طبلهای همصدا*

جاناتان چپمن*
ترجمهٔ مجید حسینی

۱. مقدمه

در سال ۱۹۶۶ کاتس [۷] این سؤال را مطرح کرد که «آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟» یعنی اگر فرکانسهایی را که طبل با آنها ارتعاش می‌کند بدانیم آیا می‌توانیم شکل آن را معین کنیم؟ از دیدگاه ریاضی این سؤال متناظر است با مسألهٔ زیر. اگر u جابه‌جایی پوستهٔ D از موقعیت متوسطش باشد آنگاه u در روابط زیر صدق می‌کند

$$\nabla^۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} \quad \text{در } D، \qquad (۱)$$

$$u = ۰ \quad \text{روی } \partial D، \qquad (۲)$$

اگر با استفاده از جداسازی متغیرها، $u(x,y,t) = \psi(t)\phi(x,y)$ در جستجوی جواب برآییم نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\phi_{xx}+\phi_{yy}}{\phi} = \frac{\psi_{tt}}{\psi} = \text{ثابت} = \lambda \text{ مثلاً}$$

بنابراین

$$u = \sin(\sqrt{\lambda} t)\phi(x,y) \qquad (۳)$$

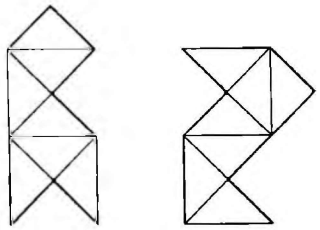
که

$$\nabla^۲\phi + \lambda\phi = ۰ \quad \text{در } D، \qquad (۴)$$

$$\phi = ۰ \quad \text{روی } \partial D، \qquad (۵)$$

مسأله، مسألهٔ ویژه‌ـمقدارهاست: جوابِ ناصفرِ ϕ فقط برای مقدارهای ویژه‌ای از λ که ویژه‌ـمقدار نام دارند موجود است. مجموعهٔ ویژه‌ـمقدارها طیفِ ویژه‌ـمقدارها نام دارد و در این حالت گسسته است. با توجه به رابطهٔ (۳) می‌بینیم که ویژه‌ـمقدارهای λ، مربع فرکانسهای ارتعاش‌اند و به هر ویژه‌ـجواب می‌توان به شکلِ موجی ایستاده، روی حوزهٔ D نگریست. جوابِ کلیِ (۱) و (۲) برهم‌نهشی[۱] است از این جوابهای ویژه.

1. superposition



تصویر۱

سؤالِ کاتس این است که: آیا دو حوزه که طیفِ ویژه‌ـمقدارشان یکی است (ویژه‌ـمقدارها با احتساب چندگانگی[۱] شان شمرده می‌شوند) الزاماً قابل انطباق‌اند؟

ثابت شده است که ویژه‌ـمقدارها برخی ویژگیهای D را مشخص می‌کنند، مثلاً مساحت و محیط و تعداد مؤلفه‌های همبند آن را [۷]. با وجود این، پاسخ سؤال [کاتس]منفی است. تصویر ۱ مثالی را از دو حوزه با طیف ویژه‌ـمقدار یکسان نشان می‌دهد که گوردون و دیگران [۵] آن را عرضه کرده‌اند ([۶] را نیز ملاحظه کنید.)

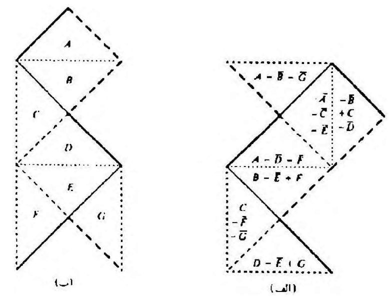
برهانی ساده بر یکی بودن ویژه‌ـمقدارها توسط برنارد [۳] داده شده است (همچنین [۱ و ۲] را ملاحظه کنید) وی نگاشت نشان داده شده در تصویر ۲ را می‌سازد که هر ویژه‌ـتابع حوزهٔ اول را به روی ویژه‌ـتابعی از حوزهٔ دوم با همان ویژه‌ـمقدار A، می‌نگارد. در اینجا $A + B$ یعنی اینکه برای یافتن مقدار تابع در آن مثلث، مقدار تابع را در نقطه‌های متناظر در مثلثهای A و B جمع می‌کنیم. برای کمک به روشن شدن اینکه مثلثها چگونه باید بر هم منطبق شوند از نوعهای مختلفِ خط برای ضلعهای آنها استفاده کرده‌ایم. در برخی حالتها ضروری است که مثلث را حولِ خطِ تقارنش باز تابانیم و این را با $\bar{A}$ نمایش داده‌ایم. فقط تابع صفر به تابع صفر نگاشته می‌شود و در نتیجه هر ویژه‌ـتابع مسألهٔ ویژه‌ـمقدار اول متناظر است با ویژه‌ـتابعی از مسألهٔ ویژه‌ـمقدار دوم، با همان ویژه‌ـمقدار λ. بنابراین هر ویژه‌ـمقدار مسألهٔ اول، ویژه‌ـمقداری از مسألهٔ دوم است (با همان چندگانگی). نگاشتی مشابه از ویژه‌ـتابعهای مسألهٔ دوم به ویژه‌ـتابعهای مسألهٔ اول نشان می‌دهد که هر ویژه‌ـمقدار مسألهٔ دوم ویژه‌ـمقداری از مسألهٔ اول است و بنابراین دو حوزه همطیف‌اند.

در این مقاله، با استفاده از تا کردنِ کاغذ، تعبیری برای ترانهش[۲] جوابی از مسألهٔ اول به جوابی از مسألهٔ دوم به دست می‌دهیم. بدین‌گونه می‌توانیم بسیاری حوزه‌های همطیفِ جدید بسازیم و در آن زمره است مثالی ساده که در آن ویژه‌ـمقدارها به‌صراحت محاسبه می‌شوند. توجه کنید که اخیراً بیوسر و دیگران [۴] روش ترانهش را برای ساختن مثالهای جدیدی از حوزه‌های سطح همطیف به‌کار برده‌اند.

۲. تا کردنِ کاغذ

حوزه‌ای را که به‌صورت برشی از کاغذ مشخص شده و نیز تابعی را که روی مرز حوزه صفر است، در نظر بگیرید. کاغذ را تا کرده حوزه‌ای جدید می‌سازیم. تابعی به‌نام ترانهاده روی حوزهٔ جدید تعریف می‌کنیم که مقدارش برابر است با جمعِ مقدارهای تابعِ اصلی در نقطه‌هایی که روی هم قرار می‌گیرند با این

1. multiplicity 2. transposition

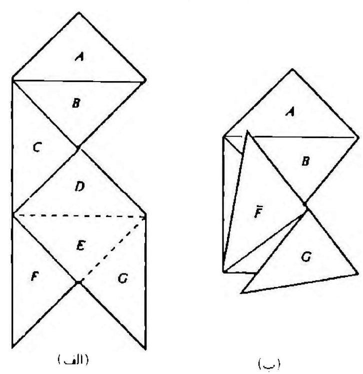


تصویر۲

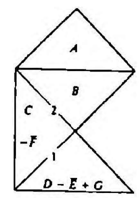
قرارداد که اگر کاغذ وارونه شود به‌جای جمع کردن، مقادیر را کم می‌کنیم. این تابع حتماً روی مرز حوزهٔ جدید صفر است زیرا که بر روی هر تای کاغذ و هر ضلع صفر است. ساختنِ شکلهایی که در آتیه می‌آیند، با تا کردنِ کاغذ، ممکن است برای خواننده سودمند باشد.

مثلاً حوزه‌ای را که در تصویر ۲ الف نشان داده شده و تابعی را که روی مرز این حوزه صفر است در نظر بگیرید. مثلثها را از جلو با A تا G و از پشت با $\bar{A}$ تا $\bar{G}$ مشخص می‌کنیم و حوزه را همان‌طور که در تصویر ۳ نشان داده‌شده تا می‌زنیم (نقطه‌چین نشان‌دهندهٔ تای کاغذ است). در این‌صورت تابعی روی حوزهٔ نشان داده شده در تصویر ۴ به دست می‌آوریم که روی مرز صفر است.

اکنون چندین نسخهٔ حوزهٔ اولیهٔ D را تا می‌کنیم تا حوزه‌های D_1 و D_2 و غیره را بسازیم و اینها را به هم می‌چسبانیم تا حوزهٔ جدید D^* را بسازیم و روی این حوزه ترانهاده را برابر مجموع ترانهاده‌ها روی D_1 و D_2 و غیره تعریف می‌کنیم. حال اگر بتوانیم حوزه‌های D_1 و D_2 و غیره را طوری به هم بچسبانیم که مشتق اول ترانهاده پیوسته باشد آنگاه عملاً ویژه‌تابعی از



تصویر۳



تصویر۴

حوزهٔ جدید D^* ساخته‌ایم.[1]

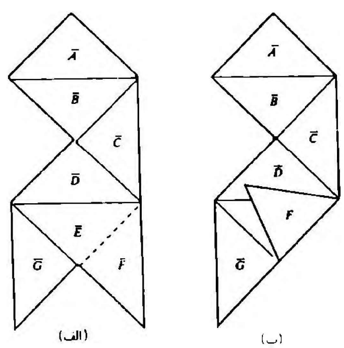
برای اینکه مشتق اول ترانهاده پیوسته باشد کافی است که

الف) هر تا در راستای ضلعی بیرونی از شکلِ جدید باشد.

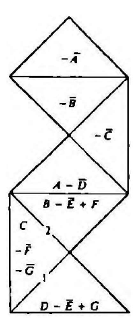
ب) هر یالِ نسخهٔ شکلِ اول که در شکل نهایی قرار می‌گیرد باید همجوار بازتابش باشد بر نسخه‌ای از شکل اول که به آن چسبیده است.

مثلاً مشتق اولِ ترانهاده در طول خطهای (۱) و (۲) در تصویر (۴) ناپیوسته است. ولی اگر همان شکل اولیهٔ طبل را که مانند تصویر ۵ تا شده اضافه کنیم، آنگاه پیوستگیِ مشتق اول در راستای خطهای (۱) و (۲) تضمین می‌شود (تصویر ۶) گرچه مشتق اول حالا در امتداد خطهای دیگر ناپیوسته است. توجه کنید که پیوستگیِ خودِ تابع ترانهاده حتمی است زیرا که تابع اولی در روی مرز هر مؤلفه صفر است.

تصویر ۷ نشان می‌دهد که برای مثالی که در مقدمه آورده شد، چگونه تکّه‌ها با یکدیگر جفت می‌شوند. برای به‌دست آوردن شکلهایی که در تصویر ۷ ب نشان داده شده، سه نسخهٔ شکل اولیه (تصویر ۲ الف) در امتدادِ خطوط نقطه‌چینِ تصویر ۷ الف تا شده‌اند (تصویر ۷ ب نمایی سه‌بعدی است که نشان می‌دهد هر تکّه پیش از آنکه پهن شود چگونه به نظر می‌رسد). سپس این شکلها روی هم قرار می‌گیرند تا شکل نشان داده در تصویر ۲ ب را بسازند (نقطه‌چینها در تصویر ۷ ب مکان هر مؤلفه را در شکل جدید نشان می‌دهد).

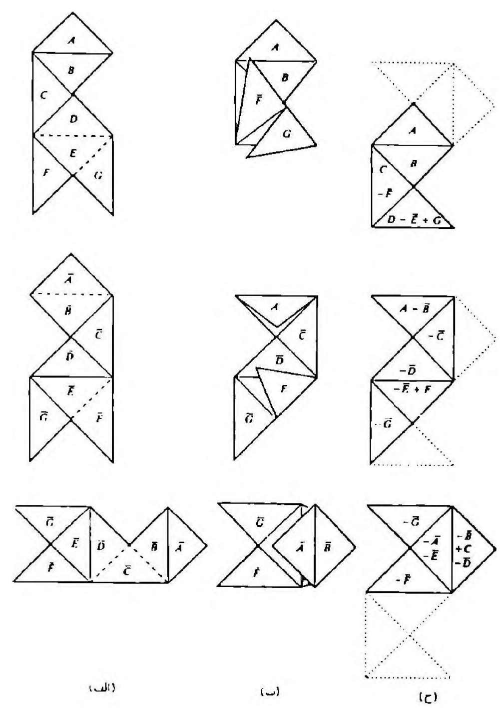


تصویر۵



تصویر۶

۱. تابع حاصل یکبار مشتق‌پذیر است و، مگر احتمالاً روی درزها، در ویژه‌معادله صدق می‌کند. چنین تابعی جواب ضعیفی از معادله است و در نتیجه، بنابر منظم بودن جوابهای معادله‌های بیضوی، جوابی قوی است. در این مورد ر.ک.
G. Folland, Introduction to PDE, PUP, 1976
به‌ویژه نتیجهٔ ۲۸.۶ را پیایی به‌کار برید و بعد نتیجهٔ ۱۰.۶ را، تا ببینید که تابع ترانهاده به‌راستی ویژه‌تابع است.

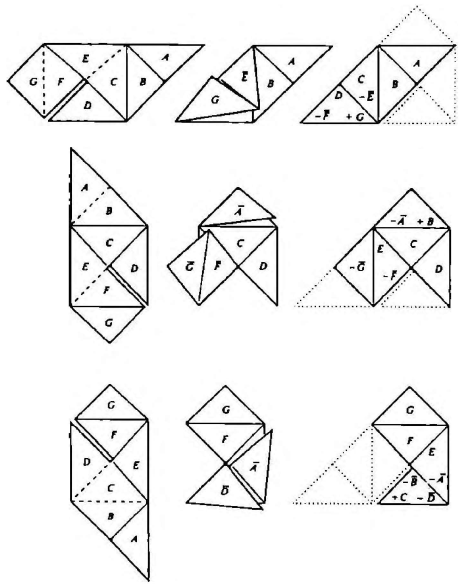


تصویر۷

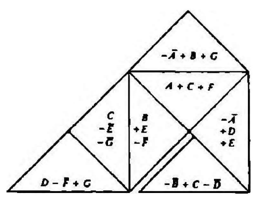
در تصویرهای ۸ و ۹ مثال دیگری از حوزه‌های همطیف و ترانهشِ جوابی روی یک حوزه بر جوابی روی حوزهٔ دیگر داده شده است. برشهای موجود در شکلها را باید بدین‌صورت تعبیر کرد که پهنای صفر دارند و برای روشن شدن مطلب نشان داده شده‌اند.

چون روشِ ساختنِ تابع ترانهش فقط به تا کردن در امتداد ضلعهای مثلث وابسته است، لزومی ندارد که مثلثها قائم‌الزاویه باشند. موضوع مهم این است که مثلثهای همجوار با یک خط تا وقتی که کاغذ تا می‌شود روی هم قرارگیرند. اگر به شکلهای تصویر ۲ بدین‌صورت بنگریم که این شکلها با سلسله‌ای از بازتابهایِ حول اضلاع مثلث به دست می‌آیند آنگاه چیزی که مهم است نه شکل A بلکه سلسله بازتابهایِ حول ضلعهاست. مثلث دلخواه دیگری را به‌جای A در تصویر ۱۰ الف در نظر بگیرید و همان سلسله بازتابها را انجام دهید تا به شکل جدیدی برسید. اکنون همان مثلث را در وضعیت t در تصویر ۱۰ ب قرار دهید، با همان جهت، و همان سلسله بازتابهایی را که ۱۰ ب را از مثلث قائم‌الزاویهٔ t به‌وجود می‌آورد انجام دهید. دو شکلی که به دست می‌آید همطیف‌اند چون همانند گذشته همان نگاشتی که ویژه‌تابعهای یک حوزه را به روی حوزهٔ دیگر می‌نگارد در اینجا به کار می‌رود. مثلاً اگر مثلثی را که در تصویر ۱۱ الف نشان داده شده به‌عنوان «بلوک ساختمانی» بنیادی به‌کار بریم در می‌یابیم که حوزه‌های نشان داده در تصویر ۱۱ ب همطیف‌اند.

لازم نیست که مثلث متساوی‌الساقین باشد. اگر مثلثی را که در تصویر ۱۲ الف دیده می‌شود به‌عنوان «بلوک ساختمانی» بنیادی در نظر بگیریم می‌بینیم که حوزه‌های نشان داده شده در شکل ۱۲ ب همطیف‌اند.



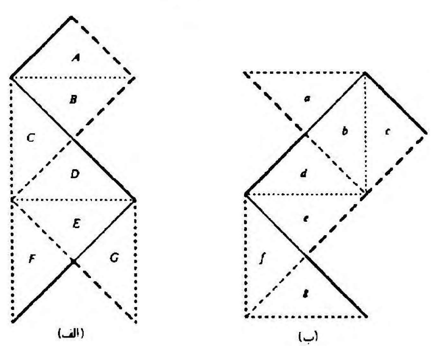
تصویر۸



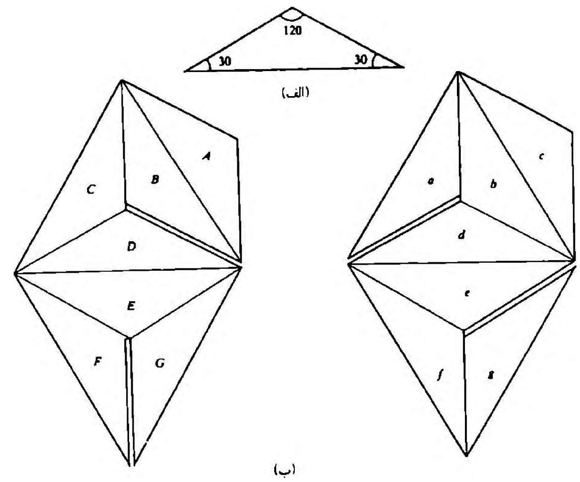
تصویر۹

بنابر همین ملاحظات، حتی لازم نیست که شکل اولیه‌مان مثلث باشد. هر شکلی که حداقل سه ضلع داشته باشد، برای منظور ما مناسب است. کافی است سه یال انتخاب کنیم که نمایندهٔ سه ضلعِ مثلث باشند و شکل را حول آنها باز بتابانیم. اگر همان الگوی بازتابی را به‌کار بریم که طبق آن، شکلهای تصویر ۲ از مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آیند باز هم طبلهای همطیف در شکلهایمان به‌دست می‌آوریم. در مثال تصویر۱۳ برای این منظور از مربع استفاده می‌شود.

در واقع شکلِ اولیهٔ آغازکار هر قدر شما بخواهید می‌تواند پیچیده باشد. برای ساختنِ شکلهایی متفاوت، شکلهایی را که قبلاً از مثلث و مربع و غیره ساختید در نظر بگیرید و هر دو شکل را تا کنید تا جایی که فقط (مثلاً) یک



تصویر۱۰

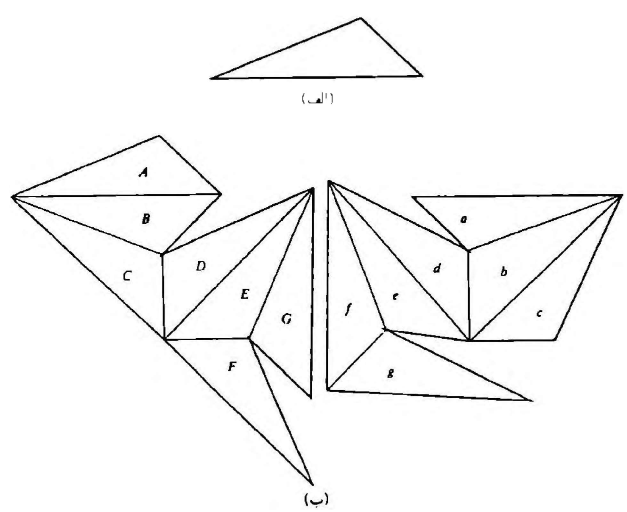


تصویر ۱۱

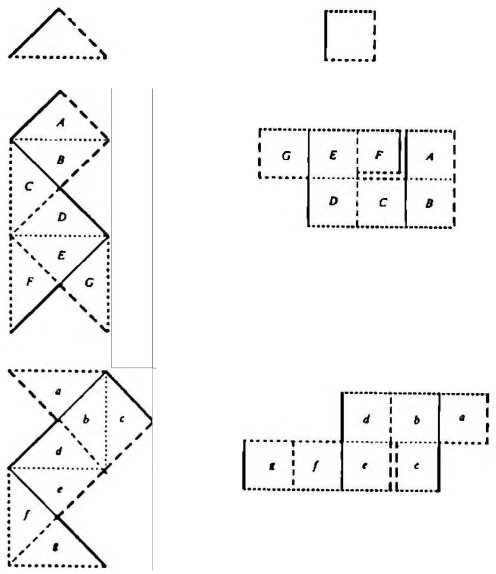
مثلث باقی بماند. دو مثلث حاصل را بر روی یکدیگر قرار دهید (به‌طوری که خطهای پر و نقطه‌چین و خط‌چین منطبق شوند). حالا مانند موقعی که عروسک کاغذی می‌سازید، شکلها را ببُرید. وقتی تای کاغذ را باز می‌کنید شکلهایی که به‌دست می‌آیند باز هم ویژه‌ـمقدارهای یکسان دارند زیرا که مانند گذشته همان تناظر یک به یک بین جوابها برقرار است. توجه کنید که برش کاغذ یکپارچه خواهد بود اگر و فقط اگر روی هر یال، پاره‌خطی نابریده موجود باشد.

تصویر ۱۴ مثال ساده‌ای را نشان می‌دهد. این حوزه‌های همطیف را نیز گوردون و دیگران کشف کرده‌اند. همان‌طور که در تصویر ۱۵ نشان داده شده شکلهای غریب‌تری نیز می‌توان ساخت.

با این روش می‌توان مثال ساده‌تری از طبلهایِ با ویژه‌ـمقدارهای یکسان ساخت که در آن، ویژه‌ـمقدارها به‌طور صریح قابل محاسبه باشند. نخستین مثالی را که آوردیم در نظر بگیرید که همان‌طور که در تصویر ۱۶ الف دیده می‌شود تا شده و در امتداد یک بال بریده شده است. در این‌صورت طبلهایی که به‌دست می‌آیند همانند تصویر ۱۶ ب هستند. با دور انداختنِ مثلثِ تنهایِ



تصویر ۱۲



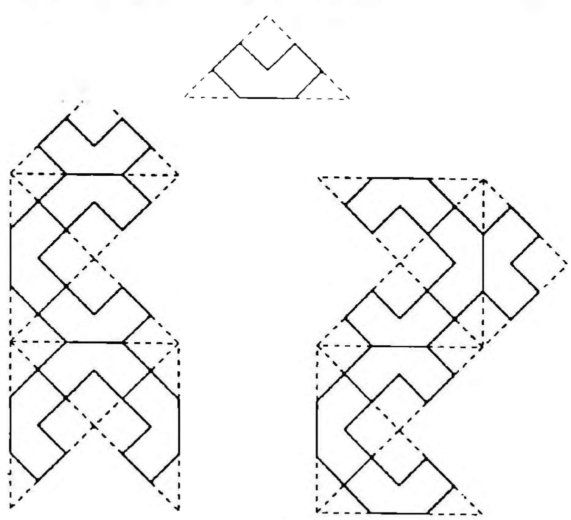
تصویر ۱۳

کوچکی که در هر طبل یک بار ظاهر می‌شود حوزه‌هایی را که تصویر ۱۷ نشان داده به دست می‌آوریم. طیف هر کدام از حوزه‌های ناهمبند تصویر ۱۷ برابر است با اجتماع طیفهای هر کدام از مؤلفه‌ها (چندگانگی هر ویژه‌ـمقدار برابر است با مجموع چندگانگی‌هایش در مؤلفه‌ها) زیرا که هر مؤلفه به‌طور مستقل ارتعاش می‌کند. ویژه‌ـتابعهای مستطیلی با طول a و پهنای b عبارت‌اند از

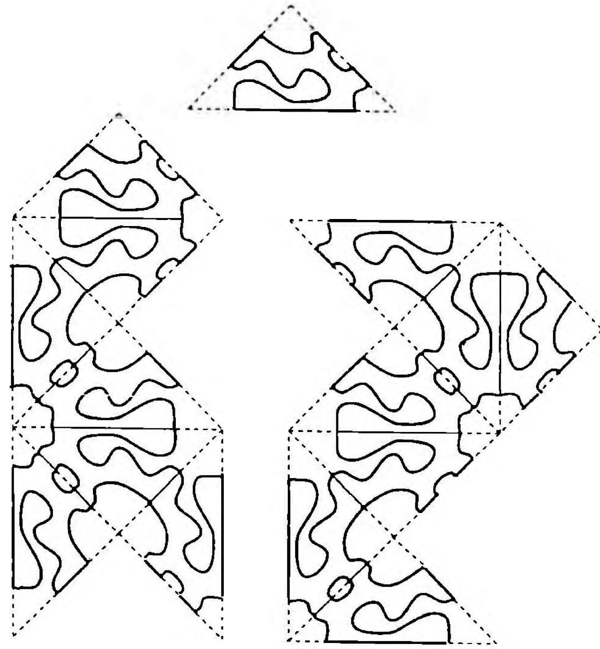
$$\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$
(m، n صحیح)

با ویژه‌ـمقدار متناظر $\lambda = \pi^2((n/a)^2 + (m/b)^2)$. برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی که طول ضلعهای کوتاهش c است ویژه‌ـتابعها عبارت‌اند از

$$\sin\frac{i\pi x}{c}\sin\frac{j\pi y}{c} - \sin\frac{j\pi x}{c}\sin\frac{i\pi y}{c}$$
(i، j صحیح و $i > j$)



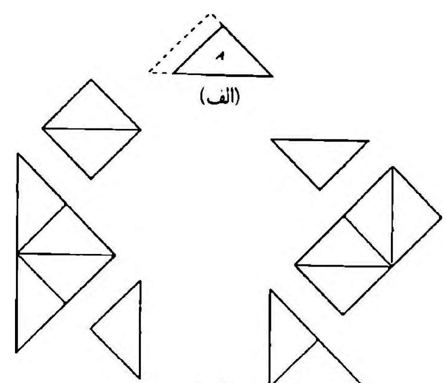
تصویر ۱۴



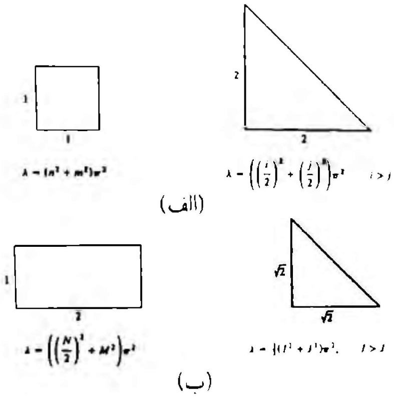
تصویر۱۵

با ویژه‌ـمقدار متناظر $\lambda = \pi^{۲}((i/c)^{۲} + (j/c)^{۲})$. بنابراین می‌بینیم که ویژه‌ـمقدارهای هر حوزه همان‌طورند که در تصویر ۱۷ نشان داده شده. اکنون نشان می‌دهیم که تلفیق ویژه‌ـمقدارهای دو حوزهٔ تصویر ۱۷ الف یکسان است با تلفیق ویژه‌ـمقدارهای دو حوزهٔ تصویر ۱۷ ب.

برای N زوج قرار می‌دهیم $N = ۲n$ و $M = m$. در این‌صورت $(N/۲)^{۲} + M^{۲} = n^{۲} + m^{۲}$. وقتی N فرد است قرار می‌دهیم $i = \max(N, ۲M)$ و $j = \min(N, ۲M)$. در این‌صورت داریم $(N/۲)^{۲} + M^{۲} = (i/۲)^{۲} + (j/۲)^{۲}$ و $i > j$. بدین‌صورت مسألهٔ ویژه‌ـمقدارهایی که در آنها یکی از i و j فرد و دیگری زوج است حل می‌شود. اگر قرار دهیم $i = I + J$ و $j = I - J$ آنگاه $(i/۲)^{۲} + (j/۲)^{۲} = (I^{۲} + J^{۲})/۲$ و $i > j$. با این کار مسألهٔ



تصویر۱۶



تصویر۱۷

ویژه‌ـمقدارهایی که در آنها یا i و j هر دو فرد و یا هر دو زوج‌اند حل می‌شود.

در پایان توجه کنید که اگر شرط مرزی

$$u = ۰ \qquad \text{روی } \partial D،$$

تبدیل شود به

$$\frac{\partial u}{\partial n} = ۰ \qquad \text{روی } \partial D،$$

همین روش کاراست، به‌شرط آنکه قرارداد‌مان را تغییر دهیم و مثلثهای بازتابیده را به‌جای کم کردن، اضافه کنیم. در نتیجه تمامی حوزه‌های همطیفی که قبلاً یافتیم با این شرط مرزی جدید نیز همطیف‌اند.

مراجع

1. Berard, P., Transplantation et Isospectralite I, *Math. Ann.*, 292, 547-559 (1992).
2. ———, Transplantation et Isospectralite II, *Math. Ann.*, to appear.
3. ———, Domaines plans isospectraux a la Gordon-Webb-Wolpert: Une preure terra a terra. Preprint.
4. Buser, P., Conway, J., Doyle, P. and Semmler, K-D., Some planar isospectral domains. Preprint.
5. Gordon, C., Webb, D. and Wolpert, S., Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Invent. Math.*, 110, 1-22 (1992).
6. ———, You cannot hear the shape of a drum. *B. Am. Math. S.*, 27(1), 134-138 (1992).
7. Kac, M., Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Monthly*, 73, 4, 1-23 (1966).

* * * * * *

• S. J. Chapman, "Drums that sound the same", *Amer. Math. Monthly*, (2) **102** (1995) 124-138.

* جاناتان چپمن، مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه آکسفرد، انگلستان
jchapman@vax.ox.ac.uk