به سوی حدس پوانکاره و رده‌بندی ۳ـخمینه‌ها•

جان میلنر*

پدرام صفری

حدس پوانکاره نود و نه سال قبل مطرح شد و شاید در چند ماه اخیر ثابت شده باشد. این یادداشت روایتی است از برخی از نتایج عمدهٔ صد سال گذشته که راه را برای اثبات این حدس و حتی برای برنامهٔ بلندپروازانه‌تر رده‌بندی تمام خمینه‌های ۳بعدی فشرده هموار کرده‌اند. در بند آخر مقاله وصف مختصری از تحولات اخیر، که مرهون گریگوری پرلمان است، می‌آید. بحث جدیتری از کار پرلمان در یادداشتی به قلم مایکل اندرسن ارائه خواهد شد.

سؤال پوانکاره

در همان ابتدای قرن بیستم، هانری پوانکاره (۱۸۵۴ـ۱۹۱۲) ادعای نابخردانه‌ای را مطرح کرد که به زبان امروزی به این صورت قابل بیان است:

اگر خمینهٔ ۳بعدی بسته‌ای همان هومولوژی کرهٔ S^3 را داشته باشد، الزاماً با S^3 همسانریخت است.

([Poincaré, 1900] را ببینید*.) ولی مفهوم «گروه بنیادی»، که خود او چندی قبل در ۱۸۹۵ معرفی کرده بود، ابزار لازم را برای نفی این گزاره فراهم می‌آورد. وی در [Poincaré, 1904] مثال ناقضی را مطرح کرد که به‌صورت فضای همدسته‌ای[1] $SO(3)/I_{60}$ قابل توصیف است. در اینجا $SO(3)$ گروه دورانهای فضای ۳بعدی اقلیدسی و I_{60} زیرگروه متشکل از دورانهایی است که یک دوازده‌وجهی یا بیست‌وجهی منتظم را به خودش می‌برند (گروه سادهٔ یکتای از مرتبهٔ ۶۰). این خمینه هومولوژی کرهٔ ۳بعدی را دارد ولی گروه بنیادی‌اش $\pi_1(SO(3)/I_{60})$ گروهی تام از مرتبهٔ ۱۲۰ است. وی بحث را با سؤال زیر (مجدداً با ترجمه به زبان امروزی) ختم می‌کند:

* شاید اصطلاحات پوانکاره خوانندگان امروزی را ــ که از عبارت «ساده‌ـهمبند» برای فضایی با گروه بنیادی بدیهی استفاده می‌کنند ــ به اشتباه بیندازد. درواقع منظور او از «ساده‌ـهمبند»، همسانریخت با ساده‌ترین مدل ممکن بود، یعنی کرهٔ ۳بعدی.

1. coset space

اگر خمینهٔ ۳بعدی بسته‌ای گروه بنیادی بدیهی داشته باشد آیا باید با کرهٔ ۳بعدی همسانریخت باشد؟

این حدس که این امر به واقع محقق می‌شود به‌عنوان حدس پوانکاره معروف شده است. این سؤال فوق‌العاده دشوار از آب درآمد، بسیار مشکلتر از سؤال متناظر در بعد پنج یا بالاتر*، و روشن نبودن پاسخ آن مانعی اساسی بر سر راه تلاشها برای رده‌بندی خمینه‌های ۳بعدی محسوب می‌شود.

در عرض پنجاه سال بعد، رشتهٔ توپولوژی از ایده‌ای مبهم به نظامی توسعه‌یافته تبدیل شد. اما من تنها به تحولاتی چند که نقش مهمی در مسألهٔ رده‌بندی خمینه‌های ۳بعدی ایفا کرده‌اند خواهم پرداخت. (برای اطلاعات بیشتر مراجع زیر را ببینید: [Gordon] برای تاریخچه‌ای از نظریهٔ خمینه‌های ۳بعدی تا ۱۹۶۰؛ [Hempel] برای شرحی از این نظریه تا ۱۹۷۶؛ [Bing] برای توصیفی از برخی دشواریهای وابسته به توپولوژی ۳بعدی؛ [James] برای تاریخچه‌ای کلی از توپولوژی؛ [Whitehead] برای نظریهٔ هوموتوپی؛ و [Devlin] برای حدس پوانکاره به‌عنوان مسألهٔ جایزه‌دار هزاره.)

نتایجی براساس روشهای قطعه‌قطعه‌خطی

از آنجایی که مسألهٔ شناسایی کرهٔ ۳بعدی بسیار مشکل به نظر می‌رسید، ماکس دن (۱۸۷۸ـ۱۹۵۲) به مسألهٔ ساده‌تر شناسایی ناگره[1] درون S^3 پرداخت [Dehn].

قضیهٔ مورد ادعای دن (۱۹۱۰). دایرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شدهٔ $K \subset S^3$ گره‌نخورده است اگر و تنها اگر گروه بنیادی $\pi_1(S^3 \setminus K)$ دوری آزاد باشد.

این گزاره درست است. اما کنیزر، نوزده سال بعد، نقصی جدی در اثبات دن

* [Smale, 1960]، [Stallings]، [Zeeman] و [Wallace] را برای بعد پنج یا بیشتر، و [Freedman] را برای بعد چهار ببینید.

1. unknot

یافت. سؤال به مدت تقریباً پنجاه سال، تا هنگام کارِ پاپاکی‌ریاکوپولوس حل نشده باقی ماند.

چندین گام اساسی توسط جیمز وَدل الکساندر (۱۸۸۸-۱۹۷۱) برداشته شد [Alexander]. در ۱۹۱۹ وی نشان داد که هومولوژی و گروه بنیادی به تنهایی برای شناسایی یک خمینهٔ ۳بعدی کافی نیستند. او درواقع دو فضای لنز را توصیف کرد که فقط با ناورداهای پیوند[1]شان قابل تمیز هستند. وی در ۱۹۲۴ مطلب زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ الکساندر. کره‌ای ۲بعدی که در S^3 به‌صورت قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده است کرهٔ ۳بعدی را به دو ۳-سلول بستهٔ قطعه‌قطعه‌خطی تقسیم می‌کند.

الکساندر همچنین نشان داد که چنبره‌ای قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده حداقل در یکی از دو طرف خود باید چنبره‌ای توپر را احاطه کند.

هلموت کنسر (۱۸۹۸-۱۹۷۳) گام دیگری برداشت [Kneser] که در تحولات بعدی نقش بسیار مهمی ایفا کرد*. او یک ۳-خمینهٔ بستهٔ قطعه‌قطعه‌خطی را تحویل‌ناپذیر نامید هرگاه هر ۲-کرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده، ۳-سلولی را احاطه کند، و تحویل‌پذیر خواند هرگاه چنین نباشد. فرض کنید با چنین خمینهٔ M^3ای که همبند و تحویل‌پذیر است آغاز کرده باشیم. آنگاه، با بریدن M^3 در طول ۲-کرهٔ نشانده شده‌ای که ۳-سلولی را احاطه نمی‌کند، خمینهٔ جدیدی (نه الزاماً همبند) با دو ۲-کرهٔ مرزی به‌دست می‌آوریم. می‌توان مجدداً با نصب مخروطی روی هریک از این ۲-کرهٔ مرزی، ۳-خمینهٔ بسته‌ای (احیاناً ناهمبند) به‌دست آورد. حال یا هر مؤلفهٔ خمینهٔ حاصل تحویل‌ناپذیر است یا می‌توان این عملیات را تکرار کرد.

قضیهٔ کنسر (۱۹۲۹). این عملیات همواره پس از تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و حاصل آن خمینه‌ای $\widehat{M^3}$ است به‌طوری که هر مؤلفهٔ همبند $\widehat{M^3}$ تحویل‌ناپذیر است.

درواقع، در حالت جهت‌پذیر، اگر جهتها و تعداد برشهای جداکننده (n) را به‌دقت ردیابی کنیم، آنگاه خمینهٔ همبند اصلی M^3 به‌صورت مجموع همبند مؤلفه‌های $\widehat{M^3}$ به همراه n «دستهٔ» $S^1 \times S^2$ قابل بازیافت است. (رجوع کنید به [Seifert, 1931]، [Milnor, 1962].)

در ۱۹۳۳ هربرت سایفرت (۱۹۰۷-۱۹۹۶) دسته‌ای از تاربندیها را معرفی کرد [Seifert] که نقشی مهم در تحولات آتی ایفا کرد. برای مقاصد ما در این بحث می‌توان تاربندی سایفرتِ یک ۳-خمینه را به‌صورت یک عمل دایره تعریف کرد، که آزاد است مگر حداکثر در تعداد متناهی تار «کوتاه»، آنگونه که در زیر وصف می‌شود. چنین عملی با یک نگاشت $(x,t) \to x^t$ از $M^3 \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ به M^3 با شرطهای معمول $x^0 = x$ و $x^{s+t} = (x^s)^t$ مشخص می‌شود. ما شرط می‌کنیم که هر تار $x^{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ یک دایره باشد و عمل $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ آزاد باشد مگر در حداکثر تعداد متناهی از این تارها. مدل متعارفی برای یک تاربندی سایفرت در همسایگی تاری کوتاه چنین است: فرض کنید

1. linking invariants

* بخشهایی از مقالهٔ کنسر برپایهٔ کار دن بود. وی در یادداشتی بعد از تحریر اشاره می‌کند که استدلال دن نادرست بوده و بنابراین آن بخشها از مقالهٔ خود او ثابت نشده‌اند. ولی نتیجهٔ وصف‌شده در مقالهٔ حاضر تحت‌تأثیر [این نقص] واقع نشده است.

α ریشهٔ nام اولیه‌ای از واحد باشد و $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ قرص واحد باز. حاصلضرب $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ را تشکیل داده سپس هر (z,t) را با $(\alpha z, t+1/n)$ یکی بگیرید. خمینهٔ خارج‌قسمتی حاصل با حاصلضرب $\mathbb{D} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ وابرریخت است، ولی تار مرکزی تحت عمل دایره $(z,t)^s = (z, t+s)$ کوتاهتر از تارهای مجاور است که n بار دور آن می‌پیچند، چون $(0,t) \equiv (0,t)^{1/n}$.

در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ تحولات چشمگیری در نظریهٔ ۳-خمینه‌ها رخ داد که با مقاله‌ای از کریستوس پاپاکی‌ریاکوپولوس (۱۹۱۴-۱۹۷۶) آغاز شد [Papakyriakopoulos]. او شخص بی‌سروصدایی بود که سالها به تنهایی در پرینستن تحت حمایت رالف فاکس[1] کارکرده بود. (من هم در آن زمان با فاکس کار می‌کردم، ولی هیچ فکر نمی‌کردم که پاپاکی‌ریاکوپولوس در چنین پروژهٔ مهمی مشغول پیشروی است.) اثبات او از «لم دن» — که از زمانی که کنسر برای اولین بار نقص استدلال دن را خاطرنشان کرد به‌عنوان مشکلی حل‌نشده باقی مانده بود — کاری بود کارستان. بیان آن چنین است:

لم دن (پاپاکی‌ریاکوپولوس ۱۹۵۷). نگاشت قطعه‌قطعه‌خطی f از قرصی ۲بعدی را به توی یک ۳-خمینه در نظر بگیرید، که تصویر آن ممکن است خودتقاطع[2]های زیادی در درون داشته باشد ولی مجاز نیست نزدیک مرز هیچ خودتقاطعی داشته باشد. در این صورت نشاندهٔ ناتکینی از قرص وجود دارد که در یک همسایگی مرز بر f منطبق است.

او این مطلب را با ساختن برجی از فضاهای پوششی ثابت کرد، [یعنی] ابتدا با ساده‌کردن تکینگی‌های قرص، که به فضای پوششی اکمل[3] یک همسایگی ترفیع داده شده است، سپس با گذر به پوشش اکمل یک همسایگی قرص ساده‌شده و تکرار این فرایند، تا پس از تعداد متناهی مرحله قرصی ناتکین به‌دست آید. وی با استفاده از روشهای مشابه نتیجه‌ای به‌دست آورد که بعداً به‌صورت زیر تقویت شد.

قضیهٔ کره. اگر گروه هوموتوپی دوم $\pi_2(M^3)$ یک ۳-خمینهٔ جهت‌پذیر نابدیهی باشد، ۲-کرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده شده‌ای وجود دارد که نمایندهٔ عضوی نابدیهی از این گروه است.

یکی از پیامدهای فوری قضیه این است که برای گره کاملاً دلخواه $K \subset S^3$، $\pi_2(S^3 \setminus K) = 0$. به‌طورکلیتر، $\pi_2(M^3)$ برای هر ۳-خمینهٔ جهت‌پذیری که به معنی مورد نظر کنسر تحویل‌ناپذیر باشد بدیهی است.

در عرض چندسال پس از توفیق پاپاکی‌ریاکوپولوس، ولفگانگ هاکن [Haken] به پیشرفتی اساسی در شناخت ۳-خمینه‌های کاملاً کلی نائل شد. هاکن در ۱۹۶۱ مسألهٔ بداهت را برای گرهها حل کرد؛ یعنی روشی کارا برای تصمیم‌گیری دربارهٔ اینکه آیا دایرهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شده‌ای در ۳-کره به‌واقع گره‌خورده است [یا نه] تشریح کرد. (برای ملاحظهٔ نتایج بیشتری در این راستا و شرحی روشنتر، [Schubert, 1961] را ببینید.)

فریدهلم والدهاوزن [Waldhausen] به پیشرفتهای زیاد دیگری براساس ایده‌های هاکن نائل شد. او در ۱۹۶۷a نشان داد که رابطهٔ نزدیکی بین فضاهای تاری سایفرت و خمینه‌هایی که گروه بنیادیشان مرکز نابدیهی دارد موجود است. وی در ۱۹۶۷b ردهٔ خمینه‌های گراف را معرفی و تحلیل کرد.

1. Ralph Fox 2. self-intersection 3. universal covering

طبق تعریف، اینها خمینه‌هایی هستند که توسط چنبره‌هایی نشانده‌شده و مجزا به قطعاتی تقسیم می‌شوند که هر یک کلافی دایره‌ای روی یک رویه هستند. دو ایدهٔ اساسی در رهیافت هاکن‌ـوالدهاوزن هستند که بسیار بی‌ضرر به نظر می‌رسند در حالی‌که به واقع بسیار قدرتمندند:

تعاریف. برای مقاصد من در این مقاله، رویهٔ بستهٔ دوطرفهٔ قطعه‌قطعه‌خطی نشانده‌شدهٔ F در خمینهٔ بستهٔ M^3 تراکم‌ناپذیر[1] خوانده می‌شود هرگاه گروه بنیادی $\pi_1(F)$ نامتناهی باشد و به‌صورت یک به یک در $\pi_1(M^3)$ نگاشته شود. خمینهٔ M^3 به‌اندازهٔ کافی بزرگ است اگر حاوی رویهٔ تراکم‌ناپذیری باشد.

به‌عنوان مثالی از قدرت این ایده‌ها، والدهاوزن در ۱۹۶۸ نشان داد که اگر دو ۳ـخمینهٔ بستهٔ جهت‌پذیر، تحویل‌ناپذیر و به اندازهٔ کافی بزرگ و دارای یک گروه بنیادی باشند، آنگاه درواقع همسانریخت‌اند. گزارهٔ مشابهی برای خمینه‌های لبه‌دار وجود دارد. این ایده‌ها در ۱۹۷۹ توسط جیکو [Jaco] و شلن [Shalen] و نیز یوهانسون [Johannson]، که بر اهمیت تجزیهٔ یک فضا با چنبره‌های تراکم‌ناپذیر صحه گذاشتند، توسعهٔ بیشتری یافت.

پیشرفت مهم دیگر در طول این سالها اثبات این بود که هر ۳ـخمینهٔ توپولوژیک، ساختار قطعه‌قطعه‌خطیِ اصولاً یکتایی دارد ([Moise] را ببینید) و نیز ساختار هموار اصولاً یکتایی ([Munkres] یا [Hirsch] را ببینید، همچنین [Smale, 1959] را). این خیلی با وضعیت در بعدهای بالا متفاوت است که در آن لازم است روشن کرد آیا خمینه‌های موردبحث هموارند یا قطعه‌قطعه‌خطی یا توپولوژیک.★

خمینه‌های با انحنای ثابت

اولین خانوادهٔ جالب‌توجه از ۳ـخمینه‌ها که رده‌بندی شدند خمینه‌های ریمانی مسطح[2] بودند ــ آنهایی که موضعاً با فضای اقلیدسی ایزومتریک هستند. داوید هیلبرت در هجدهمین مسأله از مسائل معروفش پرسیده بود آیا فقط تعداد متناهی از گروههای گسسته از حرکات صلب فضای nـبعدی اقلیدسی وجود دارند که دامنهٔ بنیادی[3] فشرده داشته باشند. لودویگ بیبرباخ [Bieberbach] (۱۸۸۶ـ۱۹۸۲) این گزاره را در ۱۹۱۰ ثابت کرد و درواقع رده‌بندی کاملی از این گروهها ارائه کرد. این کاربردی مستقیم در خمینه‌های ریمانی مسطح داشت. این هم صورتی مدرن از قضیهٔ او.

قضیه (اقتباس شده از بیبرباخ). یک خمینهٔ ریمانی فشردهٔ مسطح M^n، با تقریب وابرریختی‌های مستوی، با گروه بنیادی‌اش مشخص می‌شود. گروه دادهٔ شدهٔ Γ محقق می‌شود اگر و تنها اگر متناهی‌مولد و بی‌تاب[4] باشد و زیرگروهی جابجایی با شاخص متناهی داشته باشد. هر چنین Γای حاوی زیرگروه جابجایی متناهی‌ـشاخص بیشین یکتایی است.

به سادگی نتیجه می‌شود که این زیرگروه جابجایی بیشین [ماکسیمال] N، نرمال است و گروه خارج‌قسمتی $\Phi = \Gamma/N$ روی N با ترویج وفادارانه[1] عمل می‌کند. به‌علاوه $N \cong \mathbb{Z}^n$ که n بُعد است. لذا گروه متناهی Φ به‌طور طبیعی در گروه $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ از خودریختی‌های N می‌نشیند. بالاخص نتیجه می‌شود که هر چنین خمینهٔ M^nای را می‌توان به‌صورت خمینهٔ خارج‌قسمتی T^n/Φ توصیف کرد، که در آن T^n چنبره‌ای مسطح و Φ گروهی متناهی از ایزومتری‌هاست که به‌طور آزاد روی T^n عمل می‌کند، و گروه بنیادی $\pi_1(T^n)$ را می‌توان با زیرگروه جابجایی بیشین $N \subset \pi_1(M^n)$ منطبق[2] کرد. در حالت جهت‌پذیر سه بعدی فقط شش خمینهٔ این چنینی وجود دارند. گروه $\Phi \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ یا دوری از مرتبهٔ ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶ است، یا یکریخت با $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. (برای اطلاعات بیشتر [Charlap] و نیز [Zassenhaus]، [Milnor, 1976a] یا [Thurston, 1997] را ببینید.)

۳ـخمینه‌های فشرده با انحنای ثابت مثبت در ۱۹۲۵ توسط هاینتس هُف (۱۸۹۴ـ۱۹۷۱) رده‌بندی شدند [Hopf]. (مراجعه کنید به [Seifert, 1933]، [Milnor, 1957].) اینها شامل مثلاً خمینهٔ بیست‌وجهی پوانکاره که قبلاً ذکرش رفت می‌شد. بیست‌وپنج سال بعد ژرژ دُرام (۱۹۰۳ـ۱۹۹۰) نشان داد که رده‌بندی هُف، با تقریب ایزومتری، درواقع با رده‌بندیِ با تقریب وابرریختی تطابق دارد [de Rham].

فضاهای لنز، با گروه بنیادی دوری متناهی، زیر خانواده‌ای را تشکیل می‌دهند که جاذبهٔ ویژه‌ای دارند. فضاهای لنز با گروه از مرتبهٔ ۵ قبلاً هم توسط الکساندر در ۱۹۱۹ به‌عنوان مثالهایی از ۳ـخمینه‌هایی که با هومولوژی و گروه بنیادی به تنهایی قابل تمیز نیستند معرفی شده بودند [Alexander]. فضاهای لنز با تقریب همسانریختی‌های قطعه‌قطعه‌خطی در ۱۹۳۵ توسط رایدمایستر[3]، فرانتس[4] و دُرام، با استفاده از ناوردایی که تاب[5] نامیدند، رده‌بندی شدند. (برای شرحی از این ایده‌ها [Milnor, 1966] و نیز [Milnor & Burlet 1970] را ببینید.) ناوردایی توپولوژیک تاب برای همبافت‌های سادکی[6] دلخواه خیلی بعدتر توسط چپمن [Chapman] ثابت شد. یکی از پیامدهای شگفت‌آور این رده‌بندی، رده‌بندی هورست شوبرت [Schubert, 1956] از گرههای «دوپله[7]» بود، یعنی گرههایی که می‌توانند چنان در $\mathbb{R}^3$ قرار داده شوند که تابع ارتفاع فقط دو بیشینه و دو کمینه داشته باشد. او نشان داد که چنین گرهی به‌طور یکتا با پوشش شاخه‌ای[8] دولایه‌ای وابسته‌اش، که یک فضای لنز است، مشخص می‌شود.

گرچه ۳ـخمینه‌های با انحنای ثابت منفی درواقع بسیار متنوع‌اند، ولی تا زمان کار ترستُن در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ مثالهای چندانی از آنها شناخته نشده بود. یک مثال جالب در ۱۹۱۲ توسط گیزکینگ [Gieseking] کشف شد. او با شروع از ۳ـسادکی منظم با طول یال نامتناهی در ۳ـفضای هذلولوی، وجوه را دو به دو منطبق کرد تا خمینه‌ای هذلولوی، تمام[9] و جهت‌ناپذیر با حجم متناهی به‌دست آورد. سایفرت و وبر [Seifert & Weber] در ۱۹۳۳ مثالی فشرده عرضه کردند: آنان با شروع از یک دوازده‌وجهی منتظم با

1. incompressible

★ این مطلب که هر خمینهٔ قطعه‌قطعه‌خطی ساختار هموار اصولاً یکتایی دارد تا بعد ۶ همچنان صحیح است. (رجوع کنید به [Cerf].) اما کربی و زیبن‌من [Kirby & Siebenmann] نشان دادند که یک خمینهٔ توپولوژیک از بعد چهار یا بیشتر کاملاً ممکن است چندین ساختار قطعه‌قطعه‌خطی ناسازگار داشته باشد. حالت چهاربعدی خصوصاً مخاطره‌آمیز است: فریدمن، با استفاده از کار دانلدسن، نشان داد که خمینهٔ توپولوژیک $\mathbb{R}^4$ تعداد ناشمارایی ساختار هموار یا قطعه‌قطعه‌خطی غیرهم‌ارز می‌پذیرد. ([Gompf] را ببینید.)

2. flat 3. fundamental domain 4. torsionfree

1. faithfully 2. identify 3. Reidemeister 4. Franz 5. torsion 6. simplicial 7. two bridges 8. branched covering 9. complete

اندازه‌های به دقت انتخاب شده در فضای هذلولوی، وجوه روبه‌رو را با یک انتقال و سپس یک دوران به اندازهٔ ۳/۱۰ دور کامل منطبق کردند تا خمینه‌ای هذلولوی، فشرده و جهت‌پذیر به‌دست آورند. (روشی مشابه با استفاده از ۱/۱۰ دور کامل، ۳ـخمینهٔ پوانکاره را به‌دست می‌دهد، که ۳ـکره فضای پوششی ۱۲۰ لایه‌ای آن است.)

یکی از خاصیتهای مهم خمینه‌های با انحنای منفی را الکساندر پرایسمن (۱۹۱۶ـ۱۹۹۰) به‌دست آورد [Preissmann]. (پرایسمن که دانشجوی هاینتس هُف بود، بعداً تغییر رشته داد و متخصص هیدرودینامیک جریان رودخانه شد.)

قضیهٔ پرایسمن (۱۹۴۲). اگر M^n خمینهٔ ریمانی بسته‌ای با انحنای اکیداً منفی باشد، هر زیرگروه جابجایی نابدیهی $\pi_1(M^n)$ آزاد دوری است.

نظریهٔ [۳ـخمینه‌ها] در ۱۹۷۵، زمانی‌که رابرت رایلی (۱۹۳۵ـ۲۰۰۰) مطالعه‌ای روی نمایشهای گروه گره $\pi_1(S^3 \setminus K)$ در $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ انجام داد [Riley]، محرکی شگرف یافت. توجه کنید که می‌توان $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ را هم به‌عنوان گروه ایزومتری‌های جهت‌نگهدار ۳ـفضای هذلولوی و هم به‌عنوان گروه خودریختی‌های همدیس کرهٔ در بینهایت[1] اش در نظر گرفت. رایلی توانست با استفاده از چنین نمایشهایی نمونه‌های چندی از گره‌هایی تولید کند که می‌توان به مکملشان ساختار یک خمینهٔ هذلولویِ تمام با حجم متناهی داد.

ترستن با الهام از این مثالها نظریه‌ای غنی برای خمینه‌های هذلولوی پروراند. بحث بخش بعد و نیز [Kapovich, 2001] یا [Milnor, 1982] را ببینید.

حدس هندسی‌سازی ترستن

تصویر حدسیِ معین از خمینه‌های ۳بعدی را ویلیام ترستن در ۱۹۸۲ ارائه کرد، که حاکی است:

> درون هر ۳ـخمینهٔ فشرده را می‌توان به‌صورتی اصولاً یکتا توسط ۲ـکره‌ها و چنبره‌های نشانده‌شدهٔ مجزا به قطعاتی تجزیه کرد که ساختاری هندسی دارند. ساده‌ترین تعریف* «ساختار هندسی» در اینجا، متریک ریمانیِ تامی است که موضعاً با یکی از هشت الگوی ساختاری فهرست زیر ایزومتریک است.

برای سهولت فقط به ۳ـخمینه‌های بسته خواهیم پرداخت. در این صورت ابتدا می‌توانیم خمینه را به‌صورت مجموع همبند خمینه‌هایی توصیف کنیم که اول هستند (یعنی دیگر به‌صورت نابدیهی به مجموعی همبند تجزیه نمی‌شوند). ادعا این است که به هر خمینهٔ اول یا می‌توان چنین ساختار هندسی‌ای داد یا آن را با چنبره‌های تراکم‌ناپذیری به قطعات بازی تقسیم کرد که بتوان به هریک از آنها چنین ساختاری بخشید. هشت ساختار هندسی مجاز با مثالهای زیر نمایش داده می‌شوند:

- کرهٔ S^3، با انحنای ثابت ۱+؛
- فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$، با انحنای ثابت ۰؛
- فضای هذلولوی H^3، با انحنای ثابت ۱−؛
- حاصلضرب $S^2 \times S^1$؛
- حاصلضرب $H^2 \times S^1$ از صفحهٔ هذلولوی و دایره؛
- متریک ریمانی ناوردای چپی* روی گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$؛
- متریک ریمانی ناوردای چپی روی گروه حل‌پذیر پوانکاره‌ـلورنتس[1] $E(1,1)$، که متشکل است از حرکات صاحبِ فضازمانِ ۱ + ۱ بعدی مجهز به متریک مسطح $dt^2 - dx^2$؛
- متریک ناوردای چپی روی گروه پوچ‌توان هایزنبرگ، متشکل از ماتریسهای ۳ × ۳ به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در هریک از حالات، پوشش اکمل خمینهٔ مورد اشاره الگویی متعارف برای هندسهٔ متناظر ارائه می‌کند. مثالهایی از سه هندسهٔ اول در بخش انحنای ثابت مورد بحث قرار گرفتند. هر خمینهٔ بستهٔ جهت‌پذیرِ موضعاً ایزومتریک با $S^2 \times S^1$ الزاماً وابرریخت (ولی نه الزاماً ایزومتریک) با خودِ خمینهٔ $S^2 \times S^1$ است، ضمن اینکه هر حاصلضربِ رویه‌ای از گونهٔ دو یا بیشتر با یک دایره، هندسهٔ $H^2 \times S^1$ را ارائه می‌دهد. کلاف مماس واحدِ رویه‌ای با گونهٔ دو یا بیشتر نمایش دهندهٔ هندسهٔ $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ است. کلافی چنبره‌ای روی دایره نمایندهٔ هندسهٔ حل‌پذیر[2] پوانکاره‌ـلورنتس است، در صورتی‌که مونودرومی[3] آن با تبدیلی از چنبره با ماتریسی چون $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ نشان داده شود که ویژه‌مقداری بیشتر از یک دارد. بالاخره اینکه هر کلاف دایره‌ای نابدیهی روی چنبره نمایندهٔ هندسهٔ پوچ‌توان[4] است. شش عدد از این هشت هندسه، همگی بجز حالتهای هذلولوی و هندسهٔ حل‌پذیر، متناظرند با خمینه‌هایی با ساختار یک فضای تاریِ سایفرت.

دو حالت خاص، موردتوجه ویژه‌اند. حدس مزبور نتیجه می‌دهد که:

> یک ۳ـخمینهٔ بسته گروه بنیادی متناهی دارد اگر و تنها اگر متریکی با انحنای ثابت مثبت داشته باشد. بالاخص هر M^3 با گروه بنیادی بدیهی باید با S^3 همسانریخت باشد.

این صورتی بسیار قوی از حدس پوانکاره است. پیامد دیگر چنین است:

> خمینهٔ بستهٔ M^3 هذلولوی است اگر و تنها اگر اول باشد و دارای گروه بنیادی نامتناهی‌ای باشد که شامل $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ نباشد.

1. sphere-at-infinity

* به بیان رسمی‌تر، الگوی متعارف چنین ساختار هندسی‌ای یکی از هشت زوج ممکن (X, G) است که X، ۳ـخمینه‌ای ساده‌همبند و G گروهی متعدی از وابرریختی‌هاست، به‌طوری که G عنصر حجمی از چپ و راست ناوردا بپذیرد که زیرگروه ثابت نگهدارندهٔ هر نقطهٔ دلخواهی از X فشرده باشد و به‌طوری که G به‌عنوان گروهی از وابرریختی‌ها با این خاصیت اخیر، بیشین باشد.

* [Milnor, 1976b §4] را برای فهرستی از متریکهای ناوردای چپ در بعد ۳ ببینید.

1. Poincaré-Lorentz 2. solvegeometry 3. monodromy 4. nilgeometry

خود ترستن، در حالت خاص خمینه‌ای که به اندازهٔ کافی بزرگ است، گزارهٔ اخیر و درواقع تمام حدس هندسی‌سازی را به اثبات رساند. ([Morgan]، [Thurston, 1986] و [McMullen, 1992] را ببینید.) نتیجهٔ مهم دیگر ترستن این است که یک کلافِ رویه‌ای روی دایرهٔ هذلولوی است اگر و فقط اگر (۱) مونودرومی آن با تقریب ایزوتوپی شبه‌انوسوف[1] باشد و (۲) تار آن شاخص اویلر منفی داشته باشد. [Sullivan]، [McMullen, 1996] یا [Otal] را ببینید.

حالتهای کروی و هذلولوی حدس هندسی‌سازی ترستن فوق‌العاده دشوارند. اما شش هندسهٔ باقی‌مانده به خوبی شناخته شده‌اند. نویسندگان بسیاری در این شناخت دخیل بوده‌اند (مثلاً [Gordon & Heil]، [Auslander & Johnson]، [Scott]، [Tukia]، [Gabai]، و [Casson & Jungreis] را ببینید). برای ملاحظهٔ شرحی عالی، [Thurston, 1997] و [Scott, 1983b] را ببینید.

شارش ریچی

روشی کاملاً متفاوت توسط ریچارد همیلتن ارائه شد [Hamilton, 1982]. خمینه‌ای ریمانی با مختصات موضعی $u^1, \dots, u^n$، و متریک $ds^2 = \sum g_{ij}du^i du^j$ در نظر بگیرید. شارش ریچی[2] وابسته خانواده‌ای تک‌پارامتری از متریکهای ریمانی $g_{ij} = g_{ij}(t)$ است که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\partial g_{ij}/\partial t = -2R_{ij}$$

صدق می‌کند، که در آن $R_{ij} = R_{ij}(\{g_{hk}\})$ تانسور ریچی وابسته است. این معادلهٔ دیفرانسیلِ خاص به همان دلایلی توسط همیلتن برگزیده شد که اینشتین تانسور ریچی را در نظریهٔ گرانش خود وارد کرده بود* — او تانسور دواندیسی متقارنی لازم داشت که به‌طور طبیعی از تانسور متریک، و مشتقاتش $\partial g_{ij}/\partial u^h$ و $\partial^2 g_{ij}/\partial u^h \partial u^k$ برمی‌خیزد. تانسور ریچی اصولاً تنها امکان است. عامل ۲ در این معادله کم‌وبیش دلخواه است ولی علامت منفی ضروری است. دلیل آن این است که معادلهٔ شارش ریچی نوعی تعمیم غیرخطیِ معادلهٔ گرما

$$\partial\phi/\partial t = \Delta\phi$$

در فیزیک ریاضی است. برای مثال وقتی g_{ij} تحت شارش ریچی تغییر می‌کند، انحنای اسکالر وابسته $R = \sum g^{ij}R_{ij}$ طبق یک صورتِ غیرخطی معادلهٔ گرما

$$\partial R/\partial t = \Delta R + 2\sum R^{ij}R_{ij}$$

تغییر می‌کند. مانند معادلهٔ گرما، معادلهٔ شارش ریچی در زمان آینده[3] خوش‌رفتار است و مانند نوعی عملگر هموارکننده عمل می‌کند ولی حل آن در زمان گذشته[4] معمولاً غیرممکن است. اگر قسمتهایی از جسمی جامد داغ و مابقی سرد باشند، آنگاه، طبق معادلهٔ گرما، گرما از [قسمت] داغ به [قسمت] سرد جریان می‌یابد، به‌طوری‌که جسم به تدریج به دمایی یکنواخت می‌رسد. شارش ریچی تا حدودی، به نحو مشابهی عمل می‌کند، به‌طوری که انحنا «سعی می‌کند» یکنواخت‌تر شود، ولی پیچیدگیهای زیادی هست که گزیر ساده‌ای ندارند.

به‌عنوان مثال خیلی ساده‌ای از شارش ریچی، کرهٔ گردی به شعاع r در فضای $(n+1)$ بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید. آنگاه تانسور متریک به‌صورت

$$g_{ij} = r^2\hat{g}_{ij}$$

درمی‌آید که در آن $\hat{g}_{ij}$ متریک کرهٔ واحد است، در حالی‌که تانسور ریچی

$$R_{ij} = (n-1)\hat{g}_{ij}$$

مستقل از r است. معادلهٔ شارش ریچی به

$$dr^2/dt = -2(n-1)$$

ساده می‌شود، با جواب

$$r^2(t) = r^2(0) - 2(n-1)t$$

بنابراین کره در زمان متناهی فرو می‌ریزد[1] و به نقطه‌ای تبدیل می‌شود. همیلتن توانست حکم کلیتر زیر را ثابت کند.

قضیهٔ همیلتن. فرض کنید با خمینهٔ ۳بعدی فشرده‌ای شروع کنیم که تانسور ریچی آن همه‌جا مثبت معین است. آنگاه همان‌طور که خمینه تحت شارش ریچی به نقطه‌ای می‌کاهد[2]، گردتر و گردتر می‌شود. اگر مقیاس متریک را تغییر دهیم به‌طوری‌که حجم ثابت بماند، آنگاه خمینه به خمینه‌ای با انحنای ثابت مثبت میل می‌کند.

همیلتن سعی کرد این تکنیک را، با تحلیل تکینگی‌هایی که ممکن است ظاهر شوند، به ۳ـخمینه‌های کلیتری اعمال کند، ولی توانست حدس هندسی‌سازی را فقط تحت فرضیات اضافی خیلی قوی اثبات کند. (برای مروری بر چنین نتایجی، [Cao & Chow] را ببینید.)

گریگوری پرلمان در سه پیش‌چاپ شایان توجه، راه‌حلی برای این دشواریها اعلان کرد [Perelman] و اثباتی را از کل حدس ترستن براساس ایده‌های همیلتن وعده داد، که جزئیات بیشتر آن قرار است در پیش‌چاپ چهارمی ارائه شود. یک طریق که ممکن است تکینگی‌ها در طول شارش ریچی ظاهر شوند این است که شاید ۲ـکره‌ای در M^3 در زمان متناهی فرو بریزد و به نقطه‌ای تبدیل شود. پرلمان نشان می‌دهد که چنین فروریزشهایی را می‌توان با انجام نوعی «جراحی» روی خمینه، مشابه روش ساخت کنسرکه قبلاً وصف شد، حذف کرد. او چنین اظهار می‌کند که پس از تعداد متناهی جراحیِ این چنینی، هر مؤلفه یا:

۱) به خمینه‌ای با انحنای ثابت مثبت میل می‌کند که در زمان متناهی به نقطه‌ای می‌کاهد، یا احیاناً

1. pseudo-Anosov 2. Ricci flow

* برای روابط مسألهٔ هندسی‌سازی و نسبیت عام، [Anderson] را ببینید.

3. forward 4. backward

1. collapses 2. shrinks

۲) به $S^2 \times S^1$ میل می‌کند که در زمان متناهی به دایره‌ای می‌کاهد، یا

۳) یک تجزیهٔ «چاق‌ـلاغر» از نوع ترستنی می‌پذیرد، که در آن قسمتهای چاق متناظرند با خمینه‌های هذلولوی و قسمتهای لاغر متناظرند با سایر هندسه‌های ترستن.

من قصد ندارم در مورد جزئیات استدلالهای پرلمان، که هوشمندانه و بسیار فنی هستند، نظر دهم. ولی روشن است که او روشهای جدیدی را معرفی کرده است که هم قدرتمندند و هم زیبا، و سهمی ارزشمند در شناخت ما از موضوع ایفا کرده است.

مراجع

[Alexander, 1919] J. W. ALEXANDER, Note on two three dimensional manifolds with the same group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **20** (1919), 339-342.

[Alexander, 1924] ——— , On the subdivision of 3-space by a polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **10**(1924), 6-8.

[Anderson, 1997] M. T. ANDERSON, *Scalar Curvature and Geometrization Conjectures for 3-Manifolds*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 30, 1997.

[Anderson, 2001] ——— , On long-time evolution in general relativity and geometrization of 3-manifolds, *Comm. Math. Phys.* **222** (2001), 533-567.

[Auslander & Johnson, 1976] L. AUSLANDER and F. E. A. JOHNSON, On a conjecture of C. T. C. Wall, *J. London. Math. Soc.* **14** (1976), 331-332.

[Bieberbach, 1910] L. BIEDERBACH, Über die Bewegungs gruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich, *Gött. Nachr.* (1910), 75-84.

[Bieberbach, 1911/12] ——— , Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, II, *Math. Ann.* **70** (1911), 297-336; **72** (1912), 400-412.

[Bing, 1964] R. H. BING, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture, in *Lectures on Modern Mathematics II* (T. L. Saaty, ed.), Wiley, 1964.

[Cao & Chow, 1999] H.-D. CAO and B. CHOW, Recent developments on the Ricci flow, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*) **36** (1999), 59-74.

[Casson & Jungreis, 1994] A. CASSON and D. JUNGREIS, Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, *Invent. Math.* **118** (1994), 441-456.

[Cerf, 1968] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4=0$), Lecture Notes in Math., vol. 53, Springer-Verlag, 1968.

[Chapman, 1974] T. A. CHAPMAN, Topological invariance of Whitehead torsion, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 488-497.

[Charlap, 1986] L. CHARLAP, *Bieberbach Groups and Flat Manifoldes*, Springer, 1986. (See also: Compact flat Riemannian manifolds. I, *Ann. of Math.* **81**(1965), 15-30.)

[Dehn, 1910] M. DEHN, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.* **69** (1910), 137-168.

[Devlin, 2002] K. DEVLIN, *The Millennium Problems*, Basic Books, 2002.

[Freedman, 1982] M. H. FREEDMAN, The topology of fourdimensional manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357-453.

[Gabai, 1992] D. GABAI, Convergence groups are Fuchsian groups, *Ann. of Math.* **136** (1992), 447-510.

[Gieseking, 1912] H. GIESEKING, Analytische Untersuchungen ueber topologische Gruppen, Thesis, Muenster, 1912.

[Gompf, 1993] R. GOMPF, An exotic menagerie, *J. Differential Geom.* **37** (1993), 199-223.

[Gordon, 1999] C. McA. GORDON, 3-dimensional topology up to 1960, pp. 449-490 in[James, 1999].

[Gordon & Heil, 1975] C. McA. GORDON and W. HEIL, Cyclic normal subgroups of fundamental groups of 3-manifolds, *Topology* **14** (1975), 305-309.

[Haken, 1961a] W. HAKEN, Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannig faltigkeiten, *Math. Z.* **76** (1961), 427-467.

[Haken, 1961b] ——— , Theorie der Normalflächen, *Acta Math.* **105** (1961), 245-375.

[Haken, 1962] ——— , Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I, *Math. Z.* **80** (1962), 89-120.

[Hamilton, 1982] R. S. HAMILTON, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 255-306.

[Hamilton, 1995] ——— , The formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in Differential Geometry, Vol. II* (Cambridge, MA, 1993), International Press, Cambridge, MA, 1995), pp. 7-136.

[Hamilton, 1999] ——— , Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), 695-729.

[Hempel, 1976] J. HEMPEL, 3-*Manifolds*, Ann. of Math. Studies, vol. 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[Hirsch, 1963] M. HIRSCH, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 352-356.

[Hopf, 1925] H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *Math. Ann.* **95** (1925), 313-319.

[Jaco & Shalen, 1979] W. JACO and P. SHALEN, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **21**, no. 220 (1979).

[McMullen, 1996] ——— , *Renormalization and 3-Manifolds Which Fiber over the Circle*, Ann. of Math. Studies, vol. 142, Princeton Univ. Press, 1996.

[Moise, 1977] E. E.MOISE, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer, 1977.

[Morgan, 1984] J. MORGAN, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, *The Smith Conjecture* (Bass and Morgan, eds.), Pure Appl. Math., vol. 112, Academic Press, 1984, pp. 37-125.

[Munkres, 1960] J. MUNKRES, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, *Ann. of Math.* **72** (1960), 521-554. (See also: Concordance is equivalent to smoothability), *Topology* **5** (1966), 371-389.

[Otal, 1996] J.-P. OTAL, Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3, *Astérisque* **235** (1996); translated in SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 7, Amer. Math. Soc. and Soc. Math. France, Paris, 2001.

[Papakyriakopoulos, 1957] C. PAPAKYRIAKOPOULOS, On Dehn's lemma and ths asphericity of knots, *Ann. of Math.* **66** (1957), 1-26. (See also: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 169-172.)

[Papakyriakopoulos, 1960] ——— , *The Theory of Three-Dimensional Manifolds since 1950*, Proc. Internat. Congr. Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 433-440.

[Perelman, 2002] G. PERELMAN, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications (available on the Internet from: arXiv:math.DG/0211159 v1, 11 November 2002).

[Perelman, 2003] ——— , Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math.DG/0303109 v1, 10 March 2003; Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math.DG/0307245, 17 July 2003).

[Poincaré, 1895] H. POINCARÉ, Analysis situs, *J. de l'École Polytechnique* **1** (1895), 1-121. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, pp. 193-288.)

[Poincaré, 1900] ——— , Second complément à l'analysis situs, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900), 277-308. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, p. 370.)

[Poincaré, 1904] ——— , Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 45-110. (See *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, p. 498.)

[Preissmann, 1942] A. PREISSMANN, Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **15** (1942), 175-216.

[de Rham, 1950] G. DE RHAM, Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiables, *Ann. Inst. Fourier* **2** (1950), 51-67.

[James, 1999] I. M. JAMES (ed.), *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Johannson, 1979] K. JOHANNSON, *Homotopy Equivalence of 3-Manifolds with Boundaries*, Lecture Notes in Math., vol. 761, Springer, 1979.

[Kapovich, 2001] M. KAPOVICH, *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, Progress Math., vol. 183, Birkhäuser, 2001.

[Kirby & Siebenmann, 1969] R. KIRBY and L. SIEBENMANN, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 742-749.

[Kneser, 1929] H. KNESER, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **38** (1929), 248-260.

[Milnor, 1957] J. MILNOR, Groups which act on S^n without fixed points, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 623-630; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1962] ——— , A unique decomposition theorem for 3-manifolds, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 1-7; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1966] ——— , Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 358-426; reprinted in [Milnor, 1995].

[Milnor, 1976a] ——— , Hilbert's problem 18: on crystallographic groups, fundamental domains, and on sphere packing, *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 28, Part 2, Amer. Math. Soc., 1976, pp. 491-506; reprinted in [Milnor, 1994].

[Milnor, 1976b] ——— , Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293-329; reprinted in [Milnor, 1994].

[Milnor, 1982] ——— , Hyperbolic geometry: The first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 9-24; also in Proc. Sympos. Pure Math., vol. 39, Amer. Math. Soc., 1983; and in [Milnor, 1995]. (See also: "How to compute volume in hyperbolic space" in this last collection.)

[Milnor, 1994] ——— , *Collected Papers 1, Geometry*, Publish or Perish, 1994.

[Milnor, 1995] ——— , *Collected Papers 2, The Fundamental Group*, Publish or Perish, 1995.

[Milnor & Burlet, 1970] J. MILNOR and O. BURLET, Torsion et type simple d'homotopie, *Essays on Topology and Related Topics*, Springer, 1970, pp. 12-17; reprinted in [Milnor, 1995].

[McMullen, 1992] C. MCMULLEN, Riemann surfaces and geometrization of 3-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S).* **27** (1992), 207-216.

fibrées sur le cercle, sém. Bourbaki **554**, Lecture Notes in Math., vol. 842, Springer, 1981].

[Thurston, 1982] W. P. THURSTON, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357-381. (Also in *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 39, Part 1. Amer. Math. Soc., 1983.)

[Thurston, 1986] ——— , Hyperbolic structures on 3-manifolds, I. Deformation of acyclic manifolds, *Ann. of Math.* **124** (1986), 203-246.

[Thurston, 1997] ——— , *Three-Dimensional Geometry and Topology,* Vol. 1 (Silvio Levy, ed.), Princeton Math. Ser., vol. 35, Princeton Univ. Press, 1997.

[Tukia, 1988] P. TUKIA, Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups, *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 1-54.

[Waldhausen, 1967a] F. WALDHAUSEN, Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, *Topology* **6** (1967), 505-517.

[Waldhausen, 1967b] ——— , Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, II, *Invent. Math.* **3** (1967), 308-333; ibid. **4** (1967), 87-117.

[Waldhausen, 1968] ——— , On irreducible 3-manifolds Which are sufficiently large, *Ann. of Math.* **87** (1968), 56-88.

[Wallace, 1961] A. WALLACE, Modifications and cobounding manifolds. II, *J. Math. Mech.* **10** (1961), 773-809.

[Whitehead, 1983] G. W. WHITEHEAD, Fifty years of homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S).* **8** (1983), 1-29.

[Zassenhaus, 1948] H. ZASSENHAUS, Uber einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, *Comment. Math. Helv.* **21** (1948), 117-141.

[Zeeman, 1962] E. C. ZEEMAN, The Poincaré conjecture for $n \geqslant 5$, *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, 1962, pp. 198-204. (See also: *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 270.)

******

• John Milnor, "Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds", *Notices, Amer. Math. Soc.*, (10) **50** (2003) 1226-1233.

* جان میلنر، دانشگاه ستانی در استونی‌بروک، آمریکا

jack@math.sunysb.edu

[Riley, 1975] R. RILEY, A quadratic parabolic group, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 281-288.

[Riley, 1979] ——— , An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures, *Topology of Low-Dimensional Manifolds.* (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate), Lecture Notes in Math., vol. 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 99-133.

[Riley, 1982] ——— , Seven excellent knots, *Low-Dimensional Topology* (Bangor), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York, 1982, pp. 81-151.

[Schubert, 1956] H. SCHUBERT, Knoten mit zwei Brücken, *Math. Z.* **65** (1956), 133-170.

[Schubert, 1961] ——— , Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen, *Math. Z.* **76** (1961), 116-148.

[Scott, 1980] P. SCOTT, A new proof of the annulus and torus theorems, *Amer. J. Math.* **102** (1980), 241-277.

[Scott, 1983a] ——— , There are no fake Seifert fibre spaces with infinite π_1, *Ann. of Math.* **117** (1983), 35-70.

[Scott, 1983b] ——— , The geometries of 3-manifolds, *Bull, London Math. Soc.* **15** (1983), 401-487.

[Seifert, 1931] H. SEIFERT, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **83** (1931), 26-66.

[Seifert, 1933] ——— , Topologie dreidimensionales gefaserter Raum, *Acta Math.* **60** (1933), 147-288; translated in Pure Appl. Math., vol. 89, Academic Press, 1980.

[Seifert & Threlfall, 1934] H. SEIFERT and W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934; translated in Pure Appl. Math., vol. 89, Academic Press, 1980.

[Seifert & Weber, 1933] H. SEIFERT and C. WEBER, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Z.* **37** (1933), 237-253.

[Smale, 1959] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 621-626.

[Smale, 1960] ——— , The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions, *Bull, Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 373-375. (See also: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.* **74** (1961), 391-406; as well as: The story of the higher dimensional Poincaré conjecture (What actually happened on the beaches of Rio), *Math. Intelligencer* **12** (1990), 44-51.)

[Stallings, 1960] J. STALLINGS, Polyhedral homotopy spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 485-488.

[Sullivan, 1981] D. SULLIVAN, Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et sur les variétés hyperboliques de dimension 3