱۷، تابلوهای ۹ــ۲۱] نگاه کنید). درقرن هفتم، هنگامی که اسلام در این منطقه رواج یـافت، این محل از فرهنگ پیشرفته‌ای برخوردار بودکه خط و تقویم مخصوص به‌خود نیز داشت (رجوع کنید به بیرونی [۲۱]).

کارتهای فهرستی که توسط کتابخانهٔ‌کنگرهٔ ایالات متحده‌تهیه شده حاکی از آن است که درخشش خوارزمی در سالهای ۸۱۳ تا ۸۴۶ میلادی بوده است. جالب است که اگر معدل این دو عدد را حساب کنیم؛ عدد ۸۲۹٫۵ به‌دست می‌آید. یعنی باتقریب نسبتاً دقیقی‌می‌شود ۱۱۵۰سال‌پیش. بنابراین، ما در زمانی خجسته در اینجا جمع‌شده‌ایم تا به مناسبت گذشت یازده و نیم سده، خاطرهٔ او را گرامی بداریم.

دربارهٔ زندگی خوارزمی چیز زیادی نمی‌دانیم. نام‌کامل وی به عربی درواقع یك زندگینامهٔ فشرده است: ابوجعفر محمدابن مـوسی الخوارزمی، یعنی "محمد، پدر جعفر، پسر موسی، اهل خوارزم". با این‌همه، این‌اسم ثابت‌نمی‌کند که اودراین‌محل به‌دنیا آمده است؛ممکن

1. Informatik
2. Informatique
3. Kibernetika
4. *Prikladnaia Matematika*
5. Algorithmics
6. J. F. Traub

1. guarismo

است اجداد او متولد این محل بوده باشند و نه خودش. ما می‌دانیم که کارهای علمی او در بغداد، به عنوان عضوی از آکادمی دانشمندان معروف به "خانـهٔ حکمت" [دارالحکمه]، در زمـان خلیفه مـأمون، انجام شده است. مأمون حامی بزرگی برای علم بود که بسیاری از دانشمندان را به دربار خود فراخواند تا دانش موجود جهان را جمع‌آوری کنند و آن را توسعه بخشند. در این مورد وی کارهای سلف خـود یعنی خلیفه هـارون‌الرشید را که به خاطر داستانهای شبهای عربی [هزار و یك شب] نزد ما آشناست، ادامه داد. طبری تـاریخ‌نـویس کلمهٔ "القطربلی" را به نام خوارزمی اضافه کرده است و بدین‌ترتیب وی را به محلهٔ قطربل بغداد نسبت می‌دهد. من شخصاً فکر می‌کنم که به احتمال بسیار زیاد خوارزمی در خوارزم به دنیا آمده و پس از دعوت خلیفه، بیشتر عمر خود را در قطربل بغداد گذرانده است، ولی حقیقت این امر شاید هیچگاه معلوم نشود.

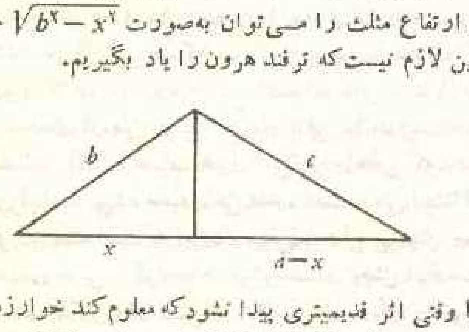
نفوذ معنوی خوارزمی

به هرحال واضح است که کارهای خوارزمی تأثیر بسیاری بر نسلهای بعدی وی داشته است. به استناد الفهرست که نوعی فرهنگ مشاهیر و کتابشناسی است که در سال ۹۸۷ میلادی تألیف شده، در زمان حیات خوارزمی و بعد از آن، مردم به جدولهای او اطمینان داشته‌اند. برخی از کتابهایی که او نوشته مفقود شده است، از جمله کتابی تاریخی در گاهشماری و آثاری در مورد ساعت خورشیدی و اسطرلاب. وی نقشه‌ای از جهان تهیه کرد (که هنوز هم موجود است) و در آن، مختصات جغرافیایی شهرها، کوهها، رودها، و ساحلها را تعیین کرد. این نقشه کاملترین و دقیقترین نقشه‌ای است که تا آن زمان تهیه شده است. او همچنین رساله‌ای کوتاه در مورد تقویم یهودی نوشت و جدولهای مفصل نجومی تهیه کرد که صدها سال از آنها استفاده می‌شد. (البته کار هیچ کس کامل نیست و برخی از محققان جدید معتقدند که این جدولها به آن دقتی که می‌توانست باشد، نیست.)

مهمترین کار خوارزمی به ظن غالب کتابهای وی دربارهٔ جبر و حساب است، که ظاهراً اولین آثار عربی در این مقولات به شمار می‌رود. کتاب جبر وی از شهرت ویژه‌ای برخوردار است و در واقع، حداقل سه نسخه از این کتاب به زبان اصلی عربی هنوز هم باقی است. در حالی که بیش از ۹۹٪ از کتابهای سایر مؤلفان که در الفهرست از آنها نام برده شده، مفقود شده‌اند. کتاب جبر خوارزمی حداقل دوبار در قرن دوازدهم به لاتین ترجمه شد و بدین‌ترتیب بود که اروپاییان با جبر آشنا شدند. در واقع کلمهٔ algebra از بخشی از عنوان کتاب خوارزمی، کتاب الجبر و المقابله، گرفته شده است

با نگاهی دقیقتر به کتاب جبر خوارزمی می‌توان به علت موفقیت وی پی برد. هدف کتاب جمع‌آوری تمام دانش موجود در موضوع جبر نیست بلکه هدف آن ارائهٔ "ساده‌ترین و مفیدترین" عناصر جبر است، یعنی ارائهٔ آن‌گونه ریاضیاتی که معمولاً به کار می‌آید. او کشف کرد کـه به جای ترفندهـای پیچیدهٔ هندسی که قبلاً ریاضیدانان بابلی و یونانی به کار می‌بردند می‌توان روشهای ساده‌تر و منظمتری را به کار برد که تنها متکی به عملیات جبری باشند. به این ترتیب، موضوع در دسترس عدهٔ بیشتری قـرار گرفت. بنا به روشی که او شرح داده است، تمام معادله‌های غیرسادهٔ درجهٔ دوم [با نمادگذاری نوین] به یکی از سه صورت $x^2+bx=c$ ، $x^2=bx+c$ ، $x^2+c=bx$ تبدیل می‌شوند که در آنها b و c اعدادی مثبت‌اند؛ توجه کنید که او با یك عمل تقسیم خود را از ضریب x^2 رها کرده است. اگر او اعداد منفی را می‌شناخت، بسیار خوشحال می‌شد که پیشتر برود و این سه حالت را به یك حالت ساده تبدیل کند.

قبلاً گفتم که خلیفه می‌خواست دانشمندانش تمام معارف علمی سرزمینهای دیگر را به زبان عـربی برگردانند. با اینکه از هیچ اثر قبلی که روش ظریف خوارزمی در مورد معادله‌های درجهٔ ۲ را به کار برده باشد خبری در دست نیست ولی تقریباً تمام بخش دوم کتاب جبر وی (که به مسائل مربوط به اندازه‌گیریهای هندسی می‌پردازد) بر مبنای یك رسالـهٔ بسیار جالب به نام میشنات هامیدوت[1] تهیه شده است که سولومون گاندز[2] با دلایل بسیار تدوین آن را به یك خاخام یهودی به نام نهمیاه[3] در حدود سال ۱۵۰ میلادی نسبت می‌دهد [۴]. تفاوتهای بین میشنات و کتاب جبر، ما را یاری می‌کند تا به روشهای خوارزمی پی ببریم. مثلاً در جایی که متن عبری می‌گوید محیط دایره $۳\frac{۱}{۷}$ برابر قطر آن است، خوارزمی اضافه می‌کند که این فقط یك تقریب قراردادی است و نه یك واقعیت اثبات شده؛ همچنین او به جای عدد بالا اعداد $\sqrt{۱۰}$ و $۶۲۸۳۲/۲۰۰۰۰$ را پیشنهاد می‌کند که این یکی را "ستاره‌شناسان به کار می‌بردند". متن عبری فقط از قضیهٔ فیثاغورس نام می‌برد ولی خوارزمی اثباتی هم بر آن افزوده است. احتمالاً مهمترین تغییری که خوارزمی در متن عبری داده، مربوط است به مسألهٔ مساحت مثلث در حالت کلی: کتاب میشنات فقط فرمول هرون[4] یعنی $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ را ذکر می‌کند که در آن $s=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$ نصف محیط است، ولی کتاب جبر برخورد کاملاً متفاوتی با آن دارد. خوارزمی می‌خواست تعداد عملیات لازم را کاهش دهد؛ بنا براین نشان داد که می‌توان مساحت را از فرمول ساده‌تر [(ارتفاع × قاعده) $\frac{۱}{۲}$] نیز محاسبه کرد که در آن، ارتفاع را می‌توان بـا روشهای جبری ساده‌ای به‌دست آورد. فرض کنیم عمود وارد برضلع بزرگتر از رأس مقابل، آن را در فاصلهٔ x از انتهای ضلع قطع می‌کند. در این صورت، $b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$، و از آنجا $b^2=c^2-a^2+2ax$ و $x=(a^2+b^2-c^2)/(2a)$. اکنون ارتفاع مثلث را مـی‌توان به صورت $\sqrt{b^2-x^2}$ حساب کرد. بنا براین لازم نیست که ترفند هرون را یاد بگیریم.



تا وقتی اثر قدیمیتری پیدا نشود که معلوم کند خوارزمی رهیافت خود به جبر را از دیگری فرا گرفته است، این ملاحظات ما را مجاز می‌دارد که او را "پدر جبر" بخوانیم. به زبان دیگر، می‌توانیم عبارت "ابوالجبر" را نیز به نام وی بیفزاییم! تاریخ عمومی این موضوع، یعنی جبر، را می‌توان با تسامح به شکل زیر نمایش داد.

1. *Mishnat ha-Middot*
2. Solomon Gandz
3. Nehemiah
4. Heron

(من یك خط نقطه‌چین از سومر رسم کرده‌ام تا ارتباط محتمل بین تمدنهای قدیم را نشان دهم که ممکن است بدون واسطهٔ یونان مستقیماً به بغداد رسیده باشند. محققان محافظه‌کار به این ارتباط شك دارند، ولی من فکر می‌کنم آنها بیش از حد تحت تأثیر عقیدهٔ منسوخی قرار دارند که طبق آن، فیلسوفان یونان منشأ تمام معارف علمی بشر محسوب می‌شوند.) مسلم است که خوارزمی هیچگاه در این موضوع از معادله‌های درجهٔ دوم یك متغیره فراتر نرفت ولی بدون شك، جهش او از هندسه به حساب تجریدی جهش مهمی بوده و او بود که موضوع را نظام بخشید و آن را به‌طور قابل ملاحظه‌ای برای مصارف عملی ساده کرد. او از کارهای قبلی دیوفانتوس در نظریهٔ اعداد که تجریدیتر و دورتر از واقعیت و در نتیجه نزدیکتر به جبر جدید بوده‌اند، بی‌خبر بود. مشکل است که یکی از دو نفر خوارزمی یا دیوفانتوس را بر دیگری برتر بدانیم زیرا اهداف آنها متفاوت بوده است. کار دانشمندان یونانی منحصراً جستجوی دانش به خاطر دانش بوده است.

به نظر می‌رسد که نسخهٔ اصلی متن عربی کتاب کوچك خوارزمی در زمینهٔ آنچه که او آن را فن حساب هندی می‌نامید، مفقود شده‌است. اساساً آنچه که ما از این کتاب در دست داریم نسخه‌ای ناقص از قرن سیزدهم است کــه خود ترجمه‌ای است کـه در قرن دوازدهم از عربی به‌لاتین انجام گرفته است. نسخهٔ اصلی، به‌احتمال زیاد، تفاوت زیادی با این نسخه داشته است. وارسی این ترجمهٔ لاتین از دیدگاه جدید جالب است زیرا این متن عمدتاً سندی است در مورد نحوهٔ محاسبه با ارقام هندی (یعنی عددنویسی دهدهی) ولی در آن، از ارقام رومی برای نمایش اعداد استفاده می‌شود! شاید رسالهٔ اصلی خوارزمی نیز از این لحاظ به همین جزوه شباهت داشته باشد، منتها ممکن است او از نمایش اعداد به‌وسیلهٔ حروف استفاده کرده باشد که از منابع قدیمیتر یونانی و عبری اقتباس کرده و در رسالهٔ خود حروف عربی را بدین منظور به‌کار برده‌است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم اولین کتاب در این زمینه مسائل و راه‌حل آنها را با نمادگــذاری قدیمی متداول بیان کرده‌باشد. من فکر می‌کنم که نمادگذاری جدید به فاصلهٔ کوتاهی پس از ظهور کتاب خوارزمی رایج شده است و احتمالاً به همین دلیل هیچ نسخه‌ای از متن اصلی کتاب او باقی نمانده است.

ترجمهٔ لاتین کتاب حساب خوارزمی در جاهایی که باید عمدتاً ارقام هندی گذاشته می‌شد سفید باقی مانده است؛ یعنی احتمالاً کاتب لاتین هرگز نتوانسته است به این کار بپردازد، ولی می‌توان حدس زد که این محلهای خالی چگونه باید پرشوند. آن بخش از دست‌نویس که باقی مانده، تاکنون از لاتین به انگلیسی یا به‌دیگر زبانهای غربی ترجمه نشده ولی ترجمهٔ روسی آن در سال ۱۹۶۴ منتشر شده است [۱۶]. متأسفانه هر دو نسخهٔ بازنویسی شدهٔ دست‌نویس لاتین ([۳]، [۲۸]) بسیار نادقیق‌اند؛ [۱۸] را ملاحظه کنید. مسلماً بسیار مطلوب است که یك نسخهٔ دقیق انگلیسی از این اثر داشته باشیم تا عدهٔ بیشتری بتوانند از محتوای آن بهره ببرند. الگوریتمهایی که در این اثر برای جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم دهدهی داده شده توسط یوشکه‌ویچ [۹] و روزنفلد [۱۶] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌اند ــ البته اگر بتوان اینها را الگوریتم نامید زیرا فاقد بسیاری از جزئیات هستند، هر چند توسط خود خوارزمی نوشته‌شده‌اند! این الگوریتمها از این نظر جالب توجه‌اند که در مقایسه با سایر الگوریتمها برای محاسبه با کاغذ و مداد مناسب نیستند و به‌حذف و پاك‌کردنهای زیاد نیاز دارند؛ به نظر مسلم مــی‌آید که این الگوریتمها اقتباسی مستقیم از روشهای محاسبه با نوعــی چرتکه بوده که در هند و شاید هم در ایران به‌کار می‌رفته‌اند. به نظر می‌رسد روشهایی که برای محاسبه بدون استفاده از چرتکه مناسبترند، در حدود دوقرن بعد توسط اقلیدسی در دمشق ابداع شده باشند.

جزئیات بیشتری از کارهای خوارزمی در مقالهٔ بسیار جالب تومر[1] در زندگینامهٔ علمی دانشوران [۲۶] به چاپ رسیده است. این مقاله مسلماً جامعترین خلاصه‌ای است که از کارهای محمدبن موسی در دست است، هرچند متعجب شدم که در آن اشاره‌ای به این فرض قابل تأمل ندیدم که سنتهای محلی خوارزم ادامهٔ سنتهای بابلی تا دورهٔ اسلامی بوده است.

قبل از اینکه این مقدمهٔ تاریخی را به پایان ببرم، می‌خواهم از مرد برجستهٔ دیگری از ناحیهٔ خوارزم یاد کنم. مقصودم ابوریحان محمدبن احمد بیرونی (۹۷۳ ــ ۱۰۴۸ میلادی) است که فیلسوف، تاریخنویس، سیاح، جغرافیدان، زبانشناس، ریاضیدان، نویسندهٔ دانشنامه، ستاره‌شناس، شاعر، فیزیکدان، عالم کامپیوتر و نویسندهٔ تقریباً ۱۵۰ کتاب بود [۱۲]. اصطلاح "عالم کامپیوتر" از این نظر در این فهرست آورده شد که بیرونی به‌کارایی محاسبه علاقه نشان می‌داد. مثلاً او روش محاسبهٔ مجموع $۱+۲+\dots+۲^{۶۳}$ را پیدا کرد، که نشان‌دهندهٔ تعداد دانه‌های گندم در یك صفحهٔ شطرنج است به نحوی که یك دانه در خانهٔ اول باشد، دو دانه در خانهٔ دوم، دو برابر آن در خانهٔ سوم، و همین‌طور تا آخر. او در این راه از نوعی روش "بخش‌کردن و غلبه‌کردن" بهره برد و ثابت کرد که حاصل برابر است با $((۱۶^۲)^۲)^۲ - ۱$ و نتیجه را که عدد ۱۸,۴۴۶,۷۴۴,۰۷۳,۷۰۹,۵۵۱,۶۱۵ است، در سه دستگاه عددنویسی (دهدهی، مبنای ۶۰ و ابجد) ارائه داد. وی همچنین این عدد را تقریباً معادل ۲۳۰۵ "کوه" گندم دانست به‌شرطی که هر "کوه" شامل ۱۰,۰۰۰ "وادی"، هر وادی شامل ۱۰۰۰ "گله"، هر گله شامل ۱۰,۰۰۰ "بار"، هر بار شامل ۸ "بدره"، و هر بدره شامل ۱۰,۰۰۰ "دانهٔ گندم" باشد [۲۰؛ ۴۱، ص ۱۳۲ تا ۱۳۶؛ ۴۳].

چند سؤال

ویل دورانت می‌گــوید که در آن عصر طلایی دانش قرون وسطی، "دانشمندان به فراوانی ستونهای هزاران مسجد بودند." و اکنون ما، یعنی گروهی از دانشمندان، اینجا هستیم وفرصت آن را داریم که از همان محیط الهام بگیریم؛ و من مایلم چند سؤال مطرح کنم که به‌عقیدهٔ خودم امروزه‌اهمیت دارند. رابطهٔ الگوریتمها با ریاضیات جدید چیست؟ آیا بین‌دیدگاه الگوریتمی و جهان‌بینی ریاضیات سنتی تفاوت اساسی وجود دارد؟ آیا اغلب ریاضیدانان فرایند تفکر اساساً متفاوتی با بیشتر عالمای کامپیوتر دارند؟ چرا در میان اعضای بخشهای ریاضی دانشگاهها، منطقدانان (و تاحد کمتری ریاضیدانانی که در ترکیبیات کار می‌کنند) نسبت به‌دیگر همکاران خود توجه بیشتری به‌علم کامپیوتر نشان می‌دهند؟

این سؤالها را من بیشتر به خاطر تجربه‌ای که خود به عنوان یك دانشجو داشته‌ام، مطرح می‌کنم. من در سال ۱۹۵۷ مطالعهٔ ریاضیات عالی را آغــاز کردم و در همان سال نیز به‌کار با کامپیوترهای رقمی پرداختم. ولی تا سال ۱۹۶۱ هیچگاه تفکر ریاضی خود را با تفکر کامپیوتری خود بــه طور اساسی مخلوط نکــردم. در یك ساختمان، ریاضیدان بودم ودر ساختمان دیگر، برنامه‌نویس کامپیوتر؛ مثل ایــن بود کــه دو شخصیتی باشم. طی‌سال ۱۹۶۱ میلادی از این ایده که ریــاضی و علم کامپیوتر ممکن است زمینه‌های مشترکــی داشته باشند به‌شوق آمدم، زیرا نمادگذاری BNF به‌نظرم ریاضی‌می‌آمد. به‌همین دلیل، یك نسخه از کتاب ساختارهای نحوی چامسکی را خریــدم و

1. G.J. Toomer

سعی کردم الگوریتمی بیابم که تکلیف مسألهٔ ابهام گرامرهای مستقل از متن را تعیین کند (نمی‌دانستم که بارهیلل[1]، پرلس[2] و شامیر[3]، در سال ۱۹۶۰ عدم امکان این امر را اثبات کرده‌اند). من از حل این مسأله عاجز ماندم؛ ولی برای ابهام چند شرط لازم و کافی مفید پیدا کردم و نیز به نتایج دیگری دست یافتم از جمله اینکه زبانهای مستقل از متن براساس یک حرف، زبانهایی باقاعده‌اند. به‌نظرم رسید که این مورد، یک نظریهٔ زیبای ریاضی است که من موفق شده‌ام به اتکای شهود خود از علم کامپیوتر آن را بسازم. و چقدر هم عجیب بود! طی تابستان ۱۹۶۲ یکی دو روز را صرف تحلیل عملکرد درهم‌سازی[4] با استفاده از کاوش خطی[5] کردم. ولی اصلاً به‌نظر نمی‌رسید که این کار حاصل تزویج شخصیت کامپیوتری و شخصیت ریاضی من باشد، زیرا فقط کاربردی از ریاضیات ترکیباتی در مسأله‌ای بود که در برنامه‌نویسی اهمیت داشت.

من فکر می‌کنم این توافق عمومی وجود دارد که فرایند تفکر ریاضیدانان با فیزیکدانان متفاوت است و اینان نیز خود با شیمیدانان و آنها هم با زیست‌شناسان فرایندهای تفکر متفاوتی دارند. همچنین به‌نظر می‌رسد که حقوقدانان، شاعران، نمایشنامه‌نویسان، تاریخدانان، زبانشناسان، مزرعه‌داران و غیره، هر دسته "ذهنیتی" مختص به‌خودشان داشته باشند. هر یک از این گروهها احتمالاً تشخیص می‌دهند که گروههای دیگر برخورد متفاوتی با دانش دارند، و به‌نظر محتمل می‌آید که هر انسانی، در صورتی که امکان انتخاب داشته باشد، به شغل خاصی تمایل نشان دهد که با شیوهٔ تفکری که او با آن رشد کرده است متناسب باشد. اسنو[6] کتاب معروفی دربارهٔ "دو فرهنگ" نوشت، فرهنگ علمی در مقابل فرهنگ علوم انسانی، ولی درواقع تعداد فرهنگها خیلی بیشتر از دوتا به‌نظر می‌رسد.

مربیان علم کامپیوتر بارها مشاهده کرده‌اند که فقط در حدود ۲ نفر از هر ۱۰۰ نفر دانشجویی که در درسهای مقدماتی برنامه‌نویسی نام‌نویسی می‌کنند با موضوع این درس همسازی نشان می‌دهند و به‌نظر می‌رسد برای علم کامپیوتر زاده شده‌اند. (برای نمونه به گرونبرگر [8] نگاه کنید.) همین هفتهٔ پیش این مدعا برای خود من تأیید شد. دریافتم که ۲۲۵ نفر از ۱۱۰۰۰ نفر دانشجوی بعد از دورهٔ کارشناسی دانشگاه ایلینوی در رشتهٔ کامپیوتر درس می‌خوانند. از آنجا که من علم کامپیوتر را مطالعهٔ الگوریتمها می‌دانم، نتیجه می‌گیرم که تقریباً ۲٪ از تمام‌مردم "الگوریتمی فکر می‌کنند"، بدین‌معنی که می‌توانند در مورد فرایندهای الگوریتمی به سرعت استدلال کنند.

هنگامی که این مقاله را می‌نوشتم، از اطلاعات آماری جدیدی مطلع شدم که توسط گریت دویانگ[7] جمع‌آوری شده است. او روانشناسی است که به‌علم کامپیوتر علاقه دارد و من او را در دانشگاه ایلینوی ملاقات کردم. وی اخیراً آزمایشهای جالبی روی دو گروه از دانشجویانی انجام داده که در دورهٔ کارشناسی درسهای مقدماتی کامپیوتر گرفته بودند. گروه I عبارت بود از ۱۳۵ دانشجو که قصد داشتند در رشتهٔ علم کامپیوتر به تحصیل بپردازند و گروه II متشکل از ۳۵ دانشجوی علوم اجتماعی بود. در هردوی این درسها بر برنامه‌نویسی غیرعددی و داده‌ها و ساختارهای کنترلی متعددی تأکید می‌شد، هرچند که مسائل عددی نیز مطرح می‌شدند. دویانگ پرسشنامه‌ای را توزیع کرد که به‌اصطلاح استعداد کمی دانشجویان را می‌سنجید. این آزمون استانده ظاهراً با توانائیهای ریاضی دانشجویان ارتباط دارد. او همچنین از دانشجویان خواست که میزان موفقیت خود در کلاس را براورد کنند. سپس نمره‌هایی را که دانشجویان عملاً در این درسها گرفته بودند به دست آورد. بنابراین وی سه دسته اطلاعات در مورد هر دانشجو در دست داشت:

$A =$ استعداد کمّی

$B =$ تلقی خود دانشجو از توانایی برنامه‌نویسی خود

$C =$ برداشت معلم از توانایی برنامه‌نویسی دانشجو

برای هردو گروه، B با C همبستگی خوبی داشت (ضریب همبستگی تقریباً ۰٫۶ بود)؛ وما می‌توانیم نتیجه بگیریم نمره‌دادن معلم تصادفی نبوده است و نمره‌ها نسبتاً اعتبار داشته‌اند. نکتهٔ جالب این بود که برای دانشجویان رشتهٔ کامپیوتر (گروه I)، هیچ‌نوع همبستگی بین A و B و بین A و C وجود نداشت؛ در حالی‌که برای دانشجویان گروه II، همبستگی قابل‌توجهی، در حدود ۰٫۴، بین‌همین اعداد وجود داشت. روشن نیست که این اطلاعات را چگونه باید تفسیر کرد، زیرا با فرضهای گوناگون و زیادی می‌توان این نتایج را توضیح داد؛ شاید روانشناسان فقط قادر به اندازه‌گیری توانائیهای کمی‌کسانی باشند که مثل روانشناسان فکر می‌کنند! باری، نبودن همبستگی بین توانایی کمی و نمرات برنامه‌نویسی اعضای گروه اول، مرا به شدت به یاد احساسی می‌اندازد که غالباً دربارهٔ تفاوتهای بین تفکر ریاضی و تفکر کامپیوتری دارم؛ بنابراین بررسی بیشتری می‌باید انجام شود.

به عقیدهٔ من، دلیل اصلی این امر که علم کامپیوتر در تقریباً تمام دانشگاههای دنیا رشتهٔ فعالی شده است در حالی‌که بیست سال پیش اصلاً خبری از این رشته نبوده، این نیست که تعداد کامپیوترها زیاد شده است بلکه علت اصلی آن این‌است که بین دانشمندان جهان، آنان که الگوریتمی فکر می‌کنند اکنون جایی برای گردآمدن دارند. ما در بخشهای علم کامپیوتر جمع شده‌ایم زیرا در آنجا کسانی را می‌یابیم که مثل ما فکر می‌کنند. حداقل می‌توان گفت که این فرضیه قابل بحث است، زیرا شش هفت سال است که این اندیشه به ذهنم راه یافته و مشاهدات من در این مدت آن را نقض نکرده است.

بنابراین، هدف من کسب درک عمیقتری از این پدیده‌است؛ زیرا فرضیهٔ "شیوه‌های متفاوت تفکر" صرفاً به سطح موضوع می‌پردازد و بصیرت چندانی عرضه نمی‌کند. آیا می‌توانیم به روشنی معلوم کنیم که "تفکر الگوریتمی" دقیقاً چیست، و تفاوت عمدهٔ آن با تفکر کلاسیک ریاضی در کجاست؟

گاهی اوقات که روی این سؤال فکر می‌کنم، تقریباً متقاعد می‌شوم که تفکر الگوریتمی واقعاً همان تفکر ریاضی است با این تفاوت که به چیزهای مشکلتری می‌پردازد. اما گاهی هم درست نظر مخالف را دارم و آن اینکه الگوریتمها صرفاً به انواع "ساده‌تر" ریاضیات می‌پردازند. روشن است که چنین برخوردی فقط باعث سردرگمی می‌شود و از آن راه به جایی نمی‌بریم.

تازگیها، در حالی‌که راجع به‌این مسائل فکر می‌کردم، ناگهان به یاد مجموعه‌ای از مطالب توصیفی به نام ریاضیات، محتوی، روش واهمیت آن [1] افتادم، و دوباره مقدمهٔ عالی الکساندروف[1] را مطالعه کردم. برایم خیلی جالب بود که از خوارزمی با اهمیت بسیار یاد می‌کند. الکساندروف ویژگیهای مشخصهٔ ریاضیات را در فهرست زیر خلاصه می‌کند:

---

1. Bar-Hillel 2. Perles 3. Shamir
4. hashing 5. linear probing 6. C.P. Snow
7. Gerrit DeYoung

1. A. D. Aleksandrov

- تجریدی بودن، در سطوح گوناگون.
- دقت و استحکام منطقی.
- روابط کمّی.
- طیف وسیع کاربردها.

اما متأسفانه تمام این چهار ویژگی را می‌توان ویژگیهای علم کامپیوتر هم دانست. آیا واقعاً فرقی بین علم کامپیوتر و ریاضیات نیست؟

طرحی برای تحقیق

بالاخره به این نتیجه رسیدم که بدون تحلیل عمیق این سؤال که "ریاضیات چیست؟" نمی‌توانم پیشرفتی داشته باشم. جواب این سؤال البته این است که: "ریاضیات کاری است که ریاضیدانها می‌کنند." به زبان دقیقتر، سؤال درست این است که "ریاضیات خوب چیست؟" و جوابش این است که: "ریاضیات خوب کاری است که ریاضیدانهای خوب انجام می‌دهند."

از این رو، نه کتاب از کتابهایی را که در زمان دانشجویی به عنوان کتاب درسی می‌خواندم، و چند کتاب دیگر را، محض تنوع، از کتابخانه‌ام بیرون کشیدم. تصمیم گرفتم که نگاه دقیقی به صفحهٔ ۱۰۰ (یعنی یك صفحهٔ "تصادفی") از هریك از این کتابها بیندازم و اولین نتیجهٔ موجود در آن صفحه را بررسی کنم. با این روش می‌توانستم نمونه‌ای از کاری را که ریاضیدانهای خوب انجام می‌دهند به دست آورم و سعی کنم انواع تفکری را که به نظر در این کارها مطرح‌اند، بفهمم.

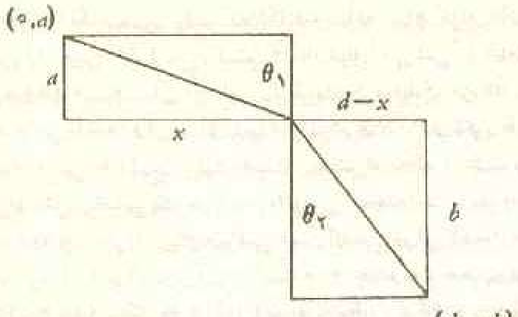
از دیدگاه علم کامپیوتر، مفهوم "انواع تفکر" آن اندازه مبهم نیست که سابقاً بود. زیرا اکنون قابل تصور است که بتوانیم برنامه‌ای کامپیوتری درست کنیم که ریاضیات را کشف کند. در یك چنین برنامهٔ هوش مصنوعی، چه نوع قابلیتهایی را باید در نظر بگیریم که این برنامه بتواند به همان نتایجی برسد که در صفحهٔ ۱۰۰ کتابهای انتخابی من درج شده است؟

برای اینکه این آزمایش بیطرفانه باشد، سعی کردم که قواعد اصلی زیر را رعایت کنم: (۱) کتابها باید همگی قبل از اینکه آنها را بررسی کنم، انتخاب می‌شدند. (۲) در هرمورد صفحهٔ ۱۰۰ باید مورد بررسی قرار می‌گرفت، چون من از محتوای صفحهٔ ۱۰۰ هیچیك از کتابها اطلاع قبلی نداشتم. اگر به هرصورتی صفحهٔ ۱۰۰ انتخاب بدی از آب در می‌آمد، سعی نمی‌کردم حقه بزنم و مثلاً دنبال صفحهٔ دیگری بگردم که بیشتر با پیشداوریهای من جور در بیاید. (۳) هیچیك از اطلاعات به دست آمده را نباید حذف می‌کردم، یعنی هرکتابی را که انتخاب کرده بودم باید در گزارش نهایی هم منعکس می‌کردم تا با انتخاب بخشی از اطلاعات، در نتایج انحراف ایجاد نکنم.

نتایج این آزمایش تا حدودی چشم مرا بازتر کرد، بنابراین مایلم که آنها را با شما در میان بگذارم. خلاصهٔ آنچه که به دست آورده‌ام در مورد هر کتاب به شرح زیر است.

کتاب ۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس

ابتدا به کتابی نگاه کردم که در سال اول دانشجویی خــود از طریق آن با ریاضی عالی آشنا شدم، یعنی کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشتهٔ جورج توماس [۲۵]. در صفحهٔ ۱۰۰ این کتاب، وی به مسألهٔ زیر می‌پردازد: چه مقداری از x، زمان پیمودن از $(0,a)$ به $(x,0)$ وسپس به $(d,-b)$، را حداقل می‌سازد، اگر قرار باشد که با سرعت s_1 از $(0,a)$ به $(x,0)$، و با سرعت دیگری مثل s_2 از $(x,0)$



به $(d,-b)$ بروم؟ به زبان دیگر، می‌خواهیم تابع زیر را مینیمم کنیم:

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}/s_1+\sqrt{b^2+(d-x)^2}/s_2.$$

جواب این است که از $f(x)$ مشتق می‌گیریم

$$f'(x)=\frac{x}{s_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{s_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

$$=\frac{\sin\theta_1}{s_1}-\frac{\sin\theta_2}{s_2}.$$

هنگامی که x از ۰ به d می‌رود مقدار $(\sin\theta_1)/s_1$ از صفر شروع می‌شود و افزایش می‌یابد، در حالی که مقدار $(\sin\theta_2)/s_2$ به سمت صفر کاهش می‌یابد. بنابراین، مشتق از مقادیر منفی آغاز، و به مقادیر مثبت ختم می‌شود؛ پس نقطه‌ای هست که در آن مشتق صفر می‌شود، یعنی $(\sin\theta_1)/s_1=(\sin\theta_2)/s_2$، و درهمین جاست که مینیمم به دست می‌آید. توماس می‌گوید که این همان "قانون اسنل[1]" در نورشناسی است و امواج نور به نحوی می‌دانند که چگونه زمان طی مسیرخود را مینیمم کنند.

به نظر می‌رسد ریاضیاتی که در این مثال مطرح است، اساساً روش قاعده‌داری برای مینیمم‌سازی است که مبتنی است بر دستکاری فرمول و تناظر بین فرمولها و اشکال هندسی، همراه با قدری استدلال در باب تغییرات مقادیر تابع. خوب است که این را به خاطر بسپاریم و به سراغ مثالهای دیگر برویم تا ببینیم این مثالها تا چه حد جنبه‌های مشترك دارند.

کتاب ۲. یك بررسی کلی ریاضیات

با نگاهی به مجلداتی که الکساندروف و دیگران [۱] تهیه کرده‌اند، متوجه می‌شویم که صفحهٔ ۱۰۰ در مورد آنالیز است که توسط لاورنتیف[2] و نیکولسکی نوشته شده. در این صفحه نحوهٔ به دست آوردن مشتق تابع $\log_a x$ به روشی هوشمندانه نشان داده می‌شود

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

چون تابع لگاریتم پیوسته است، داریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}=\frac{1}{x}\log_a e$$

زیرا قبلاً ثابت شده که عدد $(1+(1/n))^n$ وقتی مقدار صحیح یا اعشاری n به سمت بینهایت می‌رود، مقدار ثابتی به نام e است. در این مثال، استدلال مبتنی است بر دستکاری فرمول و درك روشهای حدی.

1. Snell's law 2. Lavrent'ev

کتاب ۳. توپولوژی عمومی کلی[1]

کتاب سومی که انتخاب کردم، یك کتاب درسی متداول در توپولوژی [۱۰] بود که در صفحهٔ ۱۰۰ آن تمرین زیر آمده‌است: "مسألهٔ الف. تصویر یك فضای همبند تحت یك نگاشت پیوسته، همبند است." برای این تمرین راه‌حلی داده‌نشده ولی فکر می کنم چیزی شبیه به این در نظر بوده است: ابتدا به‌یاد می آوریم که طبق تعریف، تابع f از فضای توپولوژیك X به‌فضای توپولوژیك Y پیوسته‌است اگر تصویر معکوس $f^{-1}(V)$، به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، در X باز باشد. و نیز فضای توپولوژیك X همبند است اگـر نتوانیم آن را به صورت اجتماع دومجموعهٔ مجزای ناتهی باز بنویسیم. بنا براین باید سعی کنیم ثابت کنیم که Y همبند است با این فرض که f پیوسته، و X همبند است وداریم $f(X)=Y$. اگر $Y=V_1\cup V_2$، که در آن V_1 و V_2 مجزا و باز هستند، آنگاه $X=f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)$؛ $f^{-1}(V_1)$ و $f^{-1}(V_2)$ مجزا و باز هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که یا $f^{-1}(V_1)$ تهی است و یا $f^{-1}(V_2)$. حالا فرض می کنیم $f^{-1}(V_1)$ تهی باشد. بنا براین V_1 تهی‌است زیرا $V_1\subseteq f(f^{-1}(V_1))$ واین همان‌است که‌می‌خواهیم.

تفکر ریاضیی که دراین مثال مطرح است تا حدی با مثالهایی که قبلاً دیدیم فرق دارد، زیرا عمدتاً شامل ایجاد زنجیره‌هایی از استلزامهاست که از فرضیات آغاز و به نتایج مطلوب ختم می‌شوند و در این کار، از مجموعه‌ای از واقعیتها نظیر $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ کمك گرفته مـی‌شود. این کار با ایجاد یك زنجیره از دستورالعملهای کامپیوتری قابل مقایـه است که اطلاعات ورودی معینی را به‌اطلاعات خروجی مطلوب تبدیل می کند و دراین راه از مجموعـه‌ای از زیرروالها بهره می گیرد ــ هرچند که احکام توپولوژیك سرشت مجردتری دارند.

در اینجا نوع دیگری از تفکر ریاضی نیـز مطرح است و باید مراقب باشیم که آن را نیز نادیده نگیریم و آن این است که لازم بود کسی مفاهیم پیوستگی وهمبندی را به‌نحوی تعریف کند که به‌نظریه‌ای غنی‌همراه با کاربردهـای فراوان منجر شود و در نتیجه موارد خاص بسیاری که قبل ازابداع الگوی مجرد اثبات شده بودند، تعمیم یابند.

کتاب ۴. از قرن هیجدهم

کتاب دیـگر موجود در فهرست من، کتـاب منابـع ریاضی[2] نوشتهٔ استرویك[3] است که تعدادی ازمقاله‌های معروفی را که درفاصلهٔ سالهای ۱۲۰۰ تا ۱۸۰۰ میلادی نوشته شده‌اند، نقل می کنـد. مطالب صفحهٔ ۱۰۰ این کتاب مربوط است به‌کوشش اویلر در اثبات قضیهٔ اساسی جبر، که طی آن وی نتیجهٔ کمکی زیر را به‌دست می آورد. "قضیهٔ ۴. هرچندجمله‌ای درجهٔ چهارم به‌صورت $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ با ضرایب حقیقی را می‌تـوان به‌صورت حاصلضرب دو چند جمله‌ای درجهٔ دوم نوشت."

روش او در این مورد به‌شرح زیـر است. ابتدا بـا قرار دادن $x=y-(1/4)A$ مسأله را به‌حالت $A=0$ تبدیل می کند. سپس باید مسألهٔ یافتن u، α، و β در

$$(x^2+ux+\alpha)(x^2-ux+\beta)=x^4+Bx^2+Cx+D$$

را حل کند؛ بنابراین باید معادله‌های

$$B=\alpha+\beta-u^2,\quad C=(\beta-\alpha)u,\quad D=\alpha\beta$$

را حـل کنـد. این معادله‌ها بـه روابط $2\beta=B+u^2+C/u$ و $2\alpha=B+u^2-C/u$ و $(B+u^2)^2-C^2/u^2=4D$ منجرمی‌شوند، ولی چندجمله‌ای درجهٔ سوم

$$(u^2)^3+2B(u^2)^2+(B^2-4D)u^2-C^2$$

وقتی u^2 از ۰ تا ∞ تغییر می کنـد، از $-C^2$ به $+\infty$ می‌رود، و لذا ریشهٔ مثبت دارد وکار تجزیه به‌انجام رسیده است.

(اویلرکار را با تعمیم این مسأله ادامه می‌دهد و استدلال می کند کـه هر معادلهٔ از درجـهٔ 2^n را می‌توان بـه صورت حاصلضرب دو چندجمله‌ای از درجهٔ 2^{n-1} نوشت. او این کار را با کمك معادلهٔ از درجهٔ فرد $(1/2)\binom{2^n}{2}$ وبرحسب u^2 انجام می‌دهد که جملهٔ ثابت منفی دارد. ولی این قسمت از نتیجه‌گیریهای وی دقیق نیست و بعدها لاگرانژ وگاوس اشتباه مهم آن را متذکر می‌شوند.)

هنگامی که من برای اولین‌بار به‌این مثال نگاه‌کردم، آن راخیلی بیشتر از مثالهای دیگر "الگوریتمی" یافتم، شاید به‌این‌علت که اویلر اساساً شرح می‌دهد که چگونه یك چندجمله‌ای درجهٔ چهارم را به‌عنوان ورودی تلقی کنیم و به‌عنوان خروجی، دوچندجمله‌ای درجهٔ دوم تحویل بگیریم. خصوصیات ورودی / خروجی، جنبه‌های مهم الگوریتمها هستند، هـر چند راه حل اویلر نسبتاً ساده و سرراست است و از آن ساختار کنترلی پیچیده‌ای که معمولاً الگوریتمها دارند برخوردارنیست. نوع تفکر ظاهراً عبارت است از (الف) تبدیل یك مسألهٔ عمومی به‌یك حالت خاص ساده‌تر (با نشان دادن اینکـه A را می‌توان صفر فرض کرد و تشخیص اینکه معادلهٔ درجهٔ ششم برحسب u حقیقتاً یك معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب u^2 است)؛ (ب) دستکاری فرمولهـا برای حل دستگاه معادلات برحسب α، β؛ u و (ج) تعمیم مسأله با تشخیص الگویی که در مورد معادله‌های درجـهٔ چهارم وجود دارد و ظاهراً قابل گسترش به‌درجه‌های ۸ و ۱۶ و غیره است.

کتاب ۵. جبرمجرد

انتخاب بعدی من یك کتاب درسی جا افتادهٔ دیگر یعنی جبر تعویضپذیر نوشتهٔ زاریسکی‌وساموئل [۲۹] بود. صفحهٔ ۱۰۰ این کتاب به‌ساختار کلی هیأتهای دلخواه می‌پردازد. فرض کنید k و K هیأتهایی با‌رابطهٔ $k\subseteq K$ هستند؛ درجهٔ تعالی K روی k به‌صورت عدد اصلی هر "پایهٔ تعالی" L از K روی k تعریف می‌شود؛ L مجموعه‌ای است که تمام زیرمجموعه‌های متناهی آن روی k از لحاظ جبری مستقل‌اند و تمام عنـاصر K روی $k(L)$ جبـری می‌باشند؛ یعنی ریشه‌های معادلاتـی چندجمله‌ای هستند که ضریبهای آنها در کوچکترین هیأت شامل $L\cup k$ قراردارند. بررسیهای کتاب در این صفحه به‌این‌نتیجه می‌رسد که این عدداصلی یك ناوردای خوشتعریف از k و K است؛ یعنی تمام پایه‌های تعالی K روی k عدد اصلی یکسانی دارند.

بعد نوبت قضیهٔ ۲۶ است: اگر $k\subseteq K\subseteq\kappa$، آنگاه درجهٔ تعالی κ روی k برابر بـا مجموع درجه‌های تعالی K روی k و κ روی K است. برای اثبـات این قضیه، زاریسکی و ساموئل فرض می کنند L یك پایهٔ تعالی K روی k و I یك پایهٔ تعالی κ روی K باشد؛ هدف این است که ثابت کنند که $L\cup\mathrm{I}$ یك پایهٔ تعالی κ روی k است و قضیه ثابت می‌شود چون که L و I مجزا هستند.

اثبات‌مورد‌نیاز، مشکل نیست و می ارزد که‌آن را به‌تفصیل بررسی کنیم. فرض کنید $\{x_1,\ldots,x_m, X_1,\ldots,X_M\}$ یك زیرمجموعهٔ متناهی از $L\cup\mathrm{I}$ باشد که در آن xها در L و Xهادر Iاند، وفرض کنید که آنها در یك معادلهٔ چند جمله‌ای روی k صدق می کنند؛ یعنی

1. Kelley 2. *Source Book in Mathematics* 3. Struik

داریم،

$$\sum_{\substack{e_1,\dots,e_m\geq 0\\ E_1,\dots,E_M\geq 0}} \alpha(e_1,\dots,e_m,E_1,\dots,E_M)\,x_1^{e_1}\cdots x_m^{e_m}\cdots X_1^{E_1}X_M^{E_M}=0 \qquad (*)$$

که در اینجا تمام $\alpha(e_1,\dots,e_m,E_1,\dots,E_M)$ها در k هستند و تنها تعدادی متناهی از αها غیرصفرند. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$\sum_{E_1,\dots,E_M\geq 0}\Big(\sum_{e_1,\dots,e_m\geq 0}\alpha(e_1,\dots,e_m,E_1,\dots,E_M)\,x_1^{e_1}\cdots x_m^{e_m}\Big)X_1^{E_1}\cdots X_M^{E_M}=0 \qquad (**)$$

که یک چندجمله‌ای برحسب X است و ضریبهای آن در K قرار دارند؛ بنابراین تمام این ضریبها به‌خاطر استقلال جبری $\mathbb{L}$ روی K صفر هستند. این ضریبها به‌نوبهٔ خود چندجمله‌ایهایی برحسب x هستند که ضرایب آنها در kاند، بنابراین تمام αها باید صفر باشند. به‌عبارت دیگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از $L\cup\mathbb{L}$ به‌طور جبری مستقل است.

و بالاخره، تمام عنصرهای K روی $k(L)$، و تمام عنصرهای κ روی $K(\mathbb{L})$، جبری هستند. از نظریهٔ توسیعهای جبری که قبلاً مطرح شده است نتیجه می‌شود که تمام عنصرهای κ روی $k(L)(\mathbb{L})$، که کوچکترین هیأت شامل $k\cup L\cup\mathbb{L}$ است، جبری هستند. پس $L\cup\mathbb{L}$ در معیارهای لازم برای پایهٔ تعالی صدق می‌کند.

توجه کنید که این اثبات شامل "ساختارهای داده‌ها"ی نسبتاً پیچیده‌ای است؛ یعنی شامل نمایشهایی از اشیاء پیچیده است که در این مورد چندجمله‌ایهایی با متغیرهای زیاد می‌باشند. ایدهٔ اصلی در این اثبات برنوعی ایهام قرار دارد: هم‌ارزی چند جمله روی k در (*) و چندجمله‌ای روی $k(L)$ در (**). در واقع، نظریهٔ ساختار هیأتها که در این قسمت از کتاب زاریسکی و ساموئل ارائه شده، اساساً نظریه‌ای دربارهٔ ساختارهای داده‌هاست که به‌وسیلهٔ آنها می‌توان عملیاتی روی تمام عناصر هیأت انجام داد. ساختن پایه‌های تعالی در اثبات قضیهٔ ۲۶، دارای اهمیتی بیش از اهمیت خود قضیه است.

جنبهٔ قابل توجه دیگر این مثال، روش برخورد آن با مجموعه‌های نامتناهی است. مفاهیم متناهی، با قبول اینکه تمام زیرمجموعه‌های متناهی باید دارای این خاصیت باشند، به‌مفاهیم نامتناهی تعمیم داده شده‌اند و این امر باعث می‌شود که ساختارهای الگوریتمی در مورد زیرمجموعه‌ها به‌کار گرفته شوند.

کتاب ۶. مقدمه‌ای بر فراریاضیات

اثر کلینه[1] [۱۳] را به عنوان نمونه‌ای از یک کتاب منطق انتخاب کردم. صفحهٔ ۱۰۰ این کتاب دربارهٔ "حذف فصلی" سخن می‌گوید: فرض کنید که داریم (۱) $\vdash A\vee B$ و (۲) $A\vdash C$ و (۳) $B\vdash C$. آنگاه بنا به قاعده‌ای که قبلاً ثابت شده است، از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$A\vee B\vdash C \qquad (۴)$$

حال از (۱) و (۴) می‌توانیم نتیجه بگیریم "$\vdash C$". کلینه متذکر می‌شود که این همان اندیشهٔ آشنای "استدلال از طریق تفکیک موارد" است. اگر هر کدام از A یا B راست باشند می‌توانیم یا مورد (۱) را در نظر بگیریم که A راست است (آنگاه C برقرار است)؛ یا مورد (۲) را که B راست است (و بازهم C برقرار است). از اینجا نتیجه می‌شود که گزارهٔ C در هر موردی برقرار است.

در این مثال، استدلال چیزی جز دستکاری فرمول نیست البته همراه با این تفاهم که داریم الگوهای آشنای تفکر را تعمیم می‌دهیم و صوری می‌کنیم.

من امیدوار بودم که به استدلالی که ماهیت ریاضیتری داشته باشد بربخورم، مثلاً از این نوع که "هر چیزی که در سیستم X بشود اثبات کرد در سیستم Y نیز قابل اثبات است"، زیرا اغلب این نوع استدلالها اساساً الگوریتمهایی هستند که اثباتهای دلخواه در X را به اثباتهایی در Y تبدیل می‌کنند. ولی با توجه به اینکه این کتابی مقدماتی است، صفحهٔ ۱۰۰ آن ساده‌تر از آن بود که می‌پنداشتم.

کتاب ۷. کنوت

آیا کتاب خود من [۱۴] الگوریتمی است؟ خوب، صفحهٔ ۱۰۰ آن که زیاد چنین نیست زیرا بخشی از مدخلی بر روشهای ریاضی است که قبل از پرداختن به محتوای اصلی علم کامپیوتر آن را ارائه کرده‌ام. مسأله‌ای که در صفحهٔ ۱۰۰ بحث می‌شود این است که میانگین و انحراف معیار دفعات روشدن "شیر" در n بار پرتاب سکه را به‌دست آوریم به‌شرطی که در هر بار پرتاب مستقل سکه، احتمال آمدن "شیر" p و احتمال آمدن "خط" $q=1-p$ باشد. من نماد p_{nk} را برای نشان دادن احتمال رو شدن k شیر به‌کار می‌گیرم و ملاحظه می‌کنم که

$$p_{nk}=p\cdot p_{n-1,k-1}+q\cdot p_{n-1,k}$$

برای حل این رابطهٔ بازگشتی، تابع مولد زیر را وارد بحث می‌کنم

$$G_n(z)=\sum_{k\geq 0}p_{nk}z^k$$

و $G_n(z)=(q+pz)G_{n-1}(z)$، و $G_1(z)=q+pz$ را به‌دست می‌آورم. بنابراین $G_n(z)=(q+pz)^n$ و داریم

$$\mathrm{var}(G_n)=n\,\mathrm{var}(G_1)=pqn$$

و

میانگین $(G_n)=n$ میانگین $(G_1)=pn$

بدین ترتیب، رابطهٔ بازگشتی با استفاده از استدلال دربارهٔ احتمالها ساخته می‌شود. و از راه دستکاری فرمولها براساس الگوهای موجود در کتاب حل می‌شود. دلم می‌خواهد فکر کنم که در اینجا مثل خوارزمی عمل کرده‌ام ـ یعنی به‌جای استفاده از شگرد مخصوصی برای حل این مسألهٔ خاص، بیشتر یک روش عام را توضیح داده‌ام.

کتاب ۸. پولیا و سگو[1]

کتاب معروف پولیا و سگو به‌نام مسأله‌ها و قضیه‌ها[2] که اخیراً ترجمهٔ انگلیسی آن [۱۹] همراه با مسائل تازهٔ بسیاری به‌بازار آمده است، مظهر روزهای خوش گذشتهٔ ریاضی است. صفحهٔ ۱۰۰ این کتاب شامل یک مسألهٔ واقعاً مشکل است

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{n!\,2^{2n\cos\theta}}{|(2ne^{i\theta}-1)\cdots(2ne^{i\theta}-n)|}\,d\theta=2\pi\cdot 217$$

برای پی بردن به اثباتی که در ذهن نویسندگان بوده، خوشبختانه

1. Kleene

1. Szegö 2. *Aufgaben und Lahrsätze*

راهنماییهایی کافی در صفحات مربوط به‌جوابها درج شده‌اند. داریم

$$|2ne^{i\theta}-k|^2=4n^2+k^2-4nk\cos\theta$$
$$=(2n-k)^2+4nk(1-\cos\theta)$$
$$=(2n-k)^2+8nk\sin^2\theta/2$$

اگر θ را با $x/\sqrt{n}$ عوض کنیم می‌توانیم انتگرال را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{n!\,2^{2n}}{((2n-1)\cdots n)\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx$$

که در آن وقتی $|x|>\pi\sqrt{n}$، داریم $f_n(x)n=0$ و درسایرحالات داریم

$$f_n(x)$$
$$=2^{2n(\cos x/\sqrt{n}-1)}\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{-1/2}$$
$$=\exp\Big((2\ln 2)n\Big(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\Big)$$
$$-\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\Big)\Big)$$
$$=\exp\Big(-x^2\ln 2+O\Big(\frac{x^4}{n}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{-2nk}{(2n-k)^2}\frac{x^2}{n}+O\Big(\frac{x^4}{n^2}\Big)\Big)\Big)$$
$$=\exp\Big(-x^2\ln 2-(1-\ln 2)x^2+O\Big(\frac{1+x^4}{n}\Big)\Big)$$

بنابراین، $f_n(x)$ در هر بازهٔ کرانداری به‌طور یکنواخت همگرا به e^{-x^2} است. علاوه براین داریم $|f_n(x)|\leqslant 2^{2n(\cos x/\sqrt{n}-1)}$ و

$$\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\leqslant-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^4}{24n^2}$$
$$\leqslant-\Big(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{24}\Big)\frac{x^2}{n}\qquad |x|\leqslant\pi/\sqrt{n}$$

زیرا سری مکلورن تابع کسینوسی، این تابع را "می‌پوشاند"؛ وبنابراین $|f_n(x)|$ به‌ازای تمام nها کمتر از تابع انتگرالپذیر e^{-cx^2} است که درآن $c=1-\pi^2/12$. این همگرایی یکنواخت کراندار ما را مجاز می‌دارد که حد را به‌داخل علامت انتگرال ببریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

بالاخره ضریب واقع در جلوی $\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx$ برابر است با $(2n)!\sqrt{n}/n!^2\,2^{2n+1}$ که بنابر تقریب استرلینگ برابر است با $2\sqrt{\pi}\,(1+O(1/n))$ و از اینجا نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

راه‌حل این‌مسأله تا حدی نشان‌دهندهٔ چگونگی پیشرفت ریاضیات اززمان خوارزمی تا سال ۱۹۲۰ است ومشتمل است بردستکاری فرمولها، درکی از رفتار تابعها درهنگام حدگیری مجانبی، و نیز اندیشهٔ ابداع تابع مناسب f_n، که ما را قادر می‌سازد تا $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx$ را دقیقاً با $\int_{-\infty}^{\infty}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))\,dx$ مساوی بگیریم. تعریف $f_n(x)$ مستلزم فهم روشنی از رفتار تابعهایی مثل $\exp x$ و $\cos x$ است.

کتاب ۹. ریاضیات ساختنی، اثر بیشاپ

آخرین کتابی که برای نمونه‌گیری انتخاب کردم، ازنظرموضوع مورد توجه من بهترین کتاب از آب درآمد. این کتاب مبانی ریاضیات ساختنی اثر بیشاپ [۴] بود که در بارهٔ آن مطالبی شنیده ولی هیچگاه آن را نخوانده بودم. نکتهٔ جالب در مورد این کتاب این است که وقتی آن را مطالعه می‌کنیم، مثل هر کتاب معمولی ریاضی به‌نظرمی‌رسد ولی اگر به‌دقت در آن بنگریم ماهیتی تماماً الگوریتمی دارد.

صفحهٔ ۱۰۵ کتاب بیشاپ حاوی نتیجهٔ ۳ از قضیهٔ استون-وایرشتراس است که خود قضیه در صفحات قبل ارائه شده است. نتیجهٔ ۳ به‌شرح زیر است: هر تابع یکنواخت-پیوسته بریک مجموعهٔ فشردهٔ $X\subseteq\mathbf{R}$ را می‌توان در X تا حد دلخواه با یك تابع چندجمله‌ای روی $\mathbf{R}$ تقریب زد. واثبات آن نیز به‌شرح زیراست: "بنا به‌لم ۵، تابع $x\to|x-x_0|$ را می‌توان بر X تا حد دلخواه با یك چندجمله‌ای تقریب زد. لذا بنا به‌نتیجهٔ ۲، قضیه اثبات می‌شود."

این را می‌توان یك اثبات فشرده نامید! قبل از بیان لم ۵ ونتیجهٔ ۲ برای تشریح این اثبات، باید تأکید کنم که اثبات فوق اساساً یك الگوریتم است. این الگوریتم به‌عنوان ورودی هر مجموعهٔ فشردهٔ ساخته شدهٔ مفروض X و تابع پیوستهٔ f و حد اغماض ε را می‌پذیرد، ویك چندجمله‌ای که f را بر تمام نقاط X درحدود ε تقریب می‌زند به‌عنوان خروجی بیرون می‌دهد. به‌علاوه، این الگوریتم روی الگوریتمها هم کار می‌کند، زیرا که f خود با الگوریتمی ازنوع معین داده شده است و چون اعداد حقیقی نیز اساساً الگوریتم هستند.

من سعی می‌کنم که الگوریتم ضمنی بیشاپ را به صورت یك الگوریتم صریح و شبه الگول[1] ارائه دهم ــ هرچند که برای نمایش ساختارهای اثبات بیشاپ، لازم است قابلیتهای زبانهای برنامه‌نویسی امروز به‌میزان زیادی گسترش یابند. ابتدا لم ۵ را درنظرمی‌گیریم که می‌گوید برای هر $\varepsilon>0$ یك چندجمله‌ای $p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ وجود دارد که $p(0)=0$ و به‌ازای هر $|x|\leqslant 1$، $||x|-p(x)|\leqslant\varepsilon$. اثبات بیشاپ که این لم را به‌یك الگوریتم تبدیل می‌کند اساساً به‌شرح زیر است

```
R polynomial procedure Lemma 5(real ε);
begin integer N;   R polynomial g, p;
N := suitable function of ε;
g(t) := 1 − ∑_{1≤n≤N} (1/2 choose n)(−1)^n t^n;
p(t) := g(−t²) − g(1);
return p;
end.
```

دراینجا N را باید به‌حدی بزرگ اختیار کنیم که به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 1$ داشته باشیم $|g(t)-(1-t)^{1/2}|\leqslant(1/2)\varepsilon$.

چیز دیگری که برای اثبات مذکور در صفحهٔ ۱۰۵ لازم است، نتیجهٔ۲ است. این نتیجه حاکی است که اگر X فضای متریك فشرده‌ای باشد و اگر G مجموعهٔ تمام توابعی چون $x\to\rho(x,x_0)$ باشد که در آن $x_0\in X$ و $\rho(x,y)$ نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ متریك از x به y است، آنگاه "$\mathcal{A}(G)$ در $C(X)$ چگال است." یعنی تمام تابعهای یکنواخت-پیوستهٔ حقیقی مقدار بر X را می‌توان با تابعهایی که از تابعهای G با تعدادی متناهی عمل جمع، ضرب، و ضرب در اعداد حقیقی به‌دست می‌آید، به‌دقت دلخواه تقریب زد. نتیجهٔ ۲ درصورتی که X فقط شامل یك نقطه باشد غلط است؛ زیرا G و $\mathcal{A}(G)$ در آن صورت فقط شامل

1. ALGOL

تابع صفر خواهند بود. من هنگامی که سعی می‌کردم اثبات بیشاپ را به‌صورت صریح الگوریتمی فرمولبندی کنم به‌این لغزش پی بردم، ولی این اشکال را به‌سادگی می‌توان برطرف کرد.

برای منظوری که ما داریم، بهتر است که نتیجهٔ ۲ را به صورت زیر بنویسیم: "فرض کنید X یك فضای متریك فشرده و شامل حداقل دو نقطه باشد، و فرض کنید G مجموعهٔ تمام تابعهایی به صورت $x \to c\rho(x, x_0)$ باشد که در آن $c > 0$ و $x_0 \in X$. آنگاه G یك خانوادهٔ جداساز روی X است." من بعداً تعریف بیشاپ از خانوادهٔ جداساز را ذکرخواهم کرد ولی فعلاً می‌خواهم از قضیهٔ ۷ کتاب او یاد کنم. این قضیه همان قضیهٔ استون-وایرشتراس است که اثبات آن را به‌تفصیل نخواهم داد. قضیه این واقعیت را ذکر می‌کند که اگر G یك خانوادهٔ جداساز از تابعهای یکنواخت‌پیوسته روی فضای متریك فشردهٔ X باشد، آنگاه $\mathcal{A}(G)$ در $C(X)$ چگال است. با درنظر گرفتن این قضیه، فرمولبندی من ازنتیجهٔ ۲، به‌همان صورتی ازنتیجه که توسط بیشاپ ارائه شده، منجر می‌شود.

یك خانوادهٔ جداساز، مجموعه‌ای از تابعهای حقیقی مقدار G روی X است، همراه با تابعی چون δ از اعداد حقیقی مثبت $\mathbf{R}^+$ به $\mathbf{R}^+$ و نیز همراه با دو الگوریتم انتخابی σ و τ. الگوریتم σ عنصرهای x و y از X و یك عدد حقیقی مثبت ε را به عنوان ورودی می‌پذیرد، به طوری که $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$؛ و عنصری چون g از G را چنان برمی‌گزیند که برای تمام zهای در X داشته باشیم

$$\rho(x, z) \leqslant \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |g(z)| \leqslant \varepsilon,$$
$$\rho(y, z) \leqslant \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |g(z) - 1| \leqslant \varepsilon.$$

الگوریتم τ عنصری چون y از X ویك عدد حقیقی‌مثبت ε را به‌عنوان ورودی می‌گیرد وعنصری چون g از G را چنان برمی‌گزیند که دومین نتیجه گیری بالا برای تمام zهای در X برقرار باشد.

بدین ترتیب، صورت فرمولبندی شدهٔ نتیجهٔ ۲ الگوریتمی است که یك‌فضای متریك‌فشرده وغیر بدیهی X را به‌عنوان ورودی می‌پذیرد و خانوادهٔ جداساز (δ, σ, τ) را ارائه می‌کند که در آن σ و τ تابعهایی به صورت $\rho(x, x_0)$ را انتخاب می‌کنند. این الگوریتم به‌صورت زیر است:

```
X-separating family procedure Corollary 2(compact metric
                                 space X; X-element y₀, y₁);
comment y₀ and y₁ are distinct elements of X;
begin R⁺ → R⁺ function δ;
X × X → R⁺ function d;
X × X × R⁺ → C(X) function σ;
X × R⁺ → C(X) function τ;
X × X → R function d;
d(x, y) := X.ρ(x, y);  comment this is the distance function
   in X;
δ(ε) := min(ε², ½εd(y₀, y₁)) ;
σ(x, y, ε) := (R procedure g(X-element z);
                   return d(x, z)/d(x, y));
τ(y, ε) := (R procedure g(X-element z);
              return(if d(y, y₁) ≤ ½d(y₀, y₁)
                        then d(y, z)/d(y, y₀)
                        else d(y, z)/d(y, y₁)))
return (δ, σ, τ);
end.
```

نمادهایی که من برای نمایش گونه‌های پیچیدهٔ این الگوریتمها به‌کار برده‌ام، بهترین نمادهای ممکن نیستند، ولی امیدوارم که بدون نیاز به توضیح بیشتر، قابل فهم باشند. قاعدهٔ انتخاب σ که با این الگوریتم به‌دست می‌آید خصیصه‌های مطلوب را دارد زیرا، به عنوان مثال $\rho(y, z) \leqslant \delta(\epsilon) \leqslant \epsilon^2$ و $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ ایجاب می‌کند که

$$|g(z) - 1| = |\rho(x, z) - \rho(x, y)| / \rho(x, y)$$
$$\leqslant \rho(y, z) / \rho(x, y) \leqslant \varepsilon$$

اکنون می‌توان اثبات بیشاپ برای نتیجهٔ ۳ را به صورت یك الگوریتم به‌صورت صریحتر زیر نمایش‌داد. اگر X مجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbf{R}$ باشد، طبق تعریف بیشاپ، می‌توانیم $M = \mathrm{bound}(X)$ را چنان محاسبه کنیم که X دربازهٔ بستهٔ $[-M, M]$ قرارداشته باشد. فرض می‌کنیم که قضیهٔ ۷ وی رویه‌ای باشد که پارامترهای ورودیش متشکل‌اند از: یك فضای متریك فشردهٔ X، یك خانوادهٔ جداساز (δ, σ, τ) روی X که تابعها را از یك‌مجموعهٔ $G \subseteq C(X)$ انتخاب می‌کند، یك تابع یکنواخت-پیوستهٔ $f: X \to \mathbf{R}$، و یك عدد حقیقی مثبت ε. خروجی این رویه عنصری چون A از $\mathcal{A}(G)$ است، یعنی مجموعی متناهی از جمله‌هایی به‌صورت $Cg_1(x) \cdots g_m(x)$ است که در آن $m \geqslant 1$ و هریك از g_iها در G هستند؛ این خروجی به‌ازای تمام xهای در X، در $|A(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ صدق می‌کند.

صورت شسته و رفتهٔ نتیجهٔ ۳ به‌شرح زیر است:

```
R polynomial procedure Corollary 3(compact real set X;
                                   X-continuous function f;
                                   positive ε);
begin R polynomial p, q, r;   real M, B;   X-element y₀, y₁;
A(G)-element A, where G is the set of functions
    x ↦ c|x − x₀|;
M := bound(X);
y₀ := element(X);
if trivial(X) then r(t) := f(y₀)
else begin y₁ := element(X \ {y₀});
    A := Theorem 7(X, Corollary 2(X, y₀, y₁), f, ½ε);
    B := suitable function of A, see below;
    p(t) := Lemma 5(ε/B);
    q(t) := 2Mp(t/2M);
    comment ||x − x₀| − q(x − x₀)| ≤ ε/B for all x;
    r(x) := substitute cq(x − x₀) for each factor gᵢ(x)
            = c|x − x₀| of each term of A;
    comment B was chosen so that
            |q(x − x₀) − |x − x₀|| ≤ ε/B
          implies that |r(x) − A(x)| ≤ ½ε;
  end;
return r;
end.
```

واضح است که یافتن یك نمادگذاری شایسته، که به‌وسیلهٔ آن بتوان ساختارهای بیشاپ‌را به‌صورتی‌قابل خواندن وصریح نمایش داد، از دید طراحی زبانهای برنامه نویسی سطح بالا، پروژه‌ای بسیار جالب خواهد بود.

نتیجه‌گیریهای موقتی

ببینیم از این نه مثال ریاضی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، چه بصیرتی می‌توانیم به‌دست آوریم؟ در درجهٔ اول، این مثالها مطلبی را یادآور می‌شوند که باید از قبل هم برای من روشن می‌بود و آن اینکه چیزی به‌نام "تفکر ریاضی" به‌عنوان مفهومی مجزا و منفرد وجود ندارد و ریاضیدانها به‌جای استفاده از یك شیوهٔ تفکر، از شیوه‌های گوناگون تفکر استفاده می‌کنند. بنابراین سؤال من درمورد تمایز تفکر کامپیوتری از تفکر ریاضی، باید دوباره فرمولبندی شود. البته، هنگامی که من راجع به‌دوران دانشجویی خود بیشتر تعمق می‌کنم، می‌بینم که نه فقط هنگام برنامه‌نویسی کامپیوتر، عالم کامپیوتر، وهنگام مطالعهٔ ریاضی، ریاضیدان بودم، بلکه متناسب با فعالیتهایی که می‌کردم شخصیتهای گوناگون دیگری نیز داشتم ــ مثلاً هنگامی که ویراستار مجلهٔ دانشجویی بودم یا مسؤول خوابگاه تعاونی دانشجویی. سرگذشت ابوریحان بیرونی حاکی از این است که او بیشتر از هرکس دیگری دارای این نوع شخصیتهای گوناگون بوده است.

بنابراین به‌نظرمی‌رسد بهتر باشد که دنبال الگویی بگردیم که طبق آن، انسانها تعداد معینی ازشیوه‌های مختلف تفکردارند؛ تقریباً چیزی مثل وضع ژنها در مولکولهای DNA. محتمل است که علمای کامپیوتر وریاضیدانها ازاین نظر که چندین شیوهٔ تفکر مشترك دارند شباهتهایی باهم داشته باشند. ولی شیوه‌های تفکری نیز هست که خاص هریك از آنهاست. در این الگو، زمینه‌های مختلف علوم با "ویژگیهای شخصیتی" مختلف مشخص می‌شوند.

من سعی کرده‌ام چکیدهٔ انواع مختلف استدلال در نه مثال مورد بررسی را دسته‌بندی کنم وحاصل این کار در نه مقوله به‌طور آزمایشی درجدول زیر نشان داده شده‌اند. (دراین جدول دو حرف x نشان‌دهندهٔ استفادهٔ زیاد از یك شیوهٔ استدلال ویك حرف x بیانگر ارتباطی متوسط است.)

این مقولات نه‌گانــه را به‌دقت تعریف نکــرده‌ام و ممکن است نمایش‌دهندهٔ ترکیبی ازچیزهای اساسی‌تر باشند؛ مثلاً "دستکاری فرمولها و تعمیم، هردوشامل ایدهٔ عمومی تشخیص الگوها و یافتن نوعی نظم‌اند. تمایز اساسی دیگر ممکن است به‌نوع "تجسم" مورد نیاز مربوط باشد، خواه این تجسم هندسی باشد یا مجرد یا برگشتی وغیره. بدین‌ترتیب من اصلاً اطمینانی به‌این‌مقوله‌ها ندارم و آنها را فقط به‌عنوان پایه‌ای برای بحث پیشنهاد کرده‌ام.

من سطر دهمی هم با عنوان "تفکر الگوریتمی" به این جدول اضافه کرده‌ام. وقصدم ازاین کارارائهٔ نظرخودم درمورد نمونه‌وارترین فرایند تفکرمورد استفادهٔ علمای کامپیوتر است. ازآنجاکه علم کامپیوتر رشته‌ای بسیار جوان است، نمی‌دانم که چه کتابهایی را می‌توان برای بررسی صفحهٔ ۱۰۰ آنها انتخاب کرد؛ شاید برخی از شما بتوانید به من کمك کنید تا این مطالعه را به‌انجام برسانم. به‌نظرمن بسیاری از شیوه‌های تفکری که در این جدول آمده درعلم کامپیوتر نیز مثل‌ریاضی مطرح است، البته به استثنای "استدلال در مورد بینهایت." فضاهــای بینهایت بعدی ارتباط بسیار ناچیزی با علم‌کامپیوتر دارند، هرچندکه بیشتر رشته‌های‌دیگرریاضی به‌گونه‌ای‌وسیع‌دراین‌علم به‌کارگرفته شده‌اند.

علمای کامپیوتر توجه خواهندکــرد کــه درمثالهای بررسی شده دونوع تفکر به‌چشم نمی‌خورند؛ و ممکن است این همان عاملی باشد که ریاضیدان و عالم‌کامپیوتر را از یکدیگر متمایز می‌کند. در درجهٔ اول، در آنچه که تاکنون بررسی کرده‌ایم تقریباً هیچ مطلبی درمورد

	دستکاری فرمولها	بازنمایی واقعیت	رفتار مقادیر تابع	تحویل به مسائل ساده‌تر	کار با بینهایت	تعمیم	استدلال مجرد	ساختار اطلاعاتی	الگوریتمها
۱ (توماس)	xx	xx	xx						
۲ (لاورنتیف)	xx		x		xx				
۳ (کلی)	x					xx	xx		
۴ (اویلر)	xx		xx	x		xx			x
۵ (زاریسکی)	x			x	xx	x	xx	xx	
۶ (کلینه)	x					xx	xx		x
۷ (کنوت)	xx	x		x					
۸ (پولیا)	xx		xx	xx	xx				
۹ (بیشاپ)	xx		xx	xx		x	xx	xx	x
"تفکر الگوریتمی"	x	xx		xx			xx	xx	xx

"پیچیدگی" یا صرفه‌جویی درعملیات وجود ندارد. ریاضیات بیشاپ ساختنی است ولی تمام اجزای یك الگوریتم‌را ندارد، چون "هزینهٔ" عملیات‌مربوط‌را درنظرنمی‌گیرد. اگرجزئیات‌قضیهٔ استون-وایرشتراس وی را درمورد تابعهای ساده به کار ببریم؛ احتمال دارد که، برای تقریب‌زدن، به‌چند جمله‌ایهایی‌مثلاً از درجهٔ $۱۰^{۶}$ بربخوریم، درحالی که با روشی کاراتر می‌توانستیم یك چندجمله‌ای مناسب از درجهٔ ۶ به‌دست آوریم.

مفهوم دیگری که در مثالهای ما به‌چشم نمی‌خورد مربوط می‌شود به "عمل گمارش[۱]" = : که‌مقادیر کمیتها را تغییر می‌دهد. به‌زبان دقیقتر، باید بگوییم مفهومی که به چشم نمی‌خورد مفهوم پویای حالت یك فرایند است که به سؤالهایی از این قبیل مربوط می‌شود: "چگونه به اینجا رسیدم؟ چه حکمی اکنون صادق است؟ اگر بخواهم کار را به پایان برسانم، در مرحلهٔ بعد چه باید رخ دهد؟" ظاهراً تغییر دادن حالت فرایندها، یا نگاهی سریع به‌مراحل مختلف محاسبه انداختن، ارتباط نزدیکی با الگوریتم و تفکر الگوریتمی دارد. بسیاری از مفاهیم ساختارهای داده‌ها، که برای علم‌کامپیوتر اهمیت اساسی دارند، شدیداً به‌توانایی استدلال در مورد مفهوم حالت فرایندها بستگی دارد، و ما از همین مفهوم برای بررسی اندرکنش فرایندهایی که همزمان عمل می‌کنند، استفاده می‌کنیم.

در هیچ یك از مثالهای نه‌گانهٔ ما چیزی شبیه به "$n := n + ۱$" وجود ندارد، مگردر بحث اویلر که اساساً کارش‌را با $x := x - \frac{۱}{۴}A$ شروع می‌کند. عملیات گمارش درساختارهای بیشاپ نیز واقعاً گمارش نیستند و صرفاً تعریف مقادیر هستند و این تعریفها بعداً تغییر نمی‌کنند. این تمایز بین ریاضیات سنتی و علم‌کامپیوتر را می‌توان به‌خوبی در این واقعیت مشاهده کرد که بورك[۲]، گلدشتاین[۳] و فون نویمان در کارهای اولیهٔ خود درمورد برنامه‌نویسی‌کامپیوتر عملاً مفهوم گمارش را به‌کار نگرفته، بلکه از یك مفهوم بیناپینی عجیب استفاده کرده‌اند. ([۱۵] را ببینید).

در ریاضیات سنتی، نزدیکترین چیز به " = : "، تحویل یك‌مسألهٔ نسبتاً مشکل به‌مسأله‌ای ساده‌تر است، زیرا دراین‌کارمسألهٔ ساده‌ترجای مسألهٔ قبلی‌را می‌گیرد. خوارزمی‌هم به‌هنگام تقسیم دوطرف یك‌معادلهٔ درجهٔ دو برضریب $x^{۲}$، همین کار را انجام می‌داد؛ بنا براین، من‌سخنم را با ابراز احترام مجدد به‌خوارزمی، پیشگام عالیقدر رشتهٔ خودمان، به‌پایان می‌برم.

ترجمهٔ علی پارسا

مراجع

1. Aleksandrov A. D., Kolmogorov A. N., Lavrent'ev M. A., eds., *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*, **1**, MIT Press, Cambridge, Mass., (1963). Translated by S. H. Gould and T. Bartha from Matematika: Eë Soderzhanie, Metody i Znachenie, Akad. Nauk SSSR (1956).
2. Bishop E., *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., (1967).
3. Boncompagni B., ed., Algoritmi de numero indorum. *Trattati D'Aritmetica*, **1**, Rome (1857).
4. Gandz S., "The Mishnat Ha Middot," *Proc. Amer. Acad. for Jewish Research*, **4** (1933) 1-104. Reprinted in Gandz S., *Studies in Hebrew Astronomy and Mathematics*, Ktav, New York (1970) 295-400.
5. Gandz S., "Sources of al-Khowârizmî's Algebra," *Osiris*, **1**, (1936) 263-277.

1. Assignment Operation 2. Burks 3. Goldstine

6. Gandz S., "The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra," *Osiris*, **3** (1938) 405-557.
7. Gandz S., "The algebra of inheritance," *Osiris*, **5** (1938) [sic], 319-391.
8. Gruenberger F., "The role of education in preparing effective computing personnel," in Gruenberger F., ed., *Effective vs. Efficient Computing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1973) 112-120.
9. Îushkevich A. P., "Arifmeticheskiĭ traktat Mykhammeda Ben Musa Al-Khorezmi," *Trudy Inst. Istorii Estestvoznanifa i Tekhniki*, **1** (1954) 85-127.
10. Karpinski L.C., ed. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowârizmî*. Univ. Michigan Humanistic Series11, part 1, Ann Arbor (1915) 164, Reprinted in 1930.
11. Kelley J. L., *General Topology*, D. Van Nostrand, Princeton (1955).
12. Kennedy E.S., "al-Bîrûnî," *Dictionary of Scientific Biography*, **2**, Charles Scribner's Sons, N.Y (1970) 147-158.
13. Kleene S. C., *Introduction to Metamathematics*, D. Van Nostrand, Princeton (1952).
14. Knuth D. E., *Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968).
15. Knuth D. E., Trabb Pardo L., "The early development of programming languages," *Encyclopedia of Computer Science and Technology*, **7**, Marcel Dekker, N.Y.
16. Kopelevich Îu. K̂h., Rosenfel'd B. A., tr., *Mukhammad al'-Khorezmi: Matematicheskie Traktaty*, Akad. Nauk Uzbekskoi SSR, Tashkent (1964). [Includes al-Khwârizmî's arithmetic and algebra, with commentaries by B. A. Rosenfel'd.]
17. Nasr Seyyed Hossein, et al., *Historical Atlas of Iran*, Tehran (1971).
18. Pingree D., "Review of [28]," *Math. Reviews*, **30** (5) (July 1965).
19. Pólya G., Szegö G., *Problems and Theorems in Analysis*, **1**, Springer, Berlin (1972).
20. Sachau Ed., "Algebraisches über das schach bei Bîrûnî," *Zeitschrift d. Deutsche Morgenländische Gesellschaft*, **29** (1876) 148-156.
21. Sachau C. E., Transl. and ed., *al-Bîrûnî's Chronology of Ancient Nations*, William H. Allen and Co., London (1879).
22. Saidan A. S., *The Arithmetic of al-Uqlîdisî*, D. Reidel, Dordrecht (1975).
23. Sirazhdinov S. K̂h., Matvievskafa G. P., *Abu Raĭkhan Beruni i Ego Matematicheskie Trudy*, Prosveshchenie, Moscow (1978).
24. Struik D. J., ed., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, Mass (1969).
25. Thomas G. B., *Calculus and Analytic Geometry*, 2nd ed. Addison-Wesley, Cambridge, Mass (1956).
26. Toomer G. J., "al-Khwârizmî," *Dictionary of Scientific Biography*, **7**, Charles Scribner's Sons, N.Y (1973) 358-365.
27. Traub J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J (1964).
28. Vogel K., ed., *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus*, Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern, Otto Zeller Verlagsbuchhandlung, Aalen/ Osnabruck (1963). [This edition contains a facsimile of the manuscript, from which a correct transcription can be deduced.]
29. Zariski O., Samuel P., *Commutative Algebra*, **1**, D. Van Nostrand, Princeton (1958).

• Knuth Donald E., "Algorithms in modern mathematics and computer science," *Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science*, edited by A. P. Ershov, D. E. Knuth, Springer - Verlag (1981) 82.