قانون تقابل مربعی، زمینه‌ساز نظریه‌هایی جدید در ریاضیات

حسن حقیقی

همان‌گونه که تلاش برای حل معادلات چندجمله‌ای راهگشای ابداع نظریه‌های جدیدی در ریاضیات، به‌خصوص نظریهٔ گالوا و نظریهٔ گروهها شد، تلاش برای حل معادلات جبری به پیمانهٔ یک عدد صحیح نیز زمینه‌ساز پیشرفتهای بسیاری در ریاضیات، به‌خصوص در نظریهٔ اعداد و نظریهٔ اعداد جبری شده است. ولی برخلاف اولی، دومی کمتر مقهورِ ذهن کنجکاو بشر شده و مسائل سر به مهر بسیاری در مقابل وی نهاد، که هنوز راه‌حلی نهایی برای آنها پیدا نشده است.

از جملهٔ این مسائل، پیدا کردن اعداد صحیح aای است که در معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ عدد صحیح و مثبت p، با فرض اول بودن p و a نسبت به هم، صدق می‌کنند. می‌توان این مسأله را ساده‌تر کرد و فقط حالتی را بررسی کرد که p و a دو عدد اول فرد هستند. همچنین می‌توان مسأله را به دو مسألهٔ جزئی‌تر تقسیم کرد:

(الف) برای عدد اول فرد p، به‌ازای چه اعداد صحیحی مانند a معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p دارای جواب است و

(ب) برای عدد صحیح a، تمام اعداد اولی که به‌ازای آنها معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p دارای جواب است چیستند؟

حاصل تلاش برای حل مسألهٔ (ب) کشف قانون تقابل مربعی است که نه تنها شرایط وجود جواب برای این معادله را به دست می‌دهد بلکه وجود جواب معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p را متقابلاً به وجود جواب معادلهٔ همنهشتی $x^2 - p = 0$ به پیمانهٔ a مربوط می‌سازد مگر اینکه a و p همنهشت با ۳ به پیمانهٔ ۴ باشند که در این صورت یکی از معادله‌ها دارای جواب است و دیگری جواب ندارد. در صورت وجود جواب، فقط باید بررسی کرد که آیا a ردهٔ مانده‌های تقسیم بر a در معادلهٔ همنهشتی $x^2 - p = 0$ به پیمانهٔ a صدق می‌کنند یا خیر. به‌عبارت دیگر این قانون حاکی است که حل معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p فقط به a بستگی دارد نه به عدد اول متغیر p. به این ترتیب، تعداد محاسبات لازم برای یافتن جواب معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ عدد اول دلخواه p بسیار بسیار کاهش می‌یابد، و اهمیت و ارزش این قضیه آشکار می‌شود.

این مسأله بیش از ۳۵۰ سال است که ذهن بسیاری از ریاضیدانان را به خود مشغول داشته است. اولین گام به سوی این قانون را فرما در سال ۱۶۴۰ برداشت که ثابت کرد هر عدد اول p را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح دیگر نوشت اگر و فقط اگر $p - 1$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد. سپس اویلر در ادامهٔ

فردیناند آیزنشتاین ریاضیدان آلمانی (۱۸۲۳ـ۱۸۵۲) که نامش با قوانین تقابل درجهٔ nاُم همراه است.

تحقیقات فرما سعی کرد اعداد اول pای را بیابد که عبارت $x^2 + by^2$ را که x و y و b اعدادی صحیح و مثبت هستند، عاد می‌کنند. وی متوجه شد شرط لازم برای این بخش‌پذیری این است که b در معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p صدق کند. در سال ۱۷۵۰، اویلر به ارتباط حل‌پذیری معادلهٔ همنهشتی $x^2 - a = 0$ به پیمانهٔ p با همنهشتی p به پیمانهٔ $4a$ پی برد. لاگرانژ و لژاندر نیز تلاش خود را مصروف حل این نوع معادلات کردند. شکل کامل این قانون را لژاندر حدس زد و نام تقابل بر آن نهاد اما موفق به ارائهٔ اثبات کاملی برای آن نشد. در اواخر قرن هیجدهم که گاوس حاصل تحقیقات خود دربارهٔ معادلات همنهشتی را در کتاب تحقیقات حسابی منتشر ساخت اثبات کاملی از این قانون را بدون اینکه از کارهای دیگران در این زمینه اطلاعی داشته باشد، ارائه داد. وی چنان مجذوب این قانون شده بود که آن را «گوهر ریاضی» نامید و به‌عنوان نخستین گام برای بیان قانونی مشابه برای معادلات همنهشتی از درجات بالاتر و ارائهٔ اثباتی برای آنها، شش اثبات دیگر برای قانون تقابل مربعی ارائه داد. تحقیقات دربارهٔ حل معادلات همنهشتی از درجه‌های بالاتر، یعنی همان مسألهٔ (ب) ولی برای همنهشتیهای از درجات بالاتر، و تلاش برای یافتن محکی شبیه قانون تقابل مربعی در مورد حل‌پذیری آنها، ادامه یافت. آیزنشتاین شاگرد ممتاز گاوس در سال ۱۸۴۰ قانون تقابل مکعبی را برای معادلات همنهشتی درجهٔ سوم به اثبات رسانید و خود گاوس نیز قانون تقابل مرتبهٔ چهارم را که در ارتباط با همنهشتیهای درجهٔ چهارم است ثابت کرد.

تعبیرهای مختلف این قانون در حوزه‌های دیگر ریاضیات و تلاش برای تعمیم قانون تقابل مربعی و ارائهٔ اثباتی برای این تعمیم نیازمندِ به وجود آوردن تکنیکهای جدیدی بوده است به‌طوری که

اثبات شکل تعمیم‌یافتهٔ این قانون با روایت کلاسیک آن سازگار باشد. به‌علاوه تخصیص اثبات ارائه شده برای شکل تعمیم‌یافتهٔ این قانون به حالت خاص اولیه و کلاسیک آن موجد اثباتهای جدیدی از قانون تقابل مربعی گردیده به‌طوری که تا سال ۲۰۰۹ نزدیک ۲۳۳ اثبات برای این قانون ارائه شده است، وضعی که برای هیچ یک از قضایای دیگر ریاضی پیش نیامده است،از جمله آیزنشتاین ۵ اثبات، دیریکله ۲ اثبات، لبگ ۳ اثبات، کومر ۲ اثبات، ددکیند ۳ اثبات، وکرونکر ۷ اثبات متفاوت برای این قانون ارائه داده‌اند. این تنوع اثباتها و تعمیمهای بسیار وسیع و عمیق این قانون که در نظریهٔ اعداد به دست داده شده، مؤید لقبی است که گاوس به این قانون داد.

اگر چه قوانین تقابل در مجموعهٔ اعداد صحیح بیان شده اما محتوای واقعی آن در ورای مجموعهٔ اعداد صحیح است. سرشت جبری مسألهٔ حل‌پذیری معادلات همنهشتی سبب شد تا در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم، ددکیند با الهام از کارهای کومر برای حل مسألهٔ آخر فرما و دیگر نتایج وی در مورد تعمیم قضیهٔ تقابل به میدانهای توسیعی، نتایج گاوس دربارهٔ معادلات همنهشتی را به زبان ایده‌آلهای کومر بیان کند و اولین تحقیقات نظام‌مند را دربارهٔ آنچه امروزه نظریهٔ اعداد جبری نامیده می‌شود در قالب یک مقاله منتشر نماید. با پیدایش این نظریه، قوانین تقابل دیگری دربارهٔ حلقهٔ اعداد صحیح توسیعهای جبریِ میدان اعداد گویا کشف شد که از جملهٔ آنهاٍ می‌توان به قانون تقابل آیزنشتاین، قانون تقابل فروبنیوس، قانون تقابل هیلبرت، که مسألهٔ نهم از ۲۳ مسألهٔ معروف وی بود، و قانون تقابل آرتین اشاره کرد. در واقع، قوانین تقابل هنگامی قابل فهم می‌شوند که نگاهی به نظریهٔ اعداد جبری بیندازیم و بخواهیم این قانون را به این حوزهٔ وسیع‌تر تعمیم دهیم و به کمک مفاهیم پیشرفتهٔ این نظریه، اثباتی متناسب با مسألهٔ مشابه در این نظریه ارائه کنیم. به جرأت می‌توان گفت تاریخ نظریهٔ اعداد جبری ارتباط تنگاتنگی با قوانین تقابل دارد.

از سوی دیگر، در قرن گذشته نظریهٔ معادلات همنهشتیهایِ چندجمله‌ایهایِ چندمتغیره به‌عنوان تعمیمی از معادلات همنهشتی یک متغیره، در مرکز توجه ریاضیدانان قرارگرفته و تلاش برای یافتن پاسخ سؤالاتِ حسابیِ به ظاهر ساده در مورد این همنهشتیها زمینه‌ساز پیدایش شاخهٔ جذاب و مهم هندسهٔ جبری حسابی شده است.

در دههٔ شصت قرن بیستم، رابرت لنگ لندز نظریهٔ اعداددان کانادایی با حدسیه‌های خود که تعمیمهایی گسترده از قانون تقابل مربعی و قانون تقابل آرتین هستند رویکردی جدید به مسائل اساسی نظریهٔ اعداد در پیش نهاد. این حدسیه‌ها بیانگر ارتباطات پیچیده بین اشیای حسابی از یک طرف و اشیای آنالیزی از طرف دیگر است. امروز اثبات حدسیه‌های لنگ لندز یکی از هدفهای مهم در تحقیقات جاریِ نظریهٔ اعداد است. شاهد این مدعا آن است که کارِ ولادیمیر درینفلد، لوران لافورگ، و نگو بائو چائو، که منجر به اثبات برخی از این حدسیه‌ها شده به اندازه‌ای حائز اهمیت تلقی شده که معتبرترین جایزهٔ ریاضی یعنی مدال فیلدز را نصیب آنها کرده است.

در مقالهٔ پیش رو تعبیری از قانون تقابل مربعی درگروههای متناهی ارائه می‌شود و با استفاده از ابزارهای نظریهٔ گروهها نشان داده می‌شود که این قانون در این حوزهٔ متفاوت از نظریهٔ اعداد نیز معتبر است، هرچند شیوهٔ اثبات به کار گرفته شده در این مقاله را برای قانون تقابل مربعی کلاسیک هم می‌توان به کار برد.

مراجع

1. F. Lemmermeyer, *Reciprocity Laws from Euler to Eisenstein*, Springer-Verlag (2000).
2. M. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer-Verlag (2000).
3. برای ملاحظهٔ خلاصهٔ اثباتهایی که تاکنون برای قضیهٔ تقابل مربعی ارائه شده، مرجع زیر را ببینید

http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/fchrono.html