جیان‌کارلو روتا در ژانویهٔ ۱۹۹۸، چند ماهی قبل از مرگش، سه سخنرانی مستقل از هم در نشست سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکا ایراد کرد که متن یکی از آنها را با عنوان «احتمال هندسی» در شمارهٔ ۲ی سال ۱۰ نشر ریاضی خواندید. مقالهٔ زیر و مقالهٔ بعدی، ترجمهٔ متن دو سخنرانی دیگر اوست.

دو نقطهٔ عطف در نظریهٔ ناورداها•

جیان‌کارلو روتا*

ترجمهٔ شهرام محسنی‌پور

نظریهٔ ناورداها داستان بزرگ رمانتیک ریاضیات است. به مدت ۱۵۰ سال، از آغاز پیدایش آن با کارهای بول تا میانهٔ این قرن یعنی زمانی‌که نظریهٔ ناورداها به شاخه‌های مختلف و مستقلی تقسیم شد، اعتقاد مشترک به ناورداها زمینهٔ پیوند ریاضیدانان همهٔ سرزمینها بود: در انگلستان کیلی، مک مائن، سیلوستر و سالمن[۱]، و بعدها آلفرد یانگ، ایتکن[۲]، ایتلوود و ترنبال و در آلمان، کلبش[۳]، گوردان، گراسمان، سوفوس لی و اشتودی[۴] و در فرانسه ارمیت، ژوردان و لاگر و در ایتالیا کاپلی، بریوسکی[۵]، ترودی[۶] و کورادو سگرس[۷] و دوویدیو[۸]، و در آمریکا گِلن، دیکسن، کاروس (که تکنگاشتهای کاروس به افتخار او نامگذاری شده است.)، اریک تمپل بل و بعدها هرمان وایل. در تاریخ، به ندرت دیده شده است که اجتماعی بین‌المللی از محققین به خاطر آرمانی مشترک چنین احساس وحدتی در چنین دورهٔ طولانی از زمان داشته باشند. در قرن ما نظریهٔ لی، هندسهٔ جبری، جبر دیفرانسیل و ترکیبیات جبری ثمره‌های نظریهٔ ناورداها هستند. هیچ نظریه‌ای در ریاضیات بجز نظریهٔ توابع مختلط تأثیری چنین ژرف و ماندگار در رشد ریاضیات نداشته است.

و سرانجام نظریهٔ ناورداها قربانی موفقیت خود شد. امروزه خودِ اصطلاح «نظریهٔ ناورداها» برای نظریه‌های پدید آمده از آن به‌کار می‌رود به‌گونه‌ای که دیگر تقریباً معنای خود را از دست داده است. پس عجیب نخواهد بود اگر شما از عنوان این سخنرانی دچار سردرگمی شوید که در بارهٔ کدام نظریهٔ ناورداهاست.

این سخنرانی در بارهٔ نظریهٔ کلاسیک ناورداهاست. رساله‌های قدیمی را که در انبار کتابخانه‌ها نگاهداری می‌شوند غبارروبی می‌کنیم، آنها را بازخوانی و از نو تعبیر کرده به زبانی موافق با استانداردهای دقت امروزی ارائه می‌کنیم. برنامهٔ نظریهٔ کلاسیک ناورداها را که زمانی کنار گذاشته شده بود چون آن را بی‌ثمر می‌پنداشتند، دوباره دنبال می‌کنیم، و شاید سرانجام موفقیت در دسترس باشد.

من دو نقطهٔ عطف را در تاریخ نظریهٔ ناورداها مرور خواهم کرد. اولی که «جدید» است در حوالی آغاز قرن رخ داد و هنوز هم تأثیرش در سراسر ریاضیات احساس می‌شود. دومی که «قدیمی» است خیلی زود وارد میدان شد و منجر به سوء تعبیری جدی گردید که تا به امروز باقی مانده است.

تعریفی کم‌مایه از نظریهٔ ناورداها می‌تواند چنین باشد: نظریهٔ ناورداها عبارت است از مطالعهٔ مدارهای کنشهای گروه. چنین تعریفی صحیح است ولی باید با ارائهٔ یک برنامهٔ اجرایی کامل شود. هرمان وایل در مقدمهٔ کتاب گروههای کلاسیک، برنامهٔ نظریهٔ ناورداها را در دو حکم خلاصه می‌کند. اولی اینکه «همهٔ واقعیات هندسی با صفرشدن ناورداها نمایش داده می‌شوند» و دومی اینکه «همهٔ ناورداها ناوردای تانسورها هستند».

اجازه دهید مختصری در بارهٔ این جملات با شکوه صحبت کنیم. واقعیت هندسی چیست؟ واقعیتی مربوط به فضاست که از دستگاه مختصات انتخاب شده مستقل است. این واقعیتها به‌وسیلهٔ معادلاتی توصیف می‌شوند که نیازمند انتخاب دستگاه مختصات‌اند. در فضای برداری V با بعد n می‌توان یک دستگاه مختصات x_1، x_2، $\cdots$، x_n انتخاب کرد. از زمان دکارت یادگرفته‌ایم که واقعیتهای هندسی را با معادلاتی در مختصات x_1، x_2، $\cdots$، x_n نمایش دهیم. با این همه در حدود ۱۰۰ سال پیش ریاضیدانان و فیزیکدانان کشف تکان‌دهنده‌ای کردند مبنی بر اینکه معادلات معمول (معادلاتی در حلقهٔ جابجایی تولید شده توسط متغیرهای x_1، x_2، $\cdots$، x_n) برای توصیف بسیاری از واقعیتهای هندسی و فیزیکی ناکافی‌اند. این کشف انگیزه‌ای شد برای معرفی حلقه‌ای تعمیم‌یافته، یعنی حلقهٔ چندجمله‌ای‌های ناجابجایی در مختصات x_1، $\cdots$، x_n. عناصر همگن این حلقه (چندجمله‌ای‌های

1. Salmon 2. Aitken 3. Clebsch 4. Study 5 Brioschi
6. Trudi 7. Corrado Segres 8. d'Ouidio

ناجابجایی همگن با متغیرهای x_1، $\cdots$، x_n) تانسور نامیده می‌شوند. اگر فلسفهٔ هرمان وایل را باور کنیم، متقاعد می‌شویم که معادلات جبر تانسوری برای توصیف هر واقعیت هندسی که تاکنون با آن برخورد داشته‌ایم، کافی خواهد بود. علاوه بر این، اگر قرار باشد معادلات فوق بیان‌کنندهٔ ویژگیهای هندسی باشند، در هر دستگاه مختصات انتخابی باید برقرار باشند. به بیان دیگر، معادلاتی که واقعیتهای هندسی را توصیف می‌کنند باید تحت تعویض مختصات ناوردا باشند. برنامهٔ نظریهٔ ناورداها از زمان بول تا به امروز دقیقاً ترجمهٔ واقعیتهای هندسی به معادلات جبری ناورداست که با عبارتهای تانسوری بیان می‌شوند.

این برنامهٔ ترجمهٔ هندسه به جبر قرار بود در دو گام انجام شود. گام نخست عبارت بود از تجزیهٔ جبر تانسوری به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر تحت تعویض مختصات. گام دوم عبارت بود از ابداع نمادی کارامد برای نمایش ناورداهای هر مؤلفهٔ تحویل‌ناپذیر. در این قرن گام نخست با موفقیت برداشته شد ولی گام دوم زمانی در دههٔ ۲۰ رها شد و تنها اخیراً مورد توجه قرار گرفته است.

تجزیهٔ جبر تانسوری به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر تقریباً به‌طور همزمان در حوالی آغاز قرن توسط ایسایی شور[1] و آلفرد یانگ کشف شد. ایدهٔ اصلی در این تجزیه یکی از مهمترین پیشرفتها در ریاضیات در همهٔ دورانهاست، و ارائهٔ آن به شکلی قابل استفاده برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی، سودمند خواهد بود.

تابعی سه‌متغیره مانند $f(x_1, x_2, x_3)$ در نظر بگیرید. دو ردهٔ معروف توابع سه‌متغیره عبارت‌اند از (یک) توابع متقارن که به ازای هر جایگشتی که اندیسهای $(1, 2, 3)$ را به (i_1, i_2, i_3) تبدیل می‌کند، در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$f_s(x_1, x_2, x_3) = f_s(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$$

و (دو) توابع پادمتقارن که با معادلات زیر تعریف می‌شوند

$$f_a(x_1, x_2, x_3) = \pm f_a(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$$

که بسته به اینکه جایگشت تبدیل‌کنندهٔ $(1, 2, 3)$ به (i_1, i_2, i_3) زوج یا فرد باشد علامت فوق $+1$ یا -1 است.

چنین نیست، که هر تابع سه متغیره مجموع تابعی متقارن و تابعی پادمتقارن باشد. نوع سومی از تابع لازم است که تابع دوری نامیده می‌شود و با معادلهٔ زیر مشخص می‌گردد:

$$f_c(x_1, x_2, x_3) + f_c(x_3, x_1, x_2) + f_c(x_2, x_3, x_1) = 0$$

هر تابع سه متغیره را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت مجموع توابعی متقارن، پادمتقارن و دوری نوشت و به بیان نمادی:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_s(x_1, x_2, x_3) + f_a(x_1, x_2, x_3) + f_c(x_1, x_2, x_3)$$

هر یک از این سه ردهٔ تقارنی از توابع، تحت جایگشتها ناوردایند. این مطلب برای توابع متقارن و پادمتقارن واضح است ولی برای توابع دوری چندان واضح نیست. این سه زیرفضای ناوردای توابع همان نقشی را برای گروه جایگشتهای یک مجموعهٔ سه‌عضوی بازی می‌کنند که ویژه بردارها برای ماتریسهای متقارن. برای توابع چهارمتغیرهٔ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ پنج ردهٔ تقارنی وجود دارد که به شرح زیر تعریف می‌شوند:

۱. توابع متقارن

۲. توابع پادمتقارن

۳. توابع دوری‐متقارن که در چهار معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_4, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_4, x_2) = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_4, x_2, x_1, x_3) + f(x_3, x_2, x_4, x_1) = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_4, x_1, x_3, x_2) + f(x_2, x_4, x_3, x_1) = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_1, x_2, x_4) + f(x_2, x_3, x_1, x_4) = 0$$

۴. توابعی که در چهار معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &+ f(x_2, x_1, x_3, x_4) \\ &+ f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_2, x_1, x_4, x_3) = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &+ f(x_3, x_2, x_1, x_4) \\ &+ f(x_1, x_4, x_3, x_2) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &+ f(x_1, x_3, x_2, x_4) \\ &+ f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\sum \mathrm{sign}(\sigma) f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}, x_{\sigma 4}) = 0$$

۵. توابعی که در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &- f(x_2, x_1, x_3, x_4) \\ &- f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_2, x_1, x_4, x_3) = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &- f(x_3, x_2, x_1, x_4) \\ &- f(x_1, x_4, x_3, x_2) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &- f(x_1, x_3, x_2, x_4) \\ &- f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\sum f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}, x_{\sigma 4}) = 0$$

هر تابع چهارمتغیره به‌طور یکتا قابل نمایش به‌صورت مجموع پنج تابع است که هر کدام به یکی از این رده‌های تقارنی تعلق دارد. هر ردهٔ تقارنی تحت جایگشتها ناورداست.

به‌طور کلیتر، هر تابع nمتغیرهٔ $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت مجموع p_n تابع نوشت که هر یک به رده‌ای تقارنی متفاوت با دیگری تعلق دارد. در اینجا p_n مساوی است با تعداد افرازهای عدد صحیح n. یافتن معادلاتی که هر ردهٔ تقارنی را تعریف می‌کند مشکل نیست.

این تجزیه پس از چند تعویض صوری نمادها برای تانسورها هم برقرار است. تا به امروز تنها دو ردهٔ تقارنی تانسورها به‌طور مشروح بررسی شده‌اند: یکی تانسورهای متقارن که همان چندجمله‌ای‌های تعویض‌پذیر معمولی هستند و استفاده از آنها را در هندسه تحلیلی یاد گرفته‌ایم و دیگری تانسورهای پادمتقارن، که چندجمله‌ای‌هایی در مختصات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ با شرط

1. Issai Schur

$x_ix_j = -x_jx_i$، هستند. تانسورهایی غیر از تانسورهای متقارن و پاد متقارن نیز در فیزیک و هندسه ظاهر می‌شوند که به رده‌های تقارنی تعلق دارند. با این همه، این‌گونه رده‌های تقارنی خیلی کم بررسی شده‌اند و راهی طولانی تا فهم آنها در پیش است. خوب، این از کلمهٔ «جدید»، در مقدمهٔ این سخنرانی. حال کمی هم حق کلمهٔ «قدیمی» را ادا کنیم. من در اینجا غریبترین جنبهٔ نظریهٔ کلاسیک ناورداها را توصیف خواهم کرد، یعنی نمادگذاری سمبلیک یا شبح‌وار[1] که اریک تمپل بل «سخنرانیهای سمینار»ش را در سال ۱۹۲۷ به این موضوع اختصاص داده است. من ساده‌ترین گروه یعنی گروه انتقالهای خط را بررسی خواهم کرد. وجوه غیرعادی روش سمبلیک در همین حالت خاص آشکار خواهد شد.

فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ایهایی یکین[2] با متغیر x باشند. من آنها را با نمادگذاری جالب زیر می‌نویسم:

$$p(x) = x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} x + a_n$$

و

$$q(x) = x^k + \binom{k}{1} b_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} b_2 x^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1} b_{k-1} x + b_k$$

فرض می‌کنم که درجهٔ $q(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کمتر است. یعنی $k \le n$.

عملگر انتقال T^c روی چندجمله‌ای $p(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T^c p(x) = p(x+c)$$

و می‌نویسیم

$$p(x+c) = x^n + \binom{n}{1} p_1(c) x^{n-1} + \binom{n}{2} p_2(c) x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} p_{n-1}(c) x + p_n(c)$$

jامین ضریب، $p_j(c)$، از چندجمله‌ای $p(x+c)$ چنین محاسبه می‌شود

$$p_j(c) = a_j + \binom{j}{1} a_{j-1} c + \binom{j}{2} a_{j-2} c^2 + \cdots + c^j$$

چندجمله‌ای $I(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_k)$ با متغیرهای a_1، a_2، $\cdots$، a_n و b_1، b_2، $\cdots$، b_k، ناوردای دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ نامیده می‌شود هر گاه به‌ازای هر عدد مختلط c داشته باشیم

$$I(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_k) = I(p_1(c), p_2(c), \cdots, p_n(c), q_1(c), q_2(c), \cdots, q_k(c))$$

با قدری تسامح در نمادگذاری می‌نویسیم $I(p(x), q(x))$ و از I به عنوان ناوردای چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ یاد می‌کنیم. در این نمادگذاری تسامح‌آمیز، چندجمله‌ای I ناوردای چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ نامیده می‌شود هر گاه برای هر ثابت c داشته باشیم

$$I(T^c p(x), T^c q(x)) = I(p(x), q(x))$$

نظریهٔ ناورداها به این مسأله می‌پردازد: تعیین همهٔ ناورداهای مجموعه‌ای داده شده از چندجمله‌ایها و نیز وجه اهمیت ناورداها.

«وجه اهمیت» یک ناوردا چیست؟ من در اینجا به هرمان وایل متوسل می‌شوم. «هر» ویژگی چندجمله‌ایها که تحت گروه انتقالها ناوردا باشد با صفرشدن دسته‌ای از ناورداها قابل نمایش است. به بیان دیگر «هر» مجموعه‌ای از چندجمله‌ایها که تحت انتقالها ناوردا باشد همانند مجموعه‌ای از چندجمله‌ایهاست که از مساوی صفر قراردادن دسته‌ای از ناورداهای چنین چندجمله‌ایهایی به‌دست می‌آیند. درک این گفته بی‌آوردن مثال ممکن نیست.

بیایید ساده‌ترین و قدیمیترین مثال را بررسی کنیم. خاصیت «ریشهٔ مضاعف داشتن» برای چندجمله‌ای درجهٔ دو

$$q(x) = x^2 + 2b_1 x + b_2$$

تحت انتقالها ناورداست. به عبارت دیگر اگر چندجمله‌ای $q(x)$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، چندجمله‌ای $q(x+c)$ نیز به ازای هر ثابت c چنین خواهد بود. به تبعیت از هرمان وایل ناوردایی را جستجو می‌کنیم که صفربودنش نمایانگر این خاصیت باشد. به آسانی می‌توان امتحان کرد که مبین

$$D(b_1, b_2) = b_1^2 - b_2$$

همان ناوردای مطلوب است. این مثال منسوب به بول جرقه‌ای بود که منجر به پیدایش نظریهٔ ناورداها شد.

اغلب، با اشاره‌ای به قضیهٔ پایه هیلبرت، گفته می‌شود که «هیلبرت نظریهٔ ناورداها را از بین برد». این حقیقت ندارد. هیلبرت نظریهٔ ناورداها را بسیار دوست می‌داشت و پس از اینکه قضیهٔ پایه‌اش را ثابت کرد همچنان به انتشار مقالاتی چشمگیر در نظریهٔ ناورداها ادامه داد. تعدادی از جذابترین نتایج در نظریهٔ ناورداها در بیست سال اول این قرن کشف شد، یعنی در دوره‌ای طولانی پس از اثبات قضیه پایهٔ هیلبرت.

پس علت زوال موقت نظریهٔ ناورداها که پس از آن پیش آمد چه بود؟ یک دلیل آن شیوع بیماری‌گونهٔ استفاده از نمادگذاری سمبلیک یا شبح‌وار بود.

دیودونه نوشته است که نیمی از موفقیت هر شاخه‌ای از ریاضیات بستگی به انتخاب مناسب نمادها دارد. تهیه فهرستی از نمادگذاریهای بدفرجام که منجر به از بین رفتن بخشهای مختلفی از ریاضیات شده‌اند به‌همراه فهرستی از نمادگذاریهای بجا و مناسب که به پیشرفت ریاضیات کمک کرده‌اند، جالب توجه خواهد بود. نمادگذاری سمبلیک یا شبح‌وار، فاجعه‌آمیز بود. شماری از ریاضیدانان تلاش کردند که به روش سمبلیک معنی ببخشند، ولی موفق نشدند. هرمان وایل، اریک تمپل بل و ادوارد هگار کاروس سه تا از سرشناس‌ترینها بودند. بل نتوانست نمادگذاری شبح‌وار را درست تعریف کند و کتاب حساب جبری وی تا به امروز کتاب «سربه‌مهر» باقی مانده است. اگر وایل و بل ۵۰ سال بیشتر زنده می‌ماندند تا از پیشرفتهای آنچه در آن

1. umbral 2. monic

روز «جبر نوین» نامیده می‌شد، برخوردار شوند، بی‌شک در تعریف درست نمادگذاری شبح‌وار موفق می‌شدند.

در زمان ما، همان‌طور که به شما نشان خواهم داد این کار آسان است و تنها چند دقیقه وقت می‌گیرد. قبل از اینکه سیل تعاریف را به طرفتان سرازیر کنم بگذارید بگویم که چه چیزی را نخواهم گفت. می‌توان نشان داد که نمادگذاری شبح‌وار با نمادگذاری دیگری که در زمانهٔ ما سوءشهرت بسیار دارد هم‌ارز (یا نهان‌ریخت[1]، واژهٔ ابداعی دوست مرحوم گرت برکاف) است، یعنی نمادگذاری جبرهای هوپف. من نمی‌خواهم برای این اظهارات مبهم دلیل بیاورم. نه به این علت که مشکل است، بلکه به این دلیل که نیازی به این کار نیست.

حال می‌پردازیم به تعریف نمادگذاری شبح‌وار. به موازات دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$، جبر چندجمله‌ای $\mathbb{C}[x,\alpha,\beta]$ را نسبت به سه متغیر x، α و β همراه با تابعک خطی E که روی فضای برداری زمینهٔ $\mathbb{C}[x,\alpha,\beta]$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. تعریف تابعک خطی E نکته‌ای اساسی است و در گامهای زیر انجام می‌شود:

گام اول: به ازای هر عدد صحیح نامنفی j قرار می‌دهیم

$$E(x^j)=x^j$$

و لذا $E(1)=1$. پس برد تابعگون خطی E، $\mathbb{C}[x]$ است.

گام دوم: قرار می‌دهیم

$$E(\alpha^j)=a_j$$

و لذا به ازای $j>n$، $E(\alpha^j)=0$.

گام سوم: قرار می‌دهیم

$$E(\beta^j)=b_j$$

و لذا اگر $j>k$، $E(\beta^j)=0$.

گام چهارم: این گام، گام اصلی است. قرار می‌دهیم

$$E(\alpha^i\beta^j x^l)=E(\alpha^i)E(\beta^j)x^l$$

به پیروی از سیلوستر، متغیرهای α و β، شبح نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر، تابعک خطی E روی اشباح متمایز ضربی است

گام پنجم: تعریف را به‌طور خطی توسیع می‌دهیم.

به این ترتیب، تعریف تابعک خطی E به انجام می‌رسد.

حال به نگران‌کننده‌ترین جنبه از نمادگذاری شبح‌وار می‌رسیم. فرض کنید $f(\alpha,\beta,x)$ و $g(\alpha,\beta,x)$ دو چندجمله‌ای با متغیرهای α، β، و x باشند؛ می‌نویسیم

$$f(\alpha,\beta,x)\cong g(\alpha,\beta,x)$$

وقتی که

$$E(f(\alpha,\beta,x))=E(g(\alpha,\beta,x))$$

1. cryptomorphic

نماد $\cong$ را بخوانید «هم‌ارز است با».

«قدما» کمی از حد مجاز فراتر رفتند و نماد تساوی معمولی را جایگزین نماد $\cong$ کردند و نوشتند

$$f(\alpha,\beta,x)=g(\alpha,\beta,x)$$

آنها از این اشتباه آگاه بودند و هر چند با مهارت و استادیِ هوشمندانه‌ای از خطاهای محاسباتی اجتناب می‌کردند، قادر نبودند از این استفادهٔ نابجا از نمادها اجتناب کنند.

روش شبح‌وار یا سمبلیک، عبارت است از اینکه به جای همهٔ ضرایب ظاهرشده در چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$، اشباح و هم‌ارزی‌ها را قرار دهیم. به عنوان مثال

$$p(x)\cong(x+\alpha)^n$$

و

$$q(x)\cong(x+\beta)^k$$

بیایید با دقت هم‌ارزی اول را امتحان کنیم.

طبق تعریف هم‌ارزی باید نشان دهیم

$$E(p(x))=E((x+\alpha)^n)$$

چون برای هر عدد صحیح نامنفی j، $E(x^j)=x^j$، عبارت بالا معادل است با

$$p(x)=E((x+\alpha)^n)$$

با بسط دادن طرف راست، طبق قضیهٔ دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$E((x+\alpha)^n)=E\Big(x^n+\binom{n}{1}\alpha x^{n-1}+\binom{n}{2}\alpha^2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\alpha^{n-1}x+\alpha^n\Big)$$

بنا به خطی بودن، این مساوی است با

$$x^n+\binom{n}{1}E(\alpha)x^{n-1}+\binom{n}{2}E(\alpha^2)x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}E(\alpha^{n-1})x+E(\alpha^n)$$

با محاسبهٔ تابعک خطی E می‌بینیم که عبارت بالا مساوی است با

$$x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}x+a_n$$

که همان است که انتظار داشتیم. عبارت

$$(x+\alpha)^n$$

نمایش شبح‌وار چندجمله‌ای $p(x)$ نامیده می‌شود.

در نمادگذاری شبح‌وار، عدد مختلط r ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $p(x) = 0$ است اگر و تنها اگر

$$(r+\alpha)^n \cong 0$$

همین‌طور، در نمادگذاری شبح‌وار، چندجمله‌ای $T^c p(x) = p(x+c)$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

$$p(x+c) \cong (x+\alpha+c)^n$$

و از اینجا نمایش شبح‌وار ضرایب $p_j(c)$ از چندجمله‌ای $p(x+c)$ یعنی

$$p_j(c) \cong (\alpha+c)^j$$

به دست می‌آید.

حال خواهیم دید که نمادگذاری شبح‌وار چگونه به ناورداها مربوط می‌شود. فرض کنید چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ از درجهٔ n باشند. ناوردای A از چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$A(q(x),p(x)) \cong (\beta-\alpha)^n$$

محاسبهٔ ناوردای A برحسب ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}
A(q(x),p(x)) &= E((\beta-\alpha)^n) \\
&= E\left(\beta^n - \binom{n}{1}\beta^{n-1}\alpha + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\beta\alpha^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^n\alpha^n\right) = E(\beta^n) - E\left(\binom{n}{1}\beta^{n-1}\alpha\right) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-1}E\left(\binom{n}{n-1}\beta\alpha^{n-1}\right) + (-1)^n E(\alpha^n) \\
&= E(\beta^n) - \binom{n}{1}E(\beta^{n-1})E(\alpha) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}E(\beta)E(\alpha^{n-1}) + (-1)^n E(\alpha^n) \\
&= b_n - \binom{n}{1}b_{n-1}a_1 + \binom{n}{2}b_{n-2}a_2 - \cdots \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}b_1 b_{n-1} + (-1)^n a_n
\end{aligned}$$

چرا A ناورداست؟ این را به بهترین وجه می‌توان در نمادگذاری شبح‌وار دید:

$$A(T^c q(x), T^c p(x)) \cong (\beta+c-\alpha-c)^n = (\beta-\alpha)^n$$

ناوردای A ناوردای ناهم‌قطبی نامیده می‌شود. دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ را که دارای خاصیت $A(q(x),p(x)) = 0$ باشند ناهم‌قطب گوییم. در نمادگذاری شبح‌وار دو چندجمله‌ای ناهم‌قطب‌اند اگر

$$(\beta-\alpha)^n \cong 0$$

مفهوم ناهم‌قطبی پیشینه‌ای مشعشع دارد که به آپولونیوس می‌رسد.

وجه اهمیت ناوردای ناهم‌قطبی چیست؟ معنای ناهم‌قطب بودن دو چندجمله‌ای چه می‌تواند باشد؟ این سؤال در قضیهٔ زیر پاسخ داده می‌شود:

قضیهٔ ۱. فرض کنید که r ریشهٔ چندجمله‌ای $q(x)$ باشد، یعنی $q(r) = 0$. در این صورت چندجمله‌ای‌های $q(x)$ و $p(x) = (x-r)^n$ ناهم‌قطب‌اند.

برهان. از $p(x) = (x-r)^n$ به‌دست می‌آوریم $\alpha^j \cong (-r)^j$، و بنابراین

$$A(q(x)),p(x)) \cong (\beta-(-r))^n = (\beta+r)^n \cong 0$$

فهوالمطلوب.

نتیجه. اگر چندجمله‌ای $q(x)$ دارای n ریشهٔ متمایز $r_1, r_2, \cdots, r_n$ باشد، و اگر چندجمله‌ای $p(x)$ با $q(x)$ ناهم‌قطب باشد، آنگاه ثابتهای $c_1, c_2, \cdots, c_n$ موجودند به‌طوری که

$$p(x) = c_1(x-r_1)^n + c_2(x-r_2)^n + \cdots + c_n(x-r_n)^n$$

برهان. بعد زیرفضای آفین همهٔ چندجمله‌ای‌های (نه لزوماً یکین) $p(x)$ که با $q(x)$ ناهم‌قطب‌اند، n است. ولی اگر ریشه‌های چندجمله‌ای $q(x)$ ساده باشند آنگاه طبق قضیهٔ بالا چندجمله‌ای‌های

$$(x-r_1)^n, (x-r_2)^n, \cdots, (x-r_n)^n$$

مستقل خطی‌اند و با $q(x)$ ناهم‌قطب‌اند. بنابراین چندجمله‌ای $p(x)$ ترکیب خطی چندجمله‌ای‌های فوق است و این، برهان را کامل می‌کند.

بنابراین، می‌بینیم که ناهم‌قطبی جوابی بدیهی به سؤال زیر می‌دهد: چه وقت می‌توان چندجمله‌ای $p(x)$ را به صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ای‌هایی به شکل $(x-r_1)^n, (x-r_2)^n, \cdots, (x-r_n)^n$ نوشت؟

قضیه‌ای زیبا در بارهٔ ناهم‌قطبی توسط ریاضیدان بریتانیایی جان هیلتن گریس[1] اثبات شده است. من آن را بدون برهان بیان می‌کنم:

قضیهٔ گریس. اگر دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ از درجهٔ n ناهم‌قطب باشند، آنگاه هر قرصی در صفحهٔ مختلط که همهٔ صفرهای $p(x)$ را دربر داشته باشد حداقل شامل یک صفر $q(x)$ است.

قضیهٔ گریس نمونه‌ای است از قضایایی که می‌توان آنها را قضایای سرسخت[2] نامید. تقریباً ۱۰۰ سال است که این قضیه در برابر تمام اقدامات برای تعمیم آن مقاومت کرده است. تقریباً همهٔ نتایج شناخته شده در بارهٔ توزیع صفرهای چندجمله‌ای‌ها در صفحهٔ مختلط، پیامد قضیهٔ گریس هستند.

من اکنون ناوردای ناهم‌قطبی را به حالتی که چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ از درجات مختلف n و k $(n \geq k)$ باشند، تعمیم خواهم داد. به این منظور اجازه دهید مفهوم ناوردا را به شرح زیر، اندکی تعمیم دهیم:

چندجمله‌ای $I(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_k, x)$ با متغیرهای $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_k, x$، ناوردای چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ خوانده می‌شود هرگاه برای هر عدد مختلط c

$$\begin{aligned}I(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_k, x) = I(p_1(c), p_2(c), \cdots, \\ p_n(c), q_1(c), q_2(c), \cdots, q_k(c), x+c)\end{aligned}$$

1. Grace 2. sturdy

این ناورداهای تعمیم‌یافته‌تر گاهی هموردا نامیده می‌شوند.

حال ناوردای ناهم‌قطبی تعمیم‌یافته را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A(q(x),p(x)) \cong (\beta-\alpha)^k(x-\alpha)^{n-k}$$

مجدداً گوییم دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ ناهم‌قطب‌اند هرگاه $A(q(x),p(x))$ متحد با صفر باشد، یعنی به ازای هر x، صفر باشد. قضیهٔ ۱ در اینجا هم درست است. یعنی اگر $q(r)=0$، آنگاه چندجمله‌ای $p(x)=(x-r)^n$ با $q(x)$ ناهم‌قطب است.

بیایید حالتی خاص را در نظر بگیریم. فرض کنید $q(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دو و $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ سه باشد:

$$q(x)=x^2+2b_1x+b_2$$

و

$$p(x)=x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

در این صورت در نمادگذاری شبح‌وار خواهیم داشت

$$A(q(x),p(x)) \cong (\beta-\alpha)^2(x-\alpha) = (\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta-\alpha^3$$

با محاسبهٔ تابعگون خطی E، نمایش صریح زیر را برای ناوردای ناهم‌قطبی به‌دست می‌آوریم

$$A(q(x),p(x)) = E((\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta-\alpha^3) = (b_2-2a_1b_1+a_2)x-a_1b_2+2a_2b_1-a_3$$

بنابراین چندجمله‌ای درجهٔ دوی $q(x)$ و چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ $p(x)$ ناهم‌قطب‌اند اگر و تنها اگر ضرایبشان در دو معادلهٔ زیر صدق کنند

$$b_2-2a_1b_1+a_2=0$$
$$-a_1b_2+2a_2b_1-a_3=0$$

با به کارگیری این معادلات می‌توانیم دو قضیهٔ مهم را ثابت کنیم:

قضیهٔ ۲. به ازای هر چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ داده شده، در حالت کلی، دقیقاً یک چندجمله‌ای درجهٔ دو (یکین) وجود دارد.

برهان. در واقع معادلات بالا را باید به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$b_2-2a_1b_1=-a_2,$$
$$-a_1b_2+2a_2b_1=a_3$$

جوابهای b_1 و b_2 به ازای a_1، a_2، و a_3ی داده شده، در حالت کلی یکتا هستند.

قضیهٔ ۳. همواره یک فضای یک‌بعدی از چندجمله‌ای‌های (یکین) درجهٔ سه موجود است که با یک چندجمله‌ای درجهٔ دوی مفروض ناهم‌قطب‌اند.

برهان. در واقع، برای b_1 و b_2ی داده شده، می‌توانیم جوابهای a_1، a_2، و a_3 را از معادلات زیر به‌دست آوریم:

$$-2a_1b_1+a_2=-b_2,$$
$$-a_1b_2+2a_2b_1=a_3$$

در قدیم معمول بود که بگویند این معادلات همواره بی‌نهایت جواب دارند.

قضایای ۲ و ۳ روشی ساده و صریح برای حل معادلات درجهٔ ۳ به‌دست می‌دهند. این روش از این قرار است. چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ

$$p(x)=x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

داده شده است. ابتدا، طبق قضیهٔ ۲، چندجمله‌ای درجهٔ دوی یکتای $q(x)$ را پیدا می‌کنیم که ناهم‌قطب با $p(x)$ باشد. این چندجمله‌ای در حالت کلی دارای دو ریشهٔ مختلف r_1 و r_2 است. بنا به قضیهٔ ۱، چندجمله‌ای‌های درجهٔ سهٔ $(x-r_1)^3$ و $(x-r_2)^3$ با $q(x)$ ناهم‌قطب‌اند. در ادامه، بنا به قضیهٔ ۳، فضای خطی آفین چندجمله‌ای‌های درجهٔ سهٔ ناهم‌قطب با $q(x)$ دارای بعد ۲ است. چون $p(x)$ ناهم‌قطب با $q(x)$ است، نتیجه می‌گیریم که $p(x)$ ترکیب خطی $(x-r_1)^3$ و $(x-r_2)^3$ است. به زبان نمادی، به ازای ثابتی مثل c:

$$p(x)=c(x-r_1)^3+(1-c)(x-r_2)^3$$

می‌بینید که c، r_1، و r_2 با حل معادلات خطی و درجهٔ دو محاسبه می‌شوند. با این روش، حل معادلهٔ درجهٔ سهٔ $p(x)=0$ به حل معادلهٔ

$$c(x-r_1)^3=-(1-c)(x-r_2)^3$$

تبدیل می‌شود و این معادله با به‌دست آوردن ریشهٔ سوم به آسانی حل می‌شود. این روش حل معادلهٔ درجهٔ سوم تنها روشی است که من می‌توانم به یاد بیاورم.

اجازه دهید با ذکر یک خاطرهٔ شخصی بامزه کمی از بحث خارج شوم. چند سال قبل من مشغول سخنرانی در بارهٔ این موضوع در کنفرانسی در زمینهٔ ترکیبیات در محل دانشگاه مینه سوتا بودم. پرسی دایاکونیس در ردیف جلو نشسته بود و می‌توانم بگویم هنگامی‌که من شروع به صحبت کردم او داشت به خواب می‌رفت. بالاخره شروع به چرت‌زدن کرد ولی در لحظه‌ای که من کلمات جادویی «حل معادلهٔ درجهٔ سه» را ذکر کردم، با تکانی از خواب پرید و گفت: «راستی! چطور؟»

دو قضیهٔ پیشین به آسانی تعمیم می‌یابند.

قضیهٔ ۴. در حالت کلی، اگر $k\le n$، بعد فضای همهٔ چندجمله‌ای‌های (یکین) از درجهٔ k که با یک چندجمله‌ای از درجهٔ n ناهم‌قطب‌اند، $2k-n$ است.

قضیهٔ ۵. اگر $k\le n$، بعد فضای همهٔ چندجمله‌ای‌های (یکین) از درجهٔ n که ناهم‌قطب با یک چندجمله‌ای از درجهٔ k اند، **برابر** k است.

سعی می‌کنیم معادلهٔ درجهٔ ۵ را به همان روشی حل کنیم که معادلهٔ درجهٔ ۳ را حل کردیم. چندجمله‌ای درجهٔ ۵

$$p(x)=x^5+5a_1x^4+10a_2x^3+10a_3x^2+5a_4x+a_5=0$$

داده شده است. قضیهٔ ۴ تضمین می‌کند که در حالت کلی یک چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ یکتای $q(x)$ موجود است که با $p(x)$ ناهم‌قطب است. این چندجمله‌ای درجهٔ سه در حالت کلی دارای سه ریشهٔ متمایز r_1، r_2، و r_3 است. بنا به قضیهٔ ۱، چندجمله‌ای‌های $(x-r_1)^5$، $(x-r_2)^5$ و $(x-r_3)^5$ مستقل خطی‌اند و با $q(x)$ ناهم‌قطب‌اند. طبق قضیهٔ ۵، بعد فضای همهٔ چندجمله‌ای‌های ناهم‌قطب با $q(x)$ برابر با ۳ است. ولی چندجمله‌ای $p(x)$ ناهم‌قطب با $q(x)$ است. بنابراین به ازای ثابتهای مناسب c_i، $p(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$p(x)=c_1(x-r_1)^5+c_2(x-r_2)^5+c_3(x-r_3)^5$$

پس می‌بینیم که چندجمله‌ای عمومی درجهٔ ۵ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از توانهای پنجم سه چندجمله‌ای خطی نوشت. اینها را می‌شود با حل‌کردن معادلات خطی، درجهٔ دو و درجهٔ سه محاسبه کرد. این‌گونه تحویل معادلهٔ درجهٔ ۵ به یک شکل متعارف، بیشترین حدی است که می‌توان به حل معادلهٔ درجهٔ ۵ نزدیک شد.

در این لحظه، یکی از حضار دستش را بلند خواهد کرد و خواهد گفت: «ببخشید، ولی این روش شبح‌وار که شما معرفی کرده‌اید حتی برای نمایش مبین معادلهٔ درجهٔ دو هم کافی نیست».

کاملاً درست است. تعاریف اشباح و تابعک خطی E تعمیمی سرراست به هر تعداد چندجمله‌ای $p_1(x)$، $p_2(x)$، $\cdots$، $p_l(x)$ دارند. کافی است فضای چندجمله‌ای‌های

$$\mathbb{C}[x,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l]$$

را در نظر گرفت و $E(\alpha_t^j)$ را مساوی jامین ضریب چندجمله‌ای $p_t(x)$ قرار داد. نکتهٔ حیاتی آن است که تابعک خطی E باز هم نسبت به اشباح متمایز، ضربی باشد:

$$E(\alpha_1^i\alpha_2^j\alpha_3^k\cdots x^l)=E(\alpha_1^j)E(\alpha_2^j)E(\alpha_3^k)\cdots x^l$$

در اینجا نکتهٔ ظریف جریان پدیدار می‌شود: چندجمله‌ای‌های $p_1(x)$، $p_2(x)$، $\cdots$، $p_l(x)$ لزومی ندارد متمایز باشند. درواقع مهمترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که هر یک از چندجمله‌ای‌های $p_1(x)$، $p_2(x)$، $\cdots$، $p_l(x)$ مساوی یک $p(x)$ باشند. در این حالت تعریف تابعک خطی E می‌تواند به شکل زیر ساده شود

۱. برای هر i

$$E(\alpha_i^j)=a_j$$

۲. به ازای همهٔ اعداد صحیح نامنفی i، j، k، $\cdots$، l

$$E(\alpha_1^i\alpha_2^j\alpha_3^k\cdots x^l)=a_ia_ja_k\cdots x^l$$

اشباح α_1، α_2، $\cdots$، α_l را که در موارد ۱ و ۲ صدق می‌کنند اشباح مبادله‌پذیر گویند. پس برای اشباح مبادله‌پذیری داریم

$$(x+\alpha_1)^n\cong(x+\alpha_2)^n$$

اریک تمپل بل که به جای $\cong$ می‌نوشت $=$، از این نکته که دو شبح می‌توانند مبادله‌پذیر باشند بی‌آنکه برابر باشند، متحیر بود.

من اکنون می‌توانم قضیهٔ اصلی نظریهٔ ناورداها را در حالت یک چندجمله‌ای بیان کنم.

قضیهٔ ۶. هر ناوردای چندجمله‌ای $p(x)$ به‌صورت یک چندجمله‌ای از تفاضلهای $\alpha_i-\alpha_j$ و α_i-x است که α_i و α_j اشباح مبادله‌پذیرند، به‌عکس، هر چندجمله‌ای از چنین تفاضلهایی با یک ناوردای چندجمله‌ای $p(x)$ هم‌ارز است.

برهان بی‌اندازه ساده است، ولی در اینجا نمی‌آید.

بیایید چند مثال کلاسیک را مرور کنیم. مبین چندجمله‌ای درجهٔ دوم $p(x)=x^2+2a_1x+a_2$ را می‌توان به‌صورت شبح‌وار نمایش داد:

$$D(p(x))\cong(\alpha_1-\alpha_2)^2/2$$

که α_1 و α_2 اشباحی مبادله‌پذیرند. درواقع

$$\begin{aligned}E((\alpha_1-\alpha_2)^2)&=E(\alpha_1^2)-2E(\alpha_1\alpha_2)+E(\alpha_2^2)\\&=a_2-2a_1^2+a_2=2(a_2-a_1^2)\end{aligned}$$

فهوالمطلوب.

برای مثال بعدی، چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ

$$p(x)=x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

را در نظر بگیرید. مبین این چندجمله‌ای که آن را با $D(p(x))$، نمایش می‌دهیم مساوی است با عبارت زیر (با صرف‌نظرکردن از یک ثابت ضربی)

$$D(p(x))=6a_1^2a_2^2-8a_2^3-8a_1^3a_3+12a_1a_2a_3-2a_3^2$$

ولی نمایش شبح‌وار مبین را راحت‌تر می‌توان به خاطر سپرد:

$$D(p(x))\cong(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)$$

همان‌طور که می‌بینید مبین صفر است اگر و تنها اگر معادلهٔ درجهٔ سهٔ $p(x)=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

هسیان[1] چندجمله‌ای درجهٔ سه به زیبایی در نمادگذاری شبح‌وار نمایش داده می‌شود:

$$H(p(x))\cong(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)$$

هسیان صفر می‌شود اگر و تنها اگر چندجمله‌ای درجهٔ سه، توان سوم یک چندجمله‌ای درجهٔ یک باشد.

اجازه دهید یک‌بار دیگر حاشیه بروم. پس از شنیدن اینکه صفرشدن هسیان شرط مکعب کامل بودن چندجمله‌ای درجهٔ سه است، به‌طور طبیعی این سؤال کلی پیش می‌آید: کدام ناوردای یک چندجمله‌ای از درجهٔ n صفر می‌شود اگر و تنها اگر آن چندجمله‌ای kامین توان یک چندجمله‌ای از

1. Hessian

درجهٔ n/k باشد؟ در اینجا k یک مقسوم‌علیه n است. من مدتها فکر می‌کردم پاسخ این پرسش در دسترس نیست تا اینکه یک روز، هنگامی‌که داشتم جلد دوم مجموعهٔ آثار هیلبرت را ورق می‌زدم، تصادفاً متوجه شدم که هیلبرت مسأله را به‌طور کامل حل کرده است. جواب مسأله با ظرافت تمام در نمادگذاری شبح‌وار قابل نمایش است. این تنها یکی از نتایج درخشان هیلبرت در نظریهٔ ناورداهاست که به دست فراموشی سپرده شده است.

حال ناوردای دیگری از چندجمله‌ای درجهٔ پنج را در نظر می‌گیریم. قضیهٔ ۳ به ما می‌گوید که چندجمله‌ای درجهٔ پنجم

$$p(x) = x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5$$

دارای چندجمله‌ای ناهم‌قطب یکتای درجهٔ سهٔ $q(x)$ است. چندجمله‌ای $q(x)$ یک ناوردای $p(x)$ است. آیا $q(x)$ نمایش ساده‌ای در نمادگذاری شبح‌وار دارد؟ جواب مثبت و به صورت زیر است:

$$q(x) \cong (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)(\alpha_3-x)$$

در آثار قدما ناوردای فوق را با حروف j نمایش می‌دادند.

هنگامی‌که ناوردای j صفر می‌شود چندجمله‌ای درجهٔ پنج $p(x)$ چه خاصیتی پیدا می‌کند؟

جواب این پرسش دلپسند است. ناوردای j از یک چندجمله‌ای درجهٔ پنج، متحد با صفر است اگر و تنها اگر آن چندجمله‌ای درجهٔ پنج با یک چندجمله‌ای نابدیهی از درجهٔ دو، ناهم‌قطب باشد. ولی در این‌صورت قضیهٔ ۵ به ما می‌گوید که چندجمله‌ای درجهٔ پنج را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$p(x) = c(x-r_1)^5 + (1-c)(x-r_2)^5$$

که r_1 و r_2 ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دو هستند. بنابراین صفرشدن ناوردای j یک شرط لازم وکافی است برای آنکه چندجمله‌ای درجهٔ پنجی مانند $p(x)$ را بتوان به‌صورت مجموع دو توان پنجم (به جای سه توان پنجم) از چندجمله‌ای‌های خطی نوشت. در این حالت معادلهٔ درجهٔ پنج $p(x) = 0$ را می‌توان با رادیکالها حل کرد:

با استدلالهای مشابهی می‌توان همهٔ ناورداهایی را محاسبه کرد که صفرشدنشان، حل‌پذیری الگوریتمی معادلهٔ درجهٔ پنج را با رادیکالها ایجاب کند. کیلی اولین کسی بود که نشان داد بیست‌وسه ناوردا در این ماجرا نقش دارند.

قضیهٔ هیلبرت در بارهٔ متناهی‌مولد بودن حلقهٔ ناورداها را می‌توان در زبان اشباح بازنویسی کرد و اثباتی ترکیبیاتی برای آن به‌دست داد که مستقل از قضیه پایهٔ هیلبرت باشد.

در خاتمه، بگذارید کمی در بارهٔ دلایل دیگر کنار گذاشته شدن روش سمبلیک در نظریهٔ ناورداها صحبت کنیم. گفتن حقیقت در ریاضیات بی‌اندازه دشوار است. توصیف صوری ریاضیات همهٔ حقیقت را نمی‌گوید. حقیقت یک نظریهٔ ریاضی را محتملاً وقتی بیشتر درک می‌کنیم که اشارات خودمانی متخصصین، انگیزه‌های پنهان نظریه را لو می‌دهد، یا بر مثالهای نوعی مسلط می‌شویم، یا وقتی کشف می‌کنیم که مسائل واقعی در پس مسائل نمایشی چه بوده‌اند. فلاسفه و روانشناسان باید توضیح دهند که چرا ما ریاضیدانان عادت کرده‌ایم به‌طور حساب شده‌ای ردپای خود را محو کنیم. دانشوران رشته‌های دیگر همواره با دیدهٔ تعجب و تردید به این عادت ریاضیدانان می‌نگریسته‌اند، عادتی که از زمان فیثاغورس تا امروز تغییر چندانی نکرده است.

هدف نهانی روش سمبلیک در نظریهٔ ناورداها صرفاً یافتن عبارت ساده‌ای برای ناورداها نبود. اعتقادی عمیقتر راهنمای این روش بوده است. انتظار می‌رفت که نمایش ناورداها با روش سمبلیک نهایتاً ما را به سمت انتخاب ناورداهای «ذی‌ربط» یا «مهم» از بین انواع نامتناهی آنها سوق دهد. این امید وجود داشت که تعبیر صفرشدن یک ناوردا را بتوان از نمایش شبح‌وار آن به‌دست آورد. از بین رفتن این اعتقاد دلیل اصلی زوال نظریهٔ کلاسیک ناورداها بود و امروز احیاء آن دلیل تجدید حیات نظریهٔ ناورداهاست.

اینکه در جایی که قدما شکست خورده‌اند موفق شویم یا نشویم، مشخص نیست. چند سالی منتظر باشید. اگر اعتقادی به موفقیت نداشتم، این سخنرانی را ارائه نمی‌کردم.

از توجه شما سپاسگزارم.

مراجع

1. Di Crescenzo, Antonio, and Rota, Gian-Carlo, Sul calcolo umbrale, *Ricerche Matematica* **XLIII** (1994), 129-162.
2. Ehrenborg, Richard, and Rota, Gian-Carlo, Apolarity and canonical forms for homogeneous polynomials, *Eur. J. Combinatorics* **14** (1993), 157-181.
3. Grosshans, Frank D., Rota, Gian-Carlo, and Stein, Joel A., *Invariant Theory and Superalgebras*, CBMS Regional Conferences in Mathematics Vol. 69, Providence, RI: American Mathematical Society (1987).
4. Kung, J. P. S., and Rota, Gian-Carlo, The invariant theory of binary forms, *Bull. Am. Math. Soc.* (2) **10** (1984), 27-85.
5. Metropolis, N., and Rota, Gian-Carlo, Symmetry classes: functions of three variables, *Am. Math. Monthly* **98** (1991), 328-332.
6. Metropolis, N., Rota, G.-C. and Stein, Joel A., Theory of symmetry classes, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **88** (1991), 8415-8419.
7. Metropolis, N., Rota, Gian-Carlo, and Stein, Joel A., Symmetry classes of functions, *J. Alg.* **171** (1995), 845-866.
8. Rota, Gian-Carlo, and Taylor, B. D. The classical umbral calculus, *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 694-711.

* * * * * *

• Gian-Carlo Rota, "Two turning points in invariant theory", *Math. Intelligencer*, (1) **21** (1999) 20-27.

این سخنرانی، متن دومین سخنرانی از سخنرانیهای سمینار (Colloquium Lectures) در نشست سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکاست که در ۸ ژانویهٔ ۱۹۹۸ ایراد شده است.

* جیان‌کارلو روتا در هنگام نوشتن این مقاله در دانشگاه ام. آی. تی مشغول کار بوده است.