نشر ریاضی، سال ۱۶، شمارهٔ ۲، صص ۱۴-۲۰

با نهایت تأسف، نویسندهٔ این مقاله که از استادان جوان دانشگاه صنعتی شریف بود قبل از چاپ مقاله درگذشت. یادش گرامی باد.

ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره

حسن نجومی*

۱. مقدمه

این مقاله به مرور مفاهیم پایه‌ای و روشهای ریاضی متداول در ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره می‌پردازد که از جدیدترین، جذاب‌ترین، و کاربردی‌ترین شاخه‌های علوم امروز به‌شمار می‌روند.

امروز محصولات مالی بسیار متنوع و گوناگونی در بازارهای مالی عرضه و معامله می‌شوند. به دلیل پیچیدگی روزافزون جوامع انسانی و نظامهای اجتماعی، تحلیل و ارزیابی محصولات مالی، و ارزیابی و مدیریت مخاطره در همهٔ زمینه‌های فعالیت انسانی نیازمند به‌کارگیری روشهای پیشرفتهٔ ریاضی به‌ویژه آنالیز تصادفی است. تصادفی بودن متغیرها ناشی از آن است که از دنیای اطراف خود اطلاع کامل نداریم.

۲. بهای تنزیل‌شده

با گذشت زمان بهای پول نقد کاهش می‌یابد. برای بررسی این مطلب، مبلغ A_0 را در نظر بگیرید که در حساب پس‌انداز بانک با نرخ سود سالانهٔ r گذاشته شده است. میزان سرمایه در زمان t (برحسب سال) را در صورتی‌که سود n بار در سال محاسبه و به حساب ریخته شود، با $A_n(t)$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت

$$A_1(1) = A_0 + A_0 r = A_0(1+r)$$

$$A_2\left(\frac{1}{2}\right) = A_0 + A_0\frac{r}{2} = A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

$$A_2(1) = A_2\left(\frac{1}{2}\right) + A_2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{r}{2}$$

$$= A_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^2.$$

با استدلالی مشابه

$$A_n(t) = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

نتیجه آنکه مبلغ A_0 در زمان حال، در زمان t در آینده دارای ارزش $A_0(1+r/n)^{nt}$ خواهد بود، یا معادل آن، مبلغ K در زمان t در آینده، در زمان حال دارای ارزش $(1+r/n)^{-nt}K$ است. ضریب بسیار مهم $(1+r/n)^{-nt}$ را ضریب تنزیل[1] می‌نامند. اگرچه این ضریب بر اساس مدلی بسیار ساده و بسیار متفاوت با دنیای واقعی به‌دست آمده است، ولی در محاسبات اقتصادی و مالی بسیار به‌کار برده می‌شود.

در دنیای واقعی، n همواره یک عدد متناهی است و ساختار سوددهی گسسته[2] فوق وجود دارد. اما برای فراهم ساختن امکان استفاده از مفاهیم و روشهای ریاضیات پیوسته و آنالیز، در بسیاری از موارد، مفهوم مجرد سوددهی پیوسته[3]، با $n \to \infty$ (سوددهی در هر لحظه از زمان) در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، ضریب تنزیل عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} = e^{-rt}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $r > 0$، تابع $x \mapsto (1+r/x)^x$ تابعی صعودی است، اما حد آن هنگامی که $x \to +\infty$، بینهایت نیست، بلکه e^r است. به عبارت دیگر، حتی با نرخ سود ۱۰۰٪ و حتی با افزوده شدن سود به سرمایه در هر لحظه از زمان، سرمایهٔ اولیه پس از یک سال حدود ۲٫۷۲ برابر می‌شود، و بینهایت نخواهد شد.

در ادامهٔ این مقاله همه جا فرض می‌کنیم که سوددهی پیوسته است. در اکثر موارد، نتایج متناظر در سوددهی گسسته روشن خواهند بود.

1. discount factor 2. discrete compounding
3. continuous compounding

۳. ورق قرضه

ساده‌ترین قرارداد تجاری، ورق قرضه[1] است که بر اساس آن یک طرف قرارداد متعهد می‌شود در زمان از پیش‌تعیین‌شدهٔ T در آینده (زمان سررسید[2]) مبلغ از پیش‌تعیین‌شدهٔ K (ارزش اسمی[3]) را به طرف دیگر بپردازد. مسألهٔ ارزیابی ورق قرضه[4] عبارت است از تعیین مبلغی که برای وارد شدن به این قرارداد باید به طرف متعهد (صادرکنندهٔ ورق قرضه[5]) پرداخت. نشان می‌دهیم که با نرخ سود ثابت، مقدار $B(t)$، ارزش این ورق قرضه در زمان t، برابر است با تنزیل‌شدهٔ ارزش اسمی

$$B(t) = e^{-r(T-t)}K .$$

یک راه توجیه این مطلب بر اساس بحث زیر است که نمونه‌ای از بحثهای مطرح در مورد سودآوری بدون تلاش[6] است. بر اساس این بحثها، فرصتهای سودآوری بدون تلاش، در صورت وجود، پس از «مدت کوتاهی» از بین می‌روند و در زمان بسیار کوتاهی (که با توسعهٔ روزافزون نظامهای اطلاع‌رسانی مرتباً کوتاه‌تر می‌شوند)، بازار مالی به حالت تعادل باز می‌گردد. نشان خواهیم داد که هر یک از نابرابریهای اکید $B(t) < e^{-r(T-t)}K$ و $B(t) > e^{-r(T-t)}K$ تنها مدت کوتاهی می‌توانند برقرار باشند:

- حالت اول: $B(t) > e^{-r(T-t)}K$

در این حالت اتخاذ سیاست مالی زیر، سود بدون تلاش $B(t) - e^{-r(T-t)}K$ را در پی خواهد داشت

۱. در لحظهٔ t یکی از این اوراق قرضه را می‌فروشیم و مبلغ $B(t)$ را دریافت می‌کنیم؛

۲. از این مبلغ مقدار $e^{-r(T-t)}K$ را در حساب پس‌انداز بانکی قرار می‌دهیم؛ تفاوت $B(t) - e^{-r(T-t)}K$ سود بدون تلاش ماست؛

۳. فروش این ورق قرضه در زمان t برای ما تعهد پرداخت مبلغ K به دارندهٔ ورق قرضه را در زمان T ایجاد می‌کند؛ اما این مبلغ را در زمان T خواهیم داشت زیرا مبلغ $e^{-r(T-t)}K$ سپرده‌شده به بانک در زمان t، در زمان T برابر با $e^{r(T-t)}(e^{-r(T-t)}K) = K$ خواهد بود.

همهٔ افراد برای به‌دست آوردن سود بدون تلاش به اجرای این سیاست مالی علاقه خواهند داشت. در نتیجه، عرضهٔ این ورق قرضه در زمان t مرتباً افزایش می‌یابد و بنابر اصل کلی عرضه و تقاضا، بهای آن در زمان t مرتباً کاهش می‌یابد تا زمانی که نابرابری اکید فوق به نابرابری در جهت دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر «پس از مدتی کوتاه»، $B(t) \le e^{-r(T-t)}K$.

- حالت دوم: $B(t) < e^{-r(T-t)}K$

در این حالت، سیاست مالی دوگان[7] زیر، سود بدون تلاش $e^{-r(T-t)}K - B(t)$ را در پی خواهد داشت

۱. در لحظهٔ t مبلغ $e^{-r(T-t)}K$ را از بانک وام می‌گیریم؛

۲. با مقدار $B(t)$ از این مبلغ، یکی از این اوراق قرضه را خریداری می‌کنیم؛ تفاوت $e^{-r(T-t)}K - B(t)$ سود بدون تلاش ماست.

۳. وام گرفته‌شده در زمان t برای ما تعهد پرداخت مبلغ $e^{r(T-t)}(e^{-r(T-t)}K) = K$ را به بانک در زمان T ایجاد می‌کند؛ اما این مبلغ را در زمان T در اختیار خواهیم داشت زیرا فروشندهٔ ورق قرضه بر اساس قرارداد متعهد به پرداخت مبلغ K در زمان T به ماست.

چون همهٔ افراد به اجرای این سیاست مالی برای به‌دست آوردن سود بدون تلاش علاقه خواهند داشت، تقاضا برای این ورق قرضه در زمان t مرتباً افزایش پیدا می‌کند و بنابر اصل کلی عرضه و تقاضا، بهای آن در زمان t مرتباً افزایش می‌یابد تا زمانی که نابرابری اکید فوق به نابرابری در جهت دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر «پس از مدتی کوتاه»، $B(t) \ge e^{-r(T-t)}K$.

به‌طور خلاصه، «پس از مدتی کوتاه»، هر دو نابرابری $B(t) \le e^{-r(T-t)}K$ و $B(t) \ge e^{-r(T-t)}K$ را خواهیم داشت؛ یا معادل آن، پس از مدتی کوتاه $B(t) = e^{-r(T-t)}K$.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که چگونه این عملیات مالی «مجرد»، که اجرای آنها در دنیای واقعی عموماً امکان‌پذیر نیست، اساس این استدلال و نتیجه‌گیری قرار گرفته‌اند. پاسخ آن است که اعمال مجرد، با وجود واقعی نبودن، مبنای نتایج در همهٔ شاخه‌های علوم هستند. به‌عنوان مثال، مفهوم خط مماس یک مفهوم مجرد است و در دنیای واقعی وجود ندارد؛ با این حال، این مفهوم مبنای بسیاری از قضایا و نتایجی است که در دنیای واقعی کاربردهای وسیع دارند.

سؤال اساسی دیگر آن است که هدف از عرضهٔ اوراق قرضه چیست؛ به نظر می‌رسد که حسابهای پس‌انداز بانکها نیز همان کار را انجام می‌دهند. پاسخ آن است که در دنیای واقعی نرخ سود ثابت نیست و با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ ورق قرضه نرخ سود را برای دارندهٔ آن ثابت نگاه می‌دارد و بنابراین به‌ترتیبی دارنده را در برابر تغییرات نامساعد نرخ سود «بیمه می‌کند».

در حالتی که نرخ بهره تابعی تعیّنی از زمان، مثلاً $r(t)$، باشد، ارزش ورق قرضه جواب مسألهٔ با شرط «پایانی» زیر است

$$\begin{cases} dB = r(t)B\,dt \\ B(T) = K \end{cases}$$

جواب این مسأله عبارت است از $B(t) = \exp(-\int_t^T r(s)\,ds)K$ و در حالت خاص، r ثابت به $B(t) = e^{-r(T-t)}K$، که در بحث سود بدون تلاش به‌دست آمد، تبدیل می‌شود.

عرضه‌کنندگان اوراق قرضه در بسیاری از موارد علاوه بر پرداخت مبلغ K در زمان پایانی T، در مدت عمر ورق قرضه در زمانهای از پیش‌تعیین‌شده مبالغی را که کوپن[1]های ورق قرضه نام دارند، پرداخت می‌کنند. در حالت مجردی که پرداخت کوپن در هر لحظه از زمان با نرخ $c(t)$ باشد، ارزش ورق قرضه جواب مسألهٔ با شرط پایانی زیر است

$$\begin{cases} dB + c(t)\,dt = r(t)B\,dt \\ B(T) = K \end{cases}$$

1. bond 2. maturity date 3. par value 4. bond pricing 5. bond issuer 6. arbitrage 7. dual

1. coupon

جواب این مسأله عبارت است از

$$B(t)=\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)K + \int_t^T c(u)\exp\left(-\int_t^u r(s)\,ds\right)du\,.$$

جملهٔ اول ارزش ورق قرضه بدون کوپن[1] است. انتظار داریم ارزش ورق قرضهٔ با کوپن[2] بیشتر از ارزش ورق قرضهٔ بدون کوپن باشد و نتیجهٔ به‌دست آمده تأیید این مطلب است: جملهٔ دوم، ارزش افزودهٔ ورق قرضهٔ با کوپن نسبت به ورق قرضهٔ بدون کوپن است.

در عمل، عرضه‌کنندهٔ ورق قرضهٔ کوپن‌دار پرداخت کوپن را به‌صورت گسسته با مبالغ از پیش تعیین‌شدهٔ c_1، c_2، ...، c_n در زمانهای از پیش تعیین‌شدهٔ t_1، t_2، ...، t_n انجام می‌دهد. برای ارزیابی این ورق قرضه می‌توان با استفاده از دلتای دیراک از نتایج دنیای پیوسته، مذکور در بالا، نتایج دنیای گسسته را به‌دست آورد. «نرخ سوددهی پیوسته» برای این نظام گسسته را می‌توان به‌صورت $c(t)=\sum_{j=1}^n c_j\delta(t-t_j)$ نوشت. با قرار دادن این عبارت برای $c(t)$ در بالا، ارزش ورق قرضهٔ گسسته به‌دست می‌آید:

$$B(t)=\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)K + \sum_{j=1}^n c_j H(t_j-t)\exp\left(-\int_t^{t_j} r(s)\,ds\right)$$

که در آن H تابع هویساید است:

$$H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

از رابطهٔ فوق یک ویژگی اساسی ورق قرضهٔ با کوپن، یعنی شرایط پرشی[3] زیر، نتیجه می‌شود

$$B(t_j^+)=B(t_j^-)-c_j,\quad j=1,2,\ldots,n$$

به عبارت دیگر، در لحظهٔ پرداخت کوپن، ارزش ورق قرضه به اندازهٔ میزان کوپن پرداختی کاهش می‌یابد. از خواننده دعوت می‌شود که سعی کند همین نتیجه را از طریق بحث سودآوری بدون تلاش، مشابه آنچه در بالا انجام گرفت، به‌دست آورد.

۴. ارزیابی ومدیریت مخاطره

ارزیابی میزان مخاطرهٔ موجود در یک فعالیت مورد نظر، و سپس ابداع روشهایی برای کنترل و در صورت امکان کاهش دادن میزان مخاطره از ملزومات همهٔ فعالیتها در جوامع انسانی است. اهمیت ارزیابی و مدیریت مخاطره در آن است که اجرای فعالیت مورد نظر را، همراه با حفاظت در مقابل زیانها و ضررهای احتمالی ناشی از اجرای آن فعالیت، امکان‌پذیر می‌سازد.

1. zero coupon bond 2. coupon paying bond 3. jump conditions

بیمه اولین سیستم اساسی و مهمی است که انسان برای ارزیابی و مدیریت مخاطره ابداع کرده است، و پس از قرنها استفاده از آن، هنوز متداول‌ترین ابزار حفاظت در مقابل زیانها به‌شمار می‌رود. در واقع با گذشت زمان، بیمه بیشتر در زندگی روزمرهٔ انسانها نفوذ کرده است و گذشت زمان تنها روشها و اصول اجرای آن را، به‌عنوان یک روش انتقال مخاطره، پیشرفته‌تر و مؤثرتر کرده است [۱۴].

ارزیابی و مدیریت مخاطره در اقتصاد و تأمین اجتماعی [۳]، فعالیتهای صنعتی ([۴]، [۱۵])، کشاورزی [۱۶]، و سایر فعالیتها در جوامع انسانی یک بخش ضروری و اجتناب‌ناپذیر است؛ اما کاربرد عمدهٔ ارزیابی و مدیریت مخاطره، در بازارهای مالی از جمله در مدیریت سبدهای مالی ([۶]، [۱۱]، [۱۷]) و بانکداری [۷] است. با توجه به پیچیدگی فوق‌العادهٔ سیستمهای مورد استفاده در جوامع امروزی، ارزیابی و مدیریت مخاطره نیازمند به کارگیری مفاهیم و روشهای پیشرفتهٔ ریاضی بویژه آنالیز تصادفی است ([۸]، [۱۳]).

در دنیای واقعی نه تنها نرخ سود با گذشت زمان تغییر می‌کند، بلکه تغییرات آن تصادفی است. مدل این تغییرات تصادفی را می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مانند

$$dr_t = a(r_t,t)dt + b(r_t,t)dW_t$$

در نظر گرفت که در آن $\{W_t : t\geq 0\}$ یک فرایند وینر [۱] است. جملهٔ $a(r_t,t)dt$ مدل تغییرات مورد انتظار و تعیّنی[1] و جملهٔ $b(r_t,t)dW_t$ مدل تغییرات تصادفی پیوسته است. در اینجا برای تأکید بر تصادفی بودن، متغیر به جای اینکه در داخل پرانتز قرار گیرد به‌صورت اندیس پایین قرار گرفته است. ویژگی اساسی فرایند وینر، $dW_t^2=dt$ [۳]، نتیجه می‌دهد: $dr_t^2=b^2dt+o(dt)$.

با توجه به نتایج فوق، فرمول ایتو[2] برای ارزش ورق قرضه به‌صورت

$$dB_t = G[B_t]dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r_t}\right)dW_t + o(dt)$$

به‌دست می‌آید که در آن G عملگر دیفرانسیل جزئی

$$G:=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2}{\partial r_t^2}+a\frac{\partial}{\partial r_t}$$

است.

حال یک سبد مالی[3] شامل یک واحد از یک ورق قرضه با ارزش اسمی K_1، زمان سر رسید T_1، و فرایند ارزش $\{B_{1t} : t\geq 0\}$، و θ واحد از یک ورق قرضه با ارزش اسمی K_2، زمان سر رسید T_2، و فرایند ارزش $\{B_{2t} : t\geq 0\}$ را در نظر می‌گیریم. فرایند ارزش این سبد مالی

$$\{\Pi_t = B_{1t}+\theta B_{2t} : t\geq 0\}$$

در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$d\Pi_t = G[B_{1t}+\theta B_{2t}]dt + b\left(\frac{\partial B_{1t}}{\partial r_t}+\theta\frac{\partial B_{2t}}{\partial r_t}\right)dW_t\,.$$

1. deterministic 2. Itô formula 3. porfolio

مشاهده می‌کنیم که انتخاب

$$\theta = -\frac{\partial B_{1t}}{\partial r} \Big/ \frac{\partial B_{2t}}{\partial r}$$

ضریب dW_t را صفر، و در نتیجه این سبد مالی را بدون مخاطره می‌کند. بازدهی حساب پس‌انداز برای مبلغ Π_t در بازهٔ زمانی $[t, t+dt]$ برابر است با

$$e^{r\,dt}\Pi_t - \Pi_t = r\Pi_t dt + o(dt).$$

بنابر بحث سودآوری بدون تلاش (که از خواننده دعوت می‌شود جزئیات آن را انجام دهد)، به دلیل بدون مخاطره بودن، بازدهی این سبد مالی با بازدهی حساب پس‌انداز بانکی برابر است؛ به عبارت دیگر، $d\Pi_t = r\Pi_t dt$. از این برابری، و با مقدار فوق برای θ، معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial B_{1t}}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_{1t}}{\partial r^2} - rB_{1t}\right) \Big/ \frac{\partial B_{1t}}{\partial r} = \left(\frac{\partial B_{2t}}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_{2t}}{\partial r^2} - rB_{2t}\right) \Big/ \frac{\partial B_{2t}}{\partial r}.$$

طرف راست این رابطه مستقل از T_1 و K_1، و طرف چپ آن مستقل از T_2 و K_2 است. بنابراین، هر دو طرف این رابطه مستقل از T_1، K_1، T_2، و K_2 هستند. نتیجهٔ مهم آن است که برای هر ورق قرضه با بهای B_t، کمیت زیر مستقل از زمان اجرا و ارزش اسمی است؛ از این جهت آن را به‌عنوان تابعی فقط از r و t، مانند γ نام‌گذاری کرده‌ایم:

$$\gamma(r,t) := \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_t}{\partial r^2} - rB_t\right) \Big/ \frac{\partial B_t}{\partial r}.$$

با جایگذاری $\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 B_t}{\partial r^2}$ از فرمول ایتو، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$dB_t = \left[(\gamma + a)\frac{\partial B_t}{\partial r} + rB_t\right]dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r}\right)dW_t.$$

این بازدهی ورق قرضه در بازهٔ زمانی $[t, t+dt]$ است. از این مقدار، مبلغ $rB_t dt$ بازدهی «بدون مخاطره» ارزش ورق قرضه است (بازدهی حساب پس‌انداز بانکی برای مبلغ B_t). بقیه جایزه[1]ای است که بازار مالی به دارندهٔ ورق قرضه برای تحمل مخاطرهٔ داشتنِ ورق قرضه می‌پردازد:

$$\begin{aligned} dB_t - rB_t dt &= (\gamma + a)\frac{\partial B_t}{\partial r}dt + \left(b\frac{\partial B_t}{\partial r}\right)dW_t \\ &= b\frac{\partial B_t}{\partial r}[(\lambda)dt + (1)dW_t] \end{aligned}$$

با

$$\lambda(r,t) := \frac{\gamma(r,t) + a(r,t)}{b(r,t)}.$$

از آنجایی که جملهٔ شامل dW_t مدل تغییرات تصادفی است، و مخاطره نیز ناشی از همین تغییرات تصادفی است، ضریب ۱ برای dW_t را می‌توان

1. reward

«یک واحد مخاطره» تلقی کرد. در نتیجه با توجه به آنکه جملهٔ شامل dt مدل تغییرات مورد انتظار است، کمیت λ، ضریب dt، را می‌توان «ارزش یک واحد مخاطره» در بازار مالی تلقی کرد.

تعاریف دیگری نیز برای میزان مخاطره و ارزش آن در منابع گوناگون ارائه شده‌اند؛ از جمله انحراف معیار می‌تواند به‌عنوان معیاری از میزان مخاطره به‌کار رود [۲]. در حالت کلی برای هر کاربرد و زمینهٔ خاص باید معیاری برای میزان مخاطرهٔ متناسب با آن کاربرد و زمینه تعریف شود. هدف در اینجا ارائهٔ نمونه‌ای از روشها و بحثهای ریاضی است که در ارزیابی و مدیریت مخاطره از آنها استفاده می‌شود.

۵. قراردادهای پیش‌فروش و امتیاز

در بازارهای مالی علاوه بر اوراق قرضه انواع بسیار زیادی از محصولات مالی وجود دارند. قراردادهای پیش‌فروش و امتیاز از جمله متداول‌ترین آنها هستند.

قرارداد پیش‌فروش[1] قراردادی است که بر اساس آن یک طرف قرارداد ملزم است در زمان از پیش‌تعیین‌شدهٔ T در آینده، سرمایهٔ از پیش‌تعیین‌شده‌ای را به بهای از پیش‌تعیین‌شدهٔ K از طرف دیگر خریداری کند، و طرف دیگر ملزم است آن سرمایه را بفروشد. این قرارداد نمونه‌ای از قراردادهای مالی است که بر اساس سرمایهٔ فرد دیگر قرار دارند و در نتیجه ارزش آنها وابسته به ارزش این سرمایهٔ زیرین[2] است. از این جهت چنین قراردادهایی را محصولات مالی مشتق[3] می‌نامند.

قرارداد پیش‌فروش یک قرارداد متقارن است از این جهت که اگر S_t ارزش سرمایهٔ زیرین در لحظهٔ t باشد، درصورتی‌که $S_T > K$، طرف خریدار سودی معادل با $S_T - K$، و طرف فروشنده زیانی معادل با $S_T - K$ در زمان T خواهند داشت (در این بحث ساده‌شده، که هدف آن توضیح مفاهیم کلی است، بسیاری از کمیات، از جمله هزینهٔ کارمزد[4] را نادیده گرفته‌ایم. مدلهای پیشرفته‌تر در ریاضیات مالی این کمیات را نیز شامل هستند)؛ اما در صورتی‌که $S_T < K$، طرف خریدار زیانی معادل با $K - S_T$، و طرف فروشنده سودی معادل با $K - S_T$ در زمان T خواهند داشت. به عبارت دیگر، برای هر دو طرف قرارداد، امکان کسب سود قابل‌توجه و زیان قابل‌توجه در زمان T وجود دارد. به دلیل متقارن بودن این قرارداد، ارزش آن در هر لحظه صفر است؛ به عبارت دیگر «از لحاظ نظری» می‌توان بدون هیچ‌گونه پرداختی وارد یک قرارداد پیش‌فروش شد.

در عمل، برای تضمین آنکه طرفین قرارداد تعهدشان را اجرا کنند، این قراردادها به‌صورت رسمی در بازارهای بورس با نام قراردادهای آینده[5] خرید و فروش می‌شوند.

می‌توان با تغییر در متن قرارداد پیش‌فروش، یکی از طرفین قرارداد را در برابر زیان قابل‌توجه بیمه کرد. متداول‌ترین محصولات مالی مشتق با این ویژگی، قراردادهای امتیاز[6] می‌باشند. قرارداد امتیاز خرید[7] توافقی است بین دو طرف که بر اساس آن یک طرف قرارداد، دارندهٔ امتیاز[8] یا طرف در موضع بالا[9]، می‌تواند ــ هر چند موظف نیست ــ در زمان یا زمانهای از

1. forward contract 2. underlying asset 3. financial derivatives
4. transaction cost 5. futures 6. options 7. call option
8. option holder 9. long position

پیش‌تعیین‌شده کالای از پیش‌تعیین‌شده‌ای (از نظر مقدار و کیفیت) را به بهایی از پیش‌تعیین‌شده، بهای اجرا[1]، خریداری کند. اگر وی تصمیم به خرید بگیرد، طرف دیگر قرارداد، نویسندهٔ امتیاز[2] یا طرف در «موضع پایین»[3]، موظف است کالا را بفروشد. قرارداد امتیاز فروش[4] مشابه همین قرارداد است با این تفاوت که خریدار امتیاز حق فروش سرمایه را دارد و در صورتی‌که تصمیم به فروش بگیرد، فروشندهٔ امتیاز موظف است کالا را خریداری کند.

در امتیاز اروپایی[5]، تصمیم به خرید تنها در زمان پایان امتیاز قابل اجراست. در امتیاز آمریکایی[6] تصمیم به خرید در هر زمان تا زمان پایان امتیاز قابل اجراست. اکثر قراردادهای امتیازها در عمل از نوع برمودایی[7] هستند که در آنها تصمیم به خرید تنها در زمانهای از پیش توافق‌شده قابل اجراست. در امتیاز آسیایی[8] بهای اجرا بر اساس نوعی متوسط‌گیری زمانی ارزش سرمایه زیرین تعیین می‌شود.

قرارداد امتیاز یک قرارداد متقارن نیست زیرا خریدار امتیاز در موقعیت برتری نسبت به فروشندهٔ امتیاز قرار دارد. این موقعیت برتر دارای ارزشی است که بهای امتیاز محسوب می‌شود و در زمان عقد قرارداد از طرف خریدار امتیاز به فروشندهٔ امتیاز پرداخت می‌شود. مسألهٔ ارزیابی قرارداد امتیاز[9] عبارت است از تعیین بهای این موقعیت برتر و مبلغ عادلانه‌ای که خریدار امتیاز باید به نویسندهٔ امتیاز پرداخت کند.

ارزیابی امتیاز اروپایی ساده‌تر از انواع دیگر است و فرمولهایی تحلیلی برای آن در دست است. اگرچه قراردادهای امتیاز موجود در بازارهای مالی به‌ندرت از نوع اروپایی هستند، نتایج تحلیل امتیاز اروپایی ارزشمند است زیرا با تعمیم آنها می‌توان نتایجی برای ارزش انواع دیگر امتیاز به‌دست آورد ([۲]، [۹]، [۱۰]).

سرمایهٔ زیرین یک قرارداد امتیاز می‌تواند هر چیزی باشد ([۲]، [۵]): اوراق قرضه، سهام کارخانجات، نرخ سود بانکها، نرخهای تبدیل ارزهای خارجی، محصولات کشاورزی مانند گندم، فلزات گرانبها مانند طلا و نقره، نتایج مسابقات ورزشی، میزان باران سالانه در یک ناحیهٔ جغرافیایی از پیش‌تعیین‌شده، و غیره. ویژگی مهم ارزش سرمایه، تصادفی بودن آن است، که به‌نوبهٔ خود تصادفی بودن ارزش امتیاز را باعث می‌شود. ارزشهای برخی سرمایه‌ها حتی رفتار برخالی از خود نشان می‌دهند[۹].

۶. ارزش بلک-شولز امتیاز

تغییرات ارزش سرمایه دو نوع هستند: مورد انتظار و تصادفی[۹]. تحلیل بلک-شولز[10] یک توزیع نرمال لگاریتمی پیوستهٔ تصادفی را برای ارزش سرمایه در نظر می‌گیرد که با معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

توصیف می‌شود. در اینجا $\{W_t : t \geq 0\}$ یک فرایند وینر است. یک محدودیت اساسی این مدل فقدان مدل‌سازی پرشهای تصادفی است. یک فرایند تصادفی مناسب برای این منظور فرایند پواسون [۵] است. با فرض

1. strike price 2. option writer 3. short position 4. put option
5. European option 6. American option 7. Bermudan option
8. Asian option 9. option pricing 10. Black-Scholes

اینکه $\{U_t : t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد، که می‌توان آن را با مشاهدهٔ تغییرات ارزشهای سرمایه‌ها در بازارهای مالی تخمین زد، معادلهٔ

$$dS_t = a\,dt + \sigma dW_t + \gamma dU_t$$

که در آن a، σ، و γ به‌طورکلی توابعی از t و S_tاند، پرشهای تصادفی را نیز مدلسازی می‌کند. مدلهای پیچیده‌تر و مؤثرتر به‌صورت

$$dS_t = a\,dt + b\,dX_t$$

هستند که در آن $\{X_t : t \geq 0\}$ یک فرایند لِوی[1] [۱] است که مدل تغییرات پیوسته و پرشی تصادفی است.

با مدل نرمال لگاریتمی بلک-شولز خواهیم داشت

$$\begin{aligned} dS_t^2 &= a^2 dt^2 + \sigma^2 dW_t^2 + 2a\sigma\, dt\, dW_t \\ &= \sigma^2 dt + o(dt)\,. \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب، فرمول ایتو برای $V_t = V(S_t, t)$، ارزش قرارداد امتیاز در لحظهٔ t، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + a\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\right) dt + \sigma \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dW_t\,.$$

سبد مالی بلک-شولز ترکیبی است از قرارداد امتیاز و سرمایهٔ زیرین به‌طوری که سبد مالی بدون مخاطره باشد. با یک واحد قرارداد امتیاز و Δ واحد سرمایهٔ زیرین، ارزش سبد مالی عبارت است از $\Pi_t = V_t - \Delta S_t$، و دیفرانسیل این ارزش برابر است با

$$\begin{aligned} d\Pi_t = &\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + a\frac{\partial V_t}{\partial S_t} - a\Delta\right) dt \\ &+ \sigma\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t} - \Delta\right) dW_t\,. \end{aligned}$$

انتخاب

$$\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$$

این سبد مالی را بدون مخاطره می‌کند. در حالات تثبیت‌شدهٔ بازار، فرصت سودآوری بدون تلاش وجود ندارد و سودآوری این سبد مالی برابر است با سودآوری سرمایه‌گذاری بدون مخاطره با نرخ سود r_t، که برابر با $r_t \Pi_t dt$ است. در نتیجه معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برای ارزش قرارداد امتیاز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{L}_{BS} V_t := \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} - r V_t = 0\,.$$

این همان معادلهٔ کلاسیک بلک-شولز در ریاضیات مالی، و $\mathcal{L}_{BS}$ عملگر دیفرانسیل جزئی بلک-شولز است. این معادله را می‌توان به‌صورت تحلیلی با تبدیل آن به معادلهٔ گرما حل کرد. دقت کنید که تفاوت اساسی این معادله با معادلهٔ گرما، تفاوت علامت مشتق اول جزئی نسبت به زمان است. معادلهٔ گرما

1. Lévy process

را تنها می‌توان «رو به جلو در زمان» با در دست داشتن شرایط اولیه و مرزی حل کرد؛ معادلهٔ بلک-شولز را تنها می‌توان «رو به عقب در زمان» با در دست داشتن شرایط پایانی و مرزی حل کرد. شرط پایانی برای قرارداد امتیاز خرید اروپایی $V_T = \max(S_T - K, ۰)$ و برای قرارداد امتیاز فروش اروپایی $V_T = \max(K - S_T, ۰)$ است. به این ترتیب، فرمولهای بلک-شولز برای ارزش امتیازهای خرید و فروش اروپایی به‌دست می‌آیند ([۲]، [۴]):

$$C(S_t,t) = e^{-q(T-t)} S_t N(d_۱) - e^{-r(T-t)} K\, N(d_۲)$$
$$P(S_t,t) = e^{-r(T-t)} K\, N(-d_۲) - e^{-q(T-t)} S_t N(-d_۱)$$

با

$$d_۱ := \frac{۱}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}\left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)\right]$$
$$d_۲ := \frac{۱}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)\right]$$
$$= d_۱ - \sigma\sqrt{T-t}$$

در اینجا T زمان انقضای امتیاز، K بهای اجرا، q سود سرمایهٔ زیرین[۱]، و N تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است:

$$N(d) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-s^۲/۲}\,ds\,.$$

در حالت r ثابت، رابطهٔ مهمی بین ارزشهای امتیازهای خرید و فروش اروپایی روی سرمایهٔ زیرین مشابه و با زمان انقضای مشابه T و بهای اجرای مشابه K وجود دارد که می‌توان آن را با فرض داشتن سبد مالی زیر به‌دست آورد

- موضع بالا در یک امتیاز فروش
- موضع پایین در یک امتیاز خرید
- یک واحد سرمایهٔ زیرین

• **حالت اول:** $S_T > K$

در این حالت ما امتیاز فروش را اجرا نمی‌کنیم اما طرفِ دارای موضع بالا در امتیاز خرید، آن را اجرا خواهد کرد که بر اساس آن ملزم خواهیم بود سرمایهٔ زیرین موجود در این سبد مالی را به او به بهای K بفروشیم. بنابراین در این حالت ارزش این سبد مالی در زمان T برابر با K است.

• **حالت دوم:** $S_T < K$

در این حالت طرفِ دارای موضع بالا در امتیاز خرید، آن را اجرا نخواهد کرد اما ما امتیاز فروش را اجرا می‌کنیم که بر اساس آن طرف دیگر ملزم خواهد بود سرمایهٔ زیرین موجود در این سبد مالی را از ما به بهای K خریداری کند. پس در این حالت نیز ارزش این سبد مالی در زمان T برابر با K است.

بنابراین ارزش این سبد مالی در زمان انقضای T برابر با K است صرف‌نظر از آنکه ارزش سرمایهٔ زیرین در زمان انقضای T بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از K باشد. در نتیجه بنابر بحث سودآوری بدون تلاش، ارزش این سبد مالی

1. dividend

در هر لحظهٔ $۰ \le t \le T$ برابر با تنزیل‌شدهٔ مبلغ K است. به عبارت دیگر به‌ازای هر $۰ \le t \le T$

$$P(S_t,t) - C(S_t,t) + S_t = e^{-r(T-t)}K\,.$$

این رابطه را توازن امتیازهای فروش و خرید[۱] می‌نامند. با در دست داشتن این رابطه، تنها حل مسألهٔ با مقدار پایانی و مرزیِ مربوط به $C(S_t,t)$ لازم خواهد بود، و بدون نیاز به حل مجدد یک مسألهٔ با مقدار پایانی و مرزی دیگر مربوط به $P(S_t,t)$، با داشتن $C(S_t,t)$ می‌توان $P(S_t,t)$ را از رابطهٔ توازن تعیین کرد.

۷. ارزیابی امتیاز آمریکایی

ارزیابی امتیاز آمریکایی، که در آن دارندهٔ امتیاز می‌تواند امتیاز را هر لحظه اجرا کند، بسیار مشکل‌تر از ارزیابی امتیاز اروپایی است و منجر به یک مسأله با مرز آزاد[۲] می‌شود[۹]. آنچه می‌توان در نگاه اول به تعاریف بیان کرد آن است که امتیاز آمریکایی گران‌تر از امتیاز اروپایی است زیرا «امتیازات» بیشتری به دارنده می‌دهد. با توجه به شرایط پایانی امتیازهای اروپایی (رجوع کنید به بخش قبل)، اگر $C_A(S_t,t)$ و $P_A(S_t,t)$ به‌ترتیب ارزشهای امتیازهای خرید و فروش آمریکایی باشند، نابرابریهای زیر در هر لحظهٔ $۰ \le t \le T$ برقرارند

$$C_A(S_t,t) \ge \max(S_t - K, ۰) \ge S_t - K$$

و

$$P_A(S_t,t) \ge \max(K - S_t, ۰) \ge K - S_t$$

بنابراین

$$C_A(S_t,t) + K \ge S_t$$

و

$$P_A(S_t,t) + S_t \ge K\,.$$

سبدهای مالی زیر را در نظر بگیرید:

سبد مالی ۱

۱. موضع بالا در یک امتیاز خرید آمریکایی
۲. پول نقد برابر با K

سبد مالی ۲

۱. موضع بالا در یک امتیاز فروش آمریکایی
۲. یک واحد سرمایهٔ زیرین

ارزش سبد مالی ۱ در لحظهٔ t در صورتی که امتیاز خرید در لحظهٔ t اجرا شود، برابر با S_t است. اگر به سرمایهٔ زیرینْ سود سرمایه تعلق نگیرد، ارزش این سبد مالی در لحظهٔ t، در صورتی‌که امتیاز خرید در لحظهٔ t اجرا نشود بنابر نابرابری $C_A(S_t,t) + K \ge S_t$ ناکوچک‌تر از S_t است. بنابراین اجرای امتیاز خرید آمریکایی هیچ‌گاه بهینه نیست. به عبارت دیگر:

اجرای امتیاز خرید آمریکایی روی سرمایهٔ زیرینی که سود سرمایه به آن تعلق نگیرد، هیچ‌گاه بهینه نیست و بنابراین معادل با یک امتیاز خرید اروپایی است.

1. put-call parity 2. free boundary value problem

در حالتی که به سرمایه زیربن با نرخ q سود سرمایه تعلق گیرد، استدلال فوق دیگر برقرار نیست زیرا ارزش سرمایه با گذشت زمان به دلیل پرداخت سود سرمایه بیش از S_t و مطابق با $e^{qt}S_t$ افزایش می‌یابد.

ارزش سبد مالی ۲ در لحظهٔ t در صورتی که امتیاز فروش در لحظهٔ t اجرا شود، برابر با K است. اگر نرخ سود حسابهای پس‌انداز صفر باشد، ارزش این سبد مالی در لحظهٔ t، در صورتی‌که امتیاز فروش در لحظه t اجرا نشود طبق نابرابری $P_A(S_t,t)+S_t \geq K$ ناکوچک‌تر از K است. بنابراین اجرای امتیاز فروش آمریکایی هیچ‌گاه بهینه نیست. به عبارت دیگر

> اجرای امتیاز فروش آمریکایی در حالتی که نرخ سود حسابهای پس‌انداز صفر باشد، هیچ‌گاه بهینه نیست و بنابراین معادل با یک امتیاز فروش اروپایی است.

در حالتی که نرخ بهرهٔ حسابهای پس‌انداز r باشد، استدلال فوق دیگر برقرار نیست زیرا مبلغ K باگذشت زمان ثابت نخواهد بود و مطابق با $e^{rt}K$ افزایش می‌یابد.

بنابراین، به‌عنوان مثال در اقتصادهای با نرخ سود بسیار پایین، مانند اقتصاد ژاپن، امتیازهای فروش آمریکایی کاربرد ندارند زیرا عملاً معادل با امتیازهای فروش اروپایی هستند.

مطالب فوق حاکی از این نکتهٔ مهم هستند که تعدادی از بندهای یک قرارداد مالی ممکن است بی‌اثر باشند و عمداً یا سهواً به متن قرارداد اضافه‌شده باشند. به‌عنوان مثال، در حالتی که سود سرمایه به سرمایهٔ زیربن تعلق نگیرد، اضافه کردن شرط «آمریکایی» بودن امتیاز خرید به قرارداد تنها جنبهٔ نمایشی خواهد داشت و چیزی به ارزش قرارداد مالی اضافه نمی‌کند.

سخن پایانی و قدردانی

این مقاله سعی در ترسیم چشم‌اندازی از مفاهیم و روشهای متداول در ریاضیات مالی و مدیریت مخاطره داشته است. خوانندهٔ علاقه‌مند به این شاخه‌های جذاب و فعال دانش امروز می‌تواند مطالعه در این زمینه‌ها را با رجوع به منابع بسیار موجود، از جمله منابع اشاره‌شده در فهرست مراجع، دنبال کند.

نگارنده از دست‌اندرکاران نشر ریاضی که از او برای تهیهٔ این مقاله دعوت کردند سپاسگزار است.

مراجع

1. Cont, R., and Tankov, P., *Financial Modeling With Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC (2004).
2. Hull, J. C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, third edition, Prentice Hall (1997).
3. Jonkman, S., van Gelder, P., and Vrijling, J., "An overview of quantitative risk measures for loss of life and economic damage", *Journal of Hazardous Materials*, A99 (2003) 1-30.
4. Kang, C., Feng, C., and Khan, H., "Risk assessment for buildoperate-transfer projects: A dynamic multi-objective programming approach", *Computers and Operations Research*, 32 (2005) 1633-1654.
5. Kohlmann, M. and Tang, S., Eds., *Mathematical Finance, Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance Research Project*, Konstanz, Germany, October 5-7, 2000, Birkhäuser Verlag (2001).
6. Korn, R., and Korn, E., *Option Pricing and Portfolio Optimization, Modern Methods of Financial Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics, AMS (2001).
7. Mari, C., and Reno, R., "Credit risk analysis of morgage loans: An application to the Italian market", *European Journal of Operational Research*, **163** (2005) 83-93.
8. Medina, P., and Merino S., *Mathematical Finance and Probability: A Discrete Introduction*, Birkhauser (2003).
9. Neftci, S., *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press (1996).
10. Peter, E. E., *Fractal Market Analysis: Applying Chaos to the Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons (1994).
11. Rasmussen, M., *Quantitative Portfolio Optimization, Asset Allocation and Risk Management*, Palgrave MacMillan (2003).
12. Ross, S., *Introduction to Probability Models*, eighth edition, Academic Press (2003).
13. Schoutens, W., and Struder, M., "Short-term risk management using stochastic Taylor expansions under Levy models", *Insurance: Mathematics and Economics*, **33** (2003) 173-188.
14. Trieschmann, J., Gustavson, S., and Hoyt, R., *Risk Management and Insurance*, eleventh edition, South-Western College Publishing (2001).
15. Vehvilainen, I., and Keppo, J., "Managing electricity market pricerisk", *European Journal of Operational Research*, **145** (2003) 136-147.
16. Wang, J., Hansen, P., Christensen, S., and Qi, G., "The mathematical method of studying the reproducion structure of weeds and its application to Bromus Sterilis", *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, (4)3 (2004) 777-788.
17. Watsham, T., *Futures and Options in Risk Management*, second edition, International Thomson Publishing (1998).
18. Wilmott, P., Howison, S., and Dewynne, J., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1995).

* * * * * *

* حسن نجومی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

nojumi@sina.sharif.edu