کاربردهایی از قضیهٔ گودل در ریاضیات*

جینا کولاتا
ترجمهٔ محمد باقری

در سالهای دههٔ ۱۹۳۰، برهان گودل عالم ریاضیات را به لرزه درآورد. کورت گودل نشان داد که درهر دستگاه منطقی گزاره‌هایی وجود دارند که درستی یا نادرستی‌شان را نمی‌توان بدون خروج از آن دستگاه تعیین کرد و اگر کسی بخواهد دستگاهی منطقی بنا کند که همین گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر اصول موضوعش باشند و در نتیجه درست قلمداد شوند، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر دیگری ظهور خواهند کرد.

این نتیجه، ریاضیدانان را در مورد بسیاری ازمسائل حل نشدهٔ ریاضیات که آنها را آزار می‌داد به‌تأمل واداشت. آیا ممکن است برخی از این مسائل تصمیم‌ناپذیر باشند؟ یکی از استادان دانشگاه ایالتی نیویورك به‌نام جوئل اسپنسر می گوید: "آنچه می‌تواند واقعاً جالب باشد این است که مسألهٔ حل نشدهٔ مهمی مثل آخرین قضیهٔ فرما را بگیرند و ثابت کنند که تصمیم‌ناپذیر است."

اما تاکنون چنین کاری صورت نگرفته و ریاضیدانها درگیر بحثهایی فلسفی راجع به امکان‌پذیر بودن یا نبودن این کار بوده‌اند و اینکه آیا قضیهٔ گودل در مورد گزاره‌های با اهمیتی هم صدق می کند یا نه. خیلیها معتقدند که صدق نمی کند. گریك اسمورینسکی، منطقدانی از دانشگاه ایالتی اوهایو، می گوید: "کاملاً بجاست که قضیهٔ گودل را تصنعی، و نوعی سفسطهٔ کلامی به‌شمار آوریم."

رابرت سالووی، منطقدان دیگری از دانشگاه برکلی می‌افزاید: "برداشت عمومی این بوده که قضیهٔ گودل تنها باب طبع منطقدانهاست."

اما چند سال پیش، دو منطقدان مثالی از یك گزارهٔ "عادی" یافتند که تنها شامل کمیتهای متناهی است و اثبات درست بودنش در چارچوب ساختار اصل موضوعی معمولی ریاضیات متناهی مقدور نیست. به‌تعبیری، این گزاره فاقد خاصیت اثبات‌پذیری بود. اکنون منطقدان دیگری یك گزارهٔ به‌مراتب "عادی"‌تر یافته که درست بودنش را حتی در دستگاه قویتری از اصول موضوع نمی‌توان ثابت کرد. اثبات این گزارهٔ دوم مستلزم ساختاری بسیار فراتر از دستگاه ریاضی معمول برای کمیتهای متناهی است و همین امر آن را درمرتبهٔ بالاتری ازلحاظ تصمیم‌ناپذیری قرار می‌دهد. این دو مورد در تعدادی از ریاضیدانها این عقیده را پدید آورده که قضیهٔ گودل واقعاً درمورد مسائل مهم نیز کارایی دارد.

از این دو گزاره، اولی مربوط به ترکیبیات می‌شود و "عادی" است زیرا از آن نوع گزاره‌هایی که تنها از چنتهٔ منطقدانها درمی‌آید نیست. این گزاره که به‌نام کاشفانش، قضیهٔ پاریس-هرینگتون نامیده می‌شود، شبیه یك مسأله عادی ریاضیات است و نشانی از منطق در آن نیست. به قول سالووی، نکتهٔ جالب همین است که این قضیه ماهیتاً عادی و ترکیباتی است.

این قضیه گزاره‌ای درنظریهٔ رمزی است. نظریهٔ رمزی شاخه‌ای است از ریاضیات که به‌قول رانلد گراهام به‌این حکم می‌پردازد که "بی‌نظمی کامل ناممکن است". اگر مجموعه‌ای به‌قدر کافی بزرگ اختیار کنید، حتماً ساختاری در آن خواهید یافت. اما مسأله این است که مجموعه تا چه حد باید بزرگ باشد؟ درموردقضیهٔ پاریس-هرینگتون اندازهٔ مجموعه آن‌چنان‌سریع رشد می کند که‌خوش‌تعریف‌بودن تابع بیانگر رشد آن را نمی‌توان درحساب پئانو که دستگاه اصل موضوعی معمول ریاضیات در مورد اشیاء متناهی است، اثبات کرد. حساب پئانو به قول اسپنسر "زیربنای پذیرفته شدهٔ ریاضیات" است.

حالت خاصی ازقضیهٔ رمزی، مسألهٔ مهمانی است: دریك‌مهمانی چند مهمان باید حاضر باشند تا بتوان مطمئن بود که فلان تعداد خاص از آنها یا همه همدیگر را می‌شناسند یا همه ازهم بیگانه‌اند؟ اگر بخواهید مطمئن باشید که حداقل سه مهمان همگی باهم آشنا یا همگی نسبت به‌هم غریبه‌اند، باید حداقل شش‌نفر درمهمانی حاضر باشند. اگر بخواهید که چهارمهمان یا همگی یکدیگر را بشناسند یا همه ازهم بیگانه باشند، حداقل باید ۱۸ نفر درمهمانی حضور داشته باشند. اما کسی نمی‌داند که حداقل تعداد مهمانهای لازم برای آنکه حتماً گروه پنج‌نفره‌ای با این شرایط موجود باشد چقدر است. این‌عدد چیزی بین ۴۲ و ۵۵ است. گراهام می گوید

که تلاش برای محاسبهٔ عدد دقیق آن بی‌ثمر به‌نظرمی‌رسد و این امر فراتر از توان محاسباتی فعلی ماست.

قضیهٔ پاریس - هرینگتون حالت ساده‌شده‌ای از قضیهٔ رمزی است. طبق قضیهٔ رمزی، اگر مجموعه‌ای نامتناهی داشته باشیم و به‌هر زوج از اعضای مجموعه، به‌دلخواه یکی از دو رنگ مثلاً قرمز و آبی را نسبت دهیم، آنگاه می‌توان زیرمجموعه‌ای نامتناهی یافت که همهٔ زوجهایش قرمز یا همهٔ زوجهایش آبی باشند. کلیتر بگوییم، اگر اعداد r و k اختیار شوند و اگر به‌هر زیرمجموعهٔ k عنصری از یك مجموعهٔ نامتناهی، به دلخواه یکی از r رنگ موردنظر را نسبت دهیم، آنگاه مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های k تایی آن همرنگ‌اند.

درقضیهٔ پاریس-هرینگتون با حالت متناهی قضیهٔ رمزی روبرو هستیم. پاریس و هرینگتون ابتدا مجموعه‌ای "بزرگ" از اعداد صحیح را به‌صورت مجموعه‌ای تعریف کردند که حداقل به‌تعداد کوچکترین عدد صحیح خود عنصر داشته باشد. مثلاً، مجموعهٔ ۳، ۱۵، ۲۵، ۲۶ "بزرگ" است زیرا حداقل سه عنصر دارد. مجموعهٔ ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۶، ۱۰۸ "بزرگ" نیست زیرا کمتر از ۱۰۰ عنصر دارد. آنگاه پاریس و هرینگتون نشان دادند که اگرمجموعهٔ به‌قدرکافی بزرگی از اعداد صحیح اختیارکنیم و رنگهایی چون قرمز و آبی به‌هر زوج از اعداد صحیح آن نسبت دهیم، می‌توانیم مجموعه‌ای "بزرگ" بیابیم که همهٔ زوجهایش قرمز یا همهٔ زوجهایش آبی باشند. یا به‌عبارت کلیتر، اگر r و k را اختیارکنیم و r رنگ‌را به‌زیرمجموعه‌های k عنصری مجموعهٔ اولیه‌نسبت دهیم، همیشه می‌توانیم یك‌زیرمجموعهٔ "بزرگ" بیابیم که همهٔ k تایی‌هایش همرنگ باشند.

مجموعهٔ اولیه به‌چه‌بزرگی باید باشد؟ این‌بستگی دارد به‌تعداد رنگها و چگونگی افراز زیرمجموعه‌ها؛ ولی سالووی کشف کرد که کران پایین اندازهٔ مجموعه آن چنان سریع رشد می‌کندکه در حساب پئانو حتی خوشتعریف هم نیست. به‌قول گراهام، "کران پایین میزان بزرگی مجموعهٔ اولیه سریعاً رشد می‌کند، آن قدر سریع که تصورش ناممکن است و این سرعت چنان است که اعداد به‌نحوی معنای خود را از دست می‌دهند."

نحوهٔ رشد این کران‌پایین، مشابه نحوهٔ رشد تابعی به‌نام اکرمن است. این تابع تابعی دومتغیره است‌که به‌صورت برگشتی تعریف می‌شود: $f(a, b)=f[(a-1), f(a, b-1)]$ که در آن $f(1, b)=2b$ و به‌ازای a های بزرگتر از ۱، $f(a, 1)=a$. برای این تابع

$$f(3, 2)=2^{2^2}=16$$

$$f(3, 4)=2^{2^{2^{2^2}}}=2^{65536}$$

یعنی عددی با بیش از ۱۹،۰۰۰ رقم. (برای تعیین مقدار این برجهای توانی باید از بالا به‌پایین عمل کرد.) جملهٔ $f(6, 6)$ آن‌قدر بزرگ است که اگر بخواهیم آن‌را محاسبه‌کنیم نوشتنش روی‌صفحهٔ کاغذ مقدور نیست و تازه اینها مقادیرآغازین تابع‌اند؛ مقادیری‌که خیلی به‌مبدأ نزدیك‌اند.

پاریس و هرینگتون برای اثبات اینکه قضیه‌شان درحساب‌پئانو تصمیم‌ناپذیر است ازنظریهٔ مدلها که درمنطق‌ریاضی شیوهٔ متعارفی است بهره جستند. هرینگتون می‌گویدکه برای این منظور دو مدل برای حساب پئانو ساخته شد که به‌صورت دومجموعهٔ هم‌ارز از اصول موضوع بود. قضیه دریکی ازاین‌مدلها درست و در دیگری نادرست بود و همین نشان دهندهٔ تصمیم‌ناپذیری قضیه است. شبیه این وضع در مورد اصول موضوع هندسه وجود دارد. در هندسهٔ اقلیدسی که یکی ازمدلهاست، خطهای متوازی‌هرگز به‌هم نمی‌رسند در هندسهٔ نااقلیدسی که مدل دیگری است، این خطها می‌توانند به‌یکدیگر برسند.

هرینگتون پس از آنکه ثابت کرد قضیهٔ پاریس-هرینگتون در حساب پئانو تصمیم‌ناپذیر است، نامه‌ای به‌سالووی‌نوشت و اعلام کرد که این نتیجه حاصل‌شده ولی نحوهٔ یافتن آن را ذکر نکرد. آنگاه سالووی و یکی از همکارانش به نام کتونن برهانی برای تصمیم‌ناپذیر بودن این قضیه یافتندکه ماهیت ترکیبیاتی قویتری دارد.

سالووی و کتونن نشان دادند که چون کران پایین اندازهٔ مجموعهٔ اولیه‌فوق‌العاده‌سریع رشد می‌کند، برای‌اثبات‌خوشتعریف‌بودن آن و همچنین برای اثبات قضیهٔ پاریس-هرینگتون باید ساختاری فراتر ازحساب پئانو به‌کار گرفته شود.

حساب پئانو شامل همهٔ اعداد صحیح تا "بینهایت" است‌که‌آن را با ω نشان می‌دهیم. آنگاه پس از یك دور اعداد صحیح، دوباره جمله‌های $\omega+1$، $\omega+2$ شروع می‌شوند و تا 2ω ادامه می‌یابند. اما حساب پئانو در 2ω به پایان نمی‌رسد بلکه تا

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

ادامه پیدا می‌کند.

اما همین برج نمایی ω ها هم آن‌قدر بزرگ نیست که در قضیهٔ پاریس-هرینگتون کاری از پیش ببرد. چیزی‌که به‌آن نیاز داریم، ϵ_0 است که به‌عنوان حد

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

تعریف می‌شود. البته برای همگرایی این برج ω ها هم دلیل ریاضی کاملی عرضه نشده است.

دراین اواخر هاروی فریدمن از دانشگاه دولتی اوهایو قضیهٔ تصمیم‌ناپذیر دیگری یافت ولی در قضیهٔ او تابعی مطرح می‌شود که رشدش آن چنان سریع است که به‌قول اسپنسر، تابع قضیهٔ پاریس-هرینگتون به‌گردش هم نمی‌رسد. برای‌اثبات قضیهٔ فریدمن از ϵ_0 هم کاری ساخته نیست.

قضیهٔ فریدمن حالت متناهی نتیجهٔ معروفی است که جوزف کروسکال آن‌را یافته است. قضیهٔ کروسکال مربوط به "درختهایی" است به‌صورت‌مجموعه‌ای ازنقاط‌که به‌توسط خطوطی به‌هم وصل می‌شوند بی آنکه هیچ دوری بسازند.

گردایه‌هایی از درختها می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند و در صورت نامتناهی‌بودن، طبق قضیهٔ کروسکال نمی‌توانند بی‌نظمی

کامل داشته باشند. طبق این قضیه، اگر گردایه‌ای نامتناهی از درختهای متناهی داشته باشیم که به هر شیوهٔ دلخواهی مرتب شده باشند، آنگاه حداقل برای یکی از این درختها یك درخت بعدی وجود دارد که همهٔ شاخه‌های درخت اولیه را می‌توان بر شاخه‌های درخت بعدی منطبق کرد. قضیهٔ کروسکال زیربنای شاخه‌ای از ترکیبیات است به‌نام "خوش‌شبه‌ترتیبی".

فریدمن می‌گوید برای ساختن حالتی متناهی از قضیهٔ کروسکال نیازی به‌گردایه‌ای نامتناهی از درختها نیست و فقط به‌گردایه‌ای از درختها که به‌قدر کافی بزرگ باشد، نیاز داریم. منظور از "بزرگ" چیست؟ اینجاست که پای تابع عظیم به‌میان می‌آید. تابعی که آن را "غول‌آسا" توصیف می‌کنند. به‌قولی این تابع از همهٔ تابعهای قابل محاسبه‌ای که تاکنون مطرح شده، سریعتر رشد می‌کند.

با توجه به‌اینکه قضیهٔ فریدمن بسیار فراتر از دسترس حساب پئانوست، روشن می‌شود که قضیهٔ کروسکال به‌راستی نکتهٔ ژرفی در خود دارد. نتیجهٔ فریدمن این نکته را دربردارد، زیرا نشان می‌دهد که اگر قضیهٔ کروسکال را به صورت قضیه‌ای متناهی درآوریم، برهان آن فراتر از روشهای عادی ریاضیات متناهی است. عادی‌بودن قضیهٔ فریدمن برای هرینگتون بسیار جالب‌توجه بوده است. به گفتهٔ او، این چنان قضیه‌ای است که می‌توانسته است در ترکیبیات، بدون ارجاع به‌منطق ریاضی و تصمیم‌ناپذیری، مطرح‌شده باشد. وی همچنین گفته است که "تصور این امر برایم آسان است که‌پژوهشگران ترکیبیات به‌فکر این‌قضیه افتاده باشند."

فریدمن همچنین نشان داد که اگر گردایه‌ای به‌قدرکافی بزرگ از درختهای متناهی اختیار کنیم و بپرسیم که‌آیا یك درخت‌متناهی با اندازهٔ بخصوص (و نه هراندازهٔ دلخواه) باید بخشی ازدرختی دیگر باشد، می‌توانیم به‌کمك حساب پئانو مثبت‌بودن پاسخ را نشان دهیم. اما تعداد مراحل این اثبات فوق‌العاده زیاد است. فریدمن ثابت کرد که اگر مثلاً بخواهید ثابت کنید که یك درخت شامل ۱۰ تارك باید بخشی از یك درخت دیگرباشد، برهان مربوط مستلزم بیش از

$$\left.2^{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}\right\}\text{ ۱۰۰۰ مرتبه}$$

مرحله خواهد بود.

اسمورینسکی پیش‌بینی می‌کند که تابع عظیم فریدمن تازه آغاز کار است. فریدمن تنها به شکل ضعیفی از قضیهٔ کروسکال پرداخته است. وی هم‌اکنون مشغول‌کار روی‌حالتی متناهی ازشکل کامل قضیهٔ کروسکال است و وقتی این کار به نتیجه برسد توابعی مطرح خواهند شدکه F (تابعی‌که فعلاً فریدمن به دست داده) به گرد آنها هم نمی‌رسد.

هرچه قضایای عادی بیشتری کشف شوند که تصمیم‌ناپذیر باشند، طبعاً ریاضیدانان به‌این فکر گرایش بیشتری خواهند یافت که قضیهٔ گودل می‌تواند درمورد نتایج مهم‌هم به‌کار رود. همچنین کشف دو قضیهٔ پاریس-هرینگتون و فریدمن که به تازگی صورت گرفته ممکن است موجب شودکه ریاضیدانان تصویر جامعتری از منطق ریاضی به‌دست آورند که اشیاء نامتناهی چون ω^{ω} و ϵ_0 در آن بگنجند. به قول هرینگتون این امر نشانهٔ آن است که این اشیاء غریب از دیدگاه ریاضی اشیاء معقولی هستند.

• Gina Kolata, "Does Gödel's theorem matter to mathematics?", *Science*, **218**, 19 November 1982.