سنّت پربار حل معادله•

جری کزدان*
ترجمهٔ مهدی مجیدی ذوالبنین

معادله حل‌کردن یکی از موضوعهای اصلی در ریاضیات است. محور بحث من در این زمینه این است که ریاضیات کلاسیک و جدید چنان درهم تنیده شده‌اند که ریاضیات معاصر بصیرتی واقعی و روشهایی برای فهم مسائل سنتی به‌دست می‌دهد.

در بخش دوم که طولانی هم هست بعضی روشها را که به حل معادلات کمک می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهم. در آنجا مبحث تقارنْ گسترده است زیرا این مقولهٔ اساسی در درسهای ریاضی آن طور که باید مورد توجه قرار نمی‌گیرد. در بخش سوم دو روش مختلف برای اثبات اینکه معادلات دارای جواب هستند ارائه می‌شود. بیشتر قطعات مقاله مستقل هستند؛ بنابراین می‌توانید به‌طور مستقیم به سراغ مثالها که جذابتر هستند بروید.

یکی از اجزای معادله حل‌کردن که من تأکید کافی بر آن نکرده‌ام نقش اساسی نابرابریهاست. آنها همه جا در کمین هستند: الگوریتم اقلیدسی و کاربرد قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور دو نمونه‌ای هستند که این نکته در مورد آنها کمتر واضح است. در صورت پرداختن به نابرابریها آن‌طور که شایستهٔ آنهاست، ماهیت این مقاله که از نسخهٔ طولانیتر [۱۰] گرفته شده است تغییر می‌کرد.

۱. مقدمه

هر چند ریاضیدانان قبل از سال ۱۵۳۵ به فرمولی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم $p(x) := x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ دست یافته بودند ولی حتی بدون این فرمول نیز می‌توان به‌راحتی نشان داد که اگر x_1، x_2، x_3 ریشه‌های معادله باشند، با بسط دادن $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ مثلاً به‌دست می‌آوریم

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b \qquad (۱)$$

مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر ضرایب یک چندجمله‌ای درجهٔ سه گویا باشند و دو تا از ریشه‌ها نیز گویا باشند، آنگاه ریشهٔ سوم نیز چنین است. این نتیجه سرنخی به‌دست ما می‌دهد: حتی بدون در اختیار داشتن فرمولی برای جواب یک معادله، ممکن است بتوان اطلاعات مفیدی دربارهٔ آن به‌دست آورد.

اندکی پس از حل معادلهٔ درجهٔ سه، معادلهٔ درجهٔ چهار در حالت کلی حل شد. مسألهٔ مبارزطلب بعدی معادلهٔ درجهٔ پنج بود. اگر ضرایب

$$p(x) := x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \qquad (۲)$$

حقیقی باشند، برای هر x بزرگ مثبت داریم $p(x) > 0$، در حالی که برای هر x بزرگ منفی داریم $p(x) < 0$. بنابراین اگر نمودار چندجمله‌ای $y = p(x)$ را رسم کنید، از نظر هندسی بدیهی است که این نمودار محور xها را دست‌کم یک بار قطع می‌کند. و در نتیجه دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی x_1 برای $p(x) = 0$ وجود دارد. حال چندجمله‌ای $q(x) := p(x)/(x - x_1)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ چهار است که برای چهار ریشهٔ آن فرمولهایی در اختیار داریم. بدین ترتیب معلوم شد که هر چندجمله‌ای درجهٔ پنج دارای پنج ریشه است (که بعضی از آنها ممکن است تکراری یا مختلط باشند). اما آبل نشان داد علی‌رغم اطلاع از وجود این پنج ریشه، برای آنها فرمولی کلی تنها بر اساس اعمال معمولی حساب و ریشه‌گرفتن نمی‌تواند وجود داشته باشد. در استدلال آبل فرمولهایی نظیر (۱) اهمیت اساسی داشتند.

ریاضیدانان خود را با معضل جالب توجهی روبه‌رو می‌دیدند. از یک طرف ثابت کرده بودند که این ریشه‌ها وجود دارند اما از طرف دیگر نشان داده بودند که برای آنها هرگز نمی‌توان یک فرمول جبری پیدا کرد. آن اثبات وجودی امروزه *قضیهٔ اساسی جبر* نامیده می‌شود، و فهم موانعی که در برابر یافتن فرمول برای ریشه‌ها وجود دارد، موضوع *نظریهٔ گالوا*ست. هر دوی اینها از ستونهای اصلی گسترش آتی ریاضیات بودند. مقدر چنین بود که فرمولهای جواب معادلات درجهٔ سه و چهار صرف‌نظر از نقش اساسی تاریخ‌شان، امروزه در موزه جای گیرند و به دلیل پیچیدگی زیاد به‌ندرت به‌کار روند.

اثبات اینکه چندجمله‌ای درجهٔ پنج (۲) همواره دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد یکی از نخستین اثباتهای وجودی «محض» بود. هر چند این

اثبات بدیهی پنداشته می‌شد، در قرن نوزدهم ریاضیدانان به آن علاقه‌مند شدند، زیرا در آن فرض شده بود که محور اعداد حقیقی هیچ «سوراخی» ندارد. چه می‌شد اگر در محور اعداد، درست در جایی که آن ریشه می‌بایست قرار می‌گرفت سوراخی وجود می‌داشت؟ چگونه می‌توان این ویژگی «بی‌سوراخی» را با دقت تعریف کرد؟ این همان ویژگی *تمام بودن (کمال)* است. تمام بودن در مسائلی که مستلزم فرایندهای حدی هستند اهمیت اساسی دارد.

۲. گامهایی به سوی حل معادله

نخستین مسأله در حل معادله مشخص نمودن این نکته است که آیا اصلاً جوابی وجود دارد یا نه. دانسته‌های ما دربارهٔ معادلات چندجمله‌ای حاکی است که این مسأله را باید از مسألهٔ مهم پیدا کردنِ صریح جوابها جدا کرد. به علاوه در بسیاری از حالتها که می‌دانیم جوابی وجود دارد ولی «فرمولی» در دست نیست، ویژگیهای کیفی جواب مورد نیازند.

۱.۲ فرمولی برای جواب پیدا کنید. معمولاً هیچ نوع فرمولی وجود ندارد. فهم جوابی که به‌صورت سری توانی یا فوریه داده می‌شود مشکل است. جوابهای عددی، مخلوطی درهم و برهم از اعداد هستند که برای استخراج هر نوع اطلاعات مفید باید آنها را رمزگشایی کرد. گفتهٔ همینگ که «هدف محاسبه بصیرت است، نه اعداد» در مورد بیشتر محاسبات علمی صادق است.

بعضی مسائلِ مقدماتی هستند که فرمولی برای جواب آنها وجود ندارد، اما الگوریتمی برای پیدا کردن جواب موجود است. حتی در این حالتها گاهی ممکن است اثباتی غیرساختنی برای وجود جواب را ترجیح بدهید.

یک نمونه از این موارد، حل $ax \equiv b$ (پیمانهٔ m) است که در آن a و m نسبت به‌هم اول‌اند. چون $x \equiv a^{-1}b$ (پیمانهٔ m) جواب است، باید a^{-1} (پیمانهٔ m) را پیدا کنیم. یک راه این است که توجه کنیم اعداد a، $2a$، ...، $(m-1)a$ همگی به پیمانهٔ m از یکدیگر مجزا هستند؛ پس یکی از آنها باید به پیمانهٔ m برابر ۱ باشد. این اثباتِ وجود a^{-1}، هیچ راهی برای یافتن a^{-1}، مگر از طریق آزمون و خطا، نشان نمی‌دهد. این یک اثبات وجودیِ غیرساختنی برای جواب $ax \equiv 1$ (پیمانهٔ m) است. یکی از اثباتهای ساختنی به مسألهٔ معادل یعنی حل $ax - my = 1$ برای عددهای صحیح x و y می‌پردازد. الگوریتم اقلیدسی این مسأله را به‌طور صریح حل می‌کند (رک. [۴، بخش ۱.۸]). چون در kاُمین گام این الگوریتم می‌توان باقیمانده را طوری انتخاب کرد که قدرمطلق آن حداکثر برابر نصف مقدار باقیماندهٔ قبلی باشد، باقیماندهٔ جدید می‌تواند حداکثر برابر $a/2^k$ باشد؛ در نتیجه حداکثر $\log a/\log 2$ گام مورد نیاز است. (این از معدود مواردی است که موضوع مهم کارایی یک الگوریتم را در نظر می‌گیریم).

۲.۲ مسألهٔ معادلی پیدا کنید که ساده‌تر باشد. شاید تعویض متغیر آشناترین فن برای ساده کردن یک مسأله باشد. یک مثال کوچک از این موضوع، چندجمله‌ای درجهٔ سوم $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است. به این چندجمله‌ای به‌عنوان یک سری تیلر نگاه کنید. چون مشتق دوم در نقطه‌ای که $6ax + 2b = 0$، برابر صفر است، تعویض متغیر $z = 6ax + 2b$ (یا انتقال $z = x + \frac{b}{3a}$) چندجمله‌ای ساده‌تر $q(z) = \alpha z^3 + \gamma z + \delta$ را که جملهٔ درجهٔ دوم ندارد به‌دست می‌دهد. اگر ضرایب معادلهٔ اصلی گویا باشند، ضرایب معادلهٔ جدید نیز چنین خواهند بود و ریشه‌های گویای معادلهٔ جدید با ریشه‌های گویای معادلهٔ اصلی در تناظرند. این کار، تعمیم روش «مربع کامل کردن» است. همین‌طور با یک انتقال می‌توان ضریب a_{n-1} را در $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ حذف کرد.

با استفاده از این مطلب می‌توانیم نشان دهیم هر *ریشهٔ مضاعف یک چندجمله‌ای درجهٔ سه با ضرایب گویا، گویاست*. به‌کمک تعویض متغیرمان کافی است این موضوع را برای $q(z) = \alpha z^3+\gamma z+\delta$ نشان دهیم. پس باید نشان دهیم اگر $q(r) = 0$ و $q'(r) = 0$، آنگاه r گویاست. اما از $\gamma + 3\alpha r^2 = q'(r) = 0$ نتیجه می‌شود که $\alpha r^3 = -(\frac{\gamma}{3})r$. بنابراین $0 = q(r) = -(\frac{\gamma}{3})r + \gamma r + \delta$، یعنی $r = -3\delta/2\gamma$، که گویاست. از (۱) و از اینکه $x_1 = x_2 = r$ نتیجه می‌شود که سومین ریشهٔ q (و در نتیجه p) گویاست.

اکنون می‌توانید برای چندجمله‌ایهای درجهٔ سه با ضرایب گویا که یک ریشهٔ مضاعف (لزوماً گویای) r دارند همهٔ *نقاط گویای* (x, y) روی «خم بیضوی» $y^2 = p(x)$ را پیدا کنید. منظور از نقطهٔ گویای (x, y) این است که x و y هر دو گویا هستند. این نقاط محل برخورد خطهای راست گذرنده از $(r, 0)$ و دارای شیب گویا با خم هستند. تمرین دیگری در این زمینه این است که نشان داده شود نقاط گویایِ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ محل برخورد خطهای راست گذرنده از $(0, 1)$ و دارای شیب گویا با دایره هستند. یک نتیجهٔ ساده، فرمولی است که برای همهٔ «سه‌تاییهای فیثاغورسی» به‌دست می‌آید. سه‌تاییهای فیثاغورسی اعداد صحیحی مانند a و b و c هستند که $a^2 + b^2 = c^2$.

نمونه‌ای دیگر از یافتن یک مسألهٔ معادل ساده‌تر، تعویض متغیر (یعنی تغییر پایه) در یک معادلهٔ ماتریسی به‌منظور قطری‌کردن ماتریس (در صورت امکان) می‌باشد. همین ایده را می‌توانیم در مورد دستگاهی از معادلات دیفرانسیل

$$Lu := u' + Au = f \qquad (3)$$

به‌کار ببریم که در آن $u(t)$ و $f(t)$ بردار و $A(t)$ یک ماتریس مربعی است. برای تبدیل معادله به معادله‌ای ساده‌تر، تعویض متغیری به شکل $u = Sv$ را جستجو می‌کنیم که در آن $S(t)$ ماتریسی وارون‌پذیر باشد. در برخی کاربردها، این تبدیل را یک *تبدیل مقیاسی* می‌نامند. برای پیداکردن یک S مفید، چنین محاسبه می‌کنیم

$$f = Lu = u' + Au = (Sv)' + A(Sv) = Sv' + (S' + AS)v \qquad (4)$$

سمت راست این معادله هنگامی ساده‌ترین شکل را دارد که S، جواب معادلهٔ ماتریسی زیر باشد

$$LS = S' + AS = 0 \quad , \quad S(0) = I \qquad (5)$$

انتخاب $S(0) = I$ برای تضمین وارون‌پذیری S است. در این شرایط حل‌کردن (۴) فقط شامل انتگرالگیری از $v' = g$ است که در آن $g = S^{-1}f$.

با انتخاب چنین Sای و نوشتن $D := d/dt$، بازنویسی (۴) به‌صورت $f = Lu = SDv = SDS^{-1}u$ آموزنده است. به‌ویژه $L = SDS^{-1}$. مشاهده می‌شود که هر عملگر دیفرانسیل خطی عادی L، «مزدوج» یا «معادل مقیاسی» D است. پس به این نتیجهٔ احتمالاً غیرمنتظره می‌رسیم که هر

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول L با عملگر سادهٔ D معادل است؛ این نکته باعث می‌شود که مطالعهٔ عملگرهای دیفرانسیل خطی عادی بسیار آسانتر از مطالعهٔ عملگرهای دیفرانسیل جزئی باشد. همچنین به‌طور صوری داریم $L^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$. چون D^{-1} چیزی جز انتگرالگیری (و افزودن یک ثابت) نیست، فوراً نتیجه می‌گیریم که جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن $Lu = f$ به‌صورت زیر است

$$u(t) = L^{-1}f = S(t)C + S(t)\int_0^t S^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (۶)$$

که در آن $C = u(0)$. ماتریس S که با (۵) تعریف می‌شود همان جواب *ماتریسی اساسی* است که معمولاً در معادلات دیفرانسیل عادی با آن برخورد می‌کنیم. متأسفانه بیشتر وقتها به جای اینکه این ماتریس به‌طور مستقیم برای تبدیل L به عملگر دیفرانسیل ساده‌تر D معرفی شود، به‌عنوان شگردی برای حل معادلهٔ ناهمگن مطرح می‌شود. گاهی مناسب است *تابع گرین* $G(t,\tau) := S(t)S^{-1}(\tau)$ را وارد کار کرده، (۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$u(t) = u(0) + \int_0^t G(t,\tau)f(\tau)d\tau \quad (۷)$$

در این صورت عملگر انتگرال با هستهٔ $G(t,\tau)$ را L^{-1} می‌گیریم. این انتگرال را می‌توان تعبیر فیزیکی کرد و رهیافت (معادل) دیگری برای حل (۳) به‌دست آورد.

معمولاً نمی‌توان S را به‌طور صریح پیدا کرد. اما در بعضی موارد، مثل تک‌معادله‌ها یا دستگاههای ۲×۲ با ضرایب ثابت، می‌توانید محاسبات را انجام داده، فرمولهای کلاسیک را به‌راحتی به‌دست آورید.

آنچه ما «تعویض متغیر» می‌نامیم بخشی از یک شیوهٔ اساسی است که هر کسی از دوران کودکی با آن آشناست. برای روشن‌شدن این شیوه، فرض کنید مسأله‌ای دارید مانند $\mathscr{P}$ که به یک زبان دیگر، مثلاً لاتین بیان شده است. برای حل آن، ابتدا آن را به زبان خودتان ترجمه کنید (T)، صورت ترجمه‌شده (Q) را حل کنید، آنگاه آن را به زبان اصلی برگردانید (T^{-1}). به شکل نمادی، اگر از راست به چپ بخوانیم، داریم $\mathscr{P} = T^{-1}QT$؛ شکل ۱ را ملاحظه کنید. هدف این است که چارچوب جدید و T طوری انتخاب شوند که مسألهٔ جدید Q از $\mathscr{P}$ ساده‌تر شود. قطری‌کردن یک ماتریس و استفاده از یک تبدیل لاپلاس دو مثال آشنای ریاضی در این مورد هستند.

همین ایده ــ ولی با شکلی متفاوت ــ در مبحث تقارن نیز مفید است (بخش ۶.۲). در آنجا می‌بینیم که یافتن یک T به طوری‌که صورت جدید

$$\begin{tikzcd}
\text{قبلی} \arrow[r, "\mathscr{P}", "\text{(صورت اصلی)}"'] \arrow[d, "T"'] & \text{قبلی} \\
\text{جدید} \arrow[r, "Q", "\text{(صورت قبلی)}"'] & \text{جدید} \arrow[u, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

شکل۱

همان صورت قبلی باشد، $\mathscr{P} = T^{-1}\mathscr{P}T$، عبارت است از تشخیص دادن تقارنهای مسأله. به‌عنوان یک مثال زبانی عامیانه [به انگلیسی]، ملاحظه کنید که گزارهٔ "madam I'm Adam" از انتها به ابتدا نیز به همین صورت خوانده می‌شود. اینجا T عمل خواندن از انتها به ابتداست.

حساب وردشها روشی بنیادی برای صورتبندی دوبارهٔ برخی مسائل در اختیار ما می‌گذارد. اگر A یک ماتریس خودالحاق در $\mathbb{R}^n$ باشد، حل‌کردن $Ax = b$ معادل است با یافتن یک نقطهٔ بحرانی تابع عددی $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$، که در آن، ضرب داخلی متعارف در $\mathbb{R}^n$ مورد نظر است. برای مشاهدهٔ این موضوع، اگر x یک نقطهٔ بحرانی $J(x)$ باشد و قرار دهیم $\varphi(\epsilon) = J(x+\epsilon v)$، که v یک بردار و ϵ یک عدد است، آنگاه طبق تعریف نقطهٔ بحرانی، $\varphi'(0) = 0$. اما $\varphi'(0) = \langle Ax - b, v\rangle$. بنابراین برای هر بردار v، $\langle Ax - b, v\rangle = 0$. چون v دلخواه است نتیجه می‌شود $Ax - b = 0$ و این همان چیزی است که ادعا شد.

همین‌طور ادعا می‌کنیم که حل معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ در یک ناحیهٔ Ω، با شرط مرزی $u(x,y) = f(x,y)$ برای (x,y) روی مرز Ω، معادل است با پیدا کردن یک نقطهٔ بحرانی تابعک

$$J(u) := \frac{1}{2}\int\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)dxdy \quad (۸)$$

در میان همهٔ توابع هموار مناسبی که در شرط مرزی بالا صدق می‌کنند.

می‌خواهیم این مطلب را نشان دهیم. برای سهولت فرض کنید u تابعک J را مینیمم کند. همچنین فرض کنید $h(x,y)$ تابعی هموار در Ω باشد که در یک همسایگی مرز صفر است. در این صورت مقادیر مرزی $u + th$ همان مقادیر مرزی u است و تابع $\varphi(t) = J(u+th)$ در $t = 0$ یک مینیمم دارد. بنابراین

$$0 = \frac{dJ(u+th)}{dt}\Big|_{t=0} = \int\int_\Omega (u_x h_x + u_y h_y)dxdy$$

اکنون به‌صورت جزءبه‌جزء انتگرالگیری کرده (قضیهٔ دیورژانس)، مشاهده می‌کنیم که جملهٔ مرزی به‌وجود نمی‌آید، زیرا h روی مرز صفر است:

$$0 = -\int\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})hdxdy = -\int\int_\Omega (\Delta u)hdxdy \quad (۹)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که u در معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = 0$ صدق می‌کند زیرا اگر برای مثال در یک قرص کوچک در Ω، $\Delta u > 0$، آنگاه می‌توانستیم h را طوری در نظر بگیریم که در این قرص مثبت، و در خارج از آن صفر باشد. اما در این صورت سمت راست (۹) مثبت می‌بود و این تناقض است. به‌طور خلاصه، مشاهده می‌کنیم که مینیمم‌سازهای J، توابعی همساز، $\Delta u = 0$، هستند. درواقع تنها چیزی که از آن استفاده کردیم این بود که u یک نقطهٔ بحرانی $J(u)$ است. معادلهٔ $\Delta u = 0$، *معادلهٔ اویلر-لاگرانژ* مسألهٔ وردشیِ پیداکردن نقاط بحرانی $J(u)$ نامیده می‌شود.

یکی از مزایای وارد کارکردن یک مسألهٔ وردشی این است که بعضی از ویژگیها، مانند وجود جواب یا یک «قانون بقا» قابل دسترستر می‌شوند. در بخشهای ۶.۲ ت و ۱.۳ دوباره به این مطلب برمی‌خوریم. (کتابهای [۶]، [۷] و [۹] را ببینید).

۳.۲ دوگانی: مسأله‌ای مرتبط با مسألهٔ موردنظر پیدا کنید که مفید واقع شود. در نظر من، دوگانی مبهم‌ترین و مرموزترین موضوع در این مقاله است. احساس من این است که دوگانی نخستین بار در هندسهٔ تصویری، آنجا که نقشهای نقطه‌ها و خطها با هم تعویض می‌شوند پدیدار شده است. لاگرانژ الحاقیِ یک عملگر دیفرانسیل را در قرن هجدهم معرفی کرد، در حالی که به نظر می‌رسد الحاقیِ یک ماتریس در قرن نوزدهم به‌کار گرفته شده باشد. مکانیک لاگرانژی و مکانیک همیلتنی دوگان یکدیگرند: زیستگاه مکانیک لاگرانژی کلاف مماس و زیستگاه مکانیک همیلتنی کلاف کتانژانت است. در حساب وردشها ــ از جمله در برنامه‌ریزی خطی ــ مسائلی وجود دارند که دوگان یکدیگرند. کوهومولوژی دوگان هومولوژی است. حتی در بیان کلمات قصار نیز دوگانی حربه‌ای جا افتاده است: «با دیگران همان طوری رفتار کنید که دوست دارید با شما رفتار کنند» و گفتهٔ جان اف. کندی که «... نپرسید کشورتان برای شما چه می‌تواند انجام دهد، بپرسید شما برای کشورتان چه می‌توانید انجام دهید.» من نمی‌دانم چطور مفهوم دوگانی را آنقدر دقیق سازم که همهٔ نمونه‌های شناخته‌شدهٔ ریاضی را دربربگیرد و معرفی اشیاء دوگان جدید را آسان کند.

در بخش ۵.۲ کاربرد دوگانی در جبر خطی را ذکر خواهیم کرد. در اینجا به پیروی از لاگرانژ، الحاقیِ صوری L^* یک عملگر خطی دیفرانسیل L را تعریف می‌کنیم. از ضرب داخلی توابع با مقادیر حقیقی: $\langle\varphi,\psi\rangle = \int\varphi\psi dx$ استفاده می‌کنیم. در این صورت L^* با قاعدهٔ معمول زیر تعریف می‌شود: برای همهٔ توابع هموار u و v که در خارج یک مجموعهٔ فشرده صفر هستند

$$\langle u, L^*v\rangle = \langle Lu, v\rangle$$

از آن جهت توابعی را که خارج از یک مجموعهٔ فشرده صفر هستند انتخاب کردیم که به هنگام انتگرالگیری جزءبه‌جزء، جمله‌های انتگرال روی مرز به‌وجود نیایند. استفاده از کلمهٔ «صوری» به این دلیل بود که الحاقی اکید، مستلزم یک فضای هیلبرت (تمام) و در نظر گرفتن شرایط مرزی است.

اگر $L:=d/dt$، آنگاه با یک انتگرالگیری جزءبه‌جزء مشخص می‌شود که

$$\langle Lu, v\rangle = \int u'vdt = -\int uv'dt = \langle u, L^*v\rangle$$

بنابراین، الحاقی صوری $L:=d/dt$ عبارت است از $L^* = -d/dt$. همین‌طور، اگر $A(t)$ یک ماتریس و $u(t)$ یک بردار باشند، آنگاه الحاقی صوری $Lu := u' + A(t)u$ عبارت است از $L^*v = -v' + A^*(t)v$. دو بار انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان می‌دهد که الحاقی صوری دستگاه مرتبهٔ دوم $Mu := u'' + A(t)u$ عبارت است از $M^*v = v'' + A^*(t)v$. به‌ویژه اگر A متقارن باشد، آنگاه M به‌طور صوری خودالحاق است؛ این واقعیت در مکانیک کوانتومی ــ جایی که با یک ضرب داخلی مختلط، عملگر خودالحاق id/dt در معادلهٔ شرودینگر ظاهر می‌شود ــ اهمیت بنیادی دارد.

اگر u یک جواب دستگاه همگن $Lu := u' + A(t)u = 0$ و v یک جواب دستگاه الحاقی $L^*v = -v' + A^*(t)v = 0$ باشند، آنگاه حاصلضرب داخلی نقطه به نقطهٔ آنها مقداری ثابت است. درواقع

$$\frac{d}{dt}(v\cdot u) = v'\cdot u + v\cdot u' = A^*v\cdot u - v\cdot Au = 0 \qquad (۱۰)$$

با توجه به اینکه $v\cdot u$ با ضرب ماتریسی v^*u برابر است، محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که اگر $S(t)$ و $T(t)$ به‌ترتیب جوابهای ماتریسی (نه لزوماً مربعی) $LS = 0$ و $L^*T = 0$ باشند، آنگاه

$$T^*(t)S(t) = \text{ثابت} \qquad (۱۱)$$

به‌ویژه اگر A، S و T ماتریسهایی مربعی با $S(0) = T(0) = I$ باشند (در این صورت مانند (۵)، S و T *جوابهای ماتریسی اساسی* هستند)، خواهیم داشت

$$T^*(t)S(t) = I \quad \text{یعنی} \quad T(t) = S^{-1*}(t) \qquad (۱۲)$$

اگر فرمول (۱۱) ظاهری جالب توجه ندارد، به‌دلیل بی‌نقص بودن تغییر قیافهٔ آن است. این فرمول تعمیم فراگیری است از $e^te^{-t} = 1$ که مربوط به حالت خاص $Lu := u'+u$ و $L^*v = -v'+v$ است، و نیز از $\cos^2 t+\sin^2 t = 1$. این فرمول در یک چارچوب فیزیکی ممکن است بیانگر نوعی قانون بقا باشد. برای اثبات $\cos^2 t+\sin^2 t = 1$، دستگاه مرتبهٔ دوم $Mw := w''+Cw = 0$ را در نظر بگیرید که در آن $C(t)$ یک ماتریس $n\times n$ است. دستگاه الحاقی متناظر عبارت است از $M^*z = z'' + C^*z$. فرض کنید $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ به‌ترتیب جوابهای (برداری یا ماتریسی) $M\varphi = 0$ و $M^*\psi = 0$ باشند. در این صورت $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ حالت خاصی از اتحاد

$$\psi^{*'}(t)\varphi(t) - \psi^*(t)\varphi'(t) = \text{ثابت}$$

است. این حالت خاص، حالتی است که در آن C ماتریس 1×1 همانی باشد، $\varphi(t) = \cos t$ و $\psi(t) = \sin t$. این اتحاد یک نتیجهٔ عادی اتحاد بنیادی (۱۱) است و به‌دست آوردن آن نیازمند اطلاع اضافی نیست؛ فقط $w'' + C(t)w = 0$ را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بنویسید؛ این‌کار را با استفاده از روند معمول یعنی گرفتن $u_1 := w$ و $u_2 := w'$ انجام دهید.

۴.۲ خانوادهٔ همهٔ جوابها را شناسایی کنید. چه تعداد جواب وجود دارد؟ آیا یکتایی مطلوب است؟ اگر چنین است، چه شرایطی یکتایی جواب را تضمین می‌کند؟ اگر برخی از پارامترهای مسأله را اندکی دستکاری کنید، آیا جوابها هم فقط اندکی تغییر می‌کنند؟ این وابستگیِ پیوسته به پارامترها در مسائل مربوط به زندگی واقعی که در آنها داده‌ها تنها در حد تقریب معلوم هستند بسیار اساسی است. این وابستگی در مسائلی که با کامپیوتر حل می‌شوند نیز اهمیت دارد؛ کامپیوتر هم خطاهای گردکردن ایجاد می‌کند (زیرا فقط تعدادی متناهی از ارقام اعشاری را به‌کار می‌برد) و هم خطاهای بُرش (زیرا به‌جای فرایندهای حدی نظیر انتگرالگیری تعدادی متناهی عملیات گسسته انجام می‌دهد و نتایج را به تقریب به‌دست می‌آورد).

برای مثال، طبق قضیهٔ روشه در آنالیز مختلط، ریشه‌های یک چندجمله‌ای $p(z)$ به‌طور پیوسته به ضرایب آن وابسته‌اند یعنی، اگر $p(z)$ در قرص کوچک $|z-c| < r$ دارای k ریشه باشد و اگر ضرایب p را اندکی دستکاری کنیم، آنگاه چندجمله‌ای دستکاری شده نیز درست k ریشه در این قرص خواهد داشت. یک نتیجهٔ این قضیه این است که مقدارهای ویژهٔ یک ماتریس به‌طور پیوسته به درایه‌های آن وابسته‌اند. مثال $x^2 = \pm\epsilon$ نشان می‌دهد که اگر فقط ریشه‌های حقیقی در نظر گرفته شوند، این ادعاها ممکن است *غلط* باشد.

این مثال $x^2 = \epsilon$ برای ϵهای نزدیک صفر همچنین نشان می‌دهد که حتی با در نظرگرفتن ریشه‌های مختلط، ممکن است جواب، تابع مشتق‌پذیری از پارامترها *نباشد*. در مقابل، قضیهٔ تابع ضمنی به‌سادگی نشان می‌دهد که ریشه‌های ساده به‌طور هموار به پارامترها وابسته‌اند. اثباتی از این موضوع ارائه می‌دهیم. فرض کنید یک چندجمله‌ای $p(x,c)$ داریم که به‌طور هموار به پارامتر c وابسته است و در $c = c_0$ یک ریشهٔ x_0 داریم، یعنی $p(x_0, c_0) = 0$. چون x_0 یک ریشهٔ ساده است، $\partial p(x, c_0)/\partial x|_{x=x_0} \neq 0$. بنابراین، طبق قضیهٔ تابع ضمنی، به‌ازای هر c نزدیک c_0، جواب یکتایی مانند $x = x(c)$ برای $p(x,c) = 0$، نزدیک x_0 وجود دارد. این جواب به‌طور هموار به c وابسته است. در این اثبات لازم نیست p یک چندجمله‌ای باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود که مقدارهای ویژهٔ سادهٔ یک ماتریس به‌طور هموار به درایه‌های آن ماتریس وابسته‌اند.

بررسی این امر که وقتی قضیهٔ تابع ضمنی قابل کاربرد نیست چه رخ می‌دهد، در *نظریهٔ انشعاب*[1] و در مطالعهٔ *تکینه‌های نگاشتها* انجام می‌شود. این دو موضوع یکی هستند، هر چند از خاستگاههای مختلف و با دیدگاههای متفاوتی برآمده‌اند؛ [۱] و [۸] را ببینید. پدیدهٔ جدید مهمی که اتفاق می‌افتد این است که ممکن است چندین جواب منشعب شوند و یا اینکه جوابها ناپدید شوند؛ چنین حالتی مثلاً در مورد جوابهای حقیقی $x^2 = \epsilon$ روی می‌دهد؛ به‌ازای $\epsilon < 0$ جواب حقیقی وجود ندارد در حالی که به‌ازای $\epsilon > 0$ دو جواب هست. مطالعهٔ کلاسیک خم‌شدن یک ستون باریک در اثر فشار که به‌وسیلهٔ اویلر انجام شد، یکی از جلوه‌های اولیه و شایان توجه نظریهٔ انشعاب بود. [۱۶، صص. ۱۶۷_۱۶۹].

مثال بعدی ما خانوادهٔ همهٔ جوابها را در مورد برخی معادلات چندجمله‌ای روشن می‌کند. در دبیرستان معادلات درجهٔ دوم یک متغیری و دستگاههای معادلات خطی را حل می‌کنیم. اینها گامهای اولیه در راه شناسایی جوابهای دستگاهی متشکل از k معادلهٔ چندجمله‌ای $f_1(z) = 0$، $f_2(z) = 0$، $\ldots$، $f_k(z) = 0$، با n مجهول $z = (z_1, \ldots, z_n)$ است. از روی تجربه می‌دانیم که ساده‌ترین حالت، مجاز دانستن جوابهای مختلط است. اگر تعداد معادله‌ها بیش از تعداد مجهولها باشد ($k > n$)، معمولاً جوابی وجود ندارد، یعنی صفرهای مشترکی نداریم [*مسألهٔ مبارزطلب*: این را مثلاً برای توابع هموار دلخواه f_j به‌صورت دقیق بیان و سپس اثبات کنید] در حالی‌که اگر تعداد مجهولها از تعداد معادله‌ها بیشتر باشد معمولاً تعداد نامتناهی جواب وجود دارد. اگر تعداد معادله‌ها و تعداد مجهولها برابر باشند، معمولاً تعدادی متناهی جواب وجود دارد. این حکم، با وجودی که درست به نظر می‌رسد، بدیهی نیست و در مورد توابع هموار نادرست است: $\sin x = 0$ که یک معادله با یک مجهول است، تعداد نامتناهی جواب دارد ــ البته اگر سری تیلر آن به‌عنوان یک چندجمله‌ای از درجهٔ بینهایت در نظرگرفته شود، این امر چندان هم غیرمنتظره نیست.

بزو[2] این مطلب را در مورد دو معادلهٔ چندجمله‌ای دومتغیرهٔ

$$f(x,y) = 0, \ g(x,y) = 0 \qquad (۱۳)$$

دقت بخشید. او ثابت کرد که اگر f از درجهٔ k و g از درجهٔ l باشند، درست به تعداد kl جواب وجود دارد که ممکن است مختلط هم باشند، مگر اینکه f و g دارای یک عامل مشترک چندجمله‌ای (غیرثابت) باشند [۱۵].

از لحاظ هندسی، چنین تصور کنید که دو معادلهٔ (۱۳) دو خم C_1 و C_2 را مشخص می‌کنند. در این صورت جوابهای مشترک (۱۳) عبارت‌اند از نقاط تقاطع این دو خم.

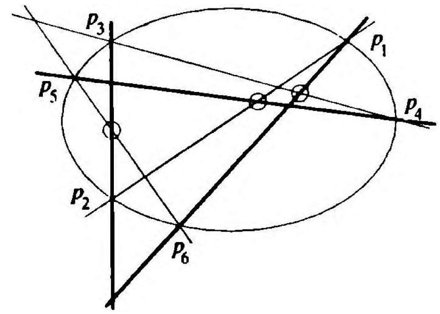
حال (۱۳) را در حالت خاصی که f و g هر دو، چندجمله‌ای درجهٔ سه باشند بررسی می‌کنیم. فرض کنید آنها در نُه نقطهٔ $p_1 = (x_1, y_1)$، $\ldots$، p_9 یکدیگر را قطع کنند. تا اینجا با وضعیتی کلی سروکار داریم. اما حالا فرض کنید که شش تا از این نقاط، p_1، $\ldots$، p_6 تصادفاً روی یک مقطع مخروطی Γ قرار داشته باشند، پس آنها ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجهٔ دو مانند $q(x,y) = 0$ که Γ را تعریف می‌کند نیز هستند. طبق قضیهٔ بزو می‌دانیم که C_1 و Γ یکدیگر را در شش نقطه قطع می‌کنند. اینکه C_2 و Γ نیز یکدیگر را در *همان* شش نقطه قطع کنند حالتی کاملاً استثنایی است. برای سادگی همچنین فرض کنید که مقطع مخروطی Γ تحویل‌ناپذیر است، یعنی حاصلضرب دو چندجمله‌ای غیرثابت از درجهٔ پایینتر نیست (این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که Γ حاصلضرب، دو چندجمله‌ای خطی و در نتیجه متشکل از دو خط راست باشد). ادعا می‌کنیم که سه نقطهٔ باقیماندهٔ p_7، p_8، p_9 روی یک خط راست قرار دارند.

یک اثبات جبری برای این ادعا می‌آوریم. توجه کنید که برای هر ترکیب خطی $h(x,y) := \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$، خم درجهٔ سوم C که با $h = 0$ تعریف می‌شود خودبه‌خود نقاط تقاطع C_1 و C_2 را شامل می‌شود. نقطهٔ دیگری مانند v روی مقطع مخروطی Γ بگیرید و α و β را طوری انتخاب کنید که v نیز یک صفر h بشود. در آن صورت خم درجهٔ سوم C نیز مقطع مخروطی Γ را در هفت نقطهٔ v، p_1، $\ldots$، p_6 قطع می‌کند. اما طبق قضیهٔ بزو، C و Γ دارای $۶ = ۲ \times ۳$ نقطهٔ تقاطع هستند مگر اینکه h و q عامل مشترکی داشته باشند. پس باید عامل مشترکی وجود داشته باشد. چون q تحویل‌ناپذیر است، این عامل مشترک باید خود q باشد. بنابراین $h(x,y) = q(x,y)r(x,y)$ که با توجه به درجه‌ها، $r(x,y)$ یک چندجمله‌ای خطی است. پس p_7، p_8، p_9 که صفرهای $h = 0$ هستند ولی صفرهای $q = 0$ نیستند، ریشه‌های چندجمله‌ای خطی $r = 0$اند و بنابراین روی یک خط راست قرار دارند.

با تعبیری از این موضوع می‌توان یک قضیهٔ کلاسیک پاسکال را به‌دست آورد. شش نقطهٔ دلخواه p_1، $\ldots$، p_6 واقع بر یک مقطع مخروطی را به هم وصل کنید تا یک «شش‌ضلعی» به‌دست آید که ممکن است خودش را هم قطع کند. چند اصطلاح در مورد شش‌ضلعیها ذکر می‌کنیم: یک جفت از یالها را *متقابل* می‌نامیم در صورتی که دو یال بین آنها قرار داشته باشند (مانند $\overline{p_1p_2}$ و $\overline{p_4p_5}$). نقاط تقاطع یالهای متقابل را *نقاط قطری* می‌نامیم. پس هر شش‌ضلعی سه نقطهٔ قطری دارد (در شکل ۲ دور آنها دایره کشیده شده است). قضیهٔ پاسکال می‌گوید این سه نقطه همواره روی یک خط راست قرار دارند.

برای اثبات آن، یالهای متناوب شش ضلعی، یعنی $\overline{p_1p_2}$، $\overline{p_3p_4}$، $\overline{p_5p_6}$ و $\overline{p_2p_3}$، $\overline{p_4p_5}$، $\overline{p_6p_1}$ را در نظر بگیرید؛ دو مثلث ایجاد می‌شود که اضلاع آنها این یالها را شامل‌اند. با در نظر گرفتن حاصلضرب سه چندجمله‌ای خطی که به‌وسیلهٔ اضلاع هر کدام از مثلثها مشخص می‌شوند، به هر مثلث

1. bifurcation theory 2. Bezout



شکل۲

یک چندجمله‌ای درجهٔ سه نسبت می‌دهیم. توجه کنید که در اینجا هر مثلث اجتماع سه خط کامل است، نه اجتماع پاره‌خطهایی که رأسها را به هم وصل می‌کنند. نقاط p_1، ...، p_6 به‌اضافهٔ سه نقطهٔ قطری، نُه نقطهٔ تقاطع این دو مثلث هستند. اکنون نتیجهٔ جبری قبل را به‌کار ببرید. برای در نظر گرفتن امکان توازیِ برخی از اضلاع متقابل که نقاط تقاطع آنها در بینهایت خواهند بود، بهتر است در صفحهٔ تصویری کار کنیم.

استدلال جبری را می‌توان بلافاصله تعمیم داد: فرض کنید $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ *چندجمله‌ایهایی از درجهٔ n باشند که یکدیگر را در n^2 نقطه قطع می‌کنند. اگر kn تا از این نقاط روی یک خم تحویل‌ناپذیر که با یک چندجمله‌ای درجهٔ k تعریف می‌شود قرار داشته باشند، آنگاه $n(n-k)$ نقطهٔ باقیمانده روی خمی قرار دارند که با یک چندجمله‌ای درجهٔ $n-k$ تعریف می‌شود.* این تعمیم نشان‌دهندهٔ قدرت رهیافت جبری است.

۵.۲ اگر لزوماً جوابی وجود ندارد، موانع را پیدا کنید. اگر معادله‌ای فاقد جواب است، فهمیدن دلیل آن مهم است. اگر بخواهید خط راست $p=at+b$ را با k نقطهٔ داده شده که به‌صورت تجربی به‌دست آمده‌اند تطبیق بدهید، بعید است بتوانید ضرایب a و b را چنان انتخاب کنید که دقیقاً با داده‌ها جور شود. در چنین وضعیتی به دنبال یک جواب تقریبی «بهینه» می‌گردند. یک رهیافت نوعی برای حل تقریبی $F(x)=y$، پیداکردن جوابی مانند x_0 است که خطای $E(x)=||F(x)-y||$ را مینیمم کند. انتخاب یک نرم مناسب (یا متریکی دیگر) برای اندازه‌گیری خطا، تصمیم مهمی است که شخص باید بگیرد. معمولاً از نرمی استفاده می‌شود که از ضربی داخلی القاء شود؛ در این صورت این روش، *روش کمترین مربعات* نامیده می‌شود.

حال فرض کنید می‌خواهید معادله‌ای را حل کنید که باور دارید در شرایط مناسبی *باید* جوابی دقیق داشته باشد. پس لازم است این شرایط را معین کنید و آنها را بفهمید.

ساده‌ترین مثال، دستگاه معادلات جبری خطی $Ax=y$ است. طبق قضیه‌ای بنیادی در جبر خطی، که در آن از معادلهٔ الحاقی (دوگانی) استفاده می‌شود، به‌ازای yای داده شده، شرط لازم و کافی برای وجود دست‌کم یک جواب این است که y بر همهٔ جوابهای z معادلهٔ الحاقی همگن، $A^*z=0$، عمود باشد. همین گفته در مورد مسائل مقدار مرزی بیضوی خطی نیز درست است ــ در آنجا این موضوع به‌نام *جایگزین فردهلم*[1] شناخته می‌شود. برای ملاحظهٔ بحث و اثباتی از این مطالب در حالت آموزندهٔ معادلات دیفرانسیل عادی به [۱۰] مراجعه کنید.

مثال بعدی شمه‌ای از این مطالب را در مورد یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی ساده نشان می‌دهد. به خاطر بیاورید که انحنای [خمیدگی] $k(x)$ یک خم هموار $y=y(x)$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$k(x)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)' \qquad (14)$$

عکس مسأله این است که برای تابع هموار داده شدهٔ $k(x)$، $0<x<1$، خم هموار مانند $y=y(x)$ پیدا کنیم که این تابع انحنای آن باشد.

انحنای دایره‌ای به شعاع R برابر $\frac{1}{R}$ است. بنابراین اگر $k(x)\equiv 2$، آنگاه نیمدایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ جواب مسألهٔ ماست. اما اگر $k(x)\equiv 4$، آنگاه دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ تنها در نیمی از بازهٔ مطلوب $0<x<1$ جواب مسأله را به‌دست می‌دهد. این موضوع باعث می‌شود حدس بزنیم که اگر جوابی وجود داشته باشد، آنگاه انحنا نمی‌تواند در قسمت بزرگی از بازه، به‌دلخواه بزرگ باشد.

برای پیدا کردن یک مانع، از دو طرف (۱۴) انتگرالگیری می‌کنیم

$$\int_0^x k(t)dt=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}-\frac{y'(0)}{\sqrt{1+y'(0)^2}} \qquad (15)$$

قرار می‌دهیم $\gamma=y'(0)/\sqrt{1+y'(0)^2}$؛ در این صورت $|\gamma|\le 1$. از (۱۵) شرط محدودکنندهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_0^x k(t)dt\le 1-\gamma\le 2,\ 0\le x\le 1$$

این نابرابری حدس ما را مبنی بر اینکه «انحنا نمی‌تواند در قسمت بزرگی از بازه، به‌دلخواه بزرگ باشد» در خود دارد. در حالت ثابت‌بودن انحنا، $k(x)\equiv c>0$، به‌ازای $x=1$ شرط بالا به‌صورت $c\le 2$ درمی‌آید که کاملاً دقیق است. برای kی غیرثابت، یک شرط لازم و کافی این است که ثابتی چون γ، $\gamma\in[-1,1]$، وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $0<x<1$، $|\int_0^x k(t)dt+\gamma|<1$. اگر فرض کنیم خم محدب باشد، یعنی $k(x)>0$، آنگاه می‌توانیم γ را برابر -1 انتخاب کرده، به این شرط لازم و کافی ساده برسیم که $\int_0^1 k(t)dt\le 2$. لازم‌بودن این شرط نتیجهٔ فوری (۱۵) است، حال آنکه کافی بودن آن از حل (۱۵) نسبت به $y'(x)$ و انتگرالگیری نتیجه می‌شود. به‌طور ضمنی، مماسهای قائم $(y'(x)=\pm\infty)$ را در داخل بازه مجاز ندانسته‌ایم اما در نقاط مرزی، این مماسها مجاز هستند ــ مانند حالت مربوط به نیمدایرهٔ به شعاع $\frac{1}{2}$.

در صورت استانداردی از این مسأله، شرایطی مرزی مانند $y(0)=y(1)=0$ نیز وضع می‌شود. من لذتِ یافتن شرایط لازم و کافی برای حل این مسألهٔ مقدار مرزی در حالت خاصِ مربوط به خم محدب را به شما واگذار می‌کنم. اگر بپذیریم جوابی برای این مسألهٔ مقدار مرزی وجود دارد، آیا این جواب یکتاست؟

مشکلات در اینجا ناشی از *سرتاسری‌بودن* این مسأله برای تمام بازهٔ $0<x<1$ است. اگر به یک جواب موضعی که فقط در یک همسایگی $x=0$ تعریف شده است رضایت بدهیم، آنگاه همواره جوابی وجود دارد.

[1] Fredholm Alternative

شناخت ما از عواملی که مانع وجود جواب برای یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی می‌شوند بسیار ناقص است؛ بسیاری از موانع شناخته شده، از قضیهٔ نوتر که در بخش ۶.۲ ت ذکر خواهد شد به‌دست می‌آیند.

۶.۲ از تقارن بهره بگیرید. الف) *تقارن ساده.* مثالی آشنا از تقارن در جبر، در مورد چندجمله‌ای $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ با ضرایب حقیقی دیده می‌شود. در این حالت ضرایب تحت مزدوج‌سازی مختلط ناوردا هستند: $\overline{a_j} = a_j$. بنابراین برای هر عدد مختلط z داریم

$$\overline{p(z)} = \sum \overline{a_k z^k} = \sum a_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

و اگر z یک ریشهٔ مختلط باشد، $\overline{z}$ نیز چنین است. ماهیت تقارنی مزدوج‌سازی در اعداد مختلط هنگامی روشنتر می‌شود که برای عملگر مزدوج‌سازی مختلط نماد دیگری به‌کار ببریم: می‌نویسیم $T(z) := \overline{z}$. پس، همانی $T^2 =$ و $(Tp)(z) := T(p(z))$. برای یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی، $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ به این معنی است که $Tp = pT$، یعنی T و p با هم جابه‌جا می‌شوند؛ اگر این را به شکل $TpT^{-1} = p$ بنویسیم، مطلب روشنتر خواهد شد، یعنی p تحت خودریختی T ثابت می‌ماند. دستاورد عمیق گالوا در نظریهٔ حل معادلات چندجمله‌ای، این بود که نشان داد چگونه از تقارنهای مربوطه بهره‌برداری شود.

گونه‌ای از این استدلال برای حل معادلهٔ $F(x) = c$ نیز سودمند است. فرض کنید F با نگاشتی مانند T جابه‌جا می‌شود، $TF = FT$، و c تحت T ناورداست: $T(c) = c$. اگر x_0 جوابی برای $F(x) = c$ باشد، آنگاه x_0 لزوماً ناوردا نیست، اما $T(x_0)$ نیز یک جواب است. اگر به علاوه بدانید که جواب $F(x) = c$ یکتاست، آنگاه $T(x_0) = x_0$، یعنی این جواب x_0 تحت T ناورداست. در اینجا سه مثال مشابه را مشاهده می‌کنید.

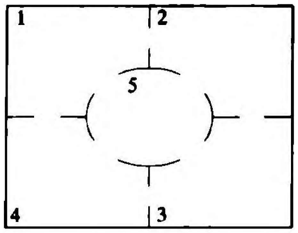
i) فرض کنید f یک همسانریختی کرهٔ $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ و

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

تبدیلی تقارنی نسبت به صفحهٔ استوا باشند. و نیز فرض کنید $c \in S^2$ توسط φ ثابت نگاه داشته شود، یعنی $\varphi(c) = c$؛ پس c روی استوا، $z = 0$، قرار دارد. همچنین فرض کنید f و φ جابه‌جا شوند: $f \circ \varphi = \varphi \circ f$. اگر $f(p_0) = c$، آنگاه $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نیز تحت φ ناورداست و در نتیجه p_0 نیز روی استوا قرار دارد. پس f استوا را به‌روی خودش می‌نگارد.

ii) در این مثال $u(x,t)$ جواب معادلهٔ موج $u_{xx} - u_{tt} = 0$ در بازهٔ $-1 \le x \le 1$ است. فرض کنید u در شرایط مرزی $u(-1,t) = u(1,t) = 0$ صدق کند. اگر مکان اولیهٔ $u(x,0)$ و سرعت اولیهٔ $u_t(x,0)$ هر دو تابعهایی زوج باشند، یعنی تحت نگاشت $T : x \to -x$ ناوردا باشند، آنگاه جواب $u(x,t)$ نیز چنین است. این امر نتیجهٔ یکتایی جواب معادلهٔ موج با شرایط اولیهٔ داده شده می‌باشد.

یکتایی اثباتی ساده دارد. اگر u و v هر دو جوابهایی با مکان و سرعت اولیهٔ یکسان باشند، آنگاه $w := u - v$ نیز جوابی از معادلهٔ موج است، ولی $w(x,0) = w_t(x,0) = 0$. فرض کنید $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(w_t^2 + w_x^2)dx$ «انرژی» در زمان t باشد. با محاسبه‌ای که شامل یک انتگرالگیری جزءبه‌جزء است، به‌دست می‌آید $\frac{dE}{dt} = 0$، پس $E(t) = E(0)$ (*بقای انرژی*). اما $E(0) = 0$، بنابراین به‌ازای هر t، $E(t) \equiv 0$. در نتیجه $w(x,t)$ ثابت است. چون $w(x,0) = 0$، پس $w(x,t) \equiv 0$، یعنی $u(x,t) \equiv v(x,t)$.



شکل۳

با استفاده از خطی‌بودن این مسأله، حتی بدون برقراری یکتایی نیز می‌توانستیم جوابی ناوردا به‌دست آوریم. فرض کنید $\varphi(x,t)$ جوابی دلخواه باشد. چون $T^2 = I$، پس میانگین $u := \frac{1}{2}(\varphi + T\varphi)$ یک جواب ناورداست. این روش ساخت را می‌توان به‌کمک روش مهم میانگین‌گیری روی گروه تقارنها تعمیم داد. یکی ازکاربردهای این در الکترواستاتیک، *روش تصویرهاست*.

iii) مثالی از زنجیر مارکوف. شما در یک آزمایش در «خانه»‌ای پنج اتاقی قرارگرفته‌اید؛ شکل ۳ را ببینید. در هر ساعت درها باز می‌شوند و شما باید از اتاق فعلی خود به یکی از اتاقهای مجاور نقل‌مکان کنید. با این فرض که اتاقها همگی از نظر میزان جذابیت یکسان هستند، چه درصدی از زمان را در هر اتاق خواهید گذراند؟

برای حل این مسأله، *ماتریس گذر* 5×5، $M = (m_{ij})$ برای این زنجیر *مارکوف* معرفی می‌شود: اگر در حال حاضر در اتاق j به سر می‌برید، m_{ij} احتمال آن است که دفعهٔ بعد در اتاق i باشید. می‌توان بررسی کرد که

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

اعضای M نامنفی هستند و مجموع هر ستون برابر ۱ است: اکنون هر کجا هستید، در مرحلهٔ بعد به یقین در یکی از اتاقها خواهید بود.

به‌کارگیری *بردارهای احتمال ستونی* $P = (p_1, \dots, p_5)$ سودمند است؛ ویژگی این بردارها این است که p_j احتمال حضور در اتاق jاُم در یک زمان معین را به‌دست می‌دهد. بنابراین $0 \le p_j \le 1$ و $\sum p_j = 1$. اگر $P_{\text{حال}}$ نشاندهندهٔ احتمالهای مکان فعلی شما باشد، $P_{\text{بعدی}} = MP_{\text{حال}}$ احتمالهای مکان شما در بازهٔ زمانی بعدی را به‌دست می‌دهد. اگر کسی از اتاق ۱ شروع کند، آنگاه $P_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ و پس از ساعت اول، $P_1 = (0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = MP_0$. به همین صورت در پایان ساعت دوم $P_2 := MP_1 = M^2P_0$ و $P_k := MP_{k-1} = M^kP_0$.

در جستجوی احتمالهای درازمدت، این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا بردارهای احتمال $P_k = M^kP_0$، $k = 1, 2, \dots$، *مستقل* از بردار احتمال

آغازی P_0 به سمت یک بردار «تعادل» مانند P همگرا می‌شوند؟ اگر چنین باشد، آنگاه به‌ویژه، $P = \lim M^{k+1}P_0 = \lim MM^kP_0 = MP$، یعنی $P = MP$. پس P یک بردار ویژهٔ M با مقدار ویژهٔ ۱ است.

هر چند $\lambda = 1$ همواره یک مقدار ویژهٔ M است (زیرا یک مقدار ویژهٔ M^* با بردار ویژهٔ $(1,\ldots,1)$ است)، اما حد M^kP_0 همیشه وجود ندارد. برای مثال، این حد برای ماتریس گذر $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ مربوط به یک «خانهٔ» دواتاقی وجود ندارد. اگر $M = I$، آنگاه حد M^kP_0 وجود دارد اما از P_0 مستقل نیست. ولی اگر همهٔ اعضای M (یا توانی از M) مثبت باشند، حد M^kP_0 وجود دارد و از بردار احتمال آغازی P_0 مستقل است. ساده‌ترین اثباتی که من برای همگرایی سراغ دارم و در آن از فرض قطری‌پذیربودن M استفاده نمی‌شود، در [۲، ص ۲۵۷] است. در مثال ما همهٔ اعضای M^2 مثبت هستند. می‌ماند اینکه با حل $P = MP$، توزیع احتمال حدی P را پیدا کنیم.

اینجا، جایی است که می‌توانیم از تقارن استفاده کنیم. چون چهار اتاقِ گوشه‌ای یکسان هستند، M باید با ماتریسهای T_{ij} که احتمالهای حضور در اتاقهای گوشه‌ای، یعنی p_i و p_j، $1 \le i,j \le 4$، را با هم تعویض می‌کنند، جابه‌جا شود. چون $M(T_{ij}P) = T_{ij}MP = T_{ij}P$، مشاهده می‌کنیم که $T_{ij}P$ نیز یک بردار ویژهٔ احتمال با مقدار ویژهٔ $\lambda = 1$ است. بنابراین، به‌دلیل یکتاییِ این بردار ویژهٔ احتمال، $T_{ij}P = P$. پس «طبق تقارن» P دارای شکل ویژهٔ $P = (x,x,x,x,y)$ است که در آن $1 = \sum p_i = 4x + y$.
حال دستگاه معادلات $P = MP$ تنها شامل دو مجهول x و y است. اولین معادلهٔ این دستگاه، $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$ است، یعنی $4x = 3y$. با توجه به $4x + y = 1$ به‌دست می‌آید $x = \frac{3}{16}$، $y = \frac{1}{4}$. بنابراین ۲۵٪ از زمان در اتاق مرکزی و ۱۸٫۷۵٪ آن در هر یک از اتاقهای گوشه‌ای سپری می‌شود. تقارنْ محاسبه‌ای را که بالقوه می‌توانست شلوغ و درهم برهم باشد به محاسبه‌ای ساده تبدیل کرد.

شکل ۱ اطلاع بیشتری به‌دست می‌دهد. برای بهره‌گیری از تقارن، به دنبال تعویض متغیرهایی مانند T می‌گردیم به‌طوری که مسألهٔ قبلی $\mathscr{P}$ و مسألهٔ جدید Q یکسان باشند: $\mathscr{P} = T^{-1}\mathscr{P}T$.

ب) *ناوردایی تحت انتقال.* اگر خانواده‌ای از تقارنها موجود باشند، می‌توان اطلاعات بیشتری به‌دست آورد. ما این موضوع را ابتدا در مورد یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت چون $Lu = au'' + bu' + cu$ بررسی می‌کنیم. در اینجا L با *تمام عملگرهای انتقال* T_α که به‌صورت $(T_\alpha u)(x) := u(x+\alpha)$ تعریف می‌شوند جابه‌جا می‌شود، بنابراین به‌ازای هر αی مختلط، $T_\alpha L = LT_\alpha$. این انتقالها گروه پیوسته‌ای از تقارنها هستند: $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$. توابع ویژهٔ انتقالها، تابعهای نمایی هستند: $T_\alpha e^{cx} = \mu e^{cx}$ که در آن $\mu = e^{c\alpha}$. ادعا می‌کنیم که این تابعهای نمایی، توابع ویژهٔ L نیز می‌باشند. هر چند نشان دادن این موضوع به‌طور مستقیم کار ساده‌ای است، ما در حالت کلیتر درستی آن را برای هر نگاشت خطی L که با تمام انتقالها جابه‌جا می‌شود اثبات می‌کنیم؛ معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت و معادلات دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت نمونه‌های دیگری از این قبیل هستند.

می‌نویسیم $q(x;\lambda) = Le^{\lambda x}$. چون $T_\alpha e^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha}e^{\lambda x}$، داریم

$$T_\alpha Le^{\lambda x} = T_\alpha(q(x;\lambda)) = q(x+\alpha;\lambda)$$

و

$$LT_\alpha(e^{\lambda x}) = e^{\lambda\alpha}Le^{\lambda x} = e^{\lambda\alpha}q(x;\lambda)$$

با مقایسهٔ اینها در $x = 0$، مشاهده می‌کنیم که اگر نگاشت خطی L با انتقالها جابه‌جا شود، آنگاه به‌ازای هر α، $q(\alpha;\lambda) = q(0;\lambda)e^{\lambda\alpha}$؛ به‌عبارت دیگر، $q(x;\lambda) = q(0;\lambda)e^{\lambda x}$. اگر بنویسیم $Q(\lambda) := q(0;\lambda)$، نتیجه می‌گیریم

$$Le^{\lambda x} = Q(\lambda)e^{\lambda x} \qquad (۱۶)$$

پس به‌ازای هر λ، $e^{\lambda x}$ یک تابع ویژهٔ L است و مقدار ویژهٔ متناظر با آن برابر $Q(\lambda)$ می‌باشد.

به‌طور صوری، از (۱۶) برای پیداکردن جوابی از $Lu = f$ استفاده می‌کنیم. می‌نویسیم $f(x) = \sum f_\lambda e^{\lambda x}$ و به دنبال جوابی چون u به‌صورت $u(x) = \sum u_\lambda e^{\lambda x}$ می‌گردیم. با استفاده از (۱۶)، $Lu = \sum u_\lambda Q(\lambda)e^{\lambda x}$. برای حل معادلهٔ همگن $Lu = 0$، λ را برابر یکی از ریشه‌های $Q(\lambda)$ می‌گیریم. در مورد معادلهٔ ناهمگن $Lu = f$ ضرایب را تطبیق می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $u_\lambda = f_\lambda/Q(\lambda)$. پس $u(x) = \sum[f_\lambda/Q(\lambda)]e^{\lambda x}$ یک جواب است. در این فرمولها می‌توان سریها/انتگرالهای استاندارد فوریه و روشهای تبدیل لاپلاس را بازشناخت. به‌همین دلیل است که سریهای فوریه و تبدیلهای فوریه و لاپلاس این همه در معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت سودمند هستند. مقدار $Q(\lambda)$ برای هر مسأله به‌طور جداگانه تعیین می‌شود. چون $Q(\lambda)$ در مخرج جواب ظاهر می‌شود، صفرهای آن نقش مهمی ایفا می‌کنند. نکته این است که فقط با استفاده از ناوردایی تحت انتقال، می‌دانیم چگونه جلو برویم.

برای اینکه کاربردی فوری از این موضوع را ببینیم، به حالت خاص $Lu = au'' + bu' + cu$ که a و b و c ثابت هستند بازمی‌گردیم. در اینجا $Le^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}$، بنابراین $Q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. به‌ویژه اگر $Q(r) = 0$، آنگاه $u = e^{rx}$ جواب معادلهٔ همگن $Lu = 0$ است؛ حال آنکه اگر $Q(r) \neq 0$، آنگاه $u(x) = e^{rx}/Q(r)$ یک جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن $Lu = e^{rx}$ می‌باشد. اگر $Q(r) = 0$ ولی $Q'(r) \neq 0$، آنگاه با مشتق‌گیری از (۱۶) نسبت به λ و محاسبهٔ مقدار آن در $\lambda = r$ می‌توان $Lu = e^{rx}$ را حل کرد. به‌همین نحو، اگر r یک ریشهٔ دوگانهٔ $Q(\lambda) = 0$ باشد آنگاه همچنین $Q'(r) = 0$؛ در اینجا مشتق‌گیری از (۱۶) نسبت به λ و محاسبهٔ مقدار آن در $\lambda = r$ مشخص می‌کند که $u(x) = xe^{\lambda x}$ نیز یک جواب معادلهٔ همگن است، واقعیتی که در درسهای معادلات دیفرانسیل مقدماتی، غالباً برای دانشجو گیج‌کننده است.

یک تفاوت فرهنگی جالب توجه در نحوهٔ نوشتن جواب عمومی $u'' + u = 0$ بین ریاضیدانان و فیزیکدانان وجود دارد. ریاضیدانان می‌نویسند $u(x) = A\cos x + B\sin x$، که بر خطی‌بودن فضای جوابها

تأکید می‌کند در حالی‌که فیزیکدانان **می‌نویسند** $u(x) = C\cos(x+\alpha)$، که برناوردایی تحت انتقال تأکید می‌ورزد.

به‌عنوان تمرین، از ناوردایی تحت انتقال استفاده کرده، نظریه‌ای برای معادلات تفاضلی خطی مرتبهٔ دو با ضرایب ثابت

$$au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=f(n)$$

ارائه دهید. دنبالهٔ فیبوناتچی $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ با شرایط اولیهٔ $u_0=0$ و $u_1=1$، یک حالت خاص است.

ناوردایی تحت عمل ضرب $x\mapsto cx$ با ناوردایی تحت انتقال ارتباط نزدیکی دارد: اگر قرار دهیم $x=e^z$، آنگاه با انتقال‌دادن z، x در مقداری ثابت ضرب می‌شود. با توجه به این نکته، می‌توان به بررسی عملگر دیفرانسیل اویلر $Lu=\alpha x^2u''+\beta xu'+\gamma u$ پرداخت که با عملگر تجانسی $x\mapsto cx$ جابه‌جا می‌شود. در اینجا تبدیل مشابه تبدیل فوریه تبدیل ملین[1] نامیده می‌شود.

عملگر لاپلاس در فضای اقلیدسی تحت انتقالها و تبدیلهای متعامد ناورداست؛ روی یک خمینهٔ ریمانی، لاپلاسین تحت تمام طولپاییها[2] ناورداست. معادلهٔ موج تحت تبدیلات لورنتس ناورداست (انتهای این بخش را ببینید). نکتهٔ اساسی این است که ناوردایی تحت یک گروه، خودبه‌خود فرمولهایی بنیادی را به دنبال دارد.

پ) *ناورداییهای پیچیده‌تر تحت گروهها.* در مسائل پیچیده‌تر ممکن است تقارنی وجود داشته باشد که تشخیص یا به‌کار بردن آن بدیهی نباشد. سوفوس لی نظریه‌ای را که ما اکنون گروههای لی می‌نامیم خلق کرد تا از تقارن در حل معادلات دیفرانسیل بهره گیرد. نظر وی تعمیم نظریهٔ گالوا به معادلات دیفرانسیل بود. نظریهٔ به‌دست آمده در سرتاسر ریاضیات فوق‌العاده اهمیت پیدا کرده است. به‌عنوان اولین مثال، ملاحظه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax^2+by^2}{cx^2+dy^2}$$

a، b، c، d ثابت

تحت تعویض متغیر (تجانس) $x\mapsto\lambda x$، $y\mapsto\lambda y$ به‌ازای هر مقدار $\lambda>0$ ناورداست. به‌عبارت دیگر، اگر $y=\varphi(x)$ یک جواب باشد، آنگاه $\lambda y=\varphi(\lambda x)$ نیز چنین است، یعنی $y=\varphi(\lambda x)/\lambda$. این موضوع ما را به فکر می‌اندازد که متغیر جدیدی وارد کارکنیم که تحت این تجانس ناورداست: $w=\frac{y}{x}$. در این صورت w در معادلهٔ $xw'=(a+bw^2)/(c+dw^2)-w$ صدق می‌کند که با جداسازی متغیرها قابل حل است. معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ دارای تقارنی از نوع تجانس نسبت به نقطهٔ تقاطع خطهای $ax+by+p=0$ و $cx+dy+q=0$ است. لی نشان داد بسیاری از فرمولهای پیچیدهٔ موجود برای حل معادله‌های دیفرانسیل، نمونه‌های خاصی از ناوردایی تحت گروهی از تقارنها هستند. کارهای او نشان داد که بسیاری از شگردهای ترساننده که باعث باختن روحیهٔ دانشجویان کارشناسی می‌شود نمونه‌هایی از بهره‌گیری از تقارن هستند. مثال بعدی چندان ساده نیست، بنابراین اندکی باقاعده‌تر عمل خواهیم کرد.

معادله‌های غیرخطی به شکل $\Delta u=f(x,u)$ به‌کرات در کاربردها پیش می‌آیند. برای نمونه، حالتهای خاصی که در آنها $f(x,u)$ به شکل

1. Mellin 2. isometries

$|x|^a u^b$ و $|x|^c e^u$ است در اختر فیزیک (معادلهٔ اِمدِن‌ـفاولر[1])، آنالیز مختلط و هندسهٔ ریمانی همدیس پیش می‌آیند. ما به اختصار دربارهٔ

$$\Delta u=|x|^ce^u \tag{17}$$

در $\mathbb{R}^n$ از نظر تقارن بحث می‌کنیم. هرچند رهیافتهایی اصولی برای جستجوی تقارن وجود دارد، در عمل معمولاً سعی می‌کنند حدس بزنند؛ اگر پیداکردن تقارنها به همان سختی حل مسألهٔ اولیه باشد، این روش هیچ کمکی نمی‌کند.

از سمت راست (۱۷) چنین برمی‌آید که باید به دنبال گروه تقارنی به شکل $G:(x,y)\mapsto(\alpha x, u+\lambda)$ بگردیم، یعنی تعویض متغیرهای $\tilde x=\alpha x$ و $\tilde u=u+\lambda$ را که در آن $\alpha>0$ و λ ثابت هستند امتحان کنیم. فرض کنید $\tilde\Delta=\partial^2/\partial\tilde x_1^2+\dots=\alpha^{-2}\Delta$ لاپلاسین نسبت به این متغیرهای جدید باشد. در این صورت $\tilde u(\tilde x)$ جوابی از $\tilde\Delta\tilde u=[\alpha^{c+2}e^\lambda]^{-1}|\tilde x|^ce^{\tilde u}$ است. پس اگر بگیریم $\alpha^{c+2}e^\lambda=1$ و لذا $\lambda=-(c+2)\ln\alpha$، آنگاه $\tilde u(\tilde x)$ به‌ازای هر مقدار α یک جواب (۱۷) خواهد بود. به‌عبارت دیگر اگر $u=\varphi(x)$ یک جواب باشد، آنگاه $u(x)-(c+2)\ln\alpha=\varphi(\alpha x)$ نیز چنین است، یعنی به‌ازای هر $\alpha>0$، $u(x)=\varphi(\alpha x)+(c+2)\ln\alpha$. گروه تقارن عبارت است از $G_\alpha:(x,u)\mapsto(\alpha x,u-(c+2)\ln\alpha)$. این به‌ازای $\alpha=1$ نگاشت همانی است.

برای ادامهٔ بحث، یادآوری می‌کنیم که لاپلاسین تحت گروه متعامد ناورداست: اگر $u(x)$ یک جواب باشد، $u(Rx)$ نیز برای هر تبدیل متعامد R چنین است. بنابراین معقول است به دنبال جوابهای خاصی به شکل $u=u(r)$، با $r=|x|$ بگردیم که تحت گروه متعامد ناوردا هستند. با نوشتن لاپلاسین در مختصات کروی به

$$u''+\frac{n-1}{r}u'=r^ce^u$$

می‌رسیم که در آن $u'=du/dr$. می‌دانیم که این معادله تحت تعویض متغیرهای

$$\tilde r=\alpha r\ ,\ \tilde u=u-(c+2)\ln\alpha \tag{18}$$

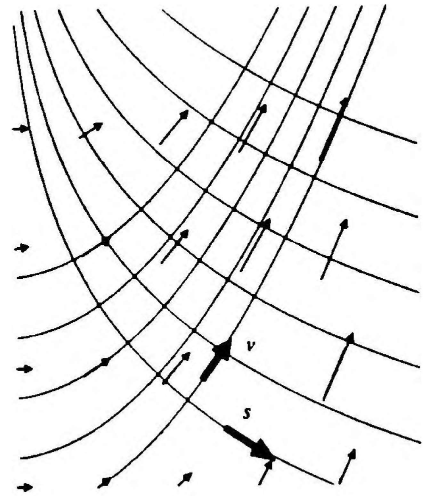
ناورداست. به‌ازای r و uی ثابت، وقتی α را تغییر می‌دهیم، (۱۸) خمی در صفحهٔ $\tilde r$، $\tilde u$ تعریف می‌کند. طبیعی است مختصات جدیدی تعریف کنیم که در آن این خمها خطهای راستی مثلاً موازی با محور قائم باشند. ما یک تابع $s=s(\tilde r(r,u,\alpha),\tilde u(r,u,\alpha))=s(\alpha r,u-(c+2)\ln\alpha)$ می‌خواهیم که روی هر یک از این خمها ثابت باشد؛ این توابع برای انتخاب خمی که روی آن قرار داریم به‌کار می‌رود. تابع دیگر

$$v=v(\tilde r(r,u,\alpha),\tilde u(r,u,\alpha))=v(\alpha r,u-(c+2)\ln\alpha)$$

به‌عنوان یک پارامتر نرمال‌شده روی این خمها به‌کار **می‌رود** و طوری انتخاب می‌شود که مشتق سویی v در طول این خمها برابر یک باشد؛ شکل ۴ را ببینید. بنابراین، شرایط عبارت‌اند از

$$\frac{\partial s}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=1}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=1}=1 \tag{19}$$

1. Emden-Fowler



شکل۴

به کمک قاعدهٔ زنجیری می‌توان اینها را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$rs_r - (c+2)s_u = 0, \quad rv_r - (c+2)v_u = 1 \qquad (۲۰)$$

که در آن s_r و غیره، مشتقهای جزئی هستند. با استفاده از میدان برداری مماس V بر این خمها داریم

$$V := \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=1}\frac{\partial}{\partial u} = r\frac{\partial}{\partial r} - (c+2)\frac{\partial}{\partial u}$$

می‌توانیم (۲۰) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$Vs = 0, \qquad Vv = 1$$

V را مولد بینهایت کوچکِ تقارن می‌نامند. در این مختصات جدید، با انتگرالگیری از (۱۹)، ناوردایی (۱۸) چنین می‌شود

$$\tilde{s} = s, \qquad \tilde{v} = v + \alpha \qquad (۲۱)$$

یک جواب خاص بدیهی برای معادلهٔ دوم (۲۰)، $v = \ln r$ است؛ یک جواب بدیهی دیگر $v = -u/(c+2)$ است که آن هم صادق است.

حل معادلهٔ اول (۲۰) سرراست است. رهیافت متعارف برای حل $a(x,y)\psi_x + b(x,y)\psi_y = 0$ و یافتن $\psi(x,y)$، عبارت است از حل معادلهٔ دیفرانسیل عادی $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ و نوشتن جواب آن به شکل $\psi(x,y) = C$، که C ثابت انتگرالگیری است. این $\psi(x,y)$ جواب این معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقهای جزئی است، همان‌طورکه هر تابعی از آن نیز چنین است. در کاربرد مورد نظر ما جواب $\frac{du}{dr} = -(c+2)/r$ عبارت است از $u = -(c+2)\ln r + C$ و درنتیجه $s := \psi(r,u) = u + (c+2)\ln r$. [رهیافتی دیگر برای به‌دست آوردن $s(r,u)$ این است: α را از معادله‌های (۱۸) حذف کرده به‌دست آورید: $\tilde{u} + (c+2)\ln\tilde{r} = u + (c+2)\ln r$. پس تابع $s = (c+2)\ln r + u$ در طول هر یک از این خمها ثابت است]. چون هر تابعی از s نیز همین ویژگی را دارد، می‌توان از این انعطاف‌پذیری بهره جست و یک s «ساده» انتخاب کرد. در این مختصات جدید، $s = u + (c+2)\ln r$، $v = \ln r$. پس از محاسباتی که بدون زحمت هم نیست، متوجه می‌شویم که $v(s)$ در

$$\ddot{v} = (n-2)[1 - (c+2)\dot{v}]\dot{v}^2 - e^s\dot{v}^3$$

صدق می‌کند که $\dot{v} = dv/ds$ و $\ddot{v} = d^2v/ds^2$. چون این معادله شامل خود v نیست، با جایگذاری $w = \dot{v}$ معادله‌ای از مرتبهٔ *اول* برحسب $w(s)$ به‌دست می‌آید. وقتی $n = 2$، یعنی درست در حالتی‌که از نظر کاربردی مورد توجه است، این معادله به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود.

یک *تمرین مفید*، تکرار این تحلیل برای $\Delta u = |x|^a u^b$ در $\mathbb{R}^n$ و توجه به این نکته است که معادلهٔ به‌دست آمده، وقتی $\frac{n-2}{2} = \frac{a+2}{b-1}$، یعنی باز هم در حالتی‌که از لحاظ کاربرد در فیزیک و هندسه مهم است، به‌طور چشمگیری ساده می‌شود. با استفاده از تقارن می‌توان مسائلی را حل کرد که بدون آن حل‌ناپذیرند.

یکی از کاربردهای تحسین‌برانگیز تقارن، محاسبهٔ انرژیِ اولین انفجار اتمی توسط تیلر[1] بود که تنها با بهره‌گیری از تقارن و براساس اندازه‌گیری‌هایی صورت گرفت که از روی عکسهایِ در دسترس همگان انجام شده بود. برای ملاحظهٔ شرحی در این زمینه به [۳، فصل ۱] مراجعه کنید. مرجعهای [۳] و [۱۴] چگونگی بهره‌گیری از تقارن در معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی را نشان می‌دهند.

ت) *قضیهٔ نوتر.* بیشتر معادله‌های دیفرانسیل «طبیعی» به‌صورت معادلات اویلرـلاگرانژ در حساب وردشها ظاهر می‌شوند. درواقع، خیلیها بر این باورند که همواره باید معادلات بنیادی را با استفاده از اصول وردشی صورتبندی نمود. قضیهٔ امی نوتر نشان می‌دهد که چگونه از ناوردایی تقارنیِ یک مسألهٔ وردشی، اتحادهای اساسی ازجمله قوانین جدید بقا نتیجه می‌شود. هر چند بعد از دانستن اینکه چه چیزی را باید ثابت کرد می‌توان اثباتهای مستقیم و کوتاهتری برای این قوانین بقا پیدا کرد، طبق یک نظر، تقارن بسیار عمیقتر و بنیادیتر است. به‌علاوه، تقارن روشی برای پیداکردن قوانین جدید بقا در اختیار می‌گذارد. رک. [۶]، [۷]، [۳]، و [۱۴].

ث) *استفاده از تقارن در معادلهٔ پل*[2]. در اینجا راه دیگری برای استفاده از تقارن را مشاهده می‌کنید. می‌خواهیم همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad (۲۲)$$

را بیابیم. با امتحان کردن می‌توانید فوراً جواب $x = 3$، $y = 2$ را پیدا کنید. آیا جوابهای دیگری هم هست؟ آیا می‌توانید همهٔ جوابها را پیدا کنید؟ این جوابها نقاطی از شبکهٔ اعداد صحیح هستند که روی هذلولی (۲۲) قرار دارند.

می‌نویسیم $X := (x,y)$، $Q(X) := x^2 - 2y^2$ و به جستجوی تقارنی برای هذلولی $Q(X) = 1$ می‌پردازیم که به شکل یک تعویض متغیر خطی $R : (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$ باشد و با ماتریس $R = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ تعریف شده باشد. می‌خواهیم R دارای ویژگی $Q(RX) = Q(X)$ باشد؛ به بیانی صوریتر، به دنبال گروه خودریختی‌های (R) فرم درجهٔ دوم Q هستیم. اگر بتوانیم R را پیدا کنیم و اگر یک جواب $X_1 = (x_1, y_1)$ از $Q(X) = 1$ را داشته باشیم، آنگاه $X_2 := RX_1 = (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1)$ جوابی

1. G. I. Taylor 2. Pell

دیگر است، زیرا $Q(X_2) = Q(RX_1) = Q(X_1) = 1$. بنابراین، شناختن R به ما این امکان را می‌دهد که از روی جوابهای قبلی جوابهای جدید بسازیم.

این خودریختی‌های R، تقارنهای چندجمله‌ای $Q(X)$ را دربرمی‌گیرند، همان‌طور که دورانهای T (تبدیلهای متعامد) دربرگیرندهٔ تقارنهای چندجمله‌ای آشنای $P(X) := x^2 + y^2$ هستند زیرا $P(TX) = P(X)$. اگر X_1 نقطه‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ باشد، آنگاه $X_2 := TX_1$ نقطهٔ دیگری روی همان دایره است.

در مورد چندجمله‌ای درجهٔ دوم ما تقارنهای بدیهی، $x \mapsto \pm x$ و $y \mapsto \pm y$ هستند. ولی ما بیش از این می‌خواهیم. چون

$$\begin{aligned} Q(RX) &= (ax+by)^2 - 2(cx+dy)^2 \\ &= (a^2-2c^2)x^2 + 2(ab-2cd)xy + (b^2-2d^2)y^2 \end{aligned}$$

شرط $Q(RX) = Q(X)$ به این معنی است که $a^2 - 2c^2 = 1$، $ab - 2cd = 0$ و $b^2 - 2d^2 = -2$. اگر a و c را طوری بگیریم که در شرط اول که همان معادلهٔ اصلی (۲۲) است صدق کنند، آنگاه از دو شرط باقی‌مانده نتیجه می‌شود $d = \pm a$ و $b = \pm 2c$. از اینجا همهٔ تقارنهای R چندجمله‌ای درجهٔ دوممان به‌دست می‌آیند.

برای مقاصدی که ما داریم، استفاده از جواب $(3,2)$ که برای (۲۲) پیدا کردیم کفایت می‌کند؛ بنابراین $a = 3$، $c = 2$، $b = 4$، $d = 3$ و $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ما از جواب $X_1 := (x_1, y_1) = (3,2)$ شروع کردیم. با استفاده از این جواب، جوابهای $X_2 = RX_1 = (17,12)$، $X_3 = RX_2 = (99,70)$ و غیره را برای (۲۲) پیدا می‌کنیم. چون $\det R = 1$ و اعضای R اعداد صحیح هستند، هم تقارن R و هم معکوس آن R^{-1} نقاط شبکهٔ اعداد صحیح را به نقاط شبکهٔ اعداد صحیح می‌برند.

نگاشت R دو ویژگی مهم هندسی دارد. برای تشریح آنها، دو نقطهٔ $V_1 := (x_1, y_1)$ و $V_2 := (x_2, y_2)$ روی شاخهٔ سمت راست $(x > 0)$ هذلولی $x^2 - 2y^2 = 1$ در نظر می‌گیریم. این شاخهٔ سمت راست را Γ نامیده می‌گوییم V_1 در پایین V_2 است (می‌نویسیم $V_1 \prec V_2$) اگر $y_1 < y_2$. ویژگیهای هندسی اینها هستند:

- R *شاخه را حفظ می‌کند*: اگر نقطه‌ای چون V روی Γ باشد، آنگاه RV نیز چنین است.
- R *ترتیب را روی Γ حفظ می‌کند*: اگر $V_1 \prec V_2$ آنگاه $RV_1 \prec RV_2$.

توجه کنید که R^{-1} نیز این ویژگیها را دارد. چون R نگاشت پیوسته‌ای از هذلولی به خودش است، به‌دلیل همبندی، شاخهٔ سمت راست یعنی Γ را به خودش یا به شاخهٔ سمت چپ می‌نگارد. با امتحان‌کردن تصویر یک نقطه، مثلاً $(1,0)$ مشاهده می‌کنیم که تصویر در Γ است. به‌علاوه چون R به‌عنوان نگاشتی از تمام صفحه وارون‌پذیر است، تحدید آن به Γ نیز وارون‌پذیر است. بنابراین R به‌عنوان تابعی از مختصهٔ y روی Γ به‌طور یکنوا صعودی یا نزولی است. باز هم با امتحان‌کردن تصویر $(1,0)$ نتیجه می‌گیریم که تحدید R به Γ تابعی صعودی از مختصهٔ y است. این نشان می‌دهد که R ترتیب را روی Γ حفظ می‌کند.

جواب خاص $X_1 := (3,2)$ جواب صحیح مثبتی با کوچکترین مقدار ممکن مثبت برای y_1 است. اگر بنویسیم $X_0 = (1,0)$، این بدان معنی است که $X_0 \prec X_1$ و هیچ جواب صحیح دیگری بین X_0 و X_1 وجود ندارد. چون $Q(RX_1) = Q(X_1) = 1$، ملاحظه می‌کنیم که $X_2 := RX_1 = (17,12)$ نیز جوابی برای (۲۲) است. به‌همین صورت $X_k := (x_k, y_k) = RX_{k-1} = R^k X_0$ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، جواب صحیح مثبت است. این جوابها از یکدیگر متمایزند زیرا مختصهٔ y آنها صعودی است، بنابراین $X_k \prec X_{k+1}$.

به‌علاوه، اینها *تمام* جوابهای صحیح مثبت هستند. اگر جواب دیگری مانند Z وجود داشته باشد، آنگاه به‌ازای kی مناسبی خواهیم داشت $X_k \prec Z \prec X_{k+1}$. بنابراین $R^{-1}Z$ هم یک جواب دیگر است و چون R ترتیب نقاط روی هذلولی را حفظ می‌کند

$$X_{k-1} = R^{-1}X_k \prec R^{-1}Z \prec R^{-1}X_{k+1} = X_k$$

با ادامهٔ این روند، جوابی چون $R^{-k}Z$ بین X_0 و X_1 به‌دست می‌آوریم، زیرا

$$X_0 = R^{-k}X_k \prec R^{-k}Z \prec R^{-k}X_{k+1} = X_1$$

این موضوع با این واقعیت که $X_1 = (x_1, y_1) = (3,2)$ جواب مثبتی بود که مختصهٔ دوم آن تا حد امکان کوچک بود ناسازگار است. نتیجه می‌گیریم که $Z = R^k X_0$، یعنی *مدار* X_0 پس از عمل مکرر R، تمام جوابهای صحیح را به‌دست می‌دهد.

ماتریس R^k را می‌توان با قطری‌کردن آن به‌طور صریح محاسبه کرد. با این‌کار به‌دست می‌آید $R^k = S\Lambda^k S^{-1}$، که در آن Λ ماتریس قطری مربوط به مقدارهای ویژهٔ R، $3 \pm 2\sqrt{2}$ است و S ماتریسی است که ستونهای آن بردارهای ویژهٔ متناظر، یعنی $(\pm\sqrt{2}, 1)$ هستند؛ این بردارها مجانبهای هذلولی را نیز مشخص می‌کنند. پس $X_k = R^k X_0$ از فرمول صریح زیر به‌دست می‌آید

$$X_k = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2}, \frac{(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}\right) \tag{23}$$

فرمول بالا نشان می‌دهد که چنین فرمولهایی ممکن است پیچیده‌تر — و شاید کم‌فایده‌تر — از آنچه انتظار دارید باشند. بیشتر فایدهٔ این فرمول در این است که به تعریف R^t برای $-\infty < t < \infty$، به‌صورت $R^t = S\Lambda^t S^{-1}$ می‌انجامد، بنابراین $R^{s+t} = R^s R^t$.

با استفاده از محاسبه‌ای مشابه، پیداکردن تمام تعویض متغیرهای خطی $x' = \alpha x + \beta t$ و $t' = \gamma x + \delta t$ که عملگر موج $\partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2$ را حفظ می‌کنند، کاری سرراست است. در اینجا c مقداری ثابت است (سرعت صوت یا نور). طبق قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= (\delta^2 - c^2\gamma^2)u_{t't'} + 2(\beta\delta - c^2\alpha\gamma)u_{x't'} \\ &\quad + (\beta^2 - c^2\alpha^2)u_{x'x'} \end{aligned}$$

بنابراین می‌خواهیم $\delta^2 - c^2\gamma^2 = 1$، $\beta\delta - c^2\alpha\gamma = 0$ و $\beta^2 - c^2\alpha^2 = -c^2$. ابتدا γ و δ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\delta^2 - c^2\gamma^2 = 1$، سپس قرار می‌دهیم $\alpha = \pm\delta$، $\beta = \pm c^2\gamma$. برای اینکه جهت حفظ شود علامتهای + را به‌کار می‌بریم. چون $c^2\alpha^2 - \beta^2 = c^2$ و $\cosh^2\sigma - \sinh^2\sigma = 1$،

مرسوم است که بنویسیم $\alpha = \cos\mathrm{h}\sigma$، $\beta = c\sin\mathrm{h}\sigma$. به‌ازای هر σی حقیقی تبدیلی که عملگر موج را حفظ می‌کند عبارت است از

$$x' = (\cos\mathrm{h}\sigma)x + (c\sin\mathrm{h}\sigma)t$$
$$t' = (\frac{۱}{c}\sin\mathrm{h}\sigma)x + (\cos\mathrm{h}\sigma)t \qquad (۲۴)$$

این را *تبدیل لورنتس* می‌نامند. تبدیلهای لورنتس، طول قوس $ds^۲ := dx'^۲ - c^۲dt'^۲ = dx^۲ - c^۲dt^۲$ را نیز در فضا‌ـ‌زمان حفظ می‌کنند و در مطالعهٔ عملگر موج و نسبیت خاص اهمیت اساسی دارند.

در نسبیت خاص، تعویض پارامتر σ در (۲۴) با پارامتر دیگری که از نظر فیزیکی معنی‌دارتر باشد، روشنگر و آموزنده است. اگر محور x با سرعت ثابت V نسبت به محور x' حرکت کند، برای ناظری که روی محور x' است، $x'/t' = V$ سرعت ثابت مبدأ $x = ۰$ بر محور x است. اما با قراردادن $x = ۰$ در (۲۴) داریم

$$V = \frac{x'}{t'} = c\ \tanh\sigma$$

پس

$$\cos\mathrm{h}\sigma = ۱/\sqrt{۱-(V/c)^۲}\ \text{و}\ \sin\mathrm{h}\sigma = (V/c)/\sqrt{۱-(V/c)^۲}$$

با استفاده از این می‌توانیم تبدیل لورنتس (۲۴) را برحسب سرعت V به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$x' = \frac{x+Vt}{\sqrt{۱-(V/c)^۲}} \qquad t' = \frac{(V/c^۲)x+t}{\sqrt{۱-(V/c)^۲}} \qquad (۲۵)$$

۳. چند روش برای اثبات وجود

روشهای مختلفی برای رسیدن به وجود جواب یک معادله در دست است. ابتدا باید سعی نمود بیانی «ساده» برای جواب پیدا کرد. شاید این‌کار به کمک برخی از روشهایی که تا اینجا مورد بحث قرار گرفتند ممکن باشد. در بحث زیر فرض می‌شود این‌کار تا جای ممکن انجام شده است.

دو نوع روش برای رسیدن به وجود در دست است: روشهایی که جواب مشخصی را می‌سازند و آنهایی که فقط وجود یک جواب را اثبات می‌کنند. به‌عنوان مثال، دو رهیافت وجودی محض برای اثبات وجود جواب ارائه خواهم کرد. علاوه بر اینها فرض می‌کنم که خواننده با روشِ ساختنی متعارفِ تقریبهای متوالی که در آن از نقاط ثابتِ نگاشتهای انقباضی استفاده می‌شود آشناست. این روش در منابع بسیاری ارائه شده است و باید پیش از اینها امتحان شود. گفتهٔ هرمان وایل را به خاطر بیاورید که «وقتی می‌توانید مسأله‌ای را با روشهای ساختنی صریح حل و فصل کنید، به استدلالهای وجودی محض رضایت ندهید.» در پرتو این گفته، تأمل دربارهٔ رهیافتهای ساختنی و غیرساختنی برای حل (پیمانهٔ $ax \equiv b(m$ که در بخش ۱.۲ مورد بحث قرار گرفتند مفید است.

۱.۳ روشهای وردشی. یک مثالْ مطلب را به‌روشنی نشان می‌دهد. فرض کنید می‌خواهیم دستگاه معادله‌های

$$x^۳ + ۲xy - ۳y\cos x e^{\sin x} = -۷$$
$$y^۵ + x^۲ - ۳e^{\sin x} = ۵$$

را حل کنیم. آیا این دستگاه جواب دارد؟ بدون بصیرت بیشتر ممکن است جواب این پرسش بدیهی نباشد. اما این دو معادله بیانگر آن هستند که گرادیان تابع

$$u(x,y) := \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۶}y^۶ + x^۲y - ۳ye^{\sin x} + ۷x - ۵y$$

صفر است. پس جوابهای معادلهٔ ما متناظرند با نقاط بحرانی $u(x,y)$. بدیهی است هر قدر از مبدأ دور شویم u بزرگتر می‌شود. بنابراین نقطه‌ای چون $(x_۰, y_۰)$ وجود دارد که u مقدار مینیمم خود را در آن اختیار می‌کند. این مینیمم جوابی برای معادله‌هایمان به‌دست می‌دهد. مشخص‌کردن اینکه جوابهای دیگری هم هست یا نه نیازمند بررسی مفصلتری است.

این رهیافتْ تکنیک سودمندی است برای اثبات اینکه برخی از معادله‌های دیفرانسیل همیشه دست‌کم یک جواب دارند. این روش، «روش مستقیم در حساب وردشها» نامیده می‌شود. در بخش ۲.۲ دیدیم که جوابهای معادلهٔ لاپلاس $\Delta u = ۰$ در یک ناحیهٔ Ω با شرط $u = f$ روی مرز Ω، نقاط بحرانی تابعک

$$J(u) = \frac{۱}{۲}\int\int_{\Omega}(u_x^۲ + u_y^۲)dxdy \qquad (۲۵)$$

هستند. پیرو مثال ابتدای این بخش، برای پیداکردن یک جواب $\Delta u = ۰$، می‌توانیم در میان همهٔ تابعهایی که روی مرز با f برابرند به جستجوی مینیممی برای J بپردازیم. نامنفی‌بودن تابعک J، باعث می‌شود شخص چنین حکم کند که J مینیمم خود را تابعی مانند u اختیار می‌کند و وجود جوابی برای $\Delta u = ۰$ با مقادیر مرزیِ از پیش داده شده به اثبات می‌رسد. این حکم، *اصل دیریکله* نامیده می‌شود.

پس از اینکه ریمان به‌طور چشمگیری این استدلال را در کارش در آنالیز مختلط به‌کار برد، وایرشتراس خاطرنشان کرد که این «اصل» بدیهی نیست زیرا در مسائلی مشابه، تابعک Jی متناظر فقط دارای اینفیمم است و در ردهٔ تابعهای مجاز مقدار مینیممی اختیار نمی‌کند. با وجود این همگان ــ ازجمله وایرشتراس ــ بر این باور بودند که نتایج ریمان در اساس درست هستند. این موضوعْ عامل تسریع‌کننده‌ای در شفاف‌سازی مبانی آنالیز بود که در انتهای قرن نوزدهم انجام شد. ایراد وایرشتراس با کارهای هیلبرت در ۱۹۰۱ و ۱۹۰۹ رفع شد. در این زمینه، تذکر نیچه جالب توجه است: «خطاهای مردان بزرگ قابل احترام‌اند زیرا از کارهای درستِ مردان کوچک ثمربخش‌ترند.»

حساب وردشها روش قدرتمندی است برای اثبات جواب داشتن برخی معادله‌ها.

۲.۳ روشهای نقطهٔ ثابت. یک مثال دیگر. فرض کنید می‌خواهید دستگاه معادله‌های

$$۳x - ۵y = \frac{۲x + ye^{۲-\sin xy}}{۷ + x^۲ + y^۴} - ۱۳$$
$$۲x + ۷۱y = ۹ - \cos(xy + ۱۹e^{x-۵y})$$

را حل کنید. آیا دست‌کم یک جواب وجود دارد؟ باز هم برای اغلب افراد این موضوع بدیهی نیست. شما به معادله‌ها نگاه می‌کنید ... معادله‌ها به شما **نگاه می‌کنند.**

سرانجام ممکن است به این فکر بیفتید که این را به شکل $LX = F(X)$ بنویسید که در آن $X = (x,y)$، L ماتریس ۲ × ۲ی سمت چپ است و $F(X)$ قسمت غیرخطیِ سمت راست است. نکتهٔ اساسی این است که تابع برداری $F(X)$ مستقل از X کراندار است. درواقع $||F(X)|| \leq ۱۰۰$ (مقدار کران برای ما اهمیتی ندارد). به‌علاوه ماتریس L وارون‌پذیر است، پس می‌توانیم معادله‌هایمان را به‌صورت نمادیِ $X = T(X)$ بازنویسی کنیم که در آن $T(X) = L^{-۱}F(X)$. اگر $T(X)$ را نگاشتی از صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ به خودش در نظر بگیریم، آنگاه معادلهٔ $X = T(X)$ به این معنی است که جواب X که دنبالش می‌گردیم یک *نقطهٔ ثابت* نگاشت T است. چون $||F(X)|| \leq ۱۰۰$، می‌دانیم که برای ثابتی مانند R که مستقل از X است، $||T(X)|| \leq R$. (می‌توانیم بگیریم $R = ۱۰۰۰۰$، اما این ارتباطی به چیزهایی که فعلاً مورد نظر ماست ندارد). پس یک نابرابری پیشینی[1] پیدا کرده‌ایم: اگر جوابی برای معادلهٔ ما وجود داشته باشد، باید در قرص بستهٔ $B = \{||X|| \leq R\}$ قرار داشته باشد. چون T هر نقطهٔ X را به توی B می‌نگارد، به‌ویژه خود B را هم به توی B می‌نگارد.

حال می‌توانیم قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور را به‌کمک بطلبیم، قضیه‌ای که معمولاً در درسهای توپولوژی اثبات می‌شود (برای ملاحظهٔ اثباتی زیرکانه با استفاده از قضیهٔ استوکس، [۵، ص ۷۵] را ببینید). قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور چنین حکم می‌کند که هر نگاشت پیوسته از یک قرص بسته به خودش باید دست‌کم یک نقطهٔ ثابت داشته باشد. این نقطهٔ ثابت جوابی است که در جستجوی آن هستیم.

قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر[2]، قضیهٔ براور را به فضاهای با بعد نامتناهی تعمیم می‌دهد. این تعمیم احتیاج به یک فرض اضافیِ فشردگی دارد. اگر B فضایی باناخ باشد و $S \subset B$، آنگاه نگاشت پیوستهٔ $T : S \to B$ فشرده است اگر به‌ازای هر مجموعهٔ کراندار $Q \subset S$، مجموعهٔ بستهٔ $\overline{f(Q)}$ فشرده باشد. برای مثال فضاهای باناخ $C(S^۱)$ و $C^۱(S^۱)$، یعنی توابع پیوستهٔ ۲πـتناوبی و توابع پیوسته‌ـمشتق‌پذیر تناوبی روی دایرهٔ $S^۱$ را با نرمهای معمولشان در نظر بگیرید:

$$||u||_{C(S^۱)} = \max_{۰\leq x\leq ۲\pi} |u(x)|$$

و

$$||u||_{C^۱(S^۱)} = \max_{۰\leq x\leq ۲\pi} |u(x)| + \max_{۰\leq x\leq ۲\pi} |u'(x)|$$

شاید برای تأکید بر تناوبی‌بودن بایستی می‌نوشتیم $C_{\text{تناوبی}}$. از قضیهٔ آرزلاـآسکولی[3] نتیجه می‌شود که نگاشت همانی $id : C^۱(S^۱) \hookrightarrow C(S^۱)$ فشرده است. قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر می‌گوید که اگر $S \subset B$ مجموعه‌ای بسته، محدب و کراندار باشد و اگر $T : S \to S$ نگاشتی فشرده باشد، آنگاه T دارای نقطهٔ ثابت است [۱۳، ص ۳۲]. شاودر آن را به‌خصوص برای عملگرهای دیفرانسیل جزئی طراحی کرده بود. به‌عنوان کاربردی از آن، وجود دست‌کم یک جواب تناوبی $u(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π برای

$$u' + u = F(x,u)$$

را تنها با این فرض اثبات می‌کنیم که $F(x,s)$ تابعی هموار است، نسبت به x تناوبی با دورهٔ تناوب ۲π است و به‌طور یکنواخت کراندار است، یعنی $|F(x,s)| \leq k$، که ثابت k مستقل از x و s است.

یک نکتهٔ اساسی این است که معادلهٔ خطی $Lu = u' + u = f(x)$ به‌ازای هر تابع تناوبیِ هموار $f(x)$ یک جواب یکتای ۲πـتناوبی دارد. با محاسبه‌ای مستقیم به‌دست می‌آید

$$u(x) = \frac{۱}{e^{۲\pi} - ۱}\int_۰^{۲\pi} e^{t-x} f(t)dt + \int_۰^x e^{t-x} f(t)dt$$

(معادله را به‌صورت معمول نسبت به $u(x)$ حل کنید، سپس $u(۰)$ را چنان انتخاب کنید که u تناوبی باشد: $u(۰) = u(۲\pi)$). این فرمولْ نابرابری $||u||_{C(S^۱)} \leq ||f||_{C(S^۱)} = ||Lu||_{C(S^۱)}$ را نیز به‌دست می‌دهد. اما $|u'| = |Lu - u| \leq |Lu| + |u|$؛ پس براورد زیر را به‌دست می‌آوریم

$$||u||_{C^۱(S^۱)} \leq ۳||Lu||_{C(S^۱)} \qquad (۲۶)$$

این بدان معنی است که $L^{-۱} : C(S^۱) \to C^۱(S^۱)$ نگاشتی پیوسته است. مسألهٔ خود را به شکل $u = L^{-۱}F(x,u)$ بازنویسی می‌کنیم. پس در جستجوی یک نقطهٔ ثابت نگاشت $T(u) := L^{-۱}F(x,u)$ هستیم. چون T را به‌صورت ترکیب

$$C(S^۱) \xrightarrow{F} C(S^۱) \xrightarrow{L^{-۱}} C^۱(S^۱) \overset{id}{\hookrightarrow} C(S^۱)$$

تعریف کردیم، پس نگاشتی فشرده است. از آنجا که $F(x,s)$ کراندار است، به‌ازای یک ثابت K داریم

$$||T(u)||_{C(S^۱)} \leq K \quad \text{برای هر } u \in C(S^۱)$$

این به‌طور پیشینی ثابت می‌کند که هر جواب uی مسأله‌مان باید در $||u||_{C(S^۱)} = ||T(u)||_{C(S^۱)} \leq K$ صدق کند. فرض کنید S گوی زیر باشد

$$S := \{u \in C(S^۱) : ||u||_{C(S^۱)} \leq K\}$$

قضیهٔ شاودر نشان می‌دهد دست‌کم یک جواب تناوبی $u \in S$ وجود دارد و $u \in C^۱(S^۱)$. با یک استدلال موردی می‌توان نشان داد که اگر $F(x,s)$ هموار باشد، آنگاه جواب u نیز چنین است.

در مورد $Lu := -\Delta u + cu = F(x,u)$ به‌همراه شرایط مرزی مختلف نیز اگر فرض کنیم L وارون‌پذیر و F کراندار باشد نتیجهٔ مشابهی به‌دست می‌آید. اما برای اثبات یک نابرابری مشابه نابرابری اساسی (۲۶) باید از فضاهای تابعی پیچیده‌تری مانند فضاهای سوبولف استفاده شود.

۴. یک سؤالِ پاسخ داده نشده

وقتی یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ به‌ظاهر مقدماتی در نظریهٔ اعداد می‌بینیم تعجب نمی‌کنیم. ولی خیلیها نمی‌دانند که بسیاری معادله‌های دیفرانسیل جزئی

1. a priori 2. Schauder 3. Arzelá-Ascoli

غیرخطیِ جالب و به‌ظاهر ساده نیز هستند که در مورد آنها اطلاعات ناچیزی داریم؛ فرض کنید $f(x,y)$ تابعی هموار باشد. آیا معادلهٔ مونژ-آمپر

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x,y) \qquad (۲۷)$$

همواره دست‌کم یک جواب $u(x,y)$ دارد؟ این سؤال، سؤالی معمولی است؛ هیچ شرط اضافی مانند شرایط اولیه یا مرزی وضع نشده است. با این حال هنوز پاسخ آن‌را نمی‌دانیم. بسیاری از حالتهای آن بررسی شده‌اند. اگر $f(x,y)$ دارای بسط سری توانی باشد، می‌توانیم قضیهٔ کوشی-کوالفسکایا را به‌کمک فراخوانده، جوابی به‌صورت سری توانی به‌دست آوریم. اگر $f(0,0) > 0$، می‌توانیم از نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی بیضوی استفاده کرده، ثابت کنیم جوابی وجود دارد. اگر $f(0,0) < 0$ به نظریهٔ معادله‌های هذلولوی متوسل می‌شویم. حالت دشوار هنگامی است که $f(0,0) = 0$. این حالت نیز وقتی در نزدیکی مبدأ $f(x,y) \geq 0$، یا وقتی $\nabla f(0,0) \neq 0$، مورد بررسی قرارگرفته است. رک. [۱۱] و [۱۲]. در این باره چیز بیشتری نمی‌دانیم. شاید تابعهای همواری وجود داشته باشند که $f(0,0) = 0$ و در مورد آنها جوابی وجود نداشته باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل مشابهی در هندسه مطرح می‌شود. به‌طور موضعی، رویهٔ دوبعدی مجرد با متریک ریمانی، یک همسایگی مبدأ در صفحهٔ u و v است که جزء طول قوس خمهای واقع در آن همسایگی به‌صورت زیر معین می‌شود

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \qquad (۲۸)$$

با درنظر گرفتن خمهای $u(t)$ و $v(t)$ روی یک رویهٔ دوبعدی با مختصات موضعی u و v در $\mathbb{R}^n$، همواره طول قوسی به این شکل به‌دست می‌آورید. آیا با این کار تمام متریکهای ریمانی مجرد ممکن در حالت خاص رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$ به‌دست می‌آید؟ به‌عبارت دیگر، اگر طول قوسی چون ds^2 به شکل (۲۸) داده شده باشد، آیا به‌طور موضعی همواره می‌توان رویه‌ای مثل $x = x(u,v)$، $y = y(u,v)$، $z = z(u,v)$ در $\mathbb{R}^3$ پیدا کرد که طول قوس آن همین ds^2 باشد؟ مختصرتر اینکه، آیا هر خمینهٔ ریمانی دوبعدی مجرد را می‌توان موضعاً به‌صورت طولپا در $\mathbb{R}^3$ نشانید؟ می‌توان نشان داد که در $\mathbb{R}^4$ رویه‌ای با این طول قوس وجود دارد، اما حالت جالبتر $\mathbb{R}^3$ هنوز حل و فصل نشده است. از دیدگاهی، معادلهٔ دیفرانسیل جزئیی که باید حل شود اصولاً همان (۲۷) است. در اینجا انحنای گاوسی $K(x,y)$ نقش تابع $f(x,y)$ را ایفا می‌کند، بنابراین می‌دانیم که اگر $K(0,0) \neq 0$، یک نشانندهٔ موضعی وجود دارد. حالت دشوار باقی‌مانده آن است که $K(0,0) = 0$.

چنین مسائلی مسائل مبارزطلب آینده هستند.

مراجع

1. V. I. Arnol'd, *The Theory of Singularities and its Applications*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale del Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, published by the Press of the University Cambridge, England 1991.

2. R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw Hill, 1960, reprinted (1995) by SIAM in their series "Classics in Applied Mathematics."

3. G. W. Bluman, and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1989, New York. Applied Mathematical Sciences **81**.

4. H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, Harper and Row, New York, 1952 (6th edition published by Cambridge Univ. Press, 1992).

5. M. P. do Carmo, *Differential forms and Applications*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.

6. I. M. Gelfand, and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963 (translated from the Russian).

7. M. Giaquinta, and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations*, Grundlehren Vols. 310-311, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

8. M. Golubitsky, and D. G. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*, Applied mathematical sciences; 51, 69, Springer-Verlag, 1985, New York.

9. S. Hildebrandt, and A. Tromba, *The Parsimonious Universe*, Springer-Verlag, 1996. New York (an earlier version: *Mathematics and Optimal Form* was published in the Scientific American Library, 1985).

10. J. L. Kazdan. `http://www.math.upenn.edu/~kazdan/solving.html`.

11. C-S Lin, "The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature", *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 213-230.

12. C-S Lin, "The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly," *Comm. Pure Appl. Math.*, **39** (1986), 867-887.

13. L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York University Lecture Notes, 1974.

14. P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, 2nd ed., in the series Graduate texts in mathematics, **107**, Springer-Verlag, 1993, New York.

15. J. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, 1950, reprinted by R. Dover, 1962.

16. C. R. Wilie, and L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*. 6th ed, McGraw-Hill, New York, 1995.

******

• Jerry L. Kazdan, "Solving equations, an elegant legacy", *Amer. Math. Monthly*, (1) **105** (1998) 1-21.

* جری کزدان، دانشگاه پنسیلوانیا، آمریکا

kazdan@math.upenn.edu