قضیهٔ فوبینی نقش بر آب می‌شود (!): مثال پارادوکس‌گونهٔ کاتوک در نظریهٔ اندازه•

جان میلنر*
ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

آناتولی کاتوک[1] ثابت کرده است (این اثبات هنوز منتشر نشده است) که

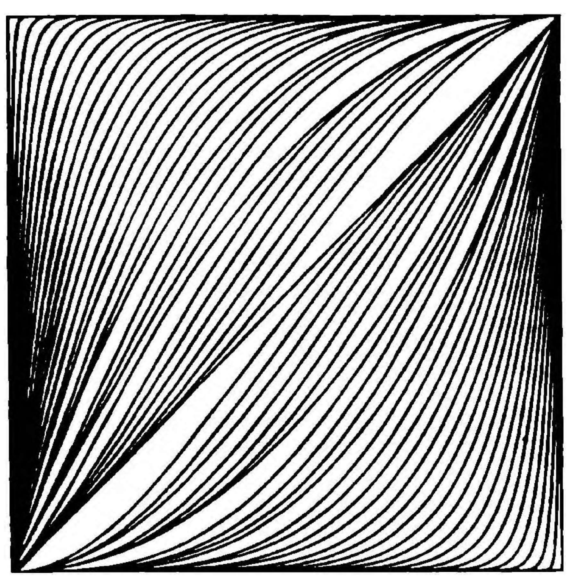
> *مجموعهٔ اندازه‌پذیر E با مساحت واحد در مربع یکّهٔ $[۰, ۱] \times (۰, ۱)$ همراه با خانواده‌ای از خمهای تحلیلی حقیقیِ هموارِ مجزا از هم Γ_β که این مربع را پر می‌کنند، وجود دارند به‌طوری، که هر خم Γ_β، مجموعهٔ E را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.*

به عبارت دیگر، با انتخاب حداکثر یک نقطه از هر Γ_β می‌توانیم مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ دوبعدی کامل بسازیم. روش ساختْ کاملاً صریح و طبیعی است. (خمهای مورد نظر به‌طور پیوسته به پارامتر $\beta \in [۰, ۱]$ وابسته‌اند و یک برگبندی[2] توپولوژیک برای مربع یکّه تشکیل می‌دهند.) اما به این نکته نیز توجه داشته باشید که در هیچ مثالی از این دست، Γ_β نمی‌تواند به‌طور هموار به پارامتر β بستگی داشته باشد. اگر این خانواده به‌طور هموار پارامتری شده باشد، به‌راحتی می‌توان از قضیهٔ فوبینی نتیجه گرفت که E باید تقریباً هر Γ_β را در مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ یک‌بعدی کامل قطع کند.

شکل ۱ نمونه‌ای از چنین خانواده‌ای از خمها را نشان می‌دهد که بر مبنای روشی مشابه روش کاتوک، امّا نه یکسان با آن، ساخته شده است*. برای اینکه ساختن این خانواده از خمها را آغاز کنیم به *قانون قوی بورل* در مورد *اعداد بزرگ* نیاز داریم. فرض کنید سکهٔ ناهمگنی را که با احتمال $p(۰) = p$ «صفر» [شیر] می‌آید و با احتمال $p(۱) = ۱ - p$، «یک» [خط] می‌آید، پرتاب کرده‌ایم. در این صورت برای دنباله‌ای از n پرتاب مستقل از هم سکه دنباله‌ای از nرقم دودویی به‌دست می‌آوریم، که احتمال دنبالهٔ مفروض $(b_۱, b_۲, \ldots, b_n)$ بنا بر قاعدهٔ ضرب برابر است با

$$p(b_۱, \ldots, b_n) = p(b_۱) \cdots p(b_n) \qquad (۱)$$

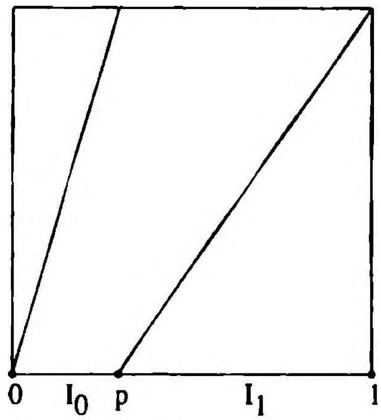
یاکوب برنولی ۳۰۰ سال پیش نشان داد که فراوانی «یک‌ها» یعنی نسبت



شکل ۱

1. Anatole Katok 2. foliation

* مثال کاتوک بر اساس خانواده‌ای از حاصلضربهای بلاشکهٔ درجهٔ دو است که دایرهٔ یکه را به خودش می‌نگارد. از پیو (C. Pugh) به خاطر اینکه این موضوع را برای من توضیح داد سپاسگزارم. صورت دیگری از این ساختمان را هم یورک (J. Yorke) ارائه کرده که بر اساس نگاشتهای خیمه‌ای روی بازه است که آن هم هنوز منتشر نشده است.



شکل۲

$(b_1+\cdots+b_n)/n$، برای nهای بزرگ با احتمال زیاد نزدیک به $p(1)$ است. امیل‌بورل این نتیجه را به این صورت دقیق‌تر کرد: اگر دنباله‌ای نامتناهی از پرتابهای سکه را در نظر بگیریم، فرمول (۱) به یک اندازهٔ احتمال روی فضای $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ مرکب از همهٔ دنباله‌های نامتناهی $(b_1,b_2,\ldots)$ از صفرها و یک‌ها منجر می‌شود که *اندازهٔ حاصلضربی برنولی از نوع* $(p(0),p(1))$ نام دارد. بورل نشان داد که فراوانی حدی

$$\lim_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)/n$$

وجود دارد و با احتمال ۱، دقیقاً برابر است با $p(1)$. به عبارت دیگر این حد، برای دنباله‌هایی عضو $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ و خارج از زیرمجموعه‌ای از آن با اندازهٔ صفر نسبت به اندازهٔ حاصلضربی برنولی، برابر است با $p(1)$.

این نتیجه را می‌توانیم (به جای استفاده از پرتاب سکه) به صورت زیر فقط به کمک متغیرهای حقیقی بیان کنیم. فرض کنید x روی دایرهٔ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و پارامتر p روی بازهٔ بازِ $(0,1)$ تغییر کند. به‌ازای هر p نگاشت قطعه‌قطعه خطیِ f_p از درجهٔ دو را از دایرهٔ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ به خودش با فرمول

$$f_p(x)=\begin{cases} x/p & x\in I_0(p)=[0,p)\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}\\ (x-p)/(1-p) & x\in I_1(p)=[p,1)\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}\qquad(2)$$

تعریف می‌کنیم. نمودار این نگاشت در شکل ۲ رسم شده است. (به عبارت دیگر می‌توانیم به f_p به چشم نگاشتی ناپیوسته از بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ به خودش نگاه کنیم. در هر صورت استدلال یکی است.)

به‌راحتی می‌توان دید که هر f_p *حافظ اندازه* است. در واقع، برای هر بازهٔ $J\subset[0,1]$ به طول $\ell(J)$، پیش‌تصویر $f_p^{-1}(J)$ تشکیل شده است از بازه‌ای در $I_0(p)$ به طول $p(0)\ell(J)$ و بازه‌ای در $I_1(p)$ به طول $p(1)\ell(J)$ که در نتیجه طول کل آنها برابر است با $\ell(f_p^{-1}(J))=\ell(J)$. [در اینجا هم باز فرض کرده‌ایم $p(0)=p$ و $p(1)=1-p$.] به‌ازای هر pی ثابت می‌توانیم کُدی برای هر نقطهٔ $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با استفاده از یک دنبالهٔ نامتناهی $(b_1,b_2,\ldots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ از ارقام دودویی به ترتیب زیر انتخاب کنیم. فرض می‌کنیم

$$x=x_1\mapsto x_2\mapsto x_3\mapsto\cdots\qquad(3)$$

مدار x تحت f_p باشد و برحسب اینکه x_n به بازهٔ $I_0(p)$ یا $I_1(p)$ به پیمانهٔ $\mathbb{Z}$ تعلق داشته باشد، b_n را صفر یا یک قرار می‌دهیم. $(b_1,b_2,\ldots)$ را *دنبالهٔ نمادی* وابسته به x و f_p می‌خوانیم.

(تذکر: تقریباً هر دنبالهٔ نمادی در $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ را می‌توان به این طریق به‌دست آورد، اما دنباله‌هایی که به تعدادی نامتناهی از یک‌ها ختم می‌شوند، به دست نمی‌آیند. به یادداشت انتهای مقاله مراجعه کنید.)

با این کدگذاری، f_p با نگاشت تغییرِ جای

$$(b_1,b_2,b_3,\ldots)\mapsto(b_2,b_3,\ldots)$$

متناظر می‌شود. بررسی این مطلب که اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ دقیقاً با اندازهٔ حاصلضربی برنولی از نوع $(p(0),p(1))$ روی $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ متناظر است، کار چندان مشکلی نیست؛ یعنی طول بازهٔ مرکب از همهٔ آن xهایی که دنبالهٔ نمادی وابسته به آنها با دنبالهٔ متناهی خاصی از ارقام دودویی چون $(b_1,\ldots,b_n)$ آغاز می‌شود، برابر است با $p(b_1)\cdots p(b_n)$.

اکنون می‌توان قانون قوی اعداد بزرگ را به این صورت بیان کرد: پارامتر ثابت p را انتخاب کنید و نگاشت f_p را در نظر بگیرید. *برای تقریباً هر (به مفهوم اندازهٔ لبگ) نقطهٔ* $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*، فراوانی یک‌ها در دنبالهٔ نمادی وابسته به آن* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$*، تعریف می‌شود و برابر است با* $p(1)=1-p$.

فرض کنید $E\subset(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ مجموعهٔ همهٔ آن جفتهای (p,x) باشد که فراوانی یک‌ها برای دنبالهٔ نمادی x تحت f_p، تعریف شده و برابر با $1-p$ باشد. بررسی اینکه E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است، کار چندان مشکلی نیست. به‌ازای هر pی ثابت فرض می‌کنیم C_p نشان‌دهندهٔ دایرهٔ $\{p\}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\subset(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ باشد. چون اندازهٔ لبگ یک‌بعدیِ اشتراک E با هر C_p برابر است با ۱، $\ell_1(E\cap C_p)=1$، از قضیهٔ فوبینی نتیجه می‌شود که اندازهٔ لبگ دوبعدی E برابر است با

$$\ell_2(E)=\int_0^1\ell_1(E\cap C_p)\,dp=1$$

حال خانوادهٔ خمهای هموار Γ_β را به این ترتیب تعریف می‌کنیم: فرض کنید β عددی در بازهٔ $[0,1)$ باشد. بسط عدد β در پایهٔ ۲ را تشکیل می‌دهیم

$$\beta=0.b_1b_2b_3\cdots_{(\text{پایهٔ ۲})}=\sum b_n/2^n$$

فرض کنید Γ_β مجموعهٔ همهٔ آن جفتهای (p,x) در $(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ است که دنبالهٔ نمادی x تحت نگاشت f_p مساوی با $(b_1,b_2,b_3,\ldots)$ است. روشن است که Γ_βها مجموعه‌هایی مجزایی هستند که اجتماعشان برابر است با $(0,1)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. برای اینکه ثابت کنیم هر Γ_β یک خم تحلیلی حقیقی

هموار است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: به‌راحتی از (۲) نتیجه می‌شود که برای هر مدار (۳) داریم

$$x_n = b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n)$$

اکنون یک استقراء سرراست نشان می‌دهد که $x = x_1$ برابر است با مقدار سری

$$\begin{aligned} x &= x(p,\beta) \\ &= p(0)(b_1 + p(b_1)(b_2 + p(b_2)(b_3 + \cdots)\cdots)\cdots) \\ &= p(0)(b_1 + b_2 p(b_1) + b_3 p(b_1)p(b_2) \\ &\quad + b_4 p(b_1)p(b_2)p(b_3) + \cdots) \end{aligned} \qquad (۴)$$

قرار می‌دهیم

$$p(1) = 1 - p = \frac{1-t}{2} \qquad \text{و} \qquad p(0) = p = \frac{1+t}{2}$$

اگر $|t| \le c < 1$، آنگاه قدرمطلق جملهٔ nام در سری (۴) حداکثر $[(1+c)/2]^n$ است. از این رو این سری به‌طور یکنواخت همگراست. در واقع حتی اگر مقدارهای مختلط t با ضابطهٔ $|t| \le c < 1$ را هم مجاز بدانیم، باز این مطلب درست است. بنابراین از قضیهٔ همگرایی یکنواخت وایرشتراس نتیجه می‌شود که به‌ازای هر βی ثابت، سری (۴)، x را به صورت تابعی تحلیلی از t در بازهٔ $|t| < 1$، یا به صورت تابعی تحلیلی از p در بازهٔ $0 < p < 1$ تعریف می‌کند. روشن است که Γ_β دقیقاً نمودار این تابع تحلیلی حقیقی $p \mapsto x(p,\beta)$ است.

و بالاخره چون هر دنبالهٔ نمادی داده شده حداکثر می‌تواند یک فراوانی حدی، یعنی

$$\lim(b_1 + \cdots + b_n)/n = 1 - p$$

داشته باشد، نتیجه می‌شود که هر Γ_β، مجموعهٔ اندازه‌پذیر E را در حداکثر یک نقطه یعنی $(p, x(p,\beta))$ قطع می‌کند.

یادداشت

تابع $\beta \mapsto x(p,\beta)$ اکیداً یکنواست و بازهٔ $[0,1)$ را به روی خودش می‌نگارد. بنابراین یک همسانریختی است. در واقع به‌راحتی ثابت می‌شود که تناظر $(p,\beta) \mapsto (p, x(p,\beta))$ فضای حاصلضربی $(0,1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ را به‌طور همسانریخت به روی خودش می‌نگارد.

استدلال دیگری هم برای این مطلب وجود دارد. روشن است که عبارت (۴) به‌طور پیوسته به دو متغیر $p \in (0,1)$ و $(b_1, b_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ بستگی دارد که البته برای فضای دنباله‌ها توپولوژی حاصلضربی دکارتی را اختیار کرده‌ایم. تناظر

$$(b_1, b_2, \ldots) \mapsto \sum b_n/2^n \in [0,1]$$

از دنباله‌های نمادی به متغیرهای حقیقی، یک‌به‌یک نیست چون هر عدد گویای دودویی $m/2^n$ دو بسط متفاوت در پایهٔ دو دارد، که یکی به تعدادی نامتناهی صفر ختم می‌شود و دیگری به تعدادی نامتناهی یک. با این حال، با محاسبهٔ سرراستی نشان داده می‌شود که این دو بسط به مقدار یکسانی برای $x(p,\beta)$ منجر می‌شوند و به‌راحتی نتیجه می‌شود که تناظر $(p,\beta) \mapsto x(p,\beta)$ در واقع پیوسته است.

این ساختارها را از دیدگاه دینامیکی هم می‌توان تعبیر کرد. اثبات اینکه هر $f_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ به‌طور یکتا با نگاشتِ دو برابرکنندهٔ زاویه، $f_{1/2}(x) \equiv 2x(\mathrm{mod}\,\mathbb{Z})$، مزدوج توپولوژیک است، کار چندان سختی نیست؛ یعنی همسانریختی یکتای $h_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ وجود دارد که $f_{1/2}$ را با f_p مزدوج می‌سازد به‌طوری که

$$f_p = h_p \circ f_{1/2} \circ h_p^{-1}$$

در واقع این همسانریختیِ مزدوج‌ساز از فرمول $h_p(\beta) = x(p,\beta)$ به‌دست می‌آید و بر حسب هر دو متغیر پیوسته است. توجه کنید که اگر $\beta \in [0,1)$ بسط $\beta = \sum b_n/2^n$ را در پایهٔ دو داشته باشد، دنبالهٔ نمادی β تحت $f_{1/2}$ برابر است با $(b_1, b_2, \ldots)$ و دنبالهٔ نمادی $h_p(\beta)$ تحت f_p همان دنبالهٔ $(b_1, b_2, \ldots)$ است. جزئیات این استدلال را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مراجع

1. Billingsley, P., *Probability and Measure*, NewYork: John Wiley & Sons (1979) [مرجع برای قضیهٔ فوبینی و قانون اعداد بزرگ].
2. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, NewYork: John Wiley & Sons (1950, 1957) [مرجع برای قانون اعداد بزرگ].
3. Rudin, W., *Real and Complex Analysis* , NewYork: McGraw-Hill (1974) [مرجع برای قضیهٔ فوبینی و قضیهٔ وایرشتراس].

******

• John Milnor, "Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory", *The Mathematical Intelligencer*, (2) **19** (1997) 30-32.

* جان میلنر، دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک، آمریکا