تصویرهای ترکیباتی•

جیان‌کارلو روتا*
ترجمهٔ روزبه توسرکانی

وقتی که به دبیرستان می‌رفتم، دبیر ادبیات انگلیسی داستانی از جیمز تربر[۱] به نام «زندگی پنهان والتر می‌تی»[۲] را برای مطالعه به من داد. من هر چند سال یک‌بار این داستان را خوانده‌ام، و به این نتیجه رسیده‌ام که هرکس یک «عقدهٔ والتر می‌تی» دارد.

یک راه برای شناختن یک شخص می‌تواند کشف «خیالبافی‌های والتر می‌تی» او باشد.

بیشتر افکار ریاضی ما در دبیرستان یا در دورهٔ پیش‌دانشگاهی خیالبافی‌های والتر می‌تی بودند. هنگامی که مطلب ریاضی جدیدی را فرا می‌گرفتیم، خودمان را در حال خیالبافی در بارهٔ تعمیمهای احتمالی آن مطلب می‌یافتیم. همین که ضرایب دوجمله‌ای را فهمیدیم، در بارهٔ تعمیم آن به حالتی که مخرج منفی است، خیالبافی کردیم. به محض آنکه چیزی در بارهٔ مشتقات آموختیم، به سمت مشتقات از مرتبهٔ کسری خیز برداشتیم. اگر زمانی با تابع زتای ریمان آشنا شده‌ایم، دچار افکار رمانتیکی در بارهٔ تعبیر جدیدی از این تابع که راز آن را آشکار کند شده‌ایم.

به این سخنرانی می‌بایست عنوان دیگری داده می‌شد. باید «دورهٔ بعدی زندگی والتر می‌تی» نام می‌گرفت. این سخنرانی شامل یک رشته «تصویر» جسورانه است که توسط یک والتر می‌تی که خجالت را کنارگذاشته، نمایش داده می‌شوند. هر تصویر با یک خیالبافی سرخوشانه سروکار خواهد داشت که کم‌وبیش به حقیقت پیوسته است.

اولین تصویر: مثالی از ترکیبیات پیش‌متناهی

بیایید با یک داستان تاریخی ـ تخیلی آغاز کنیم و تصور کنیم که ریمان چگونه ممکن است تابع زتای ریمان را کشف کرده باشد.

پروفسور ریمان می‌دانست که چگالی حسابی از اهمیتی بنیادی در نظریهٔ اعداد برخوردار است. اگر A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbb{N}$ باشد، آنگاه چگالی حسابی مجموعهٔ A، هرگاه حد زیر وجود داشته باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{dens}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} ||A \cap \{۱, ۲, \cdots, n\}||$$

به عنوان مثال $\operatorname{dens}(\mathbb{N}) = ۱$. اگر A_p مجموعهٔ مضربهای عدد اول p باشد، آنگاه $\operatorname{dens}(A_p) = ۱/p$. جالبتر از همه اینکه با محاسبهٔ ساده‌ای می‌توان نشان داد که برای هر دو عدد اول p و q، $\operatorname{dens}(A_p \cap A_q) = ۱/pq$. اگر چگالی یک اندازهٔ احتمال (شمارا ـ جمعی) بود، نتیجه می‌گرفتیم که پیشامدهای بخش‌پذیر بودن یک عدد به‌تصادف انتخاب شده بر هر یک از دو عدد اول مستقل هستند. متأسفانه، چگالی حسابی برخی ـــ و نه همهٔ ـــ ویژگیهای یک اندازهٔ احتمال را دارد. از همه واضحتر اینکه شمارا ـ جمعی نیست.

پروفسور ریمان پس از یک دوره کنکاش و تعمق در اندیشه‌هایش، موفق شد چاره‌ای برای برخی کاستیهای چگالی حسابی پیدا کند. وی یک عدد حقیقی $s > ۱$ را انتخاب و اندازهٔ عدد صحیح مثبت n را مساوی $۱/n^s$ تعریف کرد. به این ترتیب اندازهٔ مجموعهٔ $\mathbb{N}$ مساوی مقدار زیر به‌دست آمد

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s}$$

بنابراین او توانست یک اندازهٔ احتمال (شمارا ـ جمعی) P_s روی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbb{N}$ با قراردادن

$$P_s(A) = \frac{۱}{\zeta(s)} \sum_{n\in A} \frac{۱}{n^s}$$

---

۱. James Thurber

۲. این داستان تحت همین عنوان به قلم احمد گلشیری ترجمه شده و در مجموعهٔ «داستان و نقد داستان» جلد اول، به چاپ رسیده است ـ م.

تعریف کند. سپس ریمان به سمت اثبات آنچه در تمام مدت احساس می‌کرد گام برداشت، یعنی ویژگی بنیادی

$$P_s(A_p \cap A_q) = P_s(A_p)P_s(A_q) = \frac{۱}{pq}$$

به عبارت دیگر پیشامدهای A_p و A_q یعنی بخش‌پذیری یک عدد صحیح به تصادف انتخاب شدهٔ n بر هر یک از دو عدد اول p یا q نسبت به احتمال P_s مستقل هستند.

بالاخره تابع زتای ریمان به درد چیزی می‌خورد.

من اکنون از ترفندی لفظی استفاده خواهم کرد که بوخنر یکی از استادان دورهٔ کارشناسیم آن را به‌طور مؤثری به‌کار می‌گرفت. درکلاس درس، پروفسور بوخنر کلمات زیر را به‌عنوان پیش‌درآمد صورت قضیه بیان می‌کرد: «براساس فرضهایی فنی، قضیهٔ زیر درست است»، صد البته بدون آنکه هرگز فاش کند که فرضهای فنی او چه بوده‌اند.

سپس پروفسور ریمان به نشان‌دادن این موضوع پرداخت که براساس فرضهایی فنی روی مجموعه A،

$$\lim_{s\to ۱} P_s(A) = \mathrm{dens}(A)$$

پس گرچه چگالی حسابیْ یک تابع احتمال نیست، تحت شرایط مناسبی حد توابع احتمال است.

مدتها پس از درگذشت ریمان، مجدداً براساس فرضهایی فنی، نشان داده شد که احتمالهای P_s تنها احتمالهایی هستند که روی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تعریف می‌شوند به‌طوری که برای آنها پیشامدهای بخش‌پذیری بر اعداد اول متفاوت مستقل هستند. به نظر می‌رسد که این واقعیت پشتوانه‌ای برای برنامهٔ اثبات حکمهایی در نظریهٔ اعداد به وسیله روشهای احتمالاتی براساس تابع زتای ریمان است.

چرا پروفسور ریمان هرگز این ایدهٔ درخشانش را منتشر نکرد؟ یافتن پاسخ چندان دشوار نیست. درست است که با استفاده از این فرایند حدی برخی از قضیه‌های نظریهٔ اعداد به‌صورت احتمالاتی قابل اثبات هستند ــ مانند قضیهٔ دیریکله در بارهٔ اعداد اول در تصاعدهای حسابی ــ اما تاکنون قضایای عمیقتر نظریهٔ اعداد از دسترس این رهیافت دور مانده‌اند. به‌عنوان مثال هیچ‌کس با این روش موفق به اثبات قضیهٔ اعداد اول نشده است. پروفسور ریمان با آگاهی از این کاستی، یادداشتهای خودش را در سطل زباله انداخت و از راهی کاملاً متفاوت، با بیان فرضی که نام او را بر خود دارد و تا امروز حل نشده باقی مانده است، به برقراری پیوند بین تابع زتای ریمان و توزیع اعداد اول پرداخت.

چرا این داستان تاریخی-تخیلی کوتاه را برای شما نقل می‌کنم؟ چون می‌خواهم تعبیر احتمالاتی دیگری از تابع زتای ریمان پیشنهاد کنم که با تعبیری که هم اینک مطرح شد به کلی متفاوت است.

بیایید به بررسی یک مسألهٔ شمارشی ترکیبیاتی بپردازیم. یک گروه دوری مرتبهٔ r، مانند C_r را در نظر می‌گیریم. هر مشخصهٔ χ از گروه C_r، هسته‌ای دارد که زیرگروهی از C_r است. در حالت کلی هر دنبالهٔ $\chi_۱، \chi_۲، \cdots، \chi_s$ از مشخصه‌های C_r هستهٔ توأمی دارند که زیرگروهی از C_r است؛ هستهٔ توأم دنباله‌ای از مشخصه‌ها چیزی نیست جز اشتراک هسته‌های آنها. اگر یک دنبالهٔ $\chi_۱، \chi_۲، \cdots، \chi_s$ از s مشخصه به طور مستقل و تصادفی انتخاب شده باشند، احتمال آنکه هستهٔ توأم دنباله مساوی زیرگروه داده شده‌ای از C_r مانند C_n باشد، چقدر است؟

احتمال این پیشامد که هستهٔ یک مشخصهٔ به تصادفْ انتخاب شده، شامل زیرگروه C_n باشد $۱/n$ است، چون r مشخصه برای گروه C_r وجود دارد و r/n تا از چنین مشخصه‌هایی روی C_n صفر خواهند شد. بنابراین احتمال آنکه هستهٔ توأم یک دنبالهٔ به تصادف انتخاب شدهٔ $\chi_۱، \chi_۲، \cdots، \chi_s$ از s مشخصه، شامل زیرگروه C_n باشد برابر است با $(۱/n)^s$. اگر احتمال آن را که هستهٔ توأم مشخصه‌های $\chi_۱، \chi_۲، \cdots، \chi_s$ مساوی زیرگروه C_n شود با P_{C_n} نمایش دهیم، آنگاه اتحاد زیر را داریم

$$\frac{۱}{n^s} = \sum_{n|d|r} P_{C_d}$$

اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که مجموعهٔ جزئاً مرتب زیرگروههای یک گروه دوری C_r با مجموعهٔ جزئاً مرتب شمارنده‌های عدد صحیح r یکریخت است.

اکنون از فرمول وارون موبیوس در نظریهٔ اعداد استفاده می‌کنیم. از این طریق به‌دست می‌آوریم

$$P_{C_n} = \sum_{n|d|r} \mu(\frac{d}{n})\frac{۱}{d^s}$$

اینجا $\mu(j)$ تابع موبیوس در نظریه اعداد است.

پس از تعویض متغیر $d = nj$ می‌توانیم عبارت سمت راست را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$P_{C_n} = \frac{۱}{n^s}\sum_j \mu(j)\frac{۱}{j^s}$$

متغیر j در سمت راست روی زیرمجموعه‌ای از شمارنده‌های عدد صحیح r که لازم نیست نگران آن باشیم تغییر می‌کند.

حال اگر مجموع سمت راست روی همهٔ اعداد صحیح مثبت j تغییر می‌کرد، آنگاه عبارت سمت راست مساوی می‌شد با

$$\frac{۱}{n^s}\ \frac{۱}{\zeta(s)}$$

یعنی عبارت سمت راست می‌توانست برحسب عکس تابع زتای ریمان بیان شود. اگر بتوانیم مسألهٔ ترکیبیاتی خود را چنان تغییر دهیم که در سمت راستْ یک مجموع نامقید بدست آوریم، آنگاه یک تعبیر احتمالاتی از تابع زتای ریمان خواهیم داشت.

برای این کار به‌جای گروه دوری متناهی C_n، یک گروه دوری پیش‌متناهی در نظر گرفته می‌شود. گروه C_∞ از اعداد گویا به پیمانهٔ ۱ را در نظر بگیرید. برای هر عدد صحیح مثبت n، گروه C_∞ یک زیرگروه متناهی یکتای C_n

با n عضو دارد. گروه مشخصهٔ C_∞^* از C_∞ یک گروه فشرده است؛ و یک اندازهٔ هار دارد که یک اندازهٔ احتمال P است. گروه C_∞^*، گروه پیش‌متناهی مطلوب است که روی آن می‌توانیم محاسبهٔ پیشین را تعمیم دهیم.

مجموعهٔ همهٔ مشخصه‌های گروه C_∞ (یعنی مجموعهٔ همهٔ عضوهای گروه C_∞^*) که روی یک زیرگروه C_n از C_∞ صفر می‌شوند، دارای اندازهٔ هار $1/n$ است. پس اگر یک دنبالهٔ $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ از s مشخصهٔ C_∞ را به‌طور مستقل و به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آنکه هستهٔ توأم آنها شامل گروه C_n باشد مساوی $(1/n)^s$ است. اگر مجدداً احتمال آن را که هستهٔ توأم دنبالهٔ $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ از s مشخصه مساوی گروه C_n گردد با P_{C_n} نمایش دهیم، آنگاه اتحاد زیر را داریم

$$\frac{1}{n^s} = \sum_{n|d} P_{C_d}$$

که اکنون مجموع سمت راستْ نامتناهی است. دوباره با استفاده از فرمول وارون موبیوس به‌دست می‌آوریم

$$P_{C_n} = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) \frac{1}{d^s} = \frac{1}{n^s}\frac{1}{\zeta(s)}$$

این همان تعبیر احتمالاتی موعود برای تابع زتای ریمان است. با استفاده از این تعبیر برخی ویژگیهای تابع زتای ریمان به‌طور احتمالاتی قابل اثبات هستند ــ به‌عنوان مثال فرمول ضرب. باقی می‌ماند که ببینیم کدام ویژگیهای دیگر تابع زتای ریمان به این طریق قابل اثبات هستند.

بحث بالا نمونه‌ای از تعمیم یک مسألهٔ شمارش روی مجموعه‌ای متناهی به شمارش روی یک مجموعهٔ پیش‌متناهی است. چنین جایگزین کردن یک مجموعهٔ متناهی با یک «مجموعهٔ» پیش‌متناهی در دیگر مسأله‌های ترکیبیاتی نیز میسر است. آیا هرگز یک ترکیبیات پیش‌متناهی، شانه به شانهٔ ترکیبیات مجموعه‌های متناهی خواهیم داشت؟

دومین تصویر: مشتق دوری

مشتق معمولی یک چندجمله‌ای یک‌متغیره توسط هاوسدورف به چندجمله‌ایها و سریهای توانی صوری با متغیرهای ناجابجایی به صورت زیر تعمیم داده شده است. جبر شرکت‌پذیر $\mathbb{C}\langle a, b, \cdots, c, x\rangle$ را که توسط مجموعه‌ای از حرفها مانند $\{a, b, \cdots, c, x\}$ تولید شده در نظر بگیرید. حرف x متغیر نامیده می‌شود. همه حرفهای دیگر ثابت نامیده می‌شوند. یک تک‌جمله‌ای در این جبر شرکت‌پذیر همان چیزی است که فکر می‌کنید باید باشد، کلمه‌ای مانند

$$m = axbax^3bcxd$$

هر چندجمله‌ای، ترکیبی خطی از تک‌جمله‌ای‌هاست و سری توانی صوری به صورت مجموع نامتناهی تک‌جمله‌ای‌ها با قیدهای مناسبی روی رشد درجات جمعوندها تعریف می‌شود. سریهای توانی صوری با متغیرهای ناجابجایی، یک جبر $\mathbb{C}\langle\langle a, b, c, \cdots, x\rangle\rangle$ تشکیل می‌دهند. ما چنین سریهای توانی صوری را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق هاوسدورف تک‌جمله‌ای m به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\begin{aligned} H(m) &= H(axbax^3bcxd) \\ &= abax^3bcxd + 3axbax^2bcxd + axbax^3bcd \end{aligned}$$

این تعریف با استفاده از خطی بودن به چندجمله‌ای‌ها و سریهای توانی صوری تعمیم می‌یابد.

اگر m' یک تک‌جمله‌ای دیگر باشد، قاعدهٔ مورد انتظار برای یافتن مشتق هاوسدورف یک حاصلضرب را داریم:

$$H(mm') = H(m)m' + mH(m')$$

مشتق هاوسدورف یک نارسایی بزرگ دارد. به نظر می‌رسد که هیچ قاعده‌ای مشابه قاعدهٔ زنجیری برای مشتق‌گیری از یک تابع مرکب وجود ندارد، به‌عنوان مثال، مشتق هاوسدورف چندجمله‌ای $(ax)^n$، هنگامی‌که حرفهای a و x جابجا نمی‌شوند مساوی $n(ax)^{n-1}a$ نیست. در این مورد هیچ الگوی واضحی مشاهده نمی‌شود.

صورت دیگری از مفهوم مشتق وجود دارد که در یک قاعدهٔ زنجیری ساده تحت ترکیب تابعی صدق می‌کند. این همان مشتق دوری است که با حرف D نمایش داده می‌شود. مشتق دوری به‌صورت زیر تعریف می‌شود. ابتدا عملگر گرد کردن T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(الف) اگر اولین حرف یک تک‌جمله‌ای m، متغیر x نباشد، قرار می‌دهیم $T(m) = 0$.

(ب) اگر اولین حرف یک تک‌جمله‌ای m متغیر x نباشد به‌طوری که $m = xm'$، قرار می‌دهیم $T(m) = m'$.

(پ) این را با استفاده از خطی بودن به $\mathbb{C}\langle\langle a, b, \cdots, c, x\rangle\rangle$ تعمیم می‌دهیم.

مشتق دوری یک تک‌جمله‌ای m برحسب عملگر گرد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

(الف) فرض می‌کنیم p یک چندجمله‌ای باشد که از جمع کردن همهٔ جایگشتهای دوری تک‌جمله‌ای m به‌دست آمده باشد.

(ب) قرار می‌دهیم $D(m) = T(p)$.

(پ) این را با استفاده از خطی بودن به همهٔ سریهای توانی صوری تعمیم می‌دهیم.

به‌عنوان مثال مشتق دوری تک‌جمله‌ای m در بالا، در گامهای زیر محاسبه می‌شود:

گام ۱. همهٔ جایگشتهای دوری تک‌جمله‌ای $axbax^3bcxd$ را می‌نویسیم. این جایگشتها عبارت‌اند از:

$$xbax^3bcxda,\ bax^3bcxdax,\ ax^3bcxdaxb,$$

$$x^3bcxdaxba,\ x^2bcxdaxbax,\ xbcxdaxbax^2,$$

$$bcxdaxbax^3,\ cxdaxbax^3b,\ xdaxbax^3bc,\ daxbax^3bcx$$

گام ۲. در فهرست بالا یکی از عملیات زیر را اجرا می‌کنیم:

(الف) اگر اولین حرف یک تک‌جمله‌ایْ x نباشد، آن تک‌جمله‌ای را از فهرست حذف می‌کنیم.

(ب) اگر اولین حرف یک تک‌جمله‌ایْ x باشد، حرف اول را حذف می‌کنیم.

وقتی که عملیات (a) و (b) را روی هر یک از تک‌جمله‌ای‌های فهرست بالا اجرا کنیم، فهرست کوتاه‌تری به دست می‌آوریم، یعنی

$$bax^{3}bcxda,\ x^{2}bcxdaxba,\ xbcxdaxbax,$$
$$bcxdaxbax^{2},\ daxbax^{3}bc$$

گام ۳. تک‌جمله‌ای‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا مشتق دوری به‌دست آید:

$$\begin{aligned} D(m) &= D(axbax^{3}bcxd) \\ &= bax^{3}bcxda + x^{2}bcxdaxba + xbcxdaxbax \\ &\quad + bcxdaxbax^{2} + daxbax^{3}bc \end{aligned}$$

مثالی دیگر به‌صورت زیر است: مشتق دوری تک‌جمله‌ای $axbxcxdx$ مساوی است با

$$\begin{aligned} &D(axbxcxdx) \\ &\quad = bxcxdxa + cxdxaxb + dxaxbxcx + axbxcxd \end{aligned}$$

بنابراین مشتق دوری تک‌جمله‌ای $(ax)^{n}$ مساوی $n(ax)^{n-1}a$ است.
با محاسبهٔ مشابهی می‌توان به‌دست آورد $D(x+a)^{n} = n(x+a)^{n-1}$ و برای سریهای توانی صوری خواهیم داشت $D(e^{x+a}) = e^{x+a}$ و $D(e^{ax}) = e^{ax}a$. به یاد داشته باشید که حرفهای a و x جابجا نمی‌شوند! در این مثالها مشتق هاوسدورف متناظر به‌هیچ‌وجه الگوی واضحی ندارد.

مشتق دوری از همهٔ ویژگیهای مورد انتظار مشتق معمولی برخوردار است، به‌ویژه در قاعدهٔ زنجیری برای ترکیب دو سری توانی صوری صدق می‌کند. برای بیان قاعده‌های مشتق‌گیری دوری در حالت کلی، به عملگر دیگری که عملگر درهم‌پیچش[1] نامیده می‌شود، نیاز داریم. عملگر درهم‌پیچش به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید c_1، c_2، $\cdots$، c_n حرفهای دلخواهی باشند. اگر $g(x)$ یک سری توانی صوری باشد، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \langle Cc_1c_2\ldots c_n|g(x)\rangle &= c_1c_2\ldots c_n g(x) + c_2\ldots c_n g(x)c_1 \\ &\quad + c_3\ldots c_n g(x)c_1c_2 + \ldots + c_n g(x)c_1c_2\ldots c_{n-1} \end{aligned}$$

اگر $f(x)$ یک سری توانی صوری باشد، عملگر درهم‌پیچش

$$\langle Cf(x)|g(x)\rangle$$

با استفاده از خطی بودن تعریف می‌شود.

تعریف می‌کنیم

$$\langle D(f(x))|g(x)\rangle = T\langle Cf(x)|g(x)\rangle$$

به عنوان مثال

$$\langle D(f(x))|1\rangle = D(f(x))$$

مشتق دوری حاصلضرب دو «تابع» توسط اتحاد زیر داده می‌شود

1. wrapping

$$D(f(x)g(x)) = \langle D(f(x))|g(x)\rangle + \langle D(g(x))|f(x)\rangle$$

به عنوان مثال به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} D((1-ax)^{-1}(1-bx)^{-1}) &= \\ &(1-ax)^{-1}(1-bx)^{-1}(1-ax)^{-1}a \\ &+ (1-bx)^{-1}(1-ax)^{-1}(1-bx)^{-1}b \end{aligned}$$

چنین اتحادی برای مشتق هاوسدورف برقرار نیست.

مشتق دوری حاصلضرب هر دنباله‌ای از سریهای توانی صوری به‌طور مشابه با استفاده از عملگر درهم‌پیچش محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &D(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)) \\ &\quad = \langle D(f_1(x))|f_2(x)\cdots f_n(x)\rangle \\ &\quad + \langle D(f_2(x))|f_3(x)\cdots f_n(x)f_1(x)\rangle \\ &\quad + \cdots + \langle D(f_n(x))|f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)\rangle \end{aligned}$$

اکنون به ویژگی اصلی مشتق دوری می‌رسیم: قاعدهٔ زنجیری. دو سری توانی صوری $f(x)$ و $g(x)$ در $\mathbb{C}\langle\langle a,b,\cdots,c,x\rangle\rangle$ داده شده است. فرض کنید که سری توانی صوری $g(x)$ جملهٔ ثابت ندارد. تحت این شرایط، ترکیب $f(g(x))$ با جایگذاری $g(x)$ در هر جایی که متغیر x در سری توانی صوری $f(x)$ ظاهر شده، خوش‌تعریف است. برای نمایش سری توانی صوری حاصل از جایگذاری $g(x)$ در هر جا که x در $D(f(x))$ یعنی مشتق دوری سری توانی صوری x، ظاهر شده است، می‌نویسیم $D_g(f(x))$. آنگاه قاعدهٔ زنجیری برای مشتق دوری به صورت زیر خواهد بود:

$$D(f(g(x))) = \langle Dg(x)|D_g(f(x))\rangle$$

به‌عنوان مثال داریم

$$D(e^{axbx}) = bxe^{axbx}a + e^{axbx}axb$$

یک مثال زیباتر به صورت زیر است:

$$D(e^{(1-ax)^{-1}}) = (1-ax)^{-1}e^{(1-ax)^{-1}}(1-ax)^{-1}a$$

می‌توان ثابت کرد که مشتق دوری یک سری توانی صوری گویا برحسب حرفهای ناجابجایی باز یک سری توانی ناجابجایی گویاست و همچنین مشتق دوری یک سری توانی صوری جبری برحسب حرفهای ناجابجایی باز یک سری توانی صوری جبری است.

با وجود شواهدِ دال بر اینکه مشتق دوریْ صورت طبیعی مشتق برای جبرهای ناجابجایی است، وضعیت کنونی این نظریه رضایت‌بخش نیست. مشتق دوری یک کشف تجربی است. لازم است که این نظریه در پناه یک نظریهٔ جبری گسترده‌تر قرار گیرد، همان‌طور که مشتق هاوسدورف در پناه نظریهٔ جبرهای هوپف قرار گرفته است.

سومین تصویر: لگاریتم و قضیهٔ دوجمله‌ای

فرمول مجموع‌یابی اویلر-مک‌لورن یکی از چشمگیرترین فرمولهای ریاضیات است. برای یک تابع مناسب $f(x)$ از یک متغیر حقیقی یا مختلط، این فرمول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x)+f(x+۱)+f(x+۲)+\cdots+f(x+n) &= B_۰\int_x^{x+n+۱} f(y)dy + B_۱(f(x+n+۱)-f(x)) \\ &+ \frac{B_۲}{۲!}D(f(x+n+۱)-f(x)) \\ &+ \frac{B_۳}{۳!}D^۲(f(x+n+۱)-f(x))+\cdots \end{aligned}$$

B_nها اعداد برنولی‌اند و D عملگر مشتق معمولی است.

مفید بودن فرمول اویلر-مک‌لورن از کاربرد ۲۰۰ سالهٔ آن معلوم می‌شود. با این همه فرمول اویلر-مک‌لورن یک نارسایی جدی دارد. سری سمت راست تقریباً هرگز همگرا نیست، مگر آنکه به یک مجموع متناهی تقلیل یابد.

پرسش ما این است: آیا یک فضای برداری از توابع که شامل حداکثر ممکن از توابع مقدماتی باشد، و یک توپولوژی روی چنین فضای برداری که نسبت به آن، سمت راست فرمول اویلر-مک‌لورن یک سری همگرا باشد، وجود دارد؟

پاسخ این پرسش به‌طور غیرمنتظره‌ای به پاسخ پرسش دیگری مربوط است. تعمیم «راستین» ضرایب دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$، هنگامی که k بتواند یک عدد صحیح منفی باشد کدام است؟ این پرسش به نوبهٔ خود ما را به پرسش سومی رهنمون می‌گردد. چگونه می‌توانیم دریابیم که تعمیمی از ضرایب دوجمله‌ای «راستین» است؟ پاسخ پرسش سوم آسان است: تعمیم ضرایب دوجمله‌ای «راستین» است اگر به تعمیمی ملموس از قضیهٔ دوجمله‌ای منجر شود:

$$(a+x)^n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{n-k}$$

در جوانی قضیهٔ دوجمله‌ای را بدیهی می‌پنداشتم. [اما] فکر می‌کنم [بعداً] درسم را فرا گرفتم. یک فیلسوف مشهور، که نمی‌توانم نامش را به یاد بیاورم نوشته است که همهٔ عالم را می‌توان از روی یک دانه شن استنباط کرد. او می‌بایست اضافه می‌کرد که بخش بزرگی از ریاضیات را می‌توان با تأمل در قضیهٔ دوجمله‌ای استنتاج کرد.

چاره‌ای نیست جز اینکه وارد گود شویم و تعمیم «راستین» ضرایب دوجمله‌ای را بیان کنیم. ما معمولیترین راه را در پیش می‌گیریم، و ابتدا تعریف فاکتوریل را تعمیم می‌دهیم. پس، فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت یا منفی باشد. فاکتوریل رومی$[n]!$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[n]! = n! \qquad n \geq ۰ \text{ اگر}$$

$$[n]! = \frac{(-۱)^{n+۱}}{(-n-۱)!} \qquad n < ۰ \text{ اگر}$$

این تعریف از کجا آمده است؟ می‌توانم به سادگی بگویم که این تعریف به کار ما می‌آید، اما این همهٔ حقیقت نیست. مقدار فاکتوریل رومی $[n]!$ برای n منفی برابر است با ماندهٔ تابع گاما به‌ازای عدد صحیح $n-۱$. با استفاده از فاکتوریل رومی، ضرایب رومی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

هنگامی که $n \geq k \geq ۰$، ضرایب رومی با ضرایب دوجمله‌ای یکسان هستند. برای همهٔ عددهای صحیح n و k، ضرایب رومی از همهٔ ویژگیهای مقدماتی ضرایب دوجمله‌ای، مانند مثلث پاسکال و غیره، بهره‌مند هستند. اما شگفتیهایی نیز در انبان دارند. به عنوان مثال داریم

$$\left[\begin{matrix} ۰ \\ -k \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} ۰ \\ k \end{matrix}\right] = \frac{(-۱)^{k+۱}}{k}$$

آیا این هیچ معنای ملموسی دارد؟ بله، زیرا می‌توانیم با استفاده از این، تعمیمی از قضیهٔ دوجمله‌ای بیابیم. این تعمیم به صورت زیر است.

بسط سری توانی لگاریتم را به یاد آورید:

$$\log(x+a) = \log x + \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k+۱}}{k}\frac{a^k}{x^k}$$

این بسط سری توانی را می‌توانیم برحسب ضرایب رومی به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\log(x+a) = \log x + \sum_{k=۱}^{\infty}\left[\begin{matrix} ۰ \\ k \end{matrix}\right]\frac{a^k}{x^k}$$

به نظر می‌رسد این فرمول بتواند شبیه تعمیمی از قضیهٔ دوجمله‌ای شود که در آن لگاریتم نقش توان صفرم را ایفا می‌کند. بسط سری توانی دیگری که در آن ضرایب رومی ظاهر می‌شوند به صورت زیر است

$$\begin{aligned} (x+a)(\log(x+a)-۱) &= \\ x(\log x-۱) &+ a\log x + \sum_{k=۲}^{\infty}\left[\begin{matrix} ۱ \\ k \end{matrix}\right]a^k x^{۱-k} \end{aligned}$$

آیا الگویی مشاهده می‌کنیم؟ بسیار خوب، بگذارید بسط سری توانی دیگری را آزمایش کنیم:

$$\begin{aligned} (x+a)^۲\Big(\log(x+a)-۱-\frac{۱}{۲}\Big) &= x\Big(\log x-۱-\frac{۱}{۲}\Big) + \left[\begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix}\right]ax(\log x-۱) \\ &+ \left[\begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix}\right]a^۲\log x + \sum_{k=۳}^{\infty}\left[\begin{matrix} ۲ \\ k \end{matrix}\right]a^k x^{۲-k} \end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم به سوی یک تعمیم خیز برداریم. برای توابع مناسب $f(x)$ فرض می‌کنیم

$$D^{-۱}f(x)$$

انتگرال نامعین یکتایی از تابع $f(x)$ باشد که جملهٔ ثابت صفر دارد. نگران نباشید، این عبارت لحظه‌ای دیگر معنی‌دار خواهد شد.

تعریف می‌کنیم

$$\lambda_n^{(1)}(x) = [n]!D^{-n}\log x$$

اینجا n یک عدد صحیح مثبت یا منفی است. تابعهای $\lambda_n^{(1)}(x)$، لگاریتمهای همساز مرتبهٔ ۱ نامیده می‌شوند. برای n مثبت داریم

$$\lambda_n^{(1)}(x) = x^n\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

و

$$\lambda_{-n}^{(1)}(x) = \frac{1}{x^n}$$

البته همچنین داریم

$$\lambda_0^{(1)}(x) = \log x$$

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای را با کمک لگاریتمهای همساز بیان کنیم. این تعمیم به صورت زیر است

$$\lambda_n^{(1)}(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k \lambda_{n-k}^{(1)}(x)$$

سه اتحاد بالا حالتهای خاص این اتحاد به‌ازای $n = 0, 1, 2$ هستند.

از آنجا که تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای به لگاریتمهای همساز در مورد نماهای منفی به اتحاد زیر تقلیل می‌یابد، در این مورد هیچ چیز جدیدی به‌دست نمی‌دهد

$$(x+a)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} a^k x^{-n-k}$$

اما برای نماهای مثبت یک تعمیم اصیل و حیرت‌انگیز از قضیهٔ دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم. این تعمیم بیان می‌کند که تابعهای $\lambda_n^{(1)}(x)$ برای n مثبت، در قضیهٔ دوجمله‌ای معمولی به پیمانهٔ توانهای منفی x صدق می‌کنند. به عبارت دیگر اتحاد زیر را داریم

$$(x+a)^n \left(\log(x+a) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right) \cong \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n-k}\right)$$

این اتحاد به پیمانهٔ توانهای منفی x برقرار است. معجزات حذف در این اتحاد آشکار می‌شوند. ای کاش تعبیری ترکیبیاتی یا احتمالاتی از این تعمیم لگاریتمی قضیهٔ دوجمله‌ای می‌دانستم.

تا اینجا فرض کرده‌ایم که همهٔ سریها نسبت به توپولوژی اعداد مختلط همگرا هستند. اکنون در حالی‌که همگرایی را حفظ می‌کنیم، توپولوژی را تغییر خواهیم داد.

سرچشمه و زمینهٔ توپولوژی لگاریتمی که می‌خواهیم تعریف کنیم، جبر سریهای لورن صوری است. این جبر توپولوژیک را می‌توان با تعریف یک توپولوژی روی جبر تابعهای گویا با متغیر x و سپس تکمیل کردن این جبر نسبت به توپولوژی، تعریف کرد. این توپولوژی چنان انتخاب شده که داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} x^{-n} = 0$. هر عضو جبر تکمیل شده یک سری لورن صوری یعنی یک سری به‌صورت

$$\sum_{n<d} a_n x^n$$

از کار درمی‌آید. ما می‌خواهیم فرایند تکمیل کردن مشابهی روی یک جبر دیگر اجرا کنیم: جبر تولیدشده توسط همهٔ تابعهای به شکل $x^n(\log x)^t$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت یا منفی دلخواه و t یک عدد صحیح نامنفی است. برای مشخص کردن اینکه کدام عضوهای این جبر به سمت صفر همگرا می‌شوند، به پایهٔ خوش‌رفتارتری ازاین جبر نیاز داریم. این پایه توسط لگاریتمهای همساز با مرتبهٔ دلخواه t فراهم می‌شود. این لگاریتمها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\lambda_n^{(t)}(x) = [n]!D^{-n}(\log x)^t$$

برای هر عدد صحیح نامنفی t و هر عدد صحیح n. به عنوان مثال برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم

$$\lambda_n^{(0)} = x^n$$

و برای n منفی

$$\lambda_n^{(0)}(x) = 0$$

فرمولهای صریحی برای لگاریتمهای همساز شناخته شده‌اند. برای لگاریتمهای همساز مرتبهٔ ۲ داریم $\lambda_0^{(2)}(x) = (\log x)^2$ و برای n مثبت

$$\lambda_n^{(2)}(x) = x^n \Bigg((\log x)^2 - \left(2 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{n}\right)\log x + 2 + \frac{2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \Bigg)$$

و

$$\lambda_{-n}^{(2)}(x) = 2x^{-n}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n-1}\right)$$

برای هر عدد صحیح نامنفی t، لگاریتمهای همساز مرتبهٔ t در همان تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای که هم‌اکنون برای لگاریتمهای همساز مرتبهٔ ۱ دیده‌ایم صدق می‌کنند:

$$\lambda_n^{(t)}(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k \lambda_{n-k}^{(t)}(x)$$

لگاریتمهای همساز پایه‌ای برای جبر تولید شده توسط همهٔ تابعهای $x^n(\log x)^t$ هستند. یک توپولوژی روی این جبر با این شرط برای هر عدد صحیح نامنفی t

$$\lim_{n\to-\infty} \lambda_n^{(t)}(x) = 0$$

تعریف می‌کنیم. این توپولوژی، توپولوژی لگاریتمی نامیده می‌شود. تکمیل شدهٔ این جبر نسبت به توپولوژی لگاریتمی، جبر سریهای توانی صوری از نوع لگاریتمی یا جبر لگاریتمی است.

هر عضو جبر لگاریتمی یک ترکیب خطی از سریهای توانی همگرا به صورت

$$f(x) = \sum_{t,n\le d} b_{n,t}\lambda_n^{(t)}(x)$$

است که در آنها مجموعیابی روی یک مجموعهٔ متناهی از مقادیر t انجام می‌شود.

اکنون می‌توانیم به فرمول مجموعیابی اویلر-مک‌لورن بازگردیم:

قضیه. برای هر عضو $f(x)$ از جبر لگاریتمی، سمت راست سری اویلر-مک‌لورن در توپولوژی لگاریتمی همگراست.

به عنوان مثال، سری نامتناهی زیر در توپولوژی لگاریتمی همگراست.

$$\begin{aligned}\log x + \log(x+1) + \log(x+2) + \cdots + \log(x+n) \\ = B_0((x+n+1)\log(x+n+1) - x\log x - n - 1) \\ + B_1(\log(x+n+1) - \log x) \\ + \frac{B_2}{2!}\left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x}\right) + \cdots.\end{aligned}$$

مثالی دیگر به صورت زیر است. همان‌طور که می‌دانید مجموع

$$x^k + (x+1)^k + (x+2)^k + \cdots + (x+n)^k$$

را می‌توان توسط فرمول اویلر-مک‌لورن به صورت بسته بیان کرد. قضیهٔ پیش‌گفته به عبارتهای بسته‌صورت مشابهی برای مجموعیابی به شکل زیر منجر می‌شود

$$\begin{aligned}x^k\log x + (x+1)^k\log(x+1) + (x+2)^k\log(x+2) \\ + \cdots + (x+n)^k\log(x+n)\end{aligned}$$

لگاریتمهای همساز کاربردهای دیگری دارند. اجازه دهید یکی از آنها را در خاتمه ذکر کنم.

تعریف عملگر تغییر جا را در حساب تفاضلهای متناهی به یاد آورید:

$$E^a f(x) = f(x+a)$$

برای یک عدد صحیح نامنفی n، عملگر E_1 را به صورت زیر تعریف کنید

$$E_1\lambda_n^{(0)}(x) = \lambda_n^{(1)}(x)$$

با نمادگذاری معمولی، این مانند آن است که بگوییم

$$E_1 x^n = x^n(\log x - 1 - 1/2 - 1/3 - \cdots - 1/n)$$

می‌توان دو گزارهٔ زیر را ثابت کرد:

گزاره. عملگرهای E^a و E_1 جابجا می‌شوند.

گزاره. تحدید عملگر مشتق D به زیرجبری از جبر لگاریتمی که توسط لگاریتمهای همساز $\lambda_n^{(t)}(x)$ برای tهای مثبت تولید می‌شود (یعنی به‌استثنای توانهای نامنفی x) وارون‌پذیر است.

از این دو گزاره می‌توان برای به‌دست آوردن «توسیعهای لگاریتمی» توابع خاص استفاده کرد. بگذارید بحث را با ساده‌ترین مثال خاتمه دهیم: توسیع لگاریتمی دنبالهٔ فاکتوریلهای زیرین، یعنی چندجمله‌ایهای $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ را محاسبه می‌کنیم. این دنبالهٔ چندجمله‌ای‌ها در معادلهٔ تفاضلی زیر صدق می‌کند

$$\Delta(x)_n = n(x)_{n-1}$$

که در آن Δ عملگر تفاضلی است: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. این دنباله را می‌توان با قراردادن

$$(x)_{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

به nهای منفی توسیع داد؛ و داریم

$$\Delta(x)_{-n} = -n(x)_{-n-1}$$

برای n مثبت، می‌توانیم توسیع لگاریتمی این دنباله را با قراردادن

$$(x)_{-n}^{(1)} = (x)_{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

تعریف کنیم. به عنوان مثال، $x_{-1}^{(1)} = \frac{1}{x+1}$.

عناصر $x_{-n}^{(1)}$ به زیرمدولی از جبر لگاریتمی تعلق دارند که توسط $\lambda_n^{(1)}(x)$ وقتی که n همهٔ اعداد صحیح را می‌پذیرد، تولید می‌شود. عملگر Δ روی این زیرمدول وارون‌پذیر است و بنابراین می‌توانیم برای همهٔ عددهای صحیح نامنفی n قرار دهیم

$$(x)_n^{(1)} = \Delta^{-n-1}\frac{1}{x+1}$$

نتیجه می‌شود که عنصر $(x)_0^{(1)}$ توسط سری زیر داده می‌شود، که در توپولوژی لگاریتمی همگراست:

$$(x)_0^{(1)} = \log(x+1) + \frac{B_1}{1+x} - \frac{B_2}{2(1+x)^2} + \frac{B_3}{3(1+x)^3} - \cdots$$

اما این یک شیء آشناست: این همان Ψ-تابع است که گاوس آن را با گمانه‌زنی معرفی کرد. گاوس Ψ تابع را به عنوان جواب «راستین» معادلهٔ تفاضلی

$$\Delta\Psi(x+1) = \frac{1}{x+1}$$

معرفی کرد. ما اکنون درستی حدس گاوس را به‌طور دقیق ثابت کرده‌ایم. محاسبات بیشتر نشان می‌دهند که عنصرهای $(x)_1^{(1)}$ و $(x)_2^{(1)}$ نیز با تابعهای خاص معرفی شده توسط گاوس، یعنی تابعهای دوگاما و سه‌گاما یکسان هستند، که سرانجام به طور دقیق توسط سریهای نامتناهی همگرا در توپولوژی لگاریتمی تعریف شده‌اند.

در حال و هوای مشابهی می‌توان توسیعهای لگاریتمی چندجمله‌ای‌های برنولی، چندجمله‌ای‌های ارمیتی و غیره را تعریف کرد و آشکار می‌شود که بسطهای مجانبی این چندجمله‌ای‌ها به طور طبیعی به عنوان اعضای توسیعهای لگاریتمی این توابع دوباره ظاهر می‌شوند. درواقع توپولوژی لگاریتمی به ما اجازه می‌دهد که به جای بسطهای مجانبی، سریهایی را که در توپولوژی لگاریتمی همگرا هستند قرار دهیم.

در خاتمه، دو مسألهٔ حل نشده را می‌توان ذکر کرد. نخست اینکه عبارتی به صورت بسته برای ضرایب بسط حاصلضربی مانند

$$\lambda_n^{(t)}(x\lambda_n^{(s)}(x))$$

به سری توانی لگاریتمی شناخته نشده است. دوم اینکه در حالت کلی، تعبیری ترکیبیاتی یا احتمالاتی از ضرایب رومی $\left[{n \atop k}\right]$ در دست نداریم.

از اینکه به سخنانم گوش فرا دادید متشکرم.

مراجع

1. Alexander, Kenneth S., Kenneth Baclawski, and Gian-Carlo Rota, A stochastic interpretation of the Riemann zeta function. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 90 (1993), 697-699.

2. Kung, J.P.S (ed.), *Gian-Carlo Rota on Combinatorics*, Boston: Birkhäuser (1996).

3. Kung, **J.P.S.**, M. Ram Murty, and Gian-Carlo Rota, On the Rédei zeta function, *Journal of Number Theory* 12 (1980), 421-436.

4. Loeb, Daniel E., and Gian-Carlo Rota, Formal power series of logarithmic type, *Advances in Mathematics* 75 (1989), 1-118.

5. Rota, Gian-Carlo, Bruce Sagan, and Paul R. Stein, A cyclic derivative in noncommutative algebra, *Journal of Algebra* 64 (1980), 54-75.

* * * * * *

• Gian-Carlo Rota, "Combinatorial snapshots", *Math. Intelligencer*, (2) **21** (1999) 8-14.

این نوشته، متن سومین سخنرانی از سخنرانیهای سمینار (Colloquium Lectures) در نشست سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکاست که در ۹ ژانویهٔ ۱۹۹۸ ایراد شده است.

* جیان‌کارلو روتا در هنگام نوشتن این مقاله در بخش ریاضی دانشگاه ام. آی. تی. کار می‌کرده است.