در پیرامون مسألهٔ زیرفضاهای پایا*

حیدر رجوی*

فرض کنیم $\mathscr{X}$ یك فضای برداری و T اپراتوری خطـی از $\mathscr{X}$ به $\mathscr{X}$ است. اگـر $\mathscr{Y}$ یك زیرفضای برداری $\mathscr{X}$ باشد گوییم $\mathscr{Y}$ تحت T **پایا**ست در صورتی که داشته باشیم $T\mathscr{Y}\subseteq\mathscr{Y}$، یعنی از $x\in\mathscr{Y}$ رابطهٔ $Tx\in\mathscr{Y}$ نتیجه شود. روشن است که دو زیرفضای $\{0\}$ و $\mathscr{X}$ تحت هر اپراتورخطی پایا هستند. این است که‌مقصود ما ازجملهٔ «اپراتور T دارای زیرفضای پایاست» همیشه این خواهد بود که زیرفضایی جز این دو وجود دارد که تحت اپراتور خطی T پایاست. دراین نوشته می‌کوشیم کـه از فضاهای با بعد متناهی شروع کرده وسوابق مقدماتی مسألهٔ زیرفضاهای پایا را مرور کنیم و سپس به‌توضیح این مسألهٔ حل نشده و بعضی حالتهای حل شدهٔ آن بپردازیم.

گزارهٔ زیر را درنظر بگیرید:

گ: هر اپراتور دارای زیرفضایی پایاست.

برحسب اینکه مقصود از فضای اصلی و زیرفضا چه باشد گـزارهٔ «گ» ممکن‌است درست، نادرست و یـا نامعلوم باشد. مثلا اگر $\mathscr{X}$ فضایی با بعدمتناهی روی‌هیأتی نابسته باشد«گ» همواره‌درست‌نیست. ساده‌ترین‌مثال این گفته، فضای دو بعدی $\mathscr{X}$ روی $\mathbf{R}$ (اعدادحقیقی) و اپراتور T روی $\mathscr{X}$ است‌که نسبت به‌یك پایهٔ برداری داده‌شده **با ماتریس**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

مشخص شده بـاشد. چون T طیف حقیقی نـدارد، نمی‌توانـد زیرفضای پایای یك‌بعدی داشته‌باشد. ازطرف دیگر ازقضیهٔ‌اساسی جبر نتیجه می‌شودکه هر اپراتور در فضای با بعد متناهی (بیش از یك) روی $\mathbf{C}$ (اعـداد مختلط) دارای طیف و در نتیجـه دارای زیرفضای پایای یك بعدی می‌باشد. درحقیقت با استقرای ریاضی به‌آسانی نشان داده می‌شودکه اگر $\mathscr{X}$ روی $\mathbf{C}$ بعد n داشته‌باشد، برای هر اپراتور در $\mathscr{X}$ دنباله‌ای مانند

$$0=\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}_1\subset\mathscr{X}_2\subset\cdots\subset\mathscr{X}_n=\mathscr{X}$$

می‌توان پیدا کردکه درآن $\mathscr{X}_j$ زیرفضایی j بعدی از $\mathscr{X}$ است و تحت T پایـا می‌باشد. به‌عبارت دیگر نسبت به‌پایـهٔ برداری مناسبی، ماتریس آن دارای شکل مثلثی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

خواهد بود.

این قضیهٔ ساده‌که آن را در هردرس جبرخطی می‌توان یافت تعمیمی بسیار جامع به‌نام **قضیهٔ برنساید** داردکه شاید همه از آن آگاه نباشند و ما اکنون به‌شرح آن می‌پردازیم. پس‌ازاین، دراین مقاله تمام فضاها روی $\mathbf{C}$ خواهند بود گرچه قضیهٔ برنساید روی هر هیأت بسته درست است.

مجموعـهٔ تمام اپراتورهای روی فضای $\mathscr{X}$ را بـا $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ نشان‌می‌دهیم. معلوم است‌که $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ تشکیل جبر می‌دهد، بدین‌معنی که اگر S و T در $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ و c در $\mathbf{C}$ باشد، داریم

$$S+T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\quad ST\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\quad cT\in\mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

هر زیرمجموعهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ را که دارای این‌خواص باشد یك زیرجبر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ می‌نامیم. دو زیرمجموعهٔ $\{0\}$ و $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ زیرجبرهای واضح $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ هستند. به‌عنوان مثال بهتر، زیرفضایی از $\mathcal{X}$ مانند $\mathcal{X}_0$ را که غیراز $\{0\}$ و $\mathcal{X}$ باشد درنظر گرفته و به‌آسانی می‌بینیم که مجموعهٔ

$$\mathcal{A}=\{T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}):T\mathcal{X}_0\subseteq\mathcal{X}_0\}$$

زیرجبری از $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ است. چون تمام اعضای $\mathcal{A}$ دارای زیرفضای پایای مشترك $\mathcal{X}_0$ هستندگوییم این زیرجبر تحویل‌پذیر است. پیداست‌که $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ تحویل‌پذیر نیست، زیرا اگر $\mathcal{X}_0$ زیرفضایی غیراز $\{0\}$ باشد می‌توان دیدکه رابطهٔ

$$\{Tx:x\in\mathcal{X}_0,\quad T\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\}=\mathcal{X}$$

برقرار است. درحقیقت اگر برداری غیر ازصفر مانند x در $\mathcal{X}$ داده‌شده‌باشد برای‌هر بردار y در $\mathcal{X}$ اپراتوری روی $\mathcal{X}$ می‌توان یافت‌که x را به y ببرد.

قضیهٔ برنساید

اگر $\mathcal{X}$ فضایی با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ باشد، یگانه زیرجبر تحویل‌ناپذیر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ خود $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ است.

برای اثبات ساده‌ای ازاین قضیه می‌توان به [۴] رجوع کرد. ما دراینجا می‌خواهیم عمومیت و توان آن را با ذکر چند مثال نشان دهیم. تکرار می‌کنیم که تا اطلاع ثانوی، بعد $\mathcal{X}$ متناهی فرض خواهد شد.

۱. هرخانوادهٔ جابه‌جایی از اپراتورهای روی $\mathcal{X}$ را می‌توان همزمان مثلثی گردانید. (به‌عبارت دیگر، نسبت به‌یك پایهٔ برداری مناسب، ماتریسهای این خانواده همه مثلثی هستند.)

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{A}$ کوچکترین زیرجبر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد که خانوادهٔ داده شده را دربردارد (یعنی $\mathcal{A}$ زیرجبر پدیدآمده ازاین خانواده باشد). پیداست که $\mathcal{A}$ جابه‌جایی است و نمی‌تواند همهٔ $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد. پس، بنا برقضیهٔ برنساید، تحویل‌پذیر است. به‌سخن دیگر، پایهٔ برداری مناسبی وجود دارد که نسبت به‌آن، ماتریس هرعضو A از $\mathcal{A}$ به‌شکل زیر است

$$\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

زیرا که اعضای $\mathcal{A}$ دارای زیرفضای پایای مشترك $\mathcal{X}_0$ هستند و اگر $\{x_1,\dots,x_k\}$ پایه‌ای برداری برای $\mathcal{X}_0$ باشد، برای تمام $\mathcal{X}$، پایه‌ای‌که این k بردار را دربرگیرد به‌صورت

$$\{x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$$

می‌یابیم و ماتریس همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ را نسبت به آن می‌نویسیم. (زیرماتریسهای A_1 و A_2 به‌ترتیب $k\times k$ و $(n-k)\times(n-k)$ هستند.)

اکنون می‌توان اثبات را با استقرای ریاضی به پایان برد. توجه‌کنیدکه بلوکهای نظیر A_1 دراعضای $\mathcal{A}$ زیرجبری را دریك فضای k بعدی‌نمایش‌می‌دهند. همچنین بلوکهای نظیر A_2 زیرجبری از اپراتورها را روی فضایی $n-k$ بعدی می‌نمایانند. هردوی این زیرجبرها چون خود $\mathcal{A}$ جابه‌جایی هستند. پس، با استقرا، این دو زیرجبر را می‌توان مثلثی گردانید و بدین گونه، $\mathcal{A}$ خود مثلثی می گردد.

۲. به‌عنوان کاربرد دوم قضیهٔ برنساید، نیمگروهها را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ $\mathcal{S}$ از اپراتورهای روی $\mathcal{X}$ را **نیمگروه** نامیم هرگاه از $S\in\mathcal{S}$ و $T\in\mathcal{S}$ رابطهٔ $ST\in\mathcal{S}$ نتیجه شود. اپراتور T را پوچتوان خوانیم اگر یکی از توانهای صحیح‌آن صفر باشد. پوچتوان بودن T معادل است با اینکه طیف آن $\{0\}$ باشد.

قضیهٔ لویتزکی

هر نیمگروهی راکه اعضای‌آن همه پوچتوان باشند می‌توان به‌طور همزمان مثلثی کرد [۵].

اثبات: اگر نیمگروه را $\mathcal{S}$ و جبر پدید آمده از آن را $\mathcal{A}$ بنامیم به‌آسانی می‌توان دید که $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام ترکیبهای خطی از اعضای $\mathcal{S}$ است. چون طیف هرعضو S نیمگروه از صفر تنها تشکیل شده، اثر آن نیز صفر است $(\mathrm{tr}(S)=0)$ واز آنجا که اثر، تابعی‌خطی است، برای هرعضو A از $\mathcal{A}$ داریم: $\mathrm{tr}(A)=0$. این رابطه نشان می‌دهد که جبر $\mathcal{A}$ نمی‌تواند تمام $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ باشد. اکنون از قضیهٔ برنساید نتیجه می‌شود که همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ (و در ضمن آنها همه اعضای $\mathcal{S}$) دست‌کم یك زیرفضای پایای مشترك دارند. بالاخره به‌کمك استقرا می‌توان اثبات را مانند حالت خانوادهٔ جابه‌جایی به‌پایان برد. کافی‌است توجه‌شودکه‌اگر اپراتور پوچتوان A به‌صورت

$$\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

نوشته شود A_1 و A_2 نیز پوچتوانند.

۳. به عنوان کاربرد سوم، مسألهٔ دیگری را مطرح می‌کنیم: مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n\times n$ را با $\mathcal{M}_n$ نشان می‌دهیم. آیا دو ماتریس A و B می‌توان پیدا کرد که هر عضو $\mathcal{M}_n$ یك چندجمله‌ای در A و B باشد؟ (باید متوجه بود که مقصود، یك چند جمله‌ای در دو متغیر ناجابه‌جایی است. مثلا دو اپراتور $3A^2B^2A-ABABA$ و $2A^2B^2A$ معمولا مساوی‌نیستند!)

پاسخ این سؤال مثبت است. آسانترین جواب را شاید در دوماتریس

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بتوان دید. پیداست اپراتوری که B ماتریس آن نسبت به پایهٔ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد، جز زیرفضای $\{0\}$ و زیرفضاهای

$$\{\mathscr{X}_j,\ j=1, \ldots, n\}$$

که در آن $\mathscr{X}_j$ زیرفضای پدید آمده از $\{x_1, \ldots, x_j\}$ است زیرفضای پایایی ندارد. همچنین به آسانی دیده می‌شود که هیچ کدام ازاین زیرفضاها جز $\{0\}$ و $\mathscr{X}_n$ تحت اپراتور با ماتریس A پایا نیستند. پس جبر پدید آمده ازاین دو اپراتور بنا به قضیهٔ برنساید همهٔ $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ است. به بیان دیگر جبر $\mathscr{M}_n$ از A و B پدید می‌آید، یعنی هرماتریس $n\times n$ یك چندجمله‌ای در A و B است.

دراینجا بد نیست متذکرشویم که درپاسخ بالا می‌توان به‌جای A هرماتریسی را که درایه‌های آن همگی غیرصفر باشند قرار داد. همچنین، اگر T اپراتوری غیر از مضارب عددی I باشد می‌توان پایه‌ای برداری چنان اختیار کرد که همهٔ درایه‌های ماتریس T نسبت به آن غیرصفر باشند. برای ملاحظهٔ اثبات این گفته می‌توان به [۱۰] رجوع کرد. نتیجه می‌شود که اگر T اپراتوری غیراز مضارب عددی I باشد اپراتور دیگری مثل S می‌توان یافت به‌طوری که جبر پدیدآمده از S و T همهٔ $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ باشد. (روشن است که اگر T عددی باشد این کار غیرممکن است.)

اکنون می‌پردازیم به‌حالتی که بعد $\mathscr{X}$ نامتناهی باشد. دراین حالت پیداکردن زیرفضایی از $\mathscr{X}$ (غیراز $\{0\}$ و $\mathscr{X}$) که تحت اپراتوری داده شده، مانند T، پایا باشد حتی از حالت پیشین نیز ساده‌تر است ونیازی به‌قضیهٔ اساسی جبر ندارد. کافی است برداری مثل x_0 غیرازصفر در $\mathscr{X}$ گرفته و زیرفضای $\mathscr{X}_0$ پدیدآمده از

$$x_0,\ Tx_0,\ T^2x_0,\ \cdots$$

را نگاه کنیم. باید توجه کرد که هر بردار $\mathscr{X}_0$ ترکیبی خطی ازتعدادی (محدود) از اعضای دنبالهٔ بینهایت بردارهای بالاست. پیداست که $\mathscr{X}_0$ تحت T پایاست. دوحالت تشخیص می‌دهیم:

اگر بعد $\mathscr{X}_0$ متناهی باشد کار تمام است و زیرفضایی پایا جز $\{0\}$ و $\mathscr{X}$ یافته‌ایم.

اگر $\mathscr{X}_0$ بعد نامتناهی داشته باشد می‌توان به آسانی تحقیق کرد که بردار x_0 به‌زیرفضای $\mathscr{X}_{00}$ پدیدآمده از

$$Tx_0,\ T^2x_0,\ \cdots$$

متعلق نیست (چه در غیراین صورت عدد صحیحی مانند k وجود خواهد داشت به‌طوری که T^kx_0 ترکیبی خطی از k بردار $\{x_0, Tx_0, \ldots, T^{k-1}x_0\}$ باشد و این بعد $\mathscr{X}_0$ را متناهی می‌گرداند). نتیجه می‌گیریم که زیرفضای کوچکتر $\mathscr{X}_{00}$ تحت T پایاست. بنابراین در هردو حالت زیرفضای پایای مطلوب را یافته‌ایم.

پس غوغایی که زیرفضاهای پایا برانگیخته‌اند برای چیست؟

این غوغا ناشی از دخالت توپولوژی در جبر خطی است! مسألهٔ زیرفضاهای پایا بسیار سخت‌تر و درعین‌حال جالبتر خواهد بود اگر فضای $\mathscr{X}$ را فضای **باناخ** (یعنی فضای نُرمدار کامل) و اپراتور T را **پیوسته** فرض کرده و برای زیرفضای پایا تنها زیرفضاهای بستهٔ $\mathscr{X}$ را بپذیریم. پس‌ازاین‌دراین‌نوشته چنین‌خواهیم کرد.

در ده‌دوازده سال اخیر مسأله برای برخی ازفضاهای باناخ حل شده است. نخست آنفلو [۳]، ریاضیدان سوئدی، فضایی را که روی آن اپراتوری بدون زیرفضای پایا وجود دارد ساخت. سپس رد [۱۱]، ریاضیدان انگلیسی، وجود چنان اپراتوری را روی فضای l^1 ثابت کرد و اخیراً نیز نظیر آن اپراتور را روی فضای c_0 یافت. اگر خواننده با این فضاها آشنا نیست چیزی از دست نخواهد داد زیرا که ما بیش از این دربارهٔ آنها صحبت نخواهیم کرد. تنها به‌این‌نکته اشاره می‌کنیم که تاکنون کسی‌نتوانسته است مسأله را برای فضای باناخی که بازتابی باشد حل کند. ما در اینجا تنها حالتی مخصوص یعنی **فضای هیلبرت** را اندکی مورد بحث قرار خواهیم داد. مقصود ازفضای هیلبرت البته فضای برداری نرمدار کامل است که نرم آن ازضرب داخلی به‌دست آمده باشد.

دسته‌هایی از اپراتورها از مدتی پیش معروف به‌داشتن زیرفضاهای پایا بوده‌اند؛ ازجمله اپراتورهای‌نرمال یعنی‌اپراتورهای T که در رابطهٔ $T^*T=TT^*$ صدق می‌کنند. (T^* اپراتوری‌است که ماتریس آن، نسبت به یك پایهٔ متعامد یکه، ترانهادهٔ مزدوج ماتریس T باشد.)

دستهٔ دیگری ازاپراتورها که معلوم است زیرفضای پایا دارند، اپراتورهای فشرده می‌باشند. در فضای هیلبرت، اینها درست اپراتورهایی‌هستند که حد اپراتورهای با رتبهٔ متناهی درنرم‌باشند. واضح است که اپراتورهای با رتبهٔ متناهی دارای زیرفضای پایا هستند(مثلا بردآنها زیرفضایی‌پایاست). ولی درمورد اپراتورهای فشرده، مسأله درسال۱۹۵۴ توسط ارنشاین و اسمیت [۱] حل‌شد. تکرار می‌کنیم که اکنون مقصود از زیرفضا، زیرفضای بسته است.

درست مثل حالتی که $\mathscr{X}$ بعد متناهی داشت، اپراتورهای فشرده قابل مثلثی‌کردن هستند. منتها باید توجه داشت که برای مثلثی‌شدن لازم نیست که یك‌اپراتور دارای زیرفضاهایی پایا یکی با بُعد یك، یکی با بُعد دو، یکی با بُعد سه و غیر آن باشد و باید تعریف مثلثی بودن را تعمیم داد.

گوییم خانوادهٔ $\mathscr{E}$ از اپراتورها را می‌توان به‌طور همزمان مثلثی گردانید هر گاه زنجیره‌ای چون $\mathscr{C}$ از زیرفضاهای $\mathscr{X}$ وجود داشته باشد که در دوشرط زیر صدق کند:

الف) $\mathscr{C}$ یك زنجیرهٔ ماکسیمال از زیرفضاهای $\mathscr{X}$ باشد. ($\mathscr{C}$ زنجیره است یعنی هردوعضو $\mathscr{Y}$ و $\mathscr{Z}$ از $\mathscr{C}$ قابل مقایسه‌اند، به‌عبارت دیگر یا $\mathscr{Z}\subseteq\mathscr{Y}$ ویا $\mathscr{Y}\subseteq\mathscr{Z}$. $\mathscr{C}$ ماکسیمال است یعنی هرزیرفضای $\mathscr{X}$ که با تمام اعضای $\mathscr{C}$ قابل مقایسه باشد متعلق به $\mathscr{C}$ است.)

ب) هرعضو $\mathscr{C}$ تحت همهٔ اپراتورهای $\mathscr{E}$ پایا باشد.

برای مثال فرض‌کنیم $\mathscr{X}$ فضای $\mathscr{L}^2[0,1]$ باشد یعنی‌فضای (نماینده‌های) توابع با مقادیر مختلط که در بازهٔ $[0,1]$ تعریف شده و در رابطهٔ

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx<\infty$$

(با انتگرال لبگ) صدق کنند. اپراتور T که می‌خواهیم روی $\mathfrak{H}$ در نظر بگیریم عبارت است از «انتگرالگیری نامعین» یعنی

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که برای هر s در بازهٔ $[0,1]$ زیرفضای $\mathfrak{H}_s$ که با رابطهٔ

$$\mathfrak{H}_s=\{f\in\mathfrak{H}: f(t)=0,\quad t\in[0,s]\}$$

تعریف می‌شود زیرفضایی پایا تحت T است. همچنین پیداست که

$$\{\mathfrak{H}_s: s\in[0,1]\}$$

یك زنجیره تشکیل می‌دهد. اثبات ماکسیمال‌بودن زنجیره را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

از قضیهٔ وجود زیرفضای پایا برای اپراتورهای فشرده نتیجه می‌شود که آنها در حقیقت قابل مثلثی شدن هستند (و اثبات این مطلب بی‌شباهت به‌حالت بعد متناهی نیست). چنانکه در بند (۱) بالا بعد از قضیهٔ برنساید دیدیم، درحالت بعد متناهی یك خانوادهٔ جابه‌جایی را می‌توان همزمان مثلثی گردانید. با اینکه بعد از قضیهٔ ارنشاین‌ـاسمیت افراد زیادی از پژوهندگان رشتهٔ اپراتورها کوشیدند مثلثی‌شدن یك خانوادهٔ جابه‌جایی اپراتورهای فشرده را ثابت کنند (ازجمله نگارندهٔ این سطور)، سعی آنها تا سال ۱۹۷۳ به‌جایی نرسید. در آن سال لومونوسف [۷]، یك دانشجوی جوان روس، نه‌تنها آن را ثابت کرد بلکه قضیهٔ بسیار زیبایی را به‌اثبات‌رسانید که نظیر قضیهٔ برنساید برای حالت بعد نامتناهی است. برای نقل حکم این قضیه، مجموعهٔ همه اپراتورهای فشرده روی $\mathfrak{H}$ را بـه $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ زیرجبری بسته (در نرم) از جبر همهٔ اپراتورهای پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ لومونوسف

یگانه زیرجبر بستهٔ تحویل‌ناپذیر $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ خود $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ است.

(مقصود از زیرجبر تحویل‌ناپذیر البته باز زیرجبری است که اعضای آن دارای زیرفضای (بستهٔ) پایای مشترکی غیر از $\{0\}$ و $\mathfrak{H}$ نباشند.)

اینکه یك خانوادهٔ جابه‌جایی از اپراتورهای فشرده دارای زیرفضای پایای مشترك است درست مثل‌حالت بعد متناهی از قضیهٔ لومونوسف نتیجه می‌شود چه $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ جابه‌جایی نیست. برای مثلثی‌کردن خانواده البته به‌جای استقرای‌ریاضی بایـد از لم زرن استفاده کرد.

قضیهٔ لومونوسف همهٔ مسائل راجع به‌اپراتورهای فشرده را حل نکرده است. مثلا نظیر حکم داده شده دربند ۲ی بالا تاکنون بی‌جواب مانده است:

پرسش. اگـر $\mathcal{S}$ نیمگروهی از اپراتورهای فشردهٔ با طیف $\{0\}$ باشد آیا $\mathcal{S}$ تحویل‌پذیر است؟

این پرسش چندسال پیش طرح شده‌است. ناگفته نماندکه اگر جواب آن مثبت باشد نتیجه خواهد شد کـه چنان نیمگروهی در حقیقت قابل مثلثی شدن است. اگـر دراین پرسش «نیمگروه» را به «جبر» تغییر دهیم البته پـاسخ مثبت است چه در آن صورت از تحویل‌ناپذیری $\mathcal{S}$ نتیجه می‌شود که بستار آن بنابه‌قضیهٔ لومونوسف $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ است وچون حد اپراتورهای فشردهٔ باطیف $\{0\}$ بازطیفش $\{0\}$ است [۱]، این تناقض به‌دست می‌آید که هراپراتورفشرده‌ای طیف $\{0\}$ را دارد.

اگـر خواننده فراموش نکرده بـاشد، درحالت بُعد متناهی، نظیر پرسش بالا را دربارهٔ نیمگروه بلافاصله به حالت جبر منجر کردیم و این با استفاده از خاصیت اثر بود که تمام اپراتورهای فشرده آن‌را ندارند. دسته‌ای از اپراتورهایی‌که «خیلی فشرده»اند دارای اثری هستندکه دارای همان‌خواص اثر درحالت بعد متناهی می‌باشد. این اپراتورها زیرجبری از $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ را تشکیل می‌دهند که آن‌را به $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ نشان می‌دهیم. خواننده‌ای‌که از بعد نامتناهی خوشش نمی‌آید بقیه این نوشته را می‌تواند با فرض آنکه دربارهٔ بعد متناهی نوشته شده است بخواند، چه درآن صورت نیز ممکن است نکته‌های نوی در آن بیابـد. برای خوانندهٔ علاقه‌مند به‌بعد نامتناهی، با استفاده از اینکه هر اپراتور فشردهٔ نرمال را می‌توان قطری ساخت، ساده‌ترین تعریف $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ چنین است: اپراتـور فشردهٔ T متعلق به $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ است اگر وتنها اگرمجموع درایه‌های قطری $(T^*T)^{1/2}$ محدود باشد. (متناهی بودن بُعد فضای هیلبرت $\mathfrak{H}$ معادل آن است که داشته باشیم $\mathcal{L}(\mathfrak{H})=\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$.)

درجبر $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ برای مثلثی شدن نیمگروهها می‌تـوان شرط لازم و کافی ساده‌ای به‌دست داد [۸].

قضیه

اگر $\mathcal{S}$ نیمگروهی ازاعضای $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ باشد، شرط لازم وکافی برای مثلثی شدن همزمان $\mathcal{S}$ آن است‌که برای اعضای دلخواه A، B، C از $\mathcal{S}$ داشته باشیم

$$\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(CBA).$$

برای ملاحظهٔ اثبات این قضیه می‌تـوان به [۸] و در حالت مخصوص بعد متناهی به [۹] مراجعه‌کرد. بد نیست توجه شود که اولا رابطهٔ $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ اتحادی بیش نیست و ثانیاً از تساوی اثرها درشرط داده شدهٔ بالا تساوی اثر «کلمه»های درازتر هم کـه تنها در ترتیب «حروف» فرق داشته باشند بـا استقرا نتیجه می‌شود. مثلا $\operatorname{tr}(ABC^2B)=\operatorname{tr}(B^2C^2A)$.

از قضیهٔ بالا چندین نتیجه به‌آسانی گرفته می‌شود. ساده‌ترین نتیجه البته آن است کـه هرخانوادهٔ جابه‌جایی در $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ قابل مثلثی شدن همزمان است (چه نیمگروه پدیدآمده از خانـواده نیز جابه‌جایی است). اینك چند نتیجهٔ دیگر.

فرع ۱ (کاپلانسکی [۵]): اگـر $\mathcal{S}$ نیمگروهی ازماتریسهای $n\times n$ باشد که تابع اثر روی آن ثابت است، درآن‌صورت $\mathcal{S}$ را می‌توان همزمان مثلثی ساخت.

این فرع، قضیهٔ لویتسکی را که در بالا ذکر شده (حالتی که اثر روی نیمگروه همواره صفر است) وهمچنین قضیهٔ کولچین[۶] را دربردارد. این قضیه می‌گویـد کـه اگر طیف تمام اعضای $\mathcal{S}$ عبارت از $\{1\}$ باشد، $\mathcal{S}$ قابل‌مثلثی‌شدن همزمان است و این‌درست

حالتی می‌باشد که اثر روی نیمگروه همواره مساوی n است.

فرع ۲: اگر همهٔ اعضای، نیمگروه $\mathcal{S}$ از $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ اپراتورهای، خود توان باشند، $\mathcal{S}$ قابل مثلثی شدن همزمان است.

اثبات: نخست توجه می‌کنیم که اگر رتبهٔ اپراتور A را به $r(A)$ نشان دهیم، برای هرعضو A از $\mathcal{S}$ داریم $r(A)=\mathrm{tr}(A)$. با استفاده ازاتحاد $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ برای هردوعضو A و B از $\mathcal{S}$ رابطهٔ

$$r(BA)=r(BAB)$$

نتیجه می‌شود. روشن است که برد BAB در اندرون برد BA است. پس از رابطهٔ اخیر (و از آنجا که برای $S\in\mathcal{S}$ داریم $r(S)<\infty$) معلوم می‌شود که برد دو اپراتور BA و BAB در واقع یکی است، یعنی $BAB\mathcal{H}=BA\mathcal{H}$، و بلافاصله رابطهٔ

$$CBA\mathcal{H}=CBAB\mathcal{H}$$

برای اعضای دلخواه A، B، و C از $\mathcal{S}$ به‌دست می‌آید. با تعویض A و C همچنین داریم

$$ABC\mathcal{H}=ABCB\mathcal{H}$$

پس

$$r(ABC)=r(ABCB) \quad \text{و} \quad r(CBA)=r(CBAB).$$

اکنون با استفاده از دو تساوی اخیر و از اتحاد

$$\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$$

تساویهای متوالی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(CBA)&=r(CBA)=r(CBAB)=\mathrm{tr}(CB\cdot AB)\\&=\mathrm{tr}(AB\cdot CB)=r(ABCB)=r(ABC)\\&=\mathrm{tr}(ABC).\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{S}$ قابل مثلثی‌شدن است.

برای فروع دیگر قضیه بالا می‌توان به [۸] رجوع کرد.

مسألهٔ اصلی زیرفضاهای پایا برای یك اپراتور دلخواه در فضای هیلبرت ممکن است برای مدتی دراز حل نشده باقی بماند.

مراجع

1. N. Aronszajn and K. T. Smith, "Invariant subspaces of completely continuous operators," *Ann. of Math.*, **60** (1954) 345-350.
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York (1957).
3. P. Enflo, "On the invariant subspace problem for Banach spaces," *Acta Math.*, **158** (1987) 213-313.
4. I. Halperin and P. Rosenthal, "Burnside's theorem on algebras of matrices," *Amer. Math. Monthly*, **87** (1980) 810.
5. I. Kaplansky, "The Engel-Kolchin theorem revisited," *Contibutions to Algebra* (Bass, Cassidy, and Kovacik, eds.), Academic Press, New York (1977).
6. E. Kolchin, "On certain concepts in the theory of algebraic matric groups," *Ann. of Math.*, **49** (1948) 774-789.
7. V. J. Lomonosov, "Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator," *Funct. Anal. & Appl.*, **7** (1973) 213-214.
8. H. Radjavi, "A trace condition equivalent to simultaneous triangularizability," *Canad. J. Math.*, **38** (1986) 376-386.
9. ———, "The Engel - Jacobson theorem revisited," ***J. Algebra***, **111** (1987) 427-430.
10. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer - Verlag, New York (1973).
11. C. J. Read, "A solution to the invariant subspace problem on the space $l^{\prime}$," *Bull. London Math. Soc.*, **17** (1985) 305-317.

* * * * * * * * * * * * *

★ دکتر حیدر رجوی، دانشگاه دالهوسی کانادا

✱ بعضی از اصطلاحهای این مقاله مطابق اصطلاحات رایج در مرکز نشردانشگاهی نیست؛ از قبیل «پایا» و «اپراتور» که ما آنها را به ترتیب «ناوردا» و «عملگر» می‌گوییم. دلیل این امر اصرار مؤلف محترم بر اصطلاحاتی است که خود به کار برده‌اند.