احتمال هندسی•

جیان کارلو روتا*

ترجمهٔ شیوا زمانی

خیلی خوشحالم که اینجا به‌عنوان «سخنران سمینار[1]» امسال در برابر شما هستم، و خیلی مفتخرم که این فرصت عالی به من داده شده تا دربارهٔ بخشی از ریاضیاتی که به آن عشق می‌ورزیم با شما صحبت کنم.

چون هیأت مدیرهٔ انجمن ریاضی آمریکا تصمیم گرفته بود که سخنرانان سمینار به سه موضوع مستقل و بی‌ارتباط با یکدیگر بپردازند تا هر شنونده‌ای بتواند از یک یا دو سخنرانی صرف‌نظر کند بدون آنکه چیزی را از دست بدهد، من امکانی برای الگوبرداری از سخنرانان سمینارهای قبلی نیافتم. تصمیم گرفتم که فهرست سخنرانان قبلی را بررسی کنم، اما به دنبال اسامی ریاضیدانانی بگردم که چنین افتخاری نصیب آنها نشده است. مطمئناً، یک نام به‌وضوح از قلم افتاده بود: نام هرمان وایل.

امیدوارم مرا ببخشید که با نقل برخی خاطرات شخصی از بحث منحرف می‌شوم.

من در پاییز ۱۹۵۰ به‌عنوان دانشجوی سال اول در پرینستن ثبت‌نام کردم؛ چند ماه قبل از آن از دبیرستان آمریکایی کیتو[2]ی اکوادور فارغ‌التحصیل شده بودم. مدیر دبیرستان آمریکایی کیتو فارغ‌التحصیل پرینستن بود و او بود که مرا به دانشگاه پرینستن هدایت کرد.

در نوامبر ۱۹۵۰، من مستمع اولین سخنرانیهای ریاضی زندگیم بودم. اینها سه سخنرانی وانوکسِم[3] بودند که توسط هرمان وایل ایراد می‌شدند و دارای عنوان عمومی «تقارن» بودند. این سخنرانیها برای من تجربه‌ای فراموش‌نشدنی بود. سخنرانیها در یک تالار قدیمی شیمی برگزار می‌شدند که مملو از جمعیتی مشتاق بود.

اولین سخنرانی با یک نقل‌قول طولانی به زبان یونانی شروع شد که هیچ‌یک از شنوندگان به غیر از لوتر فالِر آیزنهارت معنای آن را نفهمید. این شروع درخشان با نمایش اسلایدهایی دنبال شد که زنان جذابی را نشان می‌دادند که کلاههای لبه‌پهنی مطابق با مُد آن زمان بر سر داشتند، و کمی بعد با اسلایدهای دیگری که الحمراء و پنتاگون را نشان می‌دادند. هیچ حرفی از ریاضیات نبود. شنوندگان شگفت‌زده شده بودند که این نمایش پرزرق و برق «فرهنگ» به کجا می‌انجامد. در سخنرانی دوم چیز بیشتری از ریاضیات عنوان نشد، سخنران اسلایدهای دیگری که در بارهٔ آزمایشهای فیزیکی بود نمایش داد، و در مورد آنها توضیحات شفاهی عالمانه‌ای هم داد. تنها در آخرین سخنرانی بود که نظریهٔ گروهها حضور کم‌رنگی یافت. در این موقع، شنوندگان، که در این مدت از تعدادشان کاسته نشده بود، به‌طور کامل جذب موضوع شده بودند و برایشان اهمیتی نداشت که سخنران خیلی کم در مورد ریاضی صحبت کرده است؛ درواقع او در مورد هر چیزی خیلی کم صحبت کرده بود. چیزی که بیشتر شایان تذکر است این است که، به‌نظر می‌رسید شنوندگان از سخنران برای اینکه محتوای سخنرانیهای خود را مستقل از یکدیگر تهیه کرده است سپاسگزارند. وقتی این *خاطرهٔ* دوردست را به یاد می‌آوردم، می‌فهمم که مستقل بودن سخنرانیهای سمینار حاضر تصمیم عاقلانه‌ای است، حتی اگر سخنران هرمان وایل نباشد.

عنوان این سخنرانی «احتمال هندسی» است. تعریفی از احتمال هندسی می‌تواند چنین باشد: احتمال هندسی مطالعهٔ اندازه‌های ناورداست. مانند هر تعریفی، این تعریف چیزی به ما نمی‌گوید مگر اینکه چند مثال نوعی به ما نشان داده شود؛ این مثالها محتوای این سخنرانی هستند.

حدود ۱۰۰ سال پیش، خواصی‌که شالودهٔ مفاهیمی مانند طول، مساحت، حجم، و همین‌طور احتمال پیشامدها هستند، به‌صورت انتزاعی درآمدند و تحت لوای کلمهٔ «اندازه» قرار گرفتند. بگذارید تعریف اندازه را مرور کنیم، چون می‌خواهیم از این تعریف به یک روش غیرمعمول استفاده کنیم.

یک اندازهٔ μ تابعی است که روی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ S تعریف می‌شود که مقادیری حقیقی و نه لزوماً مثبت اتخاذ می‌کند. خانوادهٔ مجموعه‌هایی که اندازه روی آنها تعریف شده است تحت اجتماع و اشتراک بسته است و شامل مجموعهٔ تهی است.

اصول موضوع را به‌سرعت مرور می‌کنیم.

---

۱. Colloquium Lecturer. انجمن ریاضی آمریکا درگردهمایی‌های سالانهٔ خود سمینار (colloquium)ی برگزار می‌کند که معمولاً ریاضیدانی سرشناس در آن سخنرانی می‌کند. این مقالهٔ ترجمهٔ نخستین سخنرانی از سخنرانیهای سه‌گانهٔ این سمینار در ژانویهٔ ۱۹۹۷ است.

2. Quito 3. Vanuxem

اصل موضوع ۱

$$\mu(\varnothing) = 0$$

که $\varnothing$ مجموعهٔ تهی است.

اصل موضوع ۲. اگر A و B دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

معنای این اصل دوم واضح است. این اصل می‌گوید که اندازهٔ جمعی است. به‌ویژه اگر دو مجموعهٔ مجزای A و B داشته باشیم، آنگاه

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

به‌طور کلی، به‌ازای هر خانوادهٔ متناهی F که اعضایش مجموعه و هر دو عضو آن مجزا باشند، داریم

$$\mu(\bigcup_{A \in F} A) = \sum_{A \in F} \mu(F)$$

موکداً خاطرنشان می‌کنیم که شمارا جمعی بودن اندازه را مفروض نگرفته‌ایم.

شناخته‌شده‌ترین مثالِ اندازه، حجم یک جسم صلب A، $\mu_n(A)$، در فضای اقلیدسی nبعدی معمولی است. حجم یک جسم صلب A، $\mu_n(A)$، در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند. اما اصول ۱ و ۲ حجم را در بین تمام اندازه‌های ممکن مشخص نمی‌کنند. می‌توان حجم را در بین تمام اندازه‌ها با اضافه‌کردن دو اصل موضوع شهودی دیگر به اصول ۱ و ۲ مشخص کرد، یعنی دو اصل زیر:

اصل موضوع ۳. حجم یک مجموعهٔ A مستقل از مکان A است. اگر یک مجموعهٔ A را در یک فضای اقلیدسی nبعدی بتوان با حرکت صلب برروی یک مجموعهٔ B قرار داد، در این صورت A و B دارای یک حجم هستند.

به‌عبارت دیگر، حجم تحت گروه حرکتهای اقلیدسی ناورداست. و بالاخره می‌باید، به قول فیزیکدانها، یک اصل موضوع نرمالسازی وضع کنیم. این‌کار را با در نظر گرفتن یک متوازی‌السطوح تعمیم‌یافتهٔ P با اضلاع عمود بر هم به طولهای x_1، x_2، $\ldots$، x_n، و قراردادن

اصل موضوع ۴

$$\mu_n(P) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

انجام می‌دهیم.

این اصول، همراه با شرایط پیوستگی مناسبی، به‌طور یکتا حجم اجسام صلب را در فضای nبعدی اقلیدسی تعیین می‌کنند. با شروع از این چهار اصل، با یک فرایند حدی مانند آنچه در یک کتاب درسی حسابان پیشرفته می‌آید، می‌توان این واقعیت را نشان داد که حجم یک گوی S_r به شعاع r در فضای nبعدی از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_n(S_r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{(n/2)!}$$

اگر بعد n زوج باشد و

$$\mu_n(S_r) = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2}((n-1)/2)! r^n}{n!}$$

اگر بعد n فرد باشد.

هنوز خیلیها عقیده دارند که حجم تنها اندازهٔ ناوردا در فضای nبعدی اقلیدسی است. اما، درواقع اندازه‌های ناوردای دیگری وجود دارند که روی تمام زیرمجموعه‌های معقول فضای nبعدی اقلیدسی تعریف شده‌اند، و دارای معنای هندسی قابل‌توجهی هستند. هدف من تشریح تمامی این اندازه‌های ناورداست.

اگر سه اصل موضوع اول را حفظ کنیم اما اصل چهارم، اصل نرمالسازی، را تغییر بدهیم چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا چیز جالبی به‌دست می‌آوریم، یا هیچ چیز جدیدی به‌دست نخواهیم آورد؟ برای پاسخ به این سؤال به ابزارهای پایهٔ ریاضیات ترکیبیاتی روی می‌آوریم. ابزارهای پایهٔ ریاضیات ترکیبیاتی، توابع متقارن مقدماتی هستند، و به‌طور مشخص عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای nمتغیرهٔ زیر:

$$e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2 x_3 \ldots x_n + x_1 x_3 x_4 \ldots x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$$

$$e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

در اینجا اتفاقی جالب توجه را مشاهده می‌کنید: آخرین تابع از این nتابع متقارن، فرمول حجم یک متوازی‌السطوح تعمیم‌یافته است. اصل موضوع ۴ را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

اصل موضوع ۴

$$\mu_n(P) = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

بیایید آزمایشی بکنیم، و به‌جای تابع متقارن nام، تابع متقارن $(n-1)$ام را بگذاریم. ابتدا قرار می‌دهیم $n = 3$، یعنی، فضای سه‌بعدی، و بدین‌ترتیب بهتر می‌توانیم تجسم کنیم که چه روی می‌دهد. حال ببینیم که آیا می‌توانیم با حفظ سه اصل از اصلهای بالا اما با تغییر اصل نرمالسازی ۴ با استفاده از تابع متقارن دیگری به‌جای $e_3(x_1, x_2, x_3)$ که حجم را می‌دهد، اندازه‌ای روی زیرمجموعه‌های فضای ۳بعدی تعریف کنیم؟ ابتدا تابع متقارن e_2 را به‌جای تابع متقارن e_3 قرار می‌دهیم، و بدین‌ترتیب اصل ۴ را تبدیل می‌کنیم به

اصل موضوع ′۴

$$\mu_2(P) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

آیا این اصل یک اندازه تعریف می‌کند؟ البته. سمت راست، فرمول مساحت سطح متوازی‌السطوح P است که بر ۲ تقسیم شده است. و باز، می‌توان در هر کتاب درسی حسابان پیشرفته توضیح این مطلب را یافت که

اصول ۱ و ۲ و ۳ و $'۴$، همراه با برخی شرایط پیوستگی، به‌طور کامل یک اندازهٔ ناوردا را مشخص می‌کنند که مساحت رویهٔ اجسام صلب در فضای معمولی است. برای مثال، فرمول مشهور زیر برای مساحت رویهٔ یک گوی S_r به شعاع r در بُعد سه از این اصول به‌دست می‌آید:

$$\mu_۲(S_r) = ۴\pi r^۲$$

حال قدم بعد را برمی‌داریم. با جسارتی که از موفقیت خود در مورد دو تابع متقارن یافته‌ایم، باز هم اصل ۴ را با استفاده از تابع متقارن دیگری به اصل دیگری تبدیل می‌کنیم. قرار می‌دهیم

اصل موضوع $''۴$

$$\mu_۱(P) = e_۱(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱ + x_۲ + x_۳$$

اندازهٔ جدید $\mu_۱$ در اصول ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کند، و به‌علاوه، در اصل $''۴$ نیز صدق می‌کند. تابع متقارن از درجهٔ ۱ همان نقشی را بازی می‌کند که در دو مثال قبل، دو تابع متقارن دیگر ایفا کردند.

اما یک لحظه صبر کنید: آیا این تعریف سازگار است؟

برای اینکه ببینیم تعریف اندازهٔ جدیدِ $\mu_۱$ سازگار است (یعنی، $\mu_۱$ که توسط اصول ۱، ۲، ۳، و $''۴$ تعریف شده است واقعاً وجود دارد و فقط خیالپردازی نیست)، دو متوازی‌السطوح $P_۱$ و $P_۲$ را که دارای یک وجه مشترک هستند در نظر بگیرید. متوازی‌السطوح اول دارای اضلاعی برابر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ است، و متوازی‌السطوح دوم اضلاعی برابر $x_۱$، $x_۲$، و y دارد. دو متوازی‌السطوح دارای یک وجه مشترک با اضلاعی برابر $x_۱$ و $x_۲$ هستند. اندازهٔ متوازی‌السطوحِ $P_۱ \cup P_۲$، یعنی $\mu_۱(P_۱ \cup P_۲)$، را می‌توان با استفاده از سمت چپ فرمولِ اصل ۲ یا استفاده از سمت راست آن محاسبه کرد، و هر دو محاسبه باید به یک جواب منجر شوند؛ به زبان نمادی داریم

$$\mu_۱(P_۱ \cup P_۲) = \mu_۱(P_۱) + \mu_۱(P_۲) - \mu(P_۱ \cap P_۲)$$

درستی این تساوی را تحقیق می‌کنیم.

سمت چپ با ملاحظهٔ اینکه متوازی‌السطوح $P_۱ \cup P_۲$ دارای اضلاعی برابر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳ + y$ است، محاسبه می‌شود. بنابراین، اصل $''۴$ حاکی است که

$$\mu_۱(P_۱ \cup P_۲) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + y$$

حال، سمت راست را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\mu_۱(P_۱) = x_۱ + x_۲ + x_۳$$

$$\mu_۱(P_۲) = x_۱ + x_۲ + y$$

$$\mu_۱(P_۱ \cap P_۲) = x_۱ + x_۲$$

که این باز مبتنی است بر اصل $''۴$ برای $P = P_۱ \cap P_۲$، و اینکه وقتی متوازی‌السطوح تخت است (یک مستطیل) یکی از وجوه برابر صفر است. بنابراین، سمت راست فرمول اصل ۲ برابر است با

$$\begin{aligned}\mu_۱(P_۱) + \mu_۱(P_۲) - \mu_۱(P_۱ \cap P_۲) \\ &= x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۱ + x_۲ + y - (x_۱ + x_۲) \\ &= x_۱ + x_۲ + x_۳ + y\end{aligned}$$

دو طرف معادلات ما یکی هستند، و بدین‌ترتیب متقاعد می‌شویم که تعریف کاملاً سازگار است. درواقع، تعریف $\mu_۱(P)$ برای یک متوازی‌السطوح P دارای تعبیر هندسی ساده‌ای است. وقتی در ۴ ضرب شود، برابر محیط متوازی‌السطوح P می‌شود (یعنی، مجموع طولهای تمام اضلاع). همان‌طور که در مورد حجم و سطح دیدیم، می‌توان با ملاحظاتی مبتنی بر پیوستگی نشان داد که اندازهٔ $\mu_۱$ را می‌توان به تمام اجسام صلب معقول در فضای معمولی تعمیم داد، برای مثال، به تمام مجموعه‌های محدب، و به تمام چندوجهیها، محدب یا نامحدب. اما، ممکن است کسی اعتراض کند که $\mu_۱(P)$ تنها برای یک متوازی‌السطوح P معنا دارد، چون متوازی‌السطوح دارای محیطی خوش‌تعریف است. اگر A جسمی صلب باشد که محیط خوش‌تعریفی نداشته باشد، مثلاً یک کره، چه پیش می‌آید؟ تعریف اندازهٔ $\mu_۱(A)$ برای چنین جسم صلبی در تقابل با فهم متعارف قرار می‌گیرد. اینشتین نوشته است: «فهم متعارف باقیماندهٔ آن پیش‌داوریهایی است که قبل از هفده سالگی به ما القاء شده‌اند». فهم متعارف باید به‌طور دائم با واقعیت تطبیق داده شود. اندازهٔ جدید $\mu_۱$ که ما به این روش به‌دست آوردیم *عرض میانگین* نامیده می‌شود، اسم بی‌مسمایی که به دلایل تاریخی حفظ شده است. عرض میانگین یک جسم صلب در فضا کاملاً با اصول ۱، ۲، ۳، و $''۴$ مشخص می‌شود. به‌ویژه، ناورداست، یعنی به مکان بستگی ندارد. برای مثال، با محاسبهٔ فرمول عرض میانگین کره‌ای به شعاع r به‌دست می‌آید

$$\mu_۱(S_r) = ۴r$$

پس، می‌بینیم که درحالت سه‌بعدی هر یک از سه تابع متقارن مقدماتی از سه متغیر، به یک اندازهٔ ناوردا منجر می‌شود که دارای شأنی برابر با حجم است. دو اندازهٔ اول یعنی حجم و مساحت مشهورند. سومی، عرض میانگین، در حال حاضر تقریباً به‌طور کامل ناشناخته است. من کسی را نمی‌شناسم که حسی شهودی در مورد عرض میانگین، مشابه آن حس شهودی که برای حجم و مساحت داریم، داشته باشد.

ما در انتظار این هستیم که ببینیم عرض میانگین چه کاربردی ممکن است داشته باشد. تولیدکنندهٔ سیب‌زمینی می‌داند که حجم یک سیب‌زمینی از این جهت اهمیت دارد که محتوای غذایی سیب‌زمینی را معین می‌کند. وی همچنین می‌داند که سطح یک سیب‌زمینی مهم است چون گفته می‌شود که ویتامینهای سیب‌زمینی روی پوست آن متمرکز می‌شوند. می‌توانیم حدس بزنیم که به محض اینکه او از عرض میانگین آگاه شود، تعبیری غذایی از عرض میانگین یک سیب‌زمینی می‌یابد. من این مثال را مدیون استیو شانوال[1] هستم.

استدلال مشابهی در بعد n صادق است. ما n اندازهٔ ناوردای متفاوت را کشف می‌کنیم، که هر یک از آنها روی تمام چندوجهیها و روی تمام اجتماعهای متناهی مجموعه‌های محدب فشردهٔ خوش‌تعریف هستند. هر یک از n تابع متقارن مقدماتی از n متغیر به تعریف یک اندازهٔ ناوردای جدید منجر می‌شود که تعمیم متفاوتی از مفهوم حجم است. این n اندازه *حجمهای ذاتی* نامیده می‌شوند. حجمهای ذاتی در ابتدا روی یک چندوجهی تعمیم‌یافتهٔ متعامد P تعریف می‌شوند که اضلاعش برابرند با $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n؛ قرار می‌دهیم

$$\mu_k(P) = e_k(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

1. Steve Schanuel

که $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، kامین تابع متقارن مقدماتی است. سپس می‌توانیم با تکنیکی که به اختصار خواهیم دید تعریف حجمهای ذاتی را به مجموعه‌های کلیتر تعمیم دهیم.

حجمهای ذاتی مستقل از یکدیگر هستند، بجز اینکه چند نابرابریِ تاکنون ناشناخته بین آنها برقرار است. این نابرابریها نابرابریِ کلاسیک هم‌محیطی را که حجم را به مساحت مربوط می‌سازد تعمیم می‌دهند. در حال حاضر ما اطلاعات خیلی کمی از حجمهای ذاتی داریم؛ مدت زیادی نیست که این حجمها مطرح شده‌اند، و تحقیقات خیلی کمی روی آنها انجام شده است. ما حتی فرمول حجمهای ذاتی یک سادک nبعدی را هم نمی‌دانیم. حال با خود فکر می‌کنید: اینها همه عالی و محشر است، اما حجمهای ذاتی، چگونه از چندوجهیها به مجموعه‌های کلی تعمیم می‌یابند؟ و به‌علاوه، آیا نمی‌توان هیچ تعبیر شهودیی برای حجمهای ذاتی یافت؟

من به هر دوی این پرسشها به‌طور همزمان پاسخ خواهم داد. به فضای سه‌بُعدی باز می‌گردیم. می‌دانید که مجموعهٔ تمام خطهای راست در فضا ــ نه لزوماً گذرنده از مبدأ ــ یک چندگونا[1]ی جبری زیبا تشکیل می‌دهند که گراسمانین[2] نامیده می‌شود. گروه تمام حرکتهای صلب اقلیدسی روی گراسمانین عمل می‌کند، و تحت عمل گروه حرکتهای اقلیدسی یک اندازهٔ ناوردا روی گراسمانین وجود دارد. این اندازهٔ ناوردا با تقریب یک عامل ثابت یکتاست. حکم مشابهی را می‌توان در مورد مجموعهٔ تمام صفحه‌ها، و در حالت کلیتر برای مجموعهٔ تمام چندگوناهای خطی از بعد k در فضای اقلیدسیِ nبعدی بیان کرد.

در ریاضیات عملاً محاسبات با اندازه‌های ناوردا روی گراسمانین‌ها نادر است: برای بسیاری از ریاضیدانان حتی به‌یاد آوردن یک فرمول صریح برای اندازه‌های ناوردا روی گراسمانین‌ها دشوار است. بیایید اندکی وقت صرف کنیم تا تصوری در مورد اندازه‌های ناوردا روی مجموعهٔ تمام خطهای راست در فضای سه‌بعدی به‌دست آوریم. این اندازه را λ_1^3 می‌نامیم؛ اندیس بالایی ۳ نشان‌دهندهٔ فضای سه‌بعدی است، و اندیس پایینی نشان‌دهندهٔ بعد یک خط، یعنی، یک.

یک مستطیل R را در جایی از فضا، و مجموعهٔ تمام خطهای راستی را که به مستطیل R برخورد می‌کنند در نظر بگیرید. آیا می‌توان اندازهٔ این مجموعه از خطوط را بدون دانستن فرمول اندازهٔ ناوردا روی گراسمانین تمام خطوط در فضای ۳بعدی محاسبه کرد؟ البته که می‌شود. یک خط راست یا به مستطیل R در نقطه‌ای برخورد می‌کند و یا اصلاً برخورد نمی‌کند؛ بنابراین *مقدار* اندازهٔ مجموعهٔ تمام خطهایی که به R برخورد می‌کنند تنها به مساحت مستطیل R، $\mu_2(R)$، بستگی دارد. هر گاه مستطیل دیگر R' را در نظر بگیریم که مساحت آن دو برابر مساحت R باشد، آنگاه اندازهٔ مجموعهٔ تمام خطهایی که به R' برخورد می‌کنند دو برابر اندازهٔ مجموعهٔ تمام خطهایی است که به R برخورد می‌کنند. اگر به همین ترتیب پیش برویم، به معادلهٔ تابعی کوشی می‌رسیم، و نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ مجموعهٔ تمام خطهای راستی که به یک مستطیل R برخورد می‌کنند برابر یک مقدار ثابت ضرب در مساحت $\mu_2(R)$ است. چون در انتخاب مقیاس برای این اندازه آزاد هستیم، توافق می‌کنیم که این ثابت برابر یک باشد.

اما به‌جای مستطیل، می‌توانیم هر شکل مسطح C را، هر چه که باشد، در هر مکان دلخواهی از فضا در نظر بگیریم. با همین استدلال، اندازهٔ مجموعهٔ خطهایی که به C برخورد می‌کنند برابر مساحت $\mu_2(C)$ است. من روی این فرض که C باید در یک صفحه قرار گیرد تأکید می‌کنم. نتیجه: حتی بدون دانستن فرمول اندازهٔ ناوردای λ_1^3، می‌توانیم مقدار این اندازه را روی مجموعه‌های مشخصی از خطوطِ محاسبه کنیم.

حال مجموعهٔ پیچیده‌تری از خطهای راست را در نظر می‌گیریم، مجموعه‌ای چون D در فضای ۳بعدی که اجتماع مجموعه‌های مجزای C_1، C_2، ...، C_n است، به‌طوری که هر C_i در یک صفحهٔ متفاوت واقع است؛ و خواست ما تعیین اندازهٔ مجموعهٔ تمام خطهای راستی است که به D برخورد می‌کنند. چنین محاسبه‌ای را می‌توان انجام داد، اما این کار یک «کابوس ترکیبیاتی» است، چنانکه مجبوریم همان‌کاری را بکنیم که ریاضیدانان وقتی با کابوسهای ترکیبیاتی مواجه می‌شوند انجام می‌دهند: آنها مسأله را کمی تغییر می‌دهند. در این مورد، ما از روشی که احتمال‌دانان به آن عمل می‌کنند الگو می‌گیریم. فرض کنید $X_D(\omega)$ برابر تعداد دفعاتی باشد که خط راست ω به مجموعهٔ D برخورد می‌کند. به‌جای محاسبهٔ یک اندازه، انتگرال

$$\int X_D(\omega)d\lambda_1^3(\omega)$$

را محاسبه می‌کنیم، که ω روی گراسمانین تغییر می‌کند، یعنی روی مجموعهٔ تمام خطهای راست در فضا. خواهیم دید که می‌توانیم این انتگرال را بدون دانستن اندازهٔ λ_1^3 روی گراسمانین محاسبه کنیم. چون

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

و C_iها مجزا هستند، داریم

$$\int X_D(\omega)d\lambda_1^3(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \int X_{C_i}(\omega)d\lambda_1^3(\omega)$$

اما ما هر یک از مجموعه‌های C_i را طوری انتخاب کردیم که در یک صفحه باشند، بنابراین هر خط راست یا یک‌بار به C_i برخورد می‌کند یا اصلاً برخورد نمی‌کند[1]. در نتیجه

$$\int X_{C_i}(\omega)d\lambda_1^3(\omega) = \mu_2(C_i)$$

و بنابراین

$$\int X_D(\omega)d\lambda_1^3(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(C_i)$$

این اتحاد به ما چه می‌گوید؟ سمت راست برابر مساحت رویهٔ D است. هیچ چیز مانع از این نیست که حد بگیریم و ادعای زیر را مطرح کنیم. فرض کنید E «هر» رویه‌ای در فضا باشد، و $X_E(\omega)$ تعداد دفعاتی باشد که خط راست ω به رویهٔ E برخورد می‌کند. در این صورت، انتگرال

$$\int X_E(\omega)d\lambda_1^3(\omega)$$

1. variety   2. Grassmannian

۱. چنین حکمهایی را باید با صرف‌نظر کردن از مجموعه‌ای از خطها (یا صفحه‌ها)ی استثنایی که اندازهٔ ۰ دارند، تعبیر کرد.

روی تمام خطهای راست ω، برابر مساحت رویهٔ E است. به زبان احتمالات: تعداد متوسط دفعاتی که یک خط راستِ به تصادف انتخاب شده به رویهٔ E برخورد می‌کند برابر مساحت رویهٔ E است.

حال بار دیگر همان گامها را برمی‌داریم و همان استدلال را برای مجموعهٔ تمام صفحه‌ها در فضا، به‌جای مجموعهٔ تمام خطهای راست، تکرار می‌کنیم. اندازهٔ ناوردا روی این گراسمانین با λ_2^3 نمایش داده می‌شود، که باز، اندیس بالایی به فضای سه‌بعدی، و اندیس پایینی به بعد صفحه اشاره دارد. چون یک صفحه به یک پاره خط راست یا در یک نقطه برخورد می‌کند یا اصلاً برخورد نمی‌کند، همان استدلال نشان می‌دهد که اندازهٔ مجموعهٔ تمام صفحه‌هایی که به پاره‌خط L برخورد می‌کنند برابر $\mu_1(L)$ است، یعنی طول پاره‌خط L؛ در حالت کلیتر، اگر F هر خمی «به هر شکل دلخواه» در فضا باشد و اگر $X_F(\omega)$ برابر تعداد دفعاتی باشد که صفحهٔ ω به خم F برخورد می‌کند، آنگاه با تکرار استدلالی که برای خطهای راست کردیم، نتیجه می‌گیریم که انتگرال

$$\int X_F(\omega)d\lambda_2^3(\omega)$$

برابر طول خم F است. حال متغیر انتگرال‌گیری ω روی صفحه‌ها تغییر می‌کند نه روی خطهای راست. در اینجا، باز، انتگرالی را بدون دانستن اندازه محاسبه می‌کنیم.

اکنون تا دستیابی به یک تعبیر شهودی از عرض میانگین راه بسیار کوتاهی داریم. متوازی‌السطوح P با اضلاعی برابر با x_1، x_2 و x_3 را در نظر می‌گیریم. برای اندازه‌گیری صفحه‌هایی که به متوازی‌السطوح P برخورد می‌کنند، ابتدا خانواده‌ای از صفحه‌های *موازی* را در نظر می‌گیریم که همگی دارای بردار قائم یکهٔ ثابت مشترک u هستند، به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ تمام صفحه‌های موازی با صفحهٔ $u^\perp$ را. بدون کاستن از کلیّت مطلب، متوازی‌السطوح را طوری در فضا قرار می‌دهیم که یکی از رأسهای P در مبدأ باشد و بردار u در آن یک‌هشتم از فضا واقع باشد که در مقابل متوازی‌السطوح P است. (این کار را نوعاً می‌توان انجام داد.) اضلاعی از P را که از مبدأ می‌گذرند با x_1، x_2 و x_3 نمایش می‌دهیم. برای بردار یکهٔ ثابتْ uی داده شده و خانوادهٔ صفحه‌های عمود بر آن، خم F را مسیری در راستای اضلاع (پاره‌خطهای)

$$[0, x_1],\quad [x_1, (x_1+x_2)],\quad [(x_1+x_2), (x_1+x_2+x_3)]$$

با همین ترتیب می‌گیریم. یک صفحهٔ موازی با $u^\perp$ به متوازی‌السطوح P برخورد می‌کند اگر و تنها اگر به خم F روی متوازی‌السطوح در دقیقاً یک نقطه برخورد کند. بنابراین، اندازهٔ مجموعهٔ تمام صفحه‌های موازی با $u^\perp$ که به متوازی‌السطوح P برخورد می‌کنند متناسب با طول خم F است. با میانگین‌گیری روی تمام بردارهای یکهٔ u (و بنابراین، روی تمام خانواده‌های صفحه‌های موازی)، نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ مجموعهٔ تمام صفحه‌هایی که به یک متوازی‌السطوح برخورد می‌کنند برابر است با عرض میانگین متوازی‌السطوح، ضرب در یک عامل ثابت که ما باز آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم. با توجه به این موضوع، بلافاصله می‌توان دید که چگونه عرض میانگین هر مجموعهٔ بستهٔ محدب را تعریف کنیم؛ این مقدار برابر است با اندازهٔ مجموعهٔ تمام صفحه‌هایی که به مجموعهٔ محدّب برخورد می‌کنند. پس، نشان داده‌ایم که عرض میانگین را می‌توان به تمام مجموعه‌های بستهٔ محدب در فضا تعمیم داد.

حال می‌توانیم یک تعبیر احتمالاتی از عرض میانگین یک مجموعهٔ محدب عرضه کنیم. دو مجموعهٔ فشردهٔ محدب A و B را در فضای اقلیدسی سه‌بعدی بگیرید، و فرض کنید که A زیرمجموعهٔ B باشد. بگذارید بحث را با تکرار مطالب بدیهی آغاز کنم. فرض کنید نقطه‌ای را به تصادف از مجموعهٔ بزرگتر B انتخاب کنیم. احتمال اینکه نقطه متعلق به مجموعهٔ کوچکتر A باشد چقدر است؟ پاسخ روشن است: چنین احتمالی برابر است با نسبت حجم A به حجم B.

حال به‌جای انتخاب نقطه‌ای به تصادف، یک خط راست را به تصادف در فضا انتخاب می‌کنیم. با فرض اینکه چنین خط راستی به مجموعهٔ بزرگتر B برخورد می‌کند، احتمال اینکه چنین خط راستی به مجموعهٔ کوچکتر A هم برخورد کند چقدر است؟ ما پاسخ این سؤال را، اگرچه به‌طور ضمنی، محاسبه کردیم. چنین احتمالی برابر است با مساحت مجموعهٔ A، تقسیم بر مساحت مجموعهٔ B. می‌توانید بگویید که مرحلهٔ بعدی چیست. حال یک صفحهٔ تصادفی را در فضا در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه صفحه به مجموعهٔ بزرگتر B برخورد می‌کند، احتمال اینکه به مجموعهٔ کوچکتر A هم برخورد کند چقدر است؟ پاسخ، عرض میانگین A تقسیم بر عرض میانگین B است.

در فضای nبعدی اقلیدسی، تقریباً با همین استدلالْ تعبیرهایی از حجم ذاتی $\mu_k(C)$ برای یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ C، به‌عنوان اندازهٔ گراسمانین مجموعهٔ تمام چندگوناهای خطی از بعد $n-k$ که به مجموعهٔ محدب C برخورد می‌کنند می‌یابیم، و تعبیر احتمالاتی مشابهی هم صادق است.

مرحلهٔ بعدی چیست؟ حداقل دو پرسش هست که هنوز به آنها پاسخ نداده‌ایم. اولاً، آیا اندازه‌های ناوردای دیگری علاوه بر حجمهای ذاتی وجود دارند، و ثانیاً، چگونه می‌توان تعریف حجمهای ذاتی را به زیرمجموعه‌هایی از فضای nبعدی که کلیتر از مجموعه‌های محدب هستند تعمیم داد؟ پاسخهای این پرسشها ارتباط تنگاتنگی با هم دارند. پاسخ سؤال اول این است که ما یک اندازه را جا انداخته‌ایم. برای کشف آن، چند لحظه‌ای درگیر نوعی از استدلال ریاضی می‌شوم که در نظر فیزیکدانان در حد غیرقابل تحملی مته به خشخاش گذاشتن است، تنها برای آنکه به فیزیکدانان نشان دهم چنین استدلالی ارزشش را دارد. بیایید از خودمان این سؤال را بکنیم: مقدار تابع متقارن مرتبهٔ صفر از مجموعه‌ای از n متغیر x_1، x_2، ... ، x_n، یعنی $e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ چیست؟ من جواب را به شما می‌دهم و توجیه درستی آن را پس از خاتمهٔ سخنرانی به عهدهٔ شما می‌گذارم. جواب عبارت است از $e_0 = 1$ اگر $n > 0$ (یعنی اگر مجموعهٔ متغیرهای x_1، x_2، ... ،x_n ناتهی باشد)، و $e_0 = 0$ اگر مجموعهٔ متغیرها تهی باشد.

در اینجا به نظر می‌آید که ممکن است یک اندازهٔ ناوردا در فضای nبعدی وابسته به تابع متقارن مرتبهٔ صفر وجود داشته باشد. قرار می‌دهیم

$$\mu_0(C) = 1$$

اگر C یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ ناتهی باشد، و، البته، $\mu_0(\varnothing) = 0$. آیا چنین اندازه‌ای وجود دارد؟ واقعاً وجود دارد، و این حقیقت که این اندازه وجود دارد، به نظر من، یکی از برجسته‌ترین کشفیاتی است که تاکنون در ریاضیات شده است. ثابت می‌کنیم که چنین اندازه‌ای روی هر مجموعه‌ای که

اجتماعی متناهی از مجموعه‌های محدب فشرده باشد خوش‌تعریف است. این کار را با به کارگیری ابزار کلاسیکی که از آنالیز تابعی وام می‌گیریم انجام می‌دهیم: به‌جای تعریف یک اندازه، تابعکی خطی روی تمام توابع ساده تعریف می‌کنیم، یعنی، روی تمام توابع حقیقی $f(\omega)$ که به‌ازای $\omega \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده‌اند و ترکیبهایِ خطیِ توابع نشانگرِ مجموعه‌های محدب فشرده هستند. ابتدا با حالت $n = 1$ شروع می‌کنیم؛ یعنی، حالتی که ω روی تمام نقاط خط حقیقی حرکت کند. یک تابعک خطی χ_1 روی توابع ساده به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_1(f) = \sum (f(\omega) - f(\omega+))$$

که مجموعیابی روی تمام اعداد حقیقی ω انجام می‌شود. معنای علامت به‌اضافه را به بهترین شکل می‌توان از طریق یک مثال دریافت. فرض کنید f تابع نشانگر پاره‌خط بستهٔ $[a,b]$ باشد. در این صورت، $f(\omega) - f(\omega+) = 0$ برای هر ω مگر $\omega = b$، چون $f(b) = 1$ اما $f(b+) = 0$. بنابراین، می‌بینیم که $\chi_1(f) = 1$ اگر f تابع نشانگر یک بازهٔ $[a,b]$ باشد.

حال با ادامهٔ کار به استقراء، به حالت nبعدی برویم. نگران نشوید، این کار وقت زیادی نمی‌گیرد. یک خط راست L را در نظر می‌گیریم و به‌ازای هر نقطهٔ ω در L، H_ω را ابرصفحه‌ای می‌گیریم که از نقطهٔ ω عمود بر خط L می‌گذرد. اگر f تابع ساده‌ای باشد که در فضای بعدی تعریف شود و ω نقطه‌ای روی خط راست L باشد، فرض می‌کنیم f_ω تحدید f به ابرصفحهٔ H_ω باشد. یک تابعک خطی χ_n مانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_n(f) = \sum (\chi_{n-1}(f_\omega) - \chi_{n-1}(f_{\omega+}))$$

که مجموعیابی روی تمام نقاط ω بر خط L انجام می‌شود. تنها مجموعه‌ای متناهی از ωها وجود دارد که برای آن، عامل جمع غیرصفر است. وقتی f تابع نشانگر یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ ناتهی است، استدلالی مشابه استدلال قبل نشان می‌دهد که $\chi_n(f) = 1$. بنابراین می‌توانیم یک اندازهٔ $\mu_0(G) = \chi_n(f)$ تعریف کنیم، که G اجتماع متناهی دلخواهی از مجموعه‌های محدب فشرده است و f تابع نشانگر مجموعهٔ G است. بدین ترتیب وجود یک اندازهٔ μ_0 را ثابت کرده‌ایم که روی تمام اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های محدب فشرده تعریف شده است و روی تمام مجموعه‌های محدب فشردهٔ ناتهی مقدار ۱ را می‌گیرد. این اندازه، تاریخی طولانی دارد، و همان شاخص اویلر است.

حال شما فکر می‌کنید: اگر این شاخص اویلر است، به عهدهٔ شماست که نشان دهید با آنچه ما معمولاً به‌عنوان شاخص اویلر می‌شناسیم مطابقت دارد. بگذارید این سخنرانی را با به‌دست آوردن فرمول اویلر، اشلفلی[1]، و پوانکاره برای چندوجهیها به پایان ببرم. درواقع این رابطه را می‌توان در یک رابطهٔ ساده‌تر، رابطه‌ای که به یاد آوردن آن راحت است گنجاند: فرض کنید C یک چندوجهی تعمیم‌یافتهٔ محدب فشرده از بعد n باشد و $\mathrm{int}(C)$ درون C باشد. در این صورت این فرمول اساسی را برای شاخص اویلر $\mathrm{int}(C)$ داریم

$$\mu_0(\mathrm{int}(C)) = (-1)^n$$

درواقع، اگر f تابع نشانگر مجموعهٔ $\mathrm{int}(C)$ باشد، داریم

$$\mu_0(\mathrm{int}(C)) = \sum (\chi_{n-1}(f_\omega) - \chi_{n-1}(f_{\omega+}))$$

که مجموعیابی مانند بالا روی تمام نقاط ω بر خط L انجام می‌شود. اما، به استقراء می‌بینیم که هر جملهٔ طرف راست برابر صفر است، مگر وقتی ω اولین نقطهٔ روی خط L باشد که برای آن تقاطع $C \cap H_\omega$ تهی نیست. اگر ω_ℓ چنین نقطهٔ اولی باشد، داریم

$$\chi_{n-1}(f_{\omega_\ell}) = 0$$

چون نقطهٔ ω_ℓ روی مرز C است، و طبق فرض استقراء داریم

$$\chi_{n-1}(f_{\omega_{\ell+}}) = (-1)^{n-1}$$

چون $f_{\omega_{\ell+}}$ تابع نشانگر مجموعهٔ $\mathrm{int}(C) \cap H_{\omega_{\ell+}}$ است، که درون یک چندوجهی محدب از بعد پایینتر است.

با قراردادن تمام اینها در کنار یکدیگر، به‌دست می‌آوریم

$$\mu_0(\mathrm{int}(C)) = \sum (\chi_{n-1}(f_{\omega_\ell}) - \chi_{n-1}(f_{\omega_{\ell+}})) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

که مطلوب ما بود.

اکنون در موقعیتی هستیم که فرمول مشهور اویلر را برای چندوجهیها بیان کنیم. چندوجهی چیست؟ یک چندوجهی، اجتماعی متناهی از چندوجهیهای محدب است. برای یک چندوجهی داده شده، باید دستگاهی از وجه‌ها را تعریف کنیم (در هر بعدی، از بعد ۰ (یک نقطه) تا بعد n). می‌گوییم یک مجموعهٔ $\mathbf{F}$ از چندوجهیهای محدب دستگاهی از وجه‌ها برای یک چندوجهی دلخواه K است وقتی عناصر F که وجه خوانده می‌شوند، مجموعه‌های محدب فشردهٔ ناتهی Fای با درونهای مجزا باشند به‌طوری که

$$K = \bigcup_{F \in \mathbf{F}} \mathrm{int}(F)$$

هشدار: درون یک وجه با بعد k باید نسبت به فضایی خطی با بعد k که شامل آن وجه است در نظر گرفته شود، و درون یک نقطه همان نقطه است.

تحت این شرایط می‌توان شاخص اویلر دو طرف را مساوی قرار داد، و (چون هر دو درون وجه‌ها مجزا هستند، اندازه‌های آنها با هم جمع می‌شود) به‌دست آورد

$$\mu_0(K) = \sum_{F \in \mathbf{F}} \mu_0(\mathrm{int}(F)) = f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + \cdots$$

که f_i برابر تعداد وجوه با بعد i است. این فرمول اویلر است.

حال می‌توانیم به دومین پرسشی که بی‌جواب مانده بود پاسخ دهیم: چگونه تعریف حجمهای ذاتی را از مجموعه‌های محدب فشرده به تمام اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های محدب فشرده تعمیم دهیم. اگر G چنین اجتماعی باشد، قرار می‌دهیم

$$\mu_k(G) = \int \mu_0(G \cap \omega)\, d\lambda^n_{n-k}(\omega)$$

1. Schläfli

که ω روی تمام چندگوناهای خطی با بعد $n-k$ در فضای nبعدی تغییر می‌کند. طرف چپ یک اندازه تعریف می‌کند، و وقتی G یک مجموعهٔ محدب فشرده باشد، با تعریفی که هم‌اکنون کردیم مطابقت دارد. بنابراین، این همان تعمیم مطلوب است. شاخص اویلر همهٔ کار را برای ما انجام می‌دهد.

حال می‌توانم قضیهٔ اصلی احتمال هندسی را بیان کنم. می‌گوییم یک اندازهٔ ناوردای μ روی فضای nبعدی اقلیدسی، که روی تمام اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های محدب فشرده تعریف شده است، پیوسته است وقتی برای هر دنبالهٔ C_j از مجموعه‌های محدب فشرده که به مجموعهٔ محدب فشردهٔ C همگراست، داشته باشیم

$$\lim_{C_j \to C} \mu(C_j) = \mu(C)$$

حال داریم:

قضیهٔ اصلی احتمال هندسی. *۱ + n حجم ذاتی μ_0، μ_1، ...، μ_n یک پایه برای فضای تمام اندازه‌های ناوردای پیوسته تشکیل می‌دهند که روی تمام اجتماعهای متناهی مجموعه‌های محدب فشرده تعریف شده‌اند.*

اولین اثبات این قضیه ازآنِ هادویگر[1] است؛ اولین اثبات مقدماتی آن سال گذشته توسط دَن کلین[2] از مؤسسهٔ تکنولوژی جورجیا منتشر شد.

در خاتمه، سعی می‌کنم پرسشی را که آماده‌اید بپرسید، پاسخ دهم: به هر حال، این مطلب چه ربطی به احتمال هندسی دارد؟ من پاسخی مجمل ارائه می‌کنم. دو مجموعهٔ محدب فشردهٔ A و B را در نظر بگیرید. تصور کنید مجموعهٔ B در فضای nبعدی ثابت است و مجموعهٔ صلب A را به تصادف «می‌اندازیم». احتمال اینکه A به B برخورد کند چقدر است؟ به این پرسش در سه مرحله پاسخ می‌دهیم. ابتدا، توجه می‌کنیم که با ثابت نگه‌داشتن B و تغییردادن A با گروه حرکتهای اقلیدسی، یک اندازهٔ ناوردا روی مجموعه‌های محدب B تعریف می‌کنیم. ثانیاً، قضیهٔ هادویگر را به‌کار می‌گیریم و نتیجه می‌گیریم که چنین اندازهٔ ناوردایی عبارت است از یک ترکیب خطی از ۱ + n حجم ذاتی، با ضرایبی که تنها به A بستگی دارند و نه به B. ثالثاً، این ضرایب را با در نظر گرفتن Bهای مناسب معین می‌کنیم. نتیجهٔ پایانی اتحادی است که به فرمول سینماتیک مشهور است و موضوع تحقیقات بسیاری در این قرن بوده است، که هنوز هم ادامه دارند.

از توجه شما سپاسگزارم.

مرجع

D. A. Klain and G.-C. Rota, *Introduction to Geometric Probability* (Lezioni Lincee), Cambridge: Cambridge University Press (1997).

* * * * * *

• Gian-Carlo Rota, "Geometric probability", *Math. Intelligencer*, (4) **20** (1998) 11-16.

* جیان کارلو روتا در هنگام نوشتن این مقاله در بخش ریاضی مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (ام. آی. تی.) آمریکا بوده است.

1. Hadwiger 2. Dan Klain