سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی (۱۹۰۰ـ۱۹۵۰)•

جوزف دوب*
ترجمهٔ عطاءالله تقاء

۱. مقدمه

این نوشتارِ کوتاه غیررسمیْ شمّه‌ای است از تاریخچهٔ ظهور دقت در احتمال ریاضی طی نیمهٔ نخست قرن بیستم. نتایج و حکمهای مشخص تنها در صورتی ذکر شده‌اند که در تاریخ پیشرفت منطقی احتمال ریاضی حائز اهمیت بوده‌اند.

نشو و نمای علوم همچون دنباله‌ای از گامهایی که به جلو برداشته می‌شوند نیست. از پسِ واقعه که نظر کنیم، پیشرفتِ کار بطیء بوده، مسیر پرپیچ و خمی را پشت سرنهاده، فراوان کج رفته و سر از بن‌بستها در آورده، و چه‌بسا در جهاتی راه پیموده که قابل قبول دانشوران پیشرو دوران نبوده است. در دهٔ ۱۹۳۰ فضاهای باناخ را به دیدهٔ تمسخر می‌نگریستند چون آنها را مجرداتی مزخرف می‌دانستند، بعد نوبت فضاهایِ کوژِ موضعی فرا رسید و اکنون هم نوبت آنالیز ناااستانده است. ریاضیدانان هم در پذیرش ایده‌های جدید شائقتر از دیگر آدمیان نیستند و پذیرشِ تمام و کمال احتمال ریاضی تا نیمهٔ دوم قرن تحقق نپذیرفت. علی‌الخصوص بسیاری از آماردانان و احتمال‌دانان قالب‌بندیِ ریاضیِ احتمال به‌واسطهٔ نظریهٔ اندازه را خوش نمی‌داشتند، و برخی هنوز احتمال ریاضی را بیرونِ آنالیز می‌نهند. اقوال ذیل مؤید این باورند:

پلانک: حقیقت علمی جدید این‌گونه غالب نمی‌شود که رقبایش را متقاعد کند و راه راست را به آنان بنماید، بلکه اغلب بدین شیوه غلبه می‌یابد که رقبا سرانجام از میان رفته و صحنه را خالی می‌کنند و نسل جدیدی با آن [شیوهٔ نگرش جدید] بار می‌آید.

پوانکاره: سابق بر این موقعی که یک نفر تابع جدیدی ابداع می‌کرد، برای این منظور بود که هدفی عملی را به پیش برد؛ امروزه روز، اما، توابعی ابداع می‌کنند تا اثباتهای آبائمان را ابطال کنند، و از این ابداعات هیچ چیز دیگری هم عاید نمی‌شود.

اِرمیت: (در نامه‌ای به اِستیلتیس) من از بلای اسفبار توابعی که مشتق ندارند با نگرانی و وحشت به خود می‌پیچم.

نظریهٔ احتمال در ابتدا، و هم پس از آن برای مدتی طولانی، عبارت بود از صورت آرمانی و تحلیل برخی پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات، اما اندک‌اندک در نیمهٔ نخست این قرن احتمال ریاضی بخشی معمولی از ریاضیات شد. ریاضی‌سازیِ احتمال ایده‌های نو می‌طلبید، و به‌ویژه نیازمند رهیافت جدیدی به ایدهٔ پذیرفتنی بودنِ یک تابع بود. با توجه به نقل‌قول‌های فوق شگفتی ندارد که پذیرش این ریاضی‌سازی آهسته صورت گرفت و با مقاومت روبه‌روگردید. درواقع حتی اینک برخی احتمال‌دانان از آن بیم دارند که قالب‌بندیِ ریاضیِ احتمال جاذبهٔ ذاتی‌اش را از آن ستانده باشد، و البته حق با ایشان است، به این تعبیر که آن جاذبه و افسونِ احتمال‌ـریاضیاتِ مبهم و قدیمی که مبتنی بر تعاریف غیرریاضی بود، دو شقه شده: افسونِ احتمال جهانِ واقع و جاذبهٔ دقت ریاضی. ولیکن باید تأکید کرد که بسیاری از اساسیترین نتایج مبحث احتمال ریاضی از سرچشمهٔ غیرریاضیِ احتمال جهانِ واقع جاری می‌شوند که هرگز حتی تعریفی نداشته است که همگان در آن متفق باشند. در حقیقت، ارتباط مابین احتمال جهان واقع و احتمال ریاضی هم بلای جان و هم منبع الهامِ رشد احتمال ریاضی بوده است.

۲. مسألهٔ (غیرریاضی) جهان واقع چیست؟

آنچه معمولاً احتمال (جهان واقع) می‌نامیم برخاسته از زمینه‌های متعدد است. علاوه بر زمینه‌های آشنای بازیهای قمار، بیمه، و فیزیک آماری زمینه‌های ساده‌ای از این قبیل هم هستند: فرض کنید فردی سوار دوچرخه‌اش سرکار می‌رود. اگر طی ده روز متوالی، هر بار که این فرد دوچرخه‌اش را پارک می‌کند والوِ تیوبِ چرخ جلو در نیمهٔ فوقانیِ چرخ باشد، همان قدر مایهٔ شگفتی است که ده پرتاب پی‌درپیِ یک سکه همه به شیر بینجامند. معهذا آشکار است که (در مورد چرخ) اگر مسیر پیموده‌شده خیلی کوتاه باشد، یا (در مورد سکه) اگر سکه از جایی نزدیک به مکانِ فرودش رها شود و سرعتِ گردشِ اولیهٔ آن

کم باشد، از شگفتی کاسته خواهد شد و جنبهٔ احتمالاتیِ قضیه محل تردید خواهد بود. نتیجه اینکه پیش از بیان هرگزارهٔ احتمالاتی باید زمینهٔ مربوطه را نیک بررسید. اگر هم بحث فلسفی موضوعیت داشته باشد، که این خود جای بحث دارد، باید آن‌را با بررسی زمینهٔ فیزیکی تکمیل کرد.

۳. قانون اعداد بزرگ

آنچه در یک رشته آزمایش مستقل تکراری، همچون پرتاب سکه، آدمی را به یکباره خیره می‌سازد چیزی است که به قانون اعداد بزرگ موسوم گشته است. در مورد پرتاب سکه این قانون می‌گوید که به یک معنا اگر تعداد شیرآمدن‌ها در n پرتاب را به n تقسیم کنیم، حاصل به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند هرگاه n افزایش یابد. در اینجا کلمات اساسی عبارت‌اند از «به یک معنا». اگر قانون اعداد بزرگ یک حکم ریاضی است، یعنی اگر مدلی ریاضی برای پرتاب سکه داشته باشیم که قانون اعداد بزرگ در آن به‌عنوان قضیه‌ای ریاضی بیان شده باشد، این قضیه یا برحسب یکی از مفاهیم متنوع حدّ ریاضی درست است و یا نه. از سوی دیگر، اگر بنا باشد قانون اعداد بزرگ در یک زمینهٔ غیرریاضی جهان واقع بیان شود، اصلاً واضح نیست که بتوان مفهوم حد را به نحو معقولی فرمولبندی کرد. آشکارترین معضل آن است که در جهان واقع تنها تعدادی متناهی آزمایش می‌توان در زمانی محدود صورت داد. هرکس که می‌کوشد به متعلمان توضیح دهد که هنگامی‌که سکه‌ای به کرّات پرتاب می‌شود چه رخ می‌دهد، مذبوحانه عباراتی همچون در درازمدت، میل می‌کند، به نظر می‌رسد که نزدیک ... تجمع می‌کنند، و نظیر آنها را به‌کار می‌گیرد بلکه شاید به مفهومی شبح‌وار شکلی ببخشد. ولکن واقع امر از این قرار است که هرکس سکه‌ای را به دفعات پرتاب کند به عینه می‌بیند که بعد از دفعاتی نه چندان بسیار به نظر می‌رسد که تعداد شیرها در n پرتاب تقسیم بر n، همچنان‌که n افزایش می‌یابد به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود. ساده‌ترین راه‌خلاص، که یک آماردان بیزی برجسته برگزیده، این راه‌حل بی‌محتواست: اصلاً در باره اینکه وقتی سکه‌ای پرتاب می‌کنیم چه خواهد شد صحبت ممنوع! یک راه رایجتر که به همان اندازه رضایتبخش می‌باشد آن است که این مطلب که آیا بحث موردنظر در محدودهٔ ریاضیات هست یا نه در ابهام گذاشته شود. چه بسا اینکه این گزاره را قانون نامیده‌اند نشانه‌ای از همین ابهام است. در بارهٔ این قانون حرفهای زیر را زده‌اند (تأکید از نگارنده است):

لاپلاس: (۱۸۱۴) این قضیه، که شعور متعارف بر آن صحه می‌گذارد، با آنالیز به دشواری اثبات می‌شود.

ویل[1]: (۱۹۳۹) آدم دلیلی نمی‌بیند که این گزاره درست باشد؛ ولی از آنجا که اثبات خلاف آن به توسط آزمایش هم غیرممکن است، حداقل می‌شود با آسودگی‌خاطر آن‌را بیان کرد.

باوئر[2]: (ترجمه از زمینهٔ مربوط به تاس به زمینهٔ مربوط به سکه): این یک واقعیت است که به تجربه ثابت شده که خارج‌قسمت... به‌ازای nهای بزرگ انحرافی از $\frac{1}{2}$ نشان می‌دهد که به صفر نزدیک می‌شود.

این بیانات نشانگر افسونِ مانای مباحثات در بارهٔ احتمال جهان واقع‌اند. لیکن از بخت بد، ریاضیدانان بدین‌سو کشش داشته‌اند که در بارهٔ پرسش زیر تأمل نمایند. یا دست‌کم در بارهٔ آن قلمفرسایی کنند.

۴. احتمال چیست؟

نظرهایی را در جهت پاسخگویی به این پرسش و نیز پیرامون نحوهٔ تدریس این موضوع در زیر ملاحظه می‌کنید:

پوانکاره: (۱۹۱۲) ارائهٔ تعریفی رضایتبخش برای احتمال تقریباً نشدنی است.

1. Ville 2. Bauer

مازورکیه‌ویچ: (۱۹۱۵) نظریهٔ احتمال عنصر مستقلی در تعالیم ریاضی نیست؛ مع‌هذا مطلوب است که ریاضیدانان اصول کلی آن‌را بدانند، مفاهیم بنیادی آن به نحو جامعی معین نگردیده‌اند و شامل دشواریهای حل‌نشدهٔ بسیارند.

فون میزس: (۱۹۱۹) درواقع معلوم نیست که وضع فعلی مبحث احتمال از چه قرار است، جز اینکه این مبحث یک رشتهٔ ریاضیاتی نیست. (او در این راستا پیش رفت که آن را به شکل یک رشته ریاضی درآورد، به این شیوه که احتمال ریاضی را بر دنباله‌ای از مشاهدات (Beobachtungen) با خواصی که یک دنبالهٔ خوشتعریف ریاضی فاقد آن است مبتنی نمود. همچنین به شوخی گفته شده که وی احتمال را عددی بین صفر و یک تعریف کرده که در بارهٔ آن هیچ چیز دیگری معلوم نیست.)

پیرسون: (۱۹۳۵) (نقل از محاوره) احتمال آنچنان با آمار گره خورده که هر چند تدریس جداگانهٔ آنها مقدور است، ولی چنین برنامه‌ای، کاری است کارستان.

اوسپنسکی: (۱۹۳۷) او در یک کتاب درسیِ پراستفاده، تعریف زیر را که زمانی در کتابهای درسی متداول بود ارائه می‌کند: اگر، سازگار با شرط S، n موردِ دوبه‌دو مجزا و همشانس داشته باشیم و m تا از آن موارد مساعدِ رویداد A باشند، آنگاه احتمال ریاضی A را $\frac{m}{n}$ تعریف می‌کنیم.

آنچه آمد باید اهمیت تفکیک نظریهٔ احتمال ریاضی از کاربردهای آن در جهان واقع را به‌وضوح نموده باشد. ولیکن به این نکته توجه کنید که هیچ‌کس در کاربردپذیریِ احتمال ریاضی در جهان واقع تشکیک نمی‌کند. قمار، ژنتیک، بیمه، و فیزیک آماری سرجایشان هستند.

ذیلاً تنها به احتمال ریاضی خواهیم پرداخت، البته بجز توضیح زیر در باب پرتاب سکّه. مکانیک نیوتنی یک مدل ریاضی محدود برای پرتاب سکه به‌دست می‌دهد. در پرتاب سکه، جسم جامد تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند. حرکت سکه در مدل نیوتنی توسط قوانین نیوتن تعیین می‌شود، و صحبت در بارهٔ آنچه بر سر سکه می‌آید بدون اِعمال این قوانین خالی از نقص نخواهد بود. تنها این قوانین‌اند، و نه افاضات فلسفی، که قادرند تأثیر کمّی و اهمیت شرایطِ آغازی و پایانیِ حرکت سکه را توضیح داده و اظهارات مربوط به هم‌احتمالیِ آمدن شیر و خط را توجیه کنند. البته این قوانین در بهترین حالت می‌توانند تحلیلِ پرتاب سکه را به ملاحظاتی در باب شرایط آغازی و پایانیِ پرتاب تحویل نمایند، اما این شرایط می‌توانند نشانگر این باشند که «هم‌احتمالی» به چه وابسته است و از این رهگذر تعبیر معقول و مناسبی برای آن فراهم آورند.

۵. احتمال ریاضی پیش از عصر تعریفهای دقیق

پیش از سال ۱۹۰۰ میلادی پیشرفتهای مهم بسیاری در عرصهٔ احتمال ریاضی صورت پذیرفت، اما این موضوع هنوز ریاضیات نبود. هر چند از زمینه‌های احتمالاتیِ غیرریاضی، مسائلی در ترکیبیات، معادلات تفاضلی و معادلات دیفرانسیل سر برمی‌آورد، حداقلِ توجه به بنیان ریاضی این زمینه‌ها و حداکثرِ توجه به مسائل ریاضیِ محض برآمده از آنها معطوف می‌شد. این توجه نابرابر ناگزیر بود، چه نظریهٔ اندازه که برای مدلسازی ریاضی زمینه‌های احتمالاتی جهان واقع مورد نیاز است هنوز ابداع نشده بود.

همیشه این امر روشن بود که در هر احتمال ریاضی کلاسیکی که عرضه گردد، مفهوم جمع‌پذیری احتمال آنچنان‌که در مورد رویدادهای دو به دو ناسازگار جهان واقع برقرار است، مفهومی اساسی خواهد بود. البته ریاضیدانان بسیار پیش از سال ۱۹۰۰ با تابعهای جمعی مجموعه‌ها که از مفاهیم حجم، جِرم و امثال آنها نشأت گرفته بودند آشنایی داشتند. همچنین دریافته بودند که زمینه‌های مربوط به میانگینها به احتمال می‌انجامد. غالباً آشکار بود که برای طرح مسائل چگونه باید از زمینه‌ها سود جست، ولی اینکه چگونه یک زمینهٔ ریاضی کلی را می‌توان فرمولبندی کرد، یعنی چگونه می‌توان یک ساختار ریاضی تعریف نمود که به‌شود زمینه‌های گوناگون را در آن نشاند، واضح نبود.

بعداً معلوم شد شرطی ضعیفتر از جمع‌پذیری که کمتر با آن آشنایی داشتند شرطی اساسی است. در اینجا به زبان غیردقیق معمول سخن خواهیم گفت. اگر x_1، x_2، ... اعدادی باشند که تصادفی به دست آورده‌ایم و اگر A مجموعه‌ای از اعداد باشد، احتمال این‌را که دست‌کم یکی از اعداد آن دنباله در A باشد در نظر بگیرید. به عبارت دیگر احتمال این را که مداری از این حرکت برروی نقاط یک خط، A را قطع کند در نظر بگیرید. با محاسبهٔ معمولی (و چشمپوشی از هر نوع دقت) تابع ϕ از A به $\phi(A)$ تعریف می‌شود که در حالت کلی جمع‌پذیر نیست. درواقع ϕ در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$\phi(A)+\phi(B)-\phi(A\cup B)\geq\phi(A\cap B) \qquad (۱.۵)$$

حال آنکه جمع‌پذیری ϕ، برابری را در (۱.۵) نتیجه می‌دهد. نکته اینجاست که سمت چپ (۱.۵) این احتمال است که دنبالهٔ $x_\bullet$ها هم A و هم B را قطع کند، احتمالی که حداقل برابر است با $\phi(A\cap B)$ و در حالت کلی بیشتر از آن است، یعنی احتمال اینکه دنبالهٔ $A\cap B$ را قطع نماید. نابرابریِ (۱.۵)، موسوم به نابرابریِ زیرجمع‌پذیریِ قوی، برای ظرفیت الکتروستاتیک یک جسم در $\mathbf{R}^3$ هم صادق است، و این به ارتباط نزدیک مابین نظریهٔ پتانسیل و احتمال اشاره دارد، که در نیمهٔ دوم قرن بیستم مفصلاً با کمک نظریهٔ شوکه برای ظرفیت الکتروستاتیک رشد یافت.

۶. پیدایش نظریهٔ اندازه

یادآوری می‌کنم که یک میدان بورل ($=\sigma$ـجبر) از زیرمجموعه‌های یک فضا عبارت است از گردایه‌ای از زیرمجموعه‌ها که تحت عملهای متمم‌گیری و تشکیل اجتماعها و اشتراکهای شمارا بسته است. ردهٔ مجموعه‌های بورلِ یک فضای متریک کوچکترین σـجبری است که همهٔ مجموعه‌های باز آن فضا را در خود دارد. فضای اندازه‌پذیر زوجی است چون $(S,\mathbb{S})$، که S فضایی است و $\mathbb{S}$ عبارت است از σـجبری از زیرمجموعه‌های S. مجموعه‌های درون $\mathbb{S}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر فضا می‌نامیم. در آنچه در زیر می‌آید، اگر S متریک باشد σـجبرِ الحاقی که آن را به یک فضای اندازه‌پذیر تبدیل می‌کند همواره σـجبرِ مجموعه‌های بورل آن خواهد بود. به‌ویژه $(\mathbf{R}^N,\mathbb{R}^N)$ نماد فضای اقلیدسیِ Nبُعدی است که با مجموعه‌های بورلش زوج فضای اندازه‌پذیر را تشکیل می‌دهند. هنگامی‌که $N=1$، این

نماد را نمی‌نویسیم. یک تابع اندازه‌پذیر از فضای اندازه‌پذیر $(S_1, \mathbb{S}_1)$ به فضای اندازه‌پذیر $(S_2, \mathbb{S}_2)$ تابعی است از S_1 به S_2 با این خاصیت که نگارهٔ وارون مجموعه‌ای درون $\mathbb{S}_2$ مجموعه‌ای در $\mathbb{S}_1$ باشد.

نظریهٔ اندازه با رسالهٔ لبگ (۱۹۰۲)، که در آن تعریف حجم در $\mathbf{R}^N$ به مجموعه‌های بورل تعمیم داده شده بود، آغاز گردید. رادون (۱۹۱۳) گام بعدی را برداشت و اندازه‌های عمومیترِ مجموعه‌های بورلِ $\mathbf{R}^N$ را (که روی زیرمجموعه‌های فشرده، متناهی‌اند) معرفی کرد. این اندازه‌ها را معمولاً از طریق تکمیل به رده‌های اندکی بزرگتر از ردهٔ مجموعه‌های بورل تعمیم می‌دهند. سرانجام فرشه (۱۹۱۵)، ۱۳ سال بعد از رسالهٔ دکتریِ لبگ، اعلام کرد که تمام آنچه تعریفها و عملهای نظریهٔ اندازه احتیاج دارند σ-جبری از زیرمجموعه‌های یک فضای مجرد است که روی آن یک اندازه، یعنی یک تابع مجموعه‌ایِ شمارا جمعیِ مثبت، تعریف شده باشد. در هر قدم از این سلسله مراحل، توابعی مجموعه‌ای که لزوماً شمارا جمعی مثبت نیستند ــ اندازه‌های علامت‌دار ــ جزو نظریه شدند. همچنانکه در زیر اشاره شده، معلوم گردید قضیهٔ رادون-نیکودیم (۱۹۳۰)، حاوی شرطهای لازم و کافی برای آنکه یک تابع مجموعه‌ایِ شمارا جمعی از مجموعه‌ها را بتوان به‌صورت انتگرالی روی مجموعه‌ها بیان کرد، آخرین نتیجهٔ اساسی مورد نیاز برای فرمولبندی تعریفهای بنیادی احتمال ریاضی است. این ۲۸ سال پیش از آن بود که نظریهٔ لبگ به اندازهٔ کافی گسترش داده شود که برای بنیان ریاضیِ احتمال بسنده باشد. ولیکن این گسترش به منظور فراهم آوردن بنیانی برای احتمال انجام نپذیرفت. نظریهٔ اندازه به‌عنوان بخشی از آنالیز کلاسیک پا گرفت، و کاربردهای بلافصلی در آنالیز داشت، از قبیل تقریباً همه جا مشتق‌پذیریِ یک تابع یکنوا (نسبت به اندازهٔ لبگ).

ایرادهایی به این موضوع وارد شده است که احتمال ریاضی معمولاً نه تنها جمعی بلکه شماراجمعی باید باشد. این سؤال که آیا احتمال در جهان واقع شماراجمعی است، به فرض اینکه معنایی داشته باشد، به این معناست که آیا مدلهای ریاضی پدیده‌های احتمالاتی جهان واقع لزوماً شامل تابعهای مجموعه‌ای شماراجمعی هستند یا نه. درواقع چه‌بسا زمینه‌های جهان واقع وجود داشته باشند که مدل ریاضی مناسب برای آنها مبتنی بر تابعهای مجموعه‌ای متناهیاً جمعی است و نه شماراجمعی. ولی چنین تابعهای مجموعه‌ای، چه در زمینه‌های ریاضی یا غیرریاضی، کاربردهای بسیار اندکی داشته‌اند، و این‌گونه تابعها بیش از این مورد بحث ما نخواهند بود.

۷. کاربردهای نخستینِ نظریهٔ رسمی اندازه در مبحث احتمال

در این بحث به اصطلاحاتی احتمالاتی، که یادگارهای به‌جا مانده از زمینهٔ تاریخی نظریهٔ احتمال‌اند، نیاز خواهیم داشت. فضای احتمال عبارت است از یک سه‌تایی $(S, \mathbb{S}, \mathrm{P})$، که $(S, \mathbb{S})$ یک فضای اندازه‌پذیر و P اندازه‌ای روی $\mathbb{S}$ است که $\mathrm{P}(S) = 1$. اندازه‌ای با این شرطِ بهنجارسازی را اندازهٔ احتمال می‌خوانیم. متغیر تصادفی عبارت است از تابعی اندازه‌پذیر از یک فضای احتمال $(S, \mathbb{S}, P)$ به یک فضای اندازه‌پذیر $(S', \mathbb{S}')$. فضای S'، یا، اگر دقیقتر بنویسیم، $(S', \mathbb{S}')$، یک فضای حالتِ متغیر تصادفی است. استقلالِ دوبه‌دوی متغیرهای تصادفی به شیوهٔ کلاسیک تعریف می‌گردد. توزیع یک متغیر تصادفی x عبارت است از تابع اندازهٔ P_x روی $\mathbb{S}'$ که این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\mathrm{P}_x(A') = \mathrm{P}\{s \in S : x(s) \in A'\}$$

توزیع توأم تعداد متناهی متغیر تصادفی روی یک فضای احتمال واحد با تبدیل x به یک بردار و تعیین S' و $\mathbb{S}'$ به نحو مقتضی حاصل می‌شود. فرایند تصادفی، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی همچون $\{x(t, \bullet), t \in I\}$ است از یک فضای احتمال $(S, \mathbb{S}, \mathrm{P})$ به یک فضای حالت $(S', \mathbb{S}')$. مجموعهٔ I را مجموعهٔ اندیس فرایند می‌نامیم. پس هر فرایند تصادفی تابعی با دو متغیر، $(t, s) \to x(t, s)$، را از $I \times S$ به یک فضای حالت مشخص می‌کند. تابع $x(t, \bullet)$ از S به S'، tاُمین متغیر تصادفیِ فرایند است؛ تابع $x(\bullet, s)$ از I به S'، sاُمین تابع نمونه‌ای، یا مسیر نمونه‌ای، یا اگر I یک دنباله باشد، دنبالهٔ نمونه‌ای است.

بورل (در سال ۱۹۰۹) خاطرنشان کرد که در نمایش دودوییِ عدد xای بین صفر و یک، به شکل $\ldots x_1x_2\,.\,$۰، که هر رقم x_j یا صفر است یا یک، این رقمها توابعی هستند از x، و اگر بازهٔ $[0, 1]$ را با اندازهٔ لبگ در نظر بگیریم که یک اندازهٔ احتمال بر این بازه است، این تابعها به شکل معجزه‌آسایی متغیرهایی تصادفی می‌شوند که دقیقاً همان توزیعهایی را دارند که در محاسبهٔ احتمالات پرتاب سکه به‌کار می‌روند. یعنی 2^{-n} برابر است با احتمالِ منسوب به این رویداد که، در یک آزمایشِ پرتاب سکه، نخستین n پرتابْ دنبالهٔ معینی از شیر و خط به‌دست بدهد، و 2^{-n} همچنین طول کل (= اندازهٔ لبگ) تعدادی متناهی بازه است که نقاط متعلق به آنها بسطهایی دودویی با دنباله‌ای مشخص از صفرها و یکها در n جایگاه خاص دارند. پس یک صورت ریاضیِ قانون اعداد بزرگ در پرتابِ سکه، عبارت است از نوعی وجود یک حد برای دنبالهٔ میانگینهای تابعیِ $\{(x_1 + \cdots + x_n)/n, n \geq 1\}$. محاسباتِ مبتنی بر احتمالات مقدماتی کلاسیک نشان توانند داد که این دنباله از میانگینها در اندازه به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند، ولی بیانِ ریاضی قویتری از قانون اعداد بزرگ حکمی بود که بورل به‌دست آورد ــ طی یک برهانِ اشتباه و غیرقابل تصحیح ــ که این دنباله از میانگینها به‌ازای تقریباً هر x به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند (اندازهٔ لبگ). یک سال بعد فیبر[1] برهان درستی برای این حکم ارائه کرد و از آن هنگام برهانهای بسیار ساده‌تری هم به‌دست آمده‌اند. [فرشه حرمت بورل را نگه داشت: «برهان بورل بیش از حدْ کوتاه است. در آن چندین استدلالِ میانی حذف شده است و نیز احکامی بدون برهان فرض شده‌اند.»] این قضیه قدم مهمی بود، نمونه‌ای از نوع جدیدی از قضایای همگرایی در نظریهٔ احتمال. توجه کنید که (خوشبختانه) ریاضیدانان محض به تعبیر این قضیه در دنیای واقعی آدمهای واقعیِ در حال پرتابِ سکه‌های واقعی نیازی ندارند. برخی از قولهای نقل شده نشانگرِ این هستند که نه تنها نیازی ندارند بلکه اصلاً نباید به چنین تعبیری دست یازند.

دانیل (۱۹۱۸) رهیافتی ژرف به نظریهٔ اندازه را به‌کار گرفت که در آن انتگرال پیش از اندازه تعریف می‌شود، و رهیافتی (نه چندان سرراست) به دنباله‌های نامتناهیِ متغیرهای تصادفی از طریق اندازه‌هایِ تعریف شده در یک فضای اقلیدسیِ بینهایت بُعدی به‌دست آورد.

---

1. Faber

فرایندِ تصادفیِ حرکتِ براونی در $\mathbf{R}^۳$ مدلِ ریاضیِ حرکتِ براونی است، یعنی حرکت ذره‌ای میکروسکوپی در یک سیّال در حالی‌که مولکولهای آن سیّال به آن ذره اصابت می‌کنند. فرض می‌کنیم حرکت از مبدأ یک دستگاه مختصات دکارتی در $\mathbf{R}^۳$ آغاز می‌شود تا فرایند بهنجار شود، و یک حرکت براونی (بهنجارشده) در $\mathbf{R}$ عبارت است از فرایندِ تابعی مختصاتی از یک فرایند بهنجارشده در $\mathbf{R}^۳$، که از صفر آغاز می‌شود. فرایندِ حرکتِ براونی (بهنجارشده) در $\mathbf{R}^N$ فرایندی است که توسط N فرایند حرکت براونیِ دوبه‌دو مستقل در $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود. معلوم بود که توزیعهای توأم متغیرهای تصادفیِ یک فرایند حرکت تصادفی چه باید باشند، و فرض می‌شد که در یک الگوی ریاضیِ مناسب، ردهٔ مسیرهای پیوسته دارای احتمالِ ۱ باید باشد. پیش از آغاز قرن بیستم باشه‌لیه[1] حتی توزیعهای مهم متعددی استخراج کرده بود که همگی به فرایند حرکت براونی در $\mathbf{R}$ مربوط بودند، ازجمله توزیع مربوط به تغییرِ بیشینه در طول یک بازهٔ زمانی. بدین منظور وی توزیعهای متناظر با یک قدم‌زدن تصادفیِ گسسته را پیدا می‌کرد و سپس حد را هنگامی‌که طول قدمها به سمتِ صفر میل می‌کرد به‌دست می‌آورد. دقیقتر بگوییم، آنچه باشه‌لیه استخراج نمود توزیعهایی بودند که برای فرایند حرکت براونی کارایی داشتند، به فرض آنکه اصلاً چیزی تحت عنوان فرایند حرکت براونی وجود داشته باشد، و به فرض اینکه بشود آن‌را با آن قدم زدن‌های تصادفی تقریب زد. توجه کنید که شکی در وجود حرکت براونی نیست؛ حرکت براونی را می‌شود زیر میکروسکوپ نظاره کرد. ولی هنوز برهانی برای وجود یک فرایند تصادفی، یک ساختِ ریاضی، با خواص مطلوب در دست نبود. وینر (۱۹۲۳) فرایند مطلوب حرکت براونی را که امروزه گاه فرایند وینر نامیده می‌شود ساخت. بدین منظورْ وی از رهیافتِ دانیل به نظریهٔ اندازه استفاده کرد تا اندازه‌ای با خواص ذیل بر فضایِ S از توابع پیوسته به‌دست آورد: اگر $x(t,\bullet)$ متغیری تصادفی باشد که با مقدارِ یک تابع در S در زمان t تعریف شده باشد، فرایند تصادفی این متغیرهای تصادفی فرایندی تصادفی است با اعضای S به‌عنوان توابع نمونه‌ای، و با توزیعهای توأمی که برای فرایند حرکت براونی داشتیم به‌عنوان توزیعهای توأم متغیر تصادفی.

نتایجی که باشه‌لیه به‌دست آورده بود سالهای سال مغفول ماندند، و درواقع چندین بار از نو کشف شدند. کارِ وینر، همانند کار بُنیادی او در نظریهٔ پتانسیل، تأثیر مستقیم چندانی بر جای نگذاشت زیرا در مجله‌ای چاپ شد که انتشار گسترده‌ای نداشت. این یکی از جلوه‌های نبوغ او بود که پژوهش خود در باب حرکت براونی را هم در آن زمان و هم بعداً بدون اطلاع از آنچه اغلب می‌دانستند و برخی از تکنیکهای ریاضی مقدماتی و مفید نظریهٔ احتمال، به پیش بُرد.

اشتاینهاوس (۱۹۳۰) نشان داد که استدلالات کلاسیک برای استخراجِ قضیه‌های متعارف احتمال را می‌توان با پذیرفتن اندازهٔ لبگ برروی بازه‌ای بر محور حقیقی به طولِ ۱، به‌عنوان اندازهٔ احتمال پایه، و تعبیر متغیرهای تصادفی به‌عنوان توابع اندازه‌پذیرِ لبگ بر آن بازه و تعبیر امید ریاضی متغیرهای تصادفی به‌عنوان انتگرال آنها، در یک قالب دقیق جای داد. هیچ برهان تازه‌ای لازم نبود؛ آنچه لازم بود تنها ترجمهٔ مناسبی از واژگان کلاسیک به قالبِ تازهٔ او بود. اگر همهٔ آنچه ریاضی‌سازیِ احتمالات توسط نظریه اندازه می‌توانست به ارمغان آورد همین می‌بود، دیدگاه تحقیرآمیز غیرریاضیدانان نسبت به ریاضیات دقیق موجه می‌بود.

1. Bachelier

۸. تکنگاشت کولموگوروف به تاریخ ۱۹۳۳

کولموگوروف (در ۱۹۳۳) بنیان ریاضی ذیل را برای نظریهٔ احتمال پدید آورد.

(الف) قالب احتمال ریاضی عبارت است از یک فضای احتمال $(S,\mathbb{S},\mathrm{P})$. مجموعه‌های عضوِ $\mathbb{S}$ متناظر ریاضیِ رویدادهای جهان واقع‌اند؛ نقاطِ S متناظر رویدادهای مقدماتی، یعنی تک‌مشاهده‌های (ممکن) مربوط به جهانِ واقع، هستند.

(ب) متغیرهای تصادفی روی $(S,\mathbb{S},\mathrm{P})$، متناظر توابعِ مشاهدات جهان واقع‌اند. فرض کنید $\{x(t,\bullet),t\in I\}$ فرایندی تصادفی بر یک فضای احتمال $(S,\mathbb{S},\mathrm{P})$ با فضایِ حالتِ S' است. مجموعه‌ای از n متغیر تصادفی فرایند توزیع احتمالی روی S'^n دارد. این چنین توزیعهای متناهیْ بُعدی دوبه‌دو سازگار هستند بدین معنی که اگر $۱\le m<n$، آنگاه توزیع توأم $x(t_۱,\bullet)$، $\cdots$، $x(t_m,\bullet)$ روی S'^m، توزیع mبُعدیِ القاءشده توسط توزیعِ nبعدیِ $x(t_۱,\bullet)$، $\cdots$، $x(t_n,\bullet)$ روی S'^n است.

(پ) از سوی دیگر، کولموگوروف ثابت کرد که به‌ازای هر مجموعهٔ اندیس مفروضِ I، و یک فضای اندازه‌پذیر $(S',\mathbb{S}')$ با شرایط مناسب (مثلاً فضای اندازه‌پذیر می‌تواند یک فضای متریِ جدایی‌پذیر و کامل با σـجبرِ مجموعه‌های بورلِ آن باشد) و مجموعه‌ای از توزیعهای دوبه‌دو سازگار روی S'^n (که n عدد صحیح مثبتی است) اندیسگذاری‌شده با زیرمجموعه‌های متناهیِ I، یک اندازهٔ احتمال و یک فرایند تصادفیِ $\{x(t,\bullet);t\in I\}$ وجود دارد که بر آن فضای احتمال تعریف شده است، که فضای حالت آن S' است با توزیعهای متغیر تصادفی توأمِ از پیش داده شده. برای اثبات این حکمْ او یک اندازهٔ احتمال رویِ یک σـجبر از زیرمجموعه‌های فضای حاصلضرب S'^I، یعنی فضای تمام توابع از I به S'، ساخت و متغیرهای تصادفیِ لازم را به شکل توابع مختصاتیِ S'^I به‌دست آورد.

(ث) امید ریاضی یک متغیر تصادفیِ انتگرال‌پذیر و با مقادیر عددی، عبارت است از انتگرالِ آن نسبت به اندازهٔ احتمالِ مفروض.

(ج) تعریف کلاسیک احتمالِ شرطیِ یک رویداد (= مجموعهٔ اندازه‌پذیر) A، به فرض یک رویداد B با احتمالِ اکیداً مثبت، عبارت است از $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$. بدین‌شیوه، برای Bی مشخص، احتمالات جدیدی به‌دست می‌آیند، و امیدهای ریاضیِ متغیرهای تصادفی برای Bی مفروض برحسب این احتمالاتِ شرطیِ جدید محاسبه می‌گردند. عامتر از آن، به فرض در دست داشتن گردایهٔ دلخواهی از متغیرهای تصادفی، احتمالات شرطی و امیدهای ریاضی نسبت به مقادیر داده شدهٔ آن متغیرهای تصادفی مورد نیازند که توابعی از مقادیرِ منسوب به متغیرهای تصادفیِ شرطی‌کننده هستند. اگر $(S,\mathbb{S},\mathrm{P})$ یک فضای احتمال باشد، و اگر گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی داده شده باشد، $\mathbb{F}$ را کوچکترین زیرσـجبر $\mathbb{S}$ بگیرید که همه متغیرهای تصادفی مفروض نسبت به آن اندازه‌پذیر هستند. این σـجبر را σـجبرِ تولیدشده توسط شرایط حاکم بر متغیرهای تصادفی مفروض می‌نامند. به یک تابع اندازه‌پذیر حقیقیْ‌مقدار و تعریف‌شده روی گردایهٔ مفروضی از

متغیرهای تصادفی می‌توان به‌عنوان تابعی اندازه‌پذیر از $(S, \mathbb{F})$ به $\mathbf{R}$ نگریست. امید ریاضی شرطی کولموگوروف برای یک متغیر تصادفی x بر $(S, \mathbb{S}, \mathrm{P})$ که انتگرال‌پذیر و حقیقی‌مقدار باشد، نسبت به σـجبر $\mathbb{C}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، عبارت است از متغیری تصادفی که نسبت به $\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر است و همان انتگرالی را دارد که x روی هر یک از مجموعه‌های درون $\mathbb{C}$ دارد. وجود چنین متغیری تصادفی و یکتایی آن با تقریب مجموعه‌های Pـپوچ را قضیهٔ رادون‌ـنیکودیم تضمین می‌کند. امید ریاضی شرطیِ x نسبت به گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی را چنین تعریف می‌کنند: امید ریاضی x نسبت به σـجبرِ تولیدشده با شرایطیِ روی متغیرهای تصادفی. احتمال شرطی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر A طبق تعریف عبارت است از امید ریاضی شرطی یک متغیر تصادفی که روی A برابر ۱ و جاهای دیگر صفرْ است.

مقالهٔ توصیفی کولموگورف به تاریخ ۱۹۳۳ تصویر مأیوس‌کننده‌ای از پیشرفت ریاضی ترسیم می‌کند. وی در نخستین صفحاتِ این مقاله صراحتاً می‌گوید که متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار همان توابع اندازه‌پذیرند و امیدهایْ ریاضیْ انتگرالهای آنها. معهذا، به نظر می‌رسد که وی حتی در سال ۱۹۳۳ هم می‌پنداشته که ریاضیدانان با نظریهٔ اندازهٔ آشنا نیستند. در حقیقت، وقتی‌که در خلالِ تکنگاشتش به تعریفِ متغیر تصادفیِ حقیقیْ‌مقدار می‌رسد، راحت به صفحاتِ اول تکنگاشت ارجاع نمی‌دهد و نمی‌گوید که متغیر تصادفی همان تابع اندازه‌پذیر است، بلکه اندازه‌پذیریِ یک تابع حقیقی‌مقدار را عملاً تعریف می‌کند و نیز وقتی‌که می‌خواهد امید ریاضی یک متغیر تصادفی را تعریف کند صاف و ساده نمی‌گوید که این مقدار برابر است با انتگرال متغیر تصادفی نسبت به اندازهٔ احتمال مفروض، بلکه انتگرال را عملاً تعریف می‌کند. بعداً باز در تکنگاشت هنگامی‌که به قضیهٔ لبگ می‌رسد که گرفتن حد از دنباله‌های تابعیِ همگرا را تحت علامت انتگرال مجاز می‌دارد، به لبگ ارجاع نمی‌دهد بلکه برهان مفصلّی برای آنچه نیاز دارد می‌آورد. نویسندهٔ این سطور به خاطر می‌آورد که در هنگام تحصیل در سال ۱۹۳۲، صحبتهایی حاکی از عدم تأیید عمومیتِ قضیهٔ مورد بحث در سمیناری که ساکس[1] سخنران آن بود از طرف اساتید ابراز می‌شد، همان قضیه‌ای که اکنون قضیهٔ ویتالی‌ـهان‌ـساکس خوانده می‌شود و از آن زمان به ابزار مهمی در نظریهٔ احتمال بدل شده است، که این خاطره مؤید احتیاط کولموگوروف در به کارگیری نظریهٔ اندازه است. [نویسنده همچنان به یاد می‌آورد که منظور کولموگوروف از اندازه روی فضای تابعی را تا زمانی دراز پس از آنکه تکنگاشت وی را خوانده بود، درنمی‌یافته است.]

مدتی طول کشید تا بنیانِ پیشنهادیِ کولموگوروف را احتمال‌دانان پذیرفتند. این ایده که یک متغیر تصادفی (ریاضی) چیزی جز یک تابع نیست، که فاقد هر فحوای رمانتیک است، برای برخی احتمال‌دانان تحقیرآمیز بود. یک آماردان برجسته در سال ۱۹۳۵ پرسید که آیا دو متغیر تصادفیِ حقیقی‌مقدارِ متعامد با میانگینها (انتگرالها)ی صفر لزوماً مستقل از یکدیگرند، [می‌دانیم] با این فرض اضافه که دارای یک توزیع گاوسیِ دومتغیره باشند، چنین هستند. مثال توابع سینوس و کسینوس بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ با اندازهٔ احتمال برابر با اندازه لبگ تقسیم بر 2π برای ایشان غیرمترقبه بود. این دو تابع، که متعامدند و میانگینهای صفر دارند ولی مستقل نیستند، از قماش متغیرهای تصادفیی که به آنها عادت داشتند نبودند. شاید بعضی آنالیزدانان از اینکه در یابند که در بحث سریهای فوریه می‌شود به بحث در احتمال و امید ریاضی متهمشان کرد، خشنود شوند، و برخی از ایشان هم ممکن است احساس تحقیرشدگی کنند.

۹. بسطِ قهقهرایی بنیانِ کولموگوروف

بنیانی که کولموگوروف برای احتمال ریاضی ارائه کرده می‌تواند بسط یابد و به نظر بعضی از احتمال‌دانان لازم است که به بسط یابد ــ احتمال‌دانانی که می‌خواهند اطمینان مشاهده‌گران به رخ دادن برخی رویدادها را مبنا قرار دهند بدون آنکه این اطمینان لزوماً وجه ریاضی عددی داشته باشد و به شیوهٔ اصل موضوعی به ارزیابی عددی این اطمینان و نهایتاً به جمع‌پذیری برسند. چنین تحلیلی در بحث راجع به مناسب بودن احتمال ریاضی به‌عنوان مدلی برای پدیده‌های جهان واقع روشنگر تواند بود، اما هر رهیافتی به موضوع که به توجیهی از محاسبات کلاسیک منتهی شده و از نظر ریاضی قابل استفاده باشد به بنیان پیشنهادی کولموگوروف ختم می‌گردد، حال هر طور که به بیان درآید، چه بنیان نظریهٔ اندازه‌ایِ احتمال کاری صورت نمی‌دهد جز آنکه یک چارچوب ریاضیِ دقیقِ صوری برای محاسبات کلاسیک و صورتهای ظریفترکنونی آن به دست می‌دهد. این چارچوب سبب شده است که احتمال ریاضی را بشود در بسیاری حوزه‌های دیگر ریاضی، مثلاً نظریهٔ پتانسیل و معادلات دیفرانسیل جزئی، به‌کار بُرد. هر چند چنین کاربردهایی درگذشته و پیش از پذیرش نظریهٔ اندازه به‌عنوان بنیانی برای احتمال معمول بود، ولی چارچوب احتمالاتی تنها نوعی حضور ریاضیات را تداعی می‌کرد نه اینکه خود جزء لاینفکی از ریاضیات باشد. معنی جوابها به‌عنوان احتمالات و امیدهای ریاضی را نمی‌شد فرمولبندی کرد و مورد بهره‌برداری قرار داد.

۱۰. مجموعهٔ ناشمارای اندیس

اگر مجموعهٔ اندیس I مربوط به فرایند تصادفی $\{x(t,\bullet), t\in I\}$ بازه‌ای در خط حقیقی باشد، و اگر فضای حالتِ متغیرهای تصادفی $\mathbf{R}$ باشد، ردهٔ توابع نمونه‌ای پیوسته ممکن است اندازه‌پذیر نباشد. این مشکل، به‌عنوان مثال، در فرایندهایی پیش می‌آید که به توسط ساختِ کولموگوروفیِ یک اندازه روی یک فضای تابعی استخراج می‌شوند، حال توزیع توأم متغیرهای تصادفی آن فرایند هر چه می‌خواهد باشد. برای درک این مشکل، توجه کنید که اگر مجموعهٔ اندیس I مربوط به یک فرایند تصادفی با فضای حالت $\mathbf{R}$، بازه‌ای باشد و J زیرمجموعه‌ای از I، آنگاه تابع $s \to \sup_{t\in J} x(t,s)$ اندازه‌پذیر است به شرط آنکه J شمارا باشد، ولی نه لزوماً وقتی‌که J ناشمارا است. اگر بنا باشد کرانداری و پیوستگی توابع نمونه‌ای مورد بحث واقع شوند، باید در رابطه‌های احتمالاتیِ متغیرهای تصادفیِ یک فرایند تصادفی تغییر لازم داده شود تا چنین کوچکترین کرانهای بالایی، توابع اندازه‌پذیر ازکار در بیایند. دوب رهیافتِ شکسته‌بسته‌ای در سال ۱۹۳۷ ارائه کرد، ولی رهیافتِ کارامدتری تا پس از ۱۹۵۰ طرح نشد.

1. Saks

۱۱. اکراه احتمال‌دانان از پذیرش نظریهٔ اندازه

احتمال‌دانان مقاومت زیادی در مقابل پذیرش و به‌کارگیری نظریهٔ اندازه نشان دادند، هم در زمان کولموگوروف و هم پس از او. قول زیر نشانی است از اکراه برخی از ریاضیدانان نسبت به جداسازی ریاضیات از منشأ الهام آن.

کَتس[1] (۱۹۵۹): اینکه چقدر وسواس داشته باشیم از نظریهٔ اندازه در نظریهٔ احتمال استفاده کنیم بستگی به سلیقه و دیدگاه دارد، من شخصاً طرفدار حداقلِ استفاده هستم چرا که اعتقاد راسخ دارم که نظریهٔ احتمال بیش از آنکه به نظریهٔ اندازه به معنای دقیق آن مربوط باشد با آنالیز، فیزیک و آمار ارتباط تنگاتنگ دارد.

۱۲. روابط جدیدی بین توابع که با ریاضی‌سازیِ احتمال ممکن شده است

نظریهٔ احتمال روابط جدیدی بین توابع به‌دست داد. برای نمونه دنبالهٔ x_1، x_2، ... از متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار انتگرال‌پذیر روی یک فضای احتمال $(S, \mathbb{S}, P)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که امید ریاضی شرطی x_n با فرض x_1، ...، x_{n-1} (که $n > 1$) تقریباً همه جا به صفر میل می‌کند، یعنی انتگرال x_n روی هر مجموعهٔ مشخص‌شده با شرایطِ روی متغیرهای تصادفیِ ماقبل، به صفر می‌گراید. اگر مربع این متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر باشد، این شرط معادل با شرطی است بس قویتر از تعامدِ دوبه‌دو، چه x_n بر هر تابعِ مربعاً انتگرال‌پذیر از x_1، ...، x_{n-1} عمود خواهد بود. به‌نظر می‌رسد برنستاین (۱۹۲۷) نخستین کسی بوده باشد که نظام‌مندانه به چنین دنباله‌هایی پرداخته است. این شرط روی دنباله‌ای از توابع بدین معنی است که دنبالهٔ مجموعهای جزئی یک دنبالهٔ مفروض، به مفهومی معقول، متناظر است با یک بازیِ عادلانه! درواقع مجموعهای جزئی y_1، y_2، ... با این خاصیت مشخص می‌گردند که امید ریاضی y_n نسبت به y_1، ...، y_{n-1} تقریباً همه جا روی فضای احتمال برابر است با y_{n-1}. فرایندهای بهره‌مند از این خاصیت، موسوم به مارتینگل را نخستین بار ویل[2] (۱۹۳۹) به‌طور صریح به‌کارگرفت. این فرایندها کاربُردهای فراوان داشته‌اند، ازجمله در [حل] معادلات دیفرانسیل جزئی، مشتقگیری و نظریهٔ پتانسیل. ردهٔ مهم دیگری از دنباله‌های متغیرهای تصادفیِ ردهٔ دنباله‌هایِ دارای خاصیت مارکوف است. این دنباله‌ها این‌گونه مشخص می‌شوند که وقتی $n \geq 1$، احتمالهای شرطی برای x_n نسبت به x_1، ...، x_{n-1} تقریباً همه جا برابر با احتمالهای شرطی x_n نسبت به x_{n-1} هستند. به‌عبارت نه چندان دقیق، تأثیر حال، با علم به گذشته، تنها وابسته به نزدیکترین گذشته است. خاصیت مارکوف که در حالت خیلی خاصش در سال ۱۹۰۶ توسط مارکوف ارائه شد (و بعدها دیگران به افتخار او آن‌را به اسم او نامگذاری کردند) بسیار پرثمر از آب درآمده است. برای مثال در نیمهٔ دوم قرن به نظریهٔ پتانسیل احتمالاتی منجر شده است و از این رهگذر نظریهٔ پتانسیل کلاسیک را تعمیم داده و شامل آن شده است.

1. Kaç 2. Ville

۱۳. جایگاه نظریهٔ احتمال در نظریهٔ اندازه، و فراتر از آن در آنالیز چیست؟

برخی ریاضیدانان برآن‌اندکه هرگاه با خواص تحلیلی احتمال وامیدهای ریاضی سروکار داشته باشیم، موضوعْ بخشی از آنالیز است، ولی اگر با دنباله‌های نمونه‌ای و توابع نمونه‌ای سروکار داشته باشیم، موضوعْ عبارت است از احتمال، نه آنالیز. این مؤلفان در موقعیت جالب‌توجهی هستند از این‌روکه در نظرکردن به تابع دومتغیرهٔ $(t, s) \to x(t, s)$ ــ مثلاً در فرایندهای تصادفی ــ اگر خانوادهٔ توابع $x(t, \bullet)$ هنگامی‌که t تغییر می‌کند مورد مطالعه باشد آن‌را آنالیز می‌خوانند، ولی اگر خانوادهٔ توابع $x(\bullet, s)$ هنگامی‌که s تغییر می‌کند مورد بررسی باشد آن‌را احتمال می‌نامند و قطعاً آنالیز به حساب نمی‌آورند. دقیقتر بگوییم، ایشان بحث پیرامون توزیعها و پرسشهای مربوطه را آنالیز می‌دانند، بحثهایِ به زبان توابع نمونه‌ای را نه. این دیدگاه در قول ذیل بیان شده است:

پروتر: ایتو[1] در سال ۱۹۴۴، با ارائهٔ انتگرالش که در آن فرایندهای تصادفی انتگران بودند، توانست پخش چندبُعدی را با تکنیکهای احتمالاتیِ محض مورد بررسی قرار دهد، که نسبت به روشهای آنالیزیِ قبلی بهتر است.

نکتهٔ ذیل در باب همگراییِ مجموع توابع متعامد دشواریِ تفکیکِ احتمال (ریاضی) از باقیِ آنالیز را باز می‌نماید. فضای احتمال یک فضای اندازه است، ولی این بحث با تغییراتِ ساده‌ای برای هر فضایِ با اندازهٔ متناهی معتبر است.

اگر $x\bullet$ دنباله‌ای از توابع متعامد بر یک فضای اندازهٔ احتمال باشد و x_n^2 دارای انتگرال σ_n^2 باشد، آنگاه، $\sum x_n$ در میانگین همگراست (ریس-فیشر) هرگاه

$$\sum \sigma_n^2 < +\infty \tag{۱.۱۳}$$

سریِ متعامد تقریباً همه جا همگراست اگر یا شرطِ (۱.۱۳) به شرط قویترِ

$$\sum \sigma_n^2 \log^2 n < +\infty \tag{۲.۱۳}$$

تغییر یابد (منشوف[2]-رادِماخر[3]) و یا شرطِ (۱.۱۳) محفوظ بماند ولی شرط تعامد به شرط قویترِ مذکور در بخشِ ۱۰ تغییر یابد (لِوی، ۱۹۳۷).

دیگر بر عهدهٔ خواننده است که داوری کند کدامیک از این نتایج نظریهٔ اندازه‌ای هستند وکدام‌یک احتمالاتی، و آیا اصلاً بیرون راندن احتمال ریاضی از قلمرو آنالیز فایده‌ای دارد، و اگر دارد، آیا نظریهٔ اندازه را هم نباید بیرون راند؟

******

- Joseph L. Doob, "The development of rigor in mathematical probability, (1900-1950)" in *The Development of Mathematics (1900-1950)*, edited by Jean-Paul Pier, Birkhauser (1994).

* جوزف دوب، دانشگاه ایلینوی، آمریکا

1. Itô 2. Menšov 3. Rademacher