صد سال نمایش گروههای متناهی (بخش II)•

ت. ی. لم*

ترجمهٔ علیرضا جمالی

خلاصه

منشأ نظریهٔ نمایشهای گروههای متناهی را می‌توان در مکاتبه‌ای بین ددکیند و فروبنیوس که در آوریل ۱۸۹۶ به وقوع پیوست، یافت. مقالهٔ حاضر مبتنی بر چند سخنرانی است که مؤلف در ۱۹۹۶ به مناسبت بزرگداشت یکصدمین سالگرد این رویداد ایراد کرده است.

در بخش I این مقالهٔ ماجرای پیشنهاد ددکیند به فروبنیوس را مبنی بر تجزیهٔ یک چندجمله‌ای همگن خاص که از یک دترمینانِ وابسته به گروهی متناهی مانند G (موسوم به دترمینان گروهی) ناشی می‌شود، نقل کردیم. ددکیند توانست در حالتی که G آبلی است، دترمینان گروهی را با استفاده از سرشتهای G (یعنی، همریختیهایی از G به گروه اعداد مختلط ناصفر) به عوامل خطی تجزیه کند. بر اثر بارقه‌ای از نبوغ، فروبنیوس یک نظریهٔ عمومی سرشتها را برای گروههای متناهی ابداع کرد، و آن را در حل کامل مسألهٔ دترمینان گروهی ددکیند به کار بست. جالب توجه اینکه، تعریف نخست فروبنیوس از سرشتها(ی غیرآبلی) به صورتی نسبتاً موردی، به‌وسیلهٔ ویژه‌مقادیر مجموعهٔ خاصی از ماتریسهای تعویض‌پذیر، ارائه شد. این کار فروبنیوس را در سال ۱۸۹۷ به صورتبندی تعریف امروزی نمایش (ماتریسی) یک گروه G به‌صورت یک همریختی مانند $D : G \to GL_n(\mathbb{C})$ (به‌ازای nای) هدایت کرد. با این تعریف، سرشت $\chi_D : G \to \mathbb{C}$ از این نمایش به سادگی به‌صورت $\chi_D(g) = \mathrm{trace}(D(g))$ (به‌ازای هر $g \in G$) تعریف می‌شود. ایدهٔ مطالعهٔ یک گروه از طریق نمایشهای مختلف آن افقی کاملاً تازه را در تحقیقات در نظریهٔ گروهها و کاربردهای آن گشود.

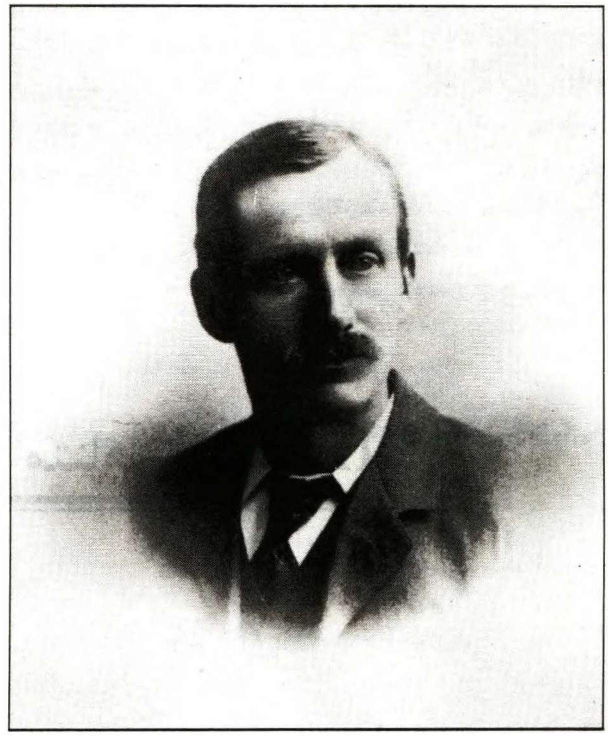
با مرورِ ماجرای ابداع نظریهٔ سرشتها به توسط فروبنیوس و کارهای ماندگار بعدی او در نظریهٔ نمایشها که در بخش I این مقاله آمد، اینک به زندگی و آثار شخصیت خارق‌العادهٔ دیگر این موضوع، عالم انگلیسیِ نظریهٔ گروهها ویلیام برنساید، می‌پردازیم. این داستان بخشِ II مقاله را تشکیل می‌دهد، که می‌توان آن را تا حد زیادی مستقل از بخش I خواند. در اینجا برای راحتی خواننده، تعداد اندکی مرجع کتابشناختی مورد نیاز از بخش I، با همان کدهای حرفی به‌خاطر هماهنگی، تکرار می‌شوند. مانند بخش I، [F : (۵۳)] به معنی ارجاع به مقالهٔ (۵۳) در مجموعهٔ آثار فروبنیوس [F] است. به مقالات برنساید با سال انتشار آنها، از فهرست اصلی گردآوری شده به توسط وَگنر و موزنتال در [B] ارجاع داده می‌شود. اما، مراجعه به مقالات اصلی برای تعقیب بحث کلی این مقاله لازم نیست.

ویلیام برنساید (۱۸۵۲-۱۹۲۷)

توضیحات مذکور در این بخش دربارهٔ زندگی و آثار برنساید عمدتاً از نوشتهٔ فورسایت [Fo] به مناسبت درگذشت برنساید، که یک‌سال پس از درگذشت برنساید در *مجلهٔ انجمن ریاضی لندن* منتشر شد، و از کتاب در دست انتشارِ کرتیس دربارهٔ پیشگامان نظریهٔ نمایشها [Cu۲، فصل ۳] اخذ شده‌اند.

ویلیام برنسایدِ اسکاتلندی‌تبار که در لندن متولد شده بود تحصیلات مرسوم دانشگاهی را در کالجهای سنت جونز و پمبروک در کیمبریج گذراند. در پمبروک هم در ریاضیات و هم در پاروزنی موقعیت ممتازی یافت، و با کسب رتبهٔ دوم در امتحان ترایپاس[۱] ریاضی در ۱۸۷۵ از کیمبریج فارغ‌التحصیل شد. پس از آن سمت استادیاری را در کیمبریج احراز کرد، و حدود ده سال در آنجا ماند، و به تعلیم ریاضیات و مربیگری تیمهای شرکت‌کننده در ترایپاس و قایقرانی پرداخت. برنساید در ۱۸۸۵ بنا به درخواست سرپرست آموزش دریایی (ویلیام نیونِ دانشجوی سابق کیمبریج)، سمت استادی ریاضیات را در کالج سلطنتی دریایی در گرینویچ پذیرفت. وی باقی دوران اشتغال خود را در گرینویچ سپری کرد، ولی در این مدت ارتباط نزدیکی با محافل

۱. Tripos. امتحان نهایی دورهٔ کارشناسی در کیمبریج برای فارغ‌التحصیلی با درجهٔ ممتاز (در مقابل درجهٔ معمولی) که آن هم رتبه‌های مختلف دارد ــ م.



ویلیام برنساید

کیمبریج برقرار کرد، و هرگز از ایفای نقش فعال در امور انجمن ریاضی لندن دست برنداشت، و دوره‌های طولانی در شورای انجمن، و نیز یک دورهٔ دوساله (۱۹۰۶ـ۱۹۰۸) به‌عنوان رئیس انجمن، به خدمت پرداخت. در گرینویچ ریاضیات را به افراد نیروی دریایی، که مشتمل بر افسران توپخانه و اژدر، مهندسان مکانیک و راه و ساختمان، و نیز دانشجویان دانشکدهٔ افسری بودند، آموزش می‌داد. کار آموزش برای برنساید نه تنها پرزحمت نبود، بلکه کار بسیار آسانی بود، چنانکه فرصتی برای او فراهم آورد تا یک برنامهٔ تحقیقاتی فعال را دنبال کند. اگرچه او جسماً از مراکز عمدهٔ ریاضی انگلیس دور بود، در سراسر دوران شغلی خود همگام با پیشرفتهای جاری تحقیقات پیش رفت، و حدود ۱۵۰ مقاله در ریاضیات محض و کاربسته منتشر کرد. چنانکه همهٔ قرائن حاکی است، برنساید زندگیش را یکسره وقف علمش کرد.

تحصیلات اولیهٔ برنساید عمیقاً متأثر از سنت ریاضیات کاربسته در کیمبریج بود[1]. در آن زمان، ریاضیات کاربسته اساساً به معنی موارد استعمال آنالیز (نظریهٔ توابع، معادلات دیفرانسیل، و غیره) در مباحثی در فیزیک نظری مانند سینماتیک، کشسانی، ایستانبرق، ئیدرودینامیک، و نظریهٔ گازها بود. بنابراین جای شگفتی نیست که در پانزده سال نخستِ دوران کارش، مقالات منتشر شدهٔ برنساید یا در همین زمینه‌های کاربسته بودند یا به توابع بیضوی و خودریخت و هندسهٔ دیفرانسیل مربوط می‌شدند. او به سبب این تحقیقات در ۱۸۹۳ به عضویت انجمن سلطنتی انتخاب شد. تصادفاً در همین اوان بود که تغییر علائق ریاضی برنساید و روی آوردن او به نظریهٔ گروهها، موضوعی

۱. طبق اظهار فورسایت [Fo]، در آن وقت ریاضیات محض عمدتاً «در حوزهٔ کیلی جریان داشت که طالبان کسب رتبه‌های عالی در امتحان ترایپاس چندان توجهی به آن نداشتند».

که مقدر بود در سالهای پختگی خود تمام توان خلاقه‌اش را به آن اختصاص دهد، آغاز شد.

پس از تألیف سلسله‌ای از مقالات با عنوان «یادداشتهایی در نظریهٔ گروههای متناهی» (و غیره)، برنساید کتاب نظریهٔ گروههای خود [B_1] را در ۱۸۹۷ منتشر کرد، که نخستین کتابی به زبان انگلیسی بود که بررسی جامعی از نظریهٔ گروههای متناهی را عرضه می‌داشت. چاپ بسط‌یافتهٔ دوم این کتاب با مبحث جدید نمایشهای گروهی در ۱۹۱۱ منتشر شد. به مدت بیش از نیم قرن، این کتاب به خاطر شرحِ مفصلش از مطالب اساسیِ نظریهٔ گروهها بی‌تردید پرمراجعه‌ترین کتاب بود. با تجدید چاپ این کتاب به‌وسیلهٔ انتشارات داوِر در ۱۹۵۵ (و به قیمت ۲٫۴۵ دلار)، کتاب برنساید اینک به‌عنوان یکی از آثار کلاسیک واقعی ریاضیات حفظ می‌شود[1]. در بخش بعد در بارهٔ این کتاب بیشتر صحبت خواهیم کرد.

چون نظریهٔ گروهها در انگلیس در سرآغاز قرن حاضر موضوعی رایج نبود، شاید ارزش کار برنساید آن‌طور که سزاوار بود شناخته نشد. هنگامی که برنساید در ۱۹۲۷ مُرد، *تایمز لندن* از درگذشت «یکی از مشهورترین قهرمانان کیمبریج عصر خود» خبر داد[2]. شاید بتوان این تقصیر را به گردن بی‌خبری روزنامه‌نگار یا عدم اطلاع از ارزش ریاضیات انداخت. اما، حتی در نوشتهٔ فورسایت به مناسبت درگذشت برنساید، که هفده صفحهٔ *مجلهٔ انجمن ریاضی لندن* را اشغال می‌کند، بیش از یک صفحه به تحقیقات برنساید در نظریهٔ گروهها اختصاص نیافت، در حالی که فورسایت کاملاً می‌دانست که همین تحقیقات «ماندنی‌ترین و برجسته‌ترین خدمات او به این علم است.»

در مقالهٔ فورسایت، از هیچ‌یک از دستاوردهای عظیم برنساید که امروز نام او را در نظریهٔ گروهها بر سر زبانها انداخته است، حتی ذکری به میان نیامد. من دو دلیل برای این موضوع می‌بینم. دلیل اول شاید این باشد که فورسایت درک واقعی از نظریهٔ گروهها نداشت. در حالی که او استاد کرسی سدلری[3] ریاضیات در کیمبریج بود، رشتهٔ اصلیش نظریهٔ توابع و معادلات دیفرانسیل بود[4]. او را نمی‌توان به خاطر اینکه علاقهٔ بیشتری به کارهای برنساید در زمینهٔ نظریهٔ توابع و ریاضیات کاربسته داشت ملامت کرد؛ روی‌هم‌رفته، به سبب این کارها بود که برنساید عضویت انجمن سلطنتی را احراز کرد. دلیل دوم این است که دستاوردهای برنساید در نظریهٔ گروهها واقعاً از عصر او جلوتر بودند؛ معنی عمیق ایده‌ها و قدرت واقعیِ بینش او تنها سالها پس از مرگش

۱. کسانی که با کتابهای انتشارات داوِر (Dover) آشنایی دارند می‌دانند که این ناشر دو کتاب تجدید چاپی دیگر نیز به قلم «برنساید» منتشر کرده است: اولی *نظریهٔ احتمالات*، و دومی *نظریهٔ معادلات* است. کتاب اول را واقعاً ویلیام برنساید نوشته، و پس از مرگ او در ۱۹۲۸ منتشر شده است؛ این کتاب در ضمن یکی از نخستین کتابهای درسی در نظریهٔ احتمالات است که به انگلیسی نوشته شده است. اما، کتاب دو جلدیِ *نظریهٔ معادلات* (در حدود ۱۹۰۴) به توسط پنتون و برنساید دیگری نوشته شد که ویلیام اسنو برنساید، استاد ریاضیات در دوبلین و معاصر ویلیام برنساید بود؛ این دو برنساید مقالاتی در مجلات یکسان انگلیسی، یکی با عنوان «دبلیو. اس. برنساید» و دیگری با عنوان «دبلیو. برنساید» منتشر کردند. قبلاً گزارشی در این باره در [Ab]، پانوشت ۴۳، ص ۹۱] ارائه شده است.

۲. متن کامل آگهی درگذشت برنساید در تایمز لندن در [Cu_2]، فصل ۳] نقل شده است.

3. Sadlerian

۴. اثر دو جلدی او در نظریهٔ توابع و اثر شش جلدی او در معادلات دیفرانسیل در عصر او با اقبال عمومی روبه‌رو بودند.

آشکار شد. امروزه، همکاران من در بخش ریاضیات کاربسته صحبتی در مورد تحقیقات برنساید در ئیدرودینامیک یا نظریهٔ سینماتیک گازها به میان نمی‌آورند، ولی من حتماً برهان مهم قضیهٔ $p^a q^b$ برنساید را (مبنی بر اینکه هر گروه از مرتبهٔ $p^a q^b$ حلپذیر است) در درس دورهٔ عالی خود در نظریهٔ نمایش گروهها، به دانشجویان خود تعلیم می‌دهم! در ریاضیات، مانند سایر علوم، زمان است که بهترین و ماندگارترین دستاوردهای بشری را تعیین می‌کند.

نظریهٔ گروههای متناهی (۱۸۹۷، ۱۹۱۱)

برنساید به‌سبب تحقیقاتش در مورد توابع خودریخت کلاین و پوانکاره، از نظریهٔ گروههای ناپیوسته آگاه بود. شاید این ارتباط بود که سرانجام او را از ریاضیات کاربسته دور و به تحقیقات در نظریهٔ گروههای متناهی سوق داد. در اوایل دههٔ ۱۸۹۰، برنساید کار هولدر در بارهٔ گروههایی با مرتبه‌های خاص را به دقت دنبال کرد؛ طولی نکشید که نتایج خود را در بارهٔ ویژگی مرتبهٔ گروههای سادهٔ متناهی منتشر کرد. ظاهراً مقالات اولیهٔ فروبنیوس در نظریهٔ گروهها ابتدا تمایل او را به گروههای حلپذیر[۱] متناهی برانگیخت.

نخستین چاپ شاهکار برنساید، *نظریهٔ گروههای متناهی*، در ۱۸۹۷ منتشر شد؛ این اثر مسلماً مهمترین کتابی است که در حوالی آغاز قرن حاضر در نظریهٔ گروهها نوشته شد. هر چند این کتاب به‌عنوان مدخلی بر نظریهٔ گروههای متناهی برای خوانندگان انگلیسی زبان نوشته شده بود، مشتمل بر بعضی از آخرین نتایج تحقیقی در موضوع اخیر در آن زمان بود. به‌عنوان مثال، در آن ثابت شد که گروههای از مرتبهٔ $p^a q^b$ حلپذیرند هر گاه $a \leq ۲$ یا گروههای سیلو آبلی باشند، و ثابت شد که گروههای ساده (غیرآبلی) دارای مرتبهٔ زوج‌اند هر گاه این مرتبهٔ حاصلضرب کمتر از شش عدد اول باشد[۲]. واضح است که برنساید پی برد که این نتایج به‌صورت نهایی خود نیستند، زیرا در [B_1، چاپ اول، ص ۳۴۴] نوشت:

> اگر این نتایجْ ناقص به نظر می‌رسند، باید توضیح داده شود که این شاخه از موضوع به تازگی مورد توجه قرارگرفته است: باید آن را بیشتر به‌عنوان یک زمینهٔ نویدبخش تحقیقاتی قلمداد کرد تا موضوعی که کاملاً در آن کندوکاو شده باشد.

نظر برنساید در مورد اینکه در این حوزهٔ تحقیقاتی مطالب خیلی زیادتری برای تحقیق وجود دارد درست بود. با وجود این، ارزیابی برنساید در آن زمان از نقش احتمالی گروههای جانشانیهای خطی اندکی محتاطانه بود. زیرا نظریهٔ گروههای جایگشتی بخش زیادی از [B_1] را اشغال کرد، در صورتی که در آن به گروههای جانشانیهای خطی توجه چندانی نشد. برنساید احساس کرد که مجبور است توضیحی به خوانندگان بدهد. در مقدمهٔ چاپ اول [B_1] نوشت:

> پاسخ من به سؤال اخیر این است که هر چند، در وضعیت کنونی دانش ما، بسیاری از نتایج در نظریهٔ محض با پرداختن به ویژگیهای گروههای جانشانی خیلی آسان به‌دست می‌آیند، یافتن نتیجه‌ای که بتوان آن را کاملاً مستقیم با بررسی گروههای تبدیلات خطی به‌دست آورد، دشوار خواهد بود.

۱. گروه G را حلپذیر می‌گویند هر گاه از گروههای آبلی با تعدادی متناهی از توسیعهای گروهی ساخته شود. در حالتی که G متناهی است، یک تعریف هم‌ارز عبارت است از اینکه مرتبه‌های عاملهای ترکیبی G جملگی عدد اول باشند.

۲. برنساید ثابت کرد که این مرتبه باید یکی از اعداد ۶۰، ۱۶۸، ۶۶۰، یا ۱۰۹۲ باشد.

او نمی‌دانست درست هنگامی که کتابش در حال چاپ است، در جای دیگری از اروپا فروبنیوس گامهای نخست خود را در ابداع سرشتهای گروه برداشته است، و در واقع اولین رسالهٔ خود [F : (۵۶)] را در بارهٔ نظریهٔ جدید نمایشها می‌نویسد! چنانکه معلوم شد، دههٔ بعد شاهد برخی از چشمگیرترین موفقیتها در به‌کار بستن نظریهٔ نمایشها در مطالعهٔ ساختمان گروههای متناهی بود ــ و مقدر چنین بود که خود برنساید فرد اصلی در حصولِ این موفقیتها باشد. تردیدی نبود که برنساید می‌خواهد اطلاعات خوانندگانش را در مورد چنین تحولات مهیجی روزآمد کند. وقتی چاپ دوم [B_1] در ۱۹۱۱ بیرون آمد (چهارده سال بعد از چاپ اول)، کتاب بسیار متفاوتی بود، با نتایج قطعی بسیار زیادتر و شش فصل جدید که روشهای نظریهٔ نمایشها را به خوانندگان معرفی می‌کرد! برنساید در پیشگفتار این چاپ جدید چنین نوشت:

> به‌ویژه نظریهٔ گروههای جانشانیهای خطی موضوع تحقیقات بسیارِ زیاد و مهم مؤلفان متعددی بوده است؛ و دلیل ارائه‌شده در پیشگفتار اولیه در مورد نیاوردن شرحی در بارهٔ آن دیگر درست به نظر نمی‌رسد. درواقع، ینک درست‌تر است بگوییم که برای پیشرفتهای بیشتر در نظریهٔ مجرد، باید به نمایش یک گروهْ بیشتر به‌صورت گروه جانشانیهای خطی نگریست.

برنساید با این عبارات موضوع نظریهٔ گروهها را به قرن بیستم آورد؛ و به ارائهٔ ۵۰۰ صفحه ریاضیات ممتاز با سبک زیبا و استادانهٔ خود پرداخت. اگرچه مؤلفان بعدی در [B_1] یک اشتباه اتفاقی یافته‌اند، و قطعاً کتاب دارای تعدادی خطاهای چاپی است[۱]، با وجود این، کتاب برنساید امروز هم، همچون سراسر این قرن، مرجعی با ارزش به‌حساب می‌آید. خود من چنان عشق و علاقه‌ای به کتاب برنساید پیدا کرده‌ام که هر وقت به محل فروش کتابهای مستعمل سر می‌زنم و این بخت را می‌یابم که نسخه‌ای از چاپ داور را در قفسه بیابم، آن را می‌خرم. هم‌اکنون صاحب هفت (یا هشت؟) نسخه از آن هستم. ولی خبرگان واقعی کتاب به سراغ چاپ نخست کتاب، به دلیل کمیابی و ارزش تاریخی آن، می‌روند. ظاهراً، یک نسخهٔ صحیح و سالم در بازار کتابهای کمیاب ممکن است چند صد دلار قیمت داشته باشد.

تحقیقات برنساید در نظریهٔ نمایشها

برنساید پس از خواندن مقالات فروبنیوس [F : (۵۳)، (۵۴)]، تقریباً بی‌درنگ به ارتباط نظریهٔ جدید فروبنیوس با تحقیقات خود در نظریهٔ گروههای متناهی پی برد. ابتدا کوشید نتایج فروبنیوس را به شیوهٔ خودش درک کند. برنساید در دههٔ ۱۸۹۰ به دقت کارهای سوفوس لی در مورد گروههای پیوستهٔ تبدیلات را نیز دنبال کرده بود، بنابراین، برخلاف فروبنیوس، وی از روشهای گروههای

۱. فاحشترین خطا در فهرست عمومی، صفحهٔ ۵۱۰، نمایان شد، که در آن برنساید قضیهٔ مهم خود را با این مدخل مضحک، «ضایع کرده است»: «گروههای از مرتبهٔ $p^a q^b$، که در آن p، q اول باشند، ساده‌اند».

لی و جبرهای لی مطلع بود. او توانست با مفروض بودن یک گروه متناهیِ G، یک گروه لی از G تعریف کند که جبر لی آن جبر گروهیِ $\mathbb{C}G$ با عمل کروشهٔ $[A,B]=AB-BA$ باشد. با تحلیل ساختار این جبر گروهی، او در به‌دست آوردن نتایج اصلی فروبنیوس هم در مورد سرشتها و هم در مورد دترمینان گروهی کامیاب شد. (برای تفصیلات بیشتر در این زمینه، به [Cu۲] و [H۲] مراجعه کنید.) وی این نتایج را در چندین بخش، در [B : ۱۸۹۸a، ۱۹۰۰b]، و غیره، منتشر کرد. قطعاً برنساید ادعا نمی‌کرد که این نتایج تازه‌اند؛ در [B : ۱۹۰۰b] نوشت:

> مقالهٔ حاضر به قصد معرفی این دستاورد تازه به خوانندگان انگلیسی نوشته شده است. این مقاله اصیل نیست، زیرا نتایج حاصل، به جز یکی دو استثنای جزئی، از آقای فروبنیوس است.

درواقع، در حالی که روشهای برنساید متفاوت از روشهای فروبنیوس بود، آنچه او انجام داد، در اصل، به کارهایی که مولین [M۱] در ۱۸۹۳ انجام داده بود نزدیک بود. هر دو ایدهٔ نمایش منظم را به کار بردند، و تنها تفاوت در این بود که مولین با $\mathbb{C}G$ به‌عنوان یک جبر شرکتپذیر (یا «دستگاه ابرمختلط») کار کرد در صورتی که برنساید $\mathbb{C}G$ را به‌عنوان یک جبر لی به‌کار گرفت. اما، مقالهٔ مولین [M۱] را عدهٔ اندکی درک کردند، شاید به همین دلیل بود که این مقاله به شهرتی که سزاوارش بود نایل نیامد. ازجمله برنساید آشکارا از نحوهٔ تشریح موضوع در مقالهٔ مولین سرخورده شد و در یک اثر بعدی [B : ۱۹۰۲f]، در ارجاع به [M۱]، علناً تأسف خود را اظهار دانست:

> درواقع، پی‌بردن به اینکه مقالهٔ آقای مولین دقیقاً چه چیزی را دربرمی‌گیرد و چه چیزی را دربرنمی‌گیرد، چندان آسان نیست.

بعدها، روشهای امی نوتر [N] جایگزین روشهای مولین و برنساید شدند. همان‌گونه که در مبحث «تجزیهٔ $\Theta(G)$ برای خوانندگان امروزی» در بخش I این مقاله اشاره شد، کاربرد قضیه‌های ماشکه و وِدِربرن به شیوهٔ نوتر، به سرعت همهٔ معلومات موجود دربارهٔ نمایشها را در سطح بنیادی به‌دست می‌دهد.

مرحلهٔ بعدی کار برنساید مشتمل بر تحقیقات مفصل او در بارهٔ ویژگیهای نمایشهای تحویل‌ناپذیر و موارد استعمال آنهاست. یادآوری می‌شود که فروبنیوس تحویل‌ناپذیری (یا «اولیت[1]») یک نمایش را در ابتدا با تحویل‌ناپذیری دترمینان وابستهٔ آن تعریف می‌کرد. چون این تعریف به‌وضوح تعریف نامناسبی بود، تعریف مستقیمتر دیگری مطلوب بود. برنساید [B : ۱۸۹۸a] و فروبنیوس [F : (۵۶)] هر دو تعریفهایی برای تحویل‌ناپذیری یک نمایش برحسب ماتریسهای نمایش‌دهنده ارائه داده بودند، گو اینکه، همان‌گونه که چارلز کرتیس به من تذکر داد، به نظر می‌آمد که این تعریفهای اولیه به آنچه ما اکنون آن را نمایشهای *تجزیه‌ناپذیر* می‌نامیم منجر شوند. تا ۱۸۹۸، مور[2] (و مستقلاً لوی[3]) این نتیجه را که هر گروه متناهی از جانشانیهای خطی، یک فرم ارمیتی ناوردای ناتباهیده را می‌پذیرد به‌دست آورده بودند، و در ۱۸۹۹، ماشکه نتیجهٔ مور را برای اثبات «تجزیهٔ» هر زیرنمایش یک نمایشِ گروهی متناهی (اینک موسوم به قضیهٔ ماشکه) به‌کار بست. با این نتیجه‌های تازه، هرگونه اشتباهی که ممکن بود در تعریف تحویل‌ناپذیری یک نمایش موجود باشد، بی‌اهمیت شد. برنساید در ۱۹۰۱ (و چه بسا قبل از آن)، توانست یک نمایش تحویل‌ناپذیر را بدون هیچ اصطلاح نامعین توصیف کند [B : ۱۹۰۰b، ص. ۱۴۷] : «گویند گروه متناهی G به صورت یک گروه تحویل‌ناپذیر از جانشانیهای خطی روی m متغیر نمایش داده می‌شود در صورتی که G با گروه جانشانیهای خطی به‌طور ساده یا چندگانه یکریخت باشد، و در صورتی که انتخاب $m'(<m)$ تابع خطی از متغیرهایی که با هر عمل [= عضو] گروه به یکدیگر تبدیل می‌شوند، ناممکن باشد». این تعریف، قطع نظر از اطناب آن، اساساً تعریف تحویل‌ناپذیری یک نمایش ماتریسی *است* که امروزه آن را به‌کار می‌بریم.

برنساید در [B : ۱۹۰۴c]، با اذعان به پیشگامیِ ماشکه (و فروبنیوس)، به اثبات «تحویل‌پذیریِ کامل» نمایشهای گروههای متناهی مبادرت کرد، و آن را برای ارائهٔ شرحِ خودکفایی از مبانی نظریهٔ سرشتها در [B : ۱۹۰۳d]، مستقل از رهیافتِ مبتنی برگروههای پیوسته که در [B : ۱۸۹۸a] آغازکرده بود، به‌کار برد. یک سال بعد در [B : ۱۹۰۵b]، برنساید به محک زیبایی برای مشخص‌سازی نمایشهای تحویل‌ناپذیر دست یافت که هنوز هم به‌کار برده می‌شود:

قضیهٔ ۱.۴. *نمایشی مانند $D : G\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ماتریسهایِ در $D(G)$، جبر $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ را تولید کنند.*

برنساید این حکم را برای گروههای دلخواه (نه فقط برای گروههای متناهی) ثابت کرد (و آن را بعداً در [B : ۱۹۰۵c] برای گروههای احتمالاً نامتناهی به‌کار برد). پس از آن، فروبنیوس و شور[1] این قضیه را برای «نیمگروهها»ی تبدیلات خطی تعمیم دادند. با این اطلاع، می‌توان نتیجهٔ اساسی برنساید را به‌زبان نظریهٔ حلقه‌ها چنین بیان کرد: یک *زیرجبر* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *مانند* A *زیرفضای ناوردای غیربدیهی در* $\mathbb{C}^n$ *ندارد اگر و تنها اگر* $A=\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. نتیجهٔ برنساید، به صورت مذکور، امروز مورد توجه محققان در جبرهای عملگری و زیرفضاهای ناورداست. برخی از تعمیمهای این نتیجه به یک حالت نامتناهیْ‌بعد به‌دست آمده‌اند، مثلاً در فصل ۸ کتاب [HR]. همچنین باید تذکر دهیم که نتیجهٔ برنساید با هر مشخصه‌ای برقرار است؛ تنها فرض لازم این است که هیأت زمینهٔ جبری‌ـبسته باشد (رک. [L، ص ۱۰۹]).

برنساید علاقهٔ زیادی به حساب سرشتها (که آن را «مشخصه‌های گروهی» نامید) داشت؛ بسیاری از کارهای او در نظریهٔ سرشتها از درک دقیق او از رفتار حسابی مقادیر سرشتها ناشی شدند. نتایج ذیل برخی از نمونه‌های نوعی از نتایج او هستند که در این راستا ثابت شده‌اند:

۱. هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ با شرطِ $\chi(1)>1$ یک مقدارِ صفر دارد.

۲. تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی‌مقدارِ یک گروه G برابر است با تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی[2] در G.

۳. (نتیجه‌های (۲)) اگر $|G|$ زوج باشد، باید یک سرشت تحویل‌ناپذیر حقیقی‌مقدار غیر از سرشت بدیهی موجود باشد (و برعکس). اگر $|G|$ فرد باشد، آنگاه تعداد رده‌های مزدوجی G همنهشت $|G|$ به پیمانهٔ ۱۶ است.

۴. اگر χ سرشت یک نمایش صادق G باشد، آنگاه هر سرشت تحویل‌ناپذیر یک سازا[3]ی توانی از χ است. (این نتیجه معمولاً به برنساید نسبت داده

1. primitivity 2. E. H. Moore 3. A. Loewy

1. Schur

۲. یک ردهٔ مزدوجی را حقیقی گویند هرگاه تحت نگاشت وارون بسته باشد.

3. constituent

می‌شود، گرچه، همان‌گونه که هاوکینز در [H۳، ص۲۴۱] اشاره کرده است، قبلاً به توسط مولین ثابت شده بود. یک صورت کمّی این نتیجه را بعدها ر. براور پیدا کرد.)

دیرپای‌ترین نتیجهٔ برنساید در نمایشهای گروه، البته، قضیهٔ مهم p^aq^b اوست، که قبلاً به ذکر آن پرداختیم. باز هم رهیافت او در نیل به این قضیه صرفاً حسابی بود. او با استفاده از استدلالهایی که متضمن ریشه‌های واحد و مزدوجهای گالوا بودند، نتیجهٔ ذیل را در [B : ۱۹۰۴a] ثابت کرد:

قضیهٔ ۲.۴. *فرض کنیم $g \in G$ و χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد. اگر $\chi(1)$ نسبت به عدد اصلی ردهٔ مزدوجی g اول باشد، آنگاه $|\chi(g)|$ برابر است با ۰ یا ۱.*

او با ترکیب این نتیجه و دومین رابطهٔ تعامد (که در بخش I [ص ۲۸، شمارهٔ قبل *نشر ریاضی* در تابلو] نمایش داده شد)، یک شرط کافیِ بسیار قابل توجه را برای *ناسادگی* یک گروه (متناهی) به‌دست آورد:

قضیهٔ ۳.۴. *اگر گروه (متناهی) G یک ردهٔ مزدوجی با عدد اصلی p^k داشته باشد، که در آن p یک عدد اول است و $k \geq 1$، آنگاه G یک گروه ساده نیست.*

این شرط کافی برای ناسادگی چنان تواناست که برنساید مستقیماً قضیهٔ p^aq^b را از آن به‌دست آورد، که آرزوی عالمان نظریهٔ گروهها در طول بیش از ده سال بود[1]. شایان ذکر است که برنساید، در [B۱، چاپ دوم، ص ۳۲۳]، بعد از اثبات قضیهٔ کارامد (۲.۴)، به سادگی قضیهٔ p^aq^b را به صورت «نتیجهٔ ۳» بیان کرد:

قضیهٔ ۴.۴. *به‌ازای هر دو عدد اول p و q، هر گروه G از مرتبهٔ p^aq^b حل‌پذیر است.*

برهان با استفاده از نظریهٔ سیلو چنان آسان و دلپذیر است که لازم است آن را در اینجا بیاوریم. می‌توان فرض کرد $p \neq q$. به استقراء نسبت به $|G|$، کافی است ثابت کنیم که G یک گروه ساده نیست. زیرگروهی از مرتبهٔ q^b مانند Q را در نظر می‌گیریم (که به موجب قضیهٔ سیلو موجود است)، و عضوی مانند $g (\neq 1)$ را در مرکز Q اختیار می‌کنیم. اگر g در G مرکزی باشد، G به‌وضوح ناساده است. در غیر این صورت، $C_G(g)$ (مرکزساز g در G) یک زیرگروه سرهٔ G است که حاوی Q است. اینک ردهٔ مزدوجی g دارای عدد اصلی $[G : C_G(g)] = p^k$ است که در آن $k \geq 1$، بنابراین G بنابر (۳.۴) دوباره ناساده است، که مطلوب ما بود!

در نگاه اول، ممکن است (۴.۴) چندان نتیجهٔ عمیقی به نظر نرسد. اما، طی سالیان دراز کوشش عالمان نظریهٔ گروهها برای یافتن برهانی از آن که صرفاً مبتنی بر نظریه گروهها باشد، به جایی نرسید. تنها در ۱۹۷۰ بود که گولد اشمیت [Go] با تعقیب ایده‌های ج. تامسن نخستین برهان مبتنی بر نظریهٔ گروهها را در حالتی که p و q اعداد اول فردند ارائه داد. گولد اشمیت در برهان

۱. همان‌گونه که در بخش پیش نشان دادیم، برنساید در مقالات قبلی خود بسیاری از حالتهای خاص این قضیه را بدون استفاده از نظریهٔ نمایشها ثابت کرده بود؛ بسیاری از این موارد در چاپ اول [B۱] خلاصه شدند.

... گروه سادهٔ شناخته‌شده‌ای وجود ندارد که مرتبهٔ آن مشتمل بر کمتر از سه عدد اول متمایز باشد. ... تحقیقات در این جهت نیز ممکن است به نتایج سودمند و مهم منجر شود.

خود یک نتیجهٔ نسبتاً عمیق در نظریهٔ گروهها را، که به $Z(J)$ـقضیهٔ گلوبرمن موسوم است، به‌کار برد. چند سال بعد، ماتسویاما [Mat] کار گولد اشمیت را با عرضهٔ برهانی برای (۴.۴) مبتنی بر نظریهٔ گروهها در حالت $p = 2$ کامل کرد. اندکی پیش از [Mat]، بِندِر [Be] نیز برهانی برای (۴.۴) *به‌ازای* هر p و q، با به‌کارگیری صورتی از مفهوم «زیرگروه تامسن» یک pـگروه (ضمن استفاده از سایر چیزها) ارائه داد. هر چند این برهانهای مبتنی بر نظریهٔ گروهها طولانی نیستند، متضمن استدلالهای موردیِ فنی هستند، و قطعاً سادگی جالب توجه و زیبایی چشمگیر برهانِ اصلی برنساید را که مبتنی بر نظریهٔ سرشتهاست ندارند. برای قضیهٔ کلیترِ (۳.۴) هم، که به قضیهٔ p^aq^b منجر شد، تاکنون برهانی صرفاً مبتنی بر نظریهٔ گروهها پیدا نشده است.

برنساید: پیشبین و پیشگو

اگر کارهای برنساید را در نظریهٔ گروهها از همان آغازش دنبال کنیم، معلوم خواهد شد که یکی از هدفهای اصلی او از ابتدا شناخت گروههای سادهٔ متناهی بوده است. برنساید با توجه به کار گالوا و قضیهٔ ژوردان‌ـهولدر از نقش گروههای ساده آگاه بود، ولی در دههٔ ۱۸۹۰، برای پیشبرد موضوع معلومات بسیار اندکی در دست بود. تنها گروههای سادهٔ متناهیِ معلوم عبارت بودند از گروههای متناوب گالوای A_n ($n \geq 5$)، گروههای خطی خاص تصویری $\mathrm{PSL}_2(p)$ ($p \geq 5$)، و چند گروه ماتیو، وگروه ساده کول از مرتبهٔ ۵۰۴. اینک معلوم شده است که گروه اخیر همان $\mathrm{PSL}_2(8)$ است، اما هیأتهای متناهی در اوایل دههٔ ۱۸۹۰، چندان شناخته نبودند، بنابراین در ۱۸۹۳، کول [Co] مجبور شد این گروه را «با دست خالی» به‌عنوان یک گروه جایگشتی از درجهٔ نُه بسازد.[1]

تا ۱۸۹۲، هولدر همهٔ گروههای ساده از مرتبهٔ نابیشتر از ۲۰۰ را پیدا کرد. در سال دیگر، کول با ساختن گروه سادهٔ مرتبهٔ ۵۰۴، کار هولدر را تا مرتبهٔ $|\mathrm{PSL}_2(11)| = 660$ پیش برد، و در دو سال دیگر، برنساید باز هم این کار را تا مرتبهٔ $|\mathrm{PSL}_2(13)| = 1092$ ادامه داد. او در ضمن، بعضی از اولین قضیه‌ها را در بارهٔ مرتبهٔ گروههای ساده ثابت کرد؛ به‌عنوان مثال، نشان داد که اگر مرتبه‌های این گروهها زوج باشند، باید بر ۱۲، ۱۶، یا ۵۶

۱. پنج سال بعد، برنساید نمایشی برای گروه کول به‌وسیلهٔ مولدها و روابط ارائه داد، و متذکر شد که این گروه با $\mathrm{PSL}_2(8)$ یکریخت است [B : ۱۸۹۸d].

تباینی که این نتایج بین گروههای فردْمرتبه و زوج مرتبه نشان می‌دهند، ضرورتاً دلالت می‌کند که گروههای سادهٔ از مرتبهٔ فرد موجود نیستند.

بخشپذیر باشند. به کمک این نتایج نظری، که وی آنها را در چاپ نخست [B_1] خلاصه کرد، برنساید مطمئن بود که برنامهٔ هولدر را می‌توان تا حداقل مرتبهٔ ۲۰۰۰ پیش برد. در عین حال، به شهود دریافت که «هنگامی که حدّ مرتبه افزایش می‌یابد، این‌گونه بررسیها به سرعت پرزحمت‌تر می‌شوند، زیرا باید حالات خاص متعددی که مدام افزایش می‌یابند مورد بررسی قرار گیرند». به‌وضوح، نتایج کلی قویتری مطلوب بود! برنساید چاپ اول کتاب خود را با تذکر نهایی زیر ــ که امروز می‌توان آن را پیشگویی واقعاً خارق‌العاده‌ای دانست ــ به پایان می‌برد[1]:

> تا زمان حاضر وجود هیچ گروه ساده‌ای از مرتبهٔ فرد شناخته نشده است. تحقیق در وجود یا عدم وجود چنین گروههایی بی‌تردید، قطع نظر از حاصل کار، به نتایج مهمی منجر خواهد شد؛ این امر به سبب ارزشی که دارد به خواننده توصیه می‌شود. همچنین گروه سادهٔ شناخته‌شده‌ای وجود ندارد که مرتبهٔ آن مشتمل بر کمتر از سه عدد اول متمایز باشد. ... تحقیقات در این جهت نیز ممکن است به نتایج سودمند و مهم منجر شود.

بدین‌ترتیب، برنساید فقط در یک پاراگراف، دو مسأله از مهمترین مسأله‌های تحقیقاتی در نظریهٔ گروهها را مطرح کرد تا در قرن بعد مورد بررسی قرار گیرند.

مقدر نبود که مسألهٔ دوم مدت زمان زیادی حل نشده باقی بماند. همان‌گونه که می‌دانیم، شاهکار برنساید [B : ۱۹۰۴] حل این مسأله بود: حلپذیری گروههای مرتبهٔ p^aq^b (قضیهٔ ۴.۴) ناسادگی آنها را نتیجه داد (و البته، برعکس). برهان این نتیجهٔ مهم به‌طور جدی به ابزارهای تازهٔ ابداع شدهٔ نظریهٔ سرشتها وابسته بود. اما، مسألهٔ اول، که هم‌ارز با حلپذیری گروههای با مرتبهٔ فرد است، بسیار مشکل از آب درآمد. هدفِ مقالات برنساید در بارهٔ گروههای با مرتبهٔ فرد [B : ۱۹۰۰c] به‌وضوح حل این مسأله بود، و او چندین نتیجهٔ سودمند به‌دست آورد.

به‌عنوان مثال، ثابت کرد که گروههایِ فردْ مرتبه که مرتبهٔ آنها کوچکتر از ۴۰۰۰۰ است حلپذیرند، و همین موضوع در مورد گروههای جایگشتی منعدیِ فردْ مرتبه که درجهٔ آنها یک عدد اول یا کوچکتر از ۱۰۰ است صادق است. این امر که برخی از برهانها متضمن استدلالهایِ مبتنی بر نظریهٔ سرشتها بودند برنساید را برانگیخت تا توضیح پیشگویانهٔ ذیل را در پایان مقدمه بر [B : ۱۹۰۰c] بیاورد:

> از نتایج به‌دست آمده در این مقاله، که لزوماً نتایجی جزئی‌اند، چنین به نظر می‌رسد که با مطالعهٔ بیشترِ نظریهٔ سرشتهای گروه می‌توان پاسخی به سؤالِ جالبِ وجود یا عدم وجود گروههای ساده از مرتبهٔ فرد مرکب داد.

در این زمان او چاپ دوم [B_1] را منتشر کرد؛ واضح بود که برنساید قلباً متقاعد شده بود که گروههای فردْمرتبه باید حلپذیر باشند. وی بدون آنکه رسماً حدسی مطرح کند، این وضعیت را به اختصار این‌گونه شرح داد: «تباینی که این نتایج بین گروههای فردْمرتبه و زوجْمرتبه نشان می‌دهند، ضرورتاً دلالت می‌کند که گروههای ساده از مرتبهٔ فرد موجود نیستند».

مقدر نبود که برنساید در طول حیات خود حل مسألهٔ فردْمرتبه را ببیند؛ در حقیقت، پیشرفت چندانی که قابل بحث باشد دست‌کم در طی چهل و پنج سال بعد حاصل نشد. بعدها، با معمول شدنِ تدریجیِ ایدهٔ جدید براور در مورد مطالعهٔ گروههای ساده از طریق مرکزسازهای برگشتها، طلوع نتایج سودمند تازه در افق این موضوع آغاز شد. فایت و تامسن، بر مبنای کارهای سوزوکی، هال و خودشان، در ۱۹۶۳ در اثبات حلپذیری گروههای فرد مرتبه کامیاب شدند. اثر کاملاً مستدل آنان [FT] مشتمل بر ۲۵۵ صفحه، یک شماره از *پاسیفیک جورنال آو متمتیکس* را اشغال کرد. معلوم شد که نه تنها در «حدس زدن» این قضیه حق به جانب برنساید بوده است، بلکه پیش‌بینی او نیز در مورد نقش مهمی که نظریهٔ سرشتها در برهان آن ایفا خواهد کرد، درست بوده است. درواقع، فصل پنج در مقالهٔ فایت‌ـتامسن، در حدود ۶۰ صفحه، تقریباً به‌طور کامل مبتنی بر به‌کارگیری سرشتها و گروههای فروبنیوس است. فایت و تامسن برای این کار در ۱۹۶۵ جایزهٔ کول را دریافت داشتند، و در ۱۹۷۰ نشان فیلدز به تامسن به خاطر کار بعدی او در بارهٔ گروههای سادهٔ مینیمال اهدا شد. نقطهٔ اوج همهٔ این تحقیقات، برنامهٔ رده‌بندی گروههای ساده در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ بود.

موفقیتهای چشمگیر این برنامه ظاهراً حتی از رؤیاهای برنساید نیز فراتر رفته است، زیرا او در صفحهٔ ۳۷۰ از چاپ اول [B_1] گفته بود که «نباید به حل کامل این مسألهٔ اخیر امیدوار بود». ولی این اظهارنظر مربوط به «دوران تاریک» دههٔ ۱۸۹۰ بود. در صورتی که برنساید از قضیهٔ p^aq^b، قضیهٔ فردمرتبه و وجود برخی از گروههای سادهٔ پراکنده که در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ کشف شدند، آگاه بود، شاید احساس بسیار متفاوتی می‌داشت. تصور می‌کنم امروزه عموماً عقیده دارند که برنامهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی بدون تلاشهای پیشگامانهٔ برنساید ممکن نمی‌شد.

مسألهٔ مشهور دیگری در نظریهٔ گروهها که از تحقیقات برنساید در ۱۹۰۲ـ۱۹۰۵ ناشی شد، به ساختار گروههای تابدار[1] (گروههایی که همهٔ اعضای آنها مرتبهٔ متناهی دارند) مربوط می‌شود. دو صورتِ (به‌وضوح مرتبط) این مسأله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

مسألهٔ برنساید (۱). فرض کنیم G یک گروه تابدار متناهیْ‌مولد باشد. آیا G لزوماً متناهی است؟

مسألهٔ برنساید (۲). فرض کنیم G یک گروه متناهیْ‌مولد با نمای متناهی

۱. توضیحات مربوط به بخش ۲۶۰ در [B_1، ویراست اول، ص. ۳۷۹] .

1. torsion groups

N باشد (یعنی، بهازای هر g از G، $g^N = ۱$). آیا G لزوماً متناهی است؟

برنساید، هنگام تحقیق در نظریهٔ نمایشها توانست پاسخ مثبتی به (۲) در *حالتِ گروههای خطی مختلط* بدهد. درواقع، روشهای او نشان داد که، اگر بهازای nای، G زیرگروهی از $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ باشد، و G دارای نمای N باشد، آنگاه $|G| \leq N^{۳}$. این نتیجه با استدلالی مبتنی بر اثر [ماتریسها] ثابت شد، که بهوضوح ملهم از تحقیقاتی بود که در آن زمان برنساید در مورد سرشتها انجام می‌داد. همچنین برنساید ثابت کرد که پاسخ (۲) بهازای هر گروه با نمای N که $N \leq ۳$، مثبت است. بعدها، شور پاسخ مثبتی به (۱) بهازای هر G که $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$، داد، و کاپلانسکی نتیجهٔ شور را به هر G که $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$، تعمیم داد که در آن k یک هیأت دلخواه است؛ جزئیات برهانها را می‌توان در [L، بخش ۹] یافت.

پیشرفت در زمینهٔ مسائل (۱) و (۲)ی برنساید ابتدا بسیار کُند بود. جواب مثبتی برای (۲)، بهازای $N = ۴$ به توسط سانف[۱] در ۱۹۴۸، و بهازای $N = ۶$ به توسط هال در ۱۹۵۸ عرضه شد. بهازای $N \geq ۷۲$، نویکف[۲] در ۱۹۵۹ جواب منفیی برای (۲) اعلام داشت؛ اما، جزئیات آن هرگز منتشر نشد. سرانجام، بهازای هر N فرد که $N \geq ۴۳۸۱$، جواب منفی برای (۲) در اثر مشترک نویکف و ادیان[۳] در ۱۹۶۸ منتشر شد. ظاهراً بهازای مقدارهای کوچک N که $N \not\in \{۲,۳,۴,۶\}$ یا N زوج باشد، اطلاعات چندانی در دست نیست. بهویژه حالتهای $N = ۵$، $N = ۸$، هنوز حل‌نشده به نظر می‌رسند. در مورد مسألهٔ (۱) معلوم شد که پاسخ بسیار ساده‌تر است. در ۱۹۶۴ گولود[۴] بهازای هر عدد اول p یک گروه *نامتناهی* با دو مولد ساخت که در آن مرتبهٔ هر عضو توان متناهیی از p است؛ با این کار تکلیف مسألهٔ (۱) با پاسخی منفی روشن شد.

اما این پایان داستان نبود. از دههٔ ۱۹۳۰، عالمان نظریهٔ گروهها نوع دیگری از مسائل برنساید را مورد توجه قرار داده‌اند، که می‌توان آنها را به صورت زیر بیان کرد. بهازای اعداد طبیعی مفروضِ r و N، فرض کنیم $B(r, N)$ «گروه عام برنساید» با r مولد و با نمای N باشد؛ به عبارت دیگر، $B(r, N)$ خارج‌قسمت گروه آزادِ رویِ r مولد بر زیرگروه نرمال تولید شده با همهٔ توانهای Nام باشد. پس مسألهٔ (۲)ی برنساید با این سؤال که آیا $B(r, N)$ یک گروه متناهی است یکسان می‌شود. نوع دیگری از این مسأله موسوم است به

مسألهٔ محدودشدهٔ برنساید. بهازای اعداد طبیعی مفروض r و N، آیا تنها تعدادی متناهی خارج‌قسمت متناهی $B(r, N)$ وجود دارند؟

نکته اینجاست که، حتی اگر گروه عام $B(r, N)$ نامتناهی باشد، باید انتظار داشت که تنها تعدادی متناهی طریق برای «تخصیص» آن به خارج‌قسمتهای متناهی (و در نتیجه یک طریق منحصر بهفرد برای تخصیص آن به *بزرگترین* خارج‌قسمت متناهی ممکن) موجود باشد. در ۱۹۵۹، کوستریکین[۵] جواب مثبت به این مسأله را بهازای همهٔ نماهای اول اعلام داشت؛ بخش عمده‌ای از تحقیقات او (و تحقیقات مکتب روسی) درکتاب بعدی او *در بارهٔ برنساید* شرح داده شده است. پس از اینکه جواب منفی جزئی مسألهٔ (۲)ی برنساید معلوم شد، توجه به مسألهٔ محدودشدهٔ برنساید افزایش یافت. گام نخست در اوایل دههٔ ۱۹۹۰، هنگامی که زِلمانف جواب مثبتی برای این مسأله، *بهازای هر r* و هر N، بهدست آورد، برداشته شد. شگفت‌آور (دست‌کم برای غیرخبرگان) اینکه، جواب زِلمانف سخت به روشهای جبرهای لی و جبرهای ژوردان وابسته است. عامل دیگر در جواب زلمانف رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی است: برخی از پیامدهای قضیهٔ رده‌بندی در تحویل حالت نمای کلی به حالت نمای توان اول بهوسیلهٔ نتایج قبلی هال و هیگمن بهکار رفتند. کار اصلی زلمانف در آن زمان، تأیید مسألهٔ محدودشدهٔ برنساید ابتدا بهازای $N = p^k$ با pی فرد [Z_1]، و سپس برای حالتِ (خیلی دشوارتر) $N = ۲^k$ [Z_2] بود. برای این تحقیقات، زلمانف نشان فیلدز را در ۱۹۹۴ دریافت کرد. با نگاهی به گذشته، تصور می‌کنم بسیار قابل توجه است که کار برنساید در نظریهٔ نمایشها و مسائل حل‌نشده‌ای که مطرح کرد، درواقع مقدمات کارهای بعدی دو برندهٔ نشان فیلدز را فراهم آورد. چه میراث عظیمی برای ریاضیات!

برخی از معلمان و مربیان من همواره توصیه کرده‌اند: «آثار استادان را بخوان». آنها به من آموختند که بینش شگرف این استادان، که بهطور صریح یا ضمنی در نوشتار اصیل آنها منعکس است نباید به هیچ‌وجه نادیده گرفته شود. در پایان این بخش، فکر می‌کنم بهتر است این اندرز گرانبها را، با توصیه به مطالعهٔ کتاب برنساید [B_1] که نمونهٔ خوبی از این‌گونه آثار است، به همکاران جوانتر خود منتقل کنم. در این کتاب کلاسیک آنقدر اطلاعات با ارزش آمده است که در مواردی کشف «گنجینه‌ها»یی که این استاد بزرگ (آگاهانه یا گاهی حتی ناآگاهانه) درکتاب به جای گذاشته بهدست نسلهای بعدی صورت گرفته است. برنساید در بخشهای ۱۸۴ـ۱۸۵ چاپ دوم [B_1]، سرشتهای نمایشهای جایگشتی متعدیِ گروهی مانند G را با تشکیل یک «جدول علامتها» (مقدارهای سرشتی آنها) بررسی کرد، و چگونگی «ترکیب» این علامتها و تجزیهٔ نتایج به ترکیبهای صحیح علامتهای مذکور را بیان کرد. بیش از نیم قرن بعد، سولومون این ایده را در [So] زنده کرد، و بهطور صوری حلقهٔ تعویض‌پذیر گروتندیک متشکل از رده‌های یکریختی Gـمجموعه‌های متناهی را ساخت، و نام مناسب «حلقهٔ برنساید» گروه را بر آن نهاد. امروزه این حلقهٔ برنسایدِ $\mathfrak{B}(G)$ نه تنها در نظریهٔ نمایشها، بلکه در ترکیبیات و توپولوژی (بهخصوص نظریهٔ هوموتوپی) نیز مفهوم مهمی به شمار می‌رود[۱]. برخی از ارتباطهای بین $\mathfrak{B}(G)$ و خودگروه G که مؤلفان بعدی آنها راکشف کردند بسیار حیرت‌انگیزند. بهعنوان مثال، درِس [Dr] ثابت کرده است که G *یک گروه حل‌پذیر است اگر و تنها اگر طیف اول زاریسکیِ $\mathfrak{B}(G)$ همبند باشد*، و حتی محک مشابهی برای مشخص‌سازی گروههای سادهٔ مینیمال برحسب $\mathfrak{B}(G)$ وجود دارد. وقتی لوئیس سولومون را در آوریل ۱۹۹۷ در یک کارگاه MSRI در بارهٔ ارتباط نظریهٔ نمایشها و ترکیبیات دیدم، در مورد اینکه آیا اصطلاح «حلقهٔ برنساید» از مقالهٔ او [So] نشأت گرفته است سؤال کردم. او این موضوع را تأیید کرد، ولی با تأکید اضافه کرد که، «همهٔ اینها درکارهای برنساید موجودند!»

داستان دو ریاضیدان

هنگامی که من به مطالعه و نگارش احوال و آثار فروبنیوس و برنساید پرداختم، مشابهتهای جالبِ بسیار بین این دو ریاضیدان برجسته توجهم را برانگیخت.

1. I. N. Sanov 2. P. S. Novikov 3. S. I. Adian

4. E. S. Golod 5. A. I. Kostrikin

۱. یک مرجع خوب برای این مبحث [CR] است، که تمام فصل آخر آن به مطالعهٔ حلقه‌های برنساید و نظایر امروزی آنها، حلقه‌های نمایشی، اختصاص یافته است.

به همان اندازه که انتظار می‌رود بین یک آلمانی و یک انگلیسی تفاوت باشد، در سبک این دو نفر تفاوت وجود دارد، با این همه تشابه‌های فراوان قابل ملاحظه‌ای در زندگی ریاضی آنها موجود بوده است که این وسوسه را ایجاد می‌کند که به مقایسهٔ مستقیمی دست بزنیم.

برنساید سه سال کوچکتر از فروبنیوس بود، و ده سال پس از او عمر کرد، بنابراین آنها درواقع معاصر هم بودند. از قضا، هر دو در یک سال، ۱۸۹۳، به عضویت عالیترین انجمن علمی کشور خود انتخاب شدند: فروبنیوس به عضویت فرهنگستان علوم پروس، و برنساید به عضویت انجمن سلطنتی انگلیس درآمدند. کار ریاضی را هر دو با آنالیز شروع کردند و در دوران پختگی خود نظریهٔ گروهها را به‌عنوان موضوع مورد علاقهٔ راستین خود برگزیدند. هر دو از طریق قضیه‌های سیلو وارد مبحث نظریه گروهها شدند، و برهانهای خود از این قضیه‌ها را برای گروههای مجرد منتشر ساختند: فروبنیوس در ۱۸۸۷، و برنساید در ۱۸۹۴. مقالات دیگر برنساید در نظریهٔ گروهها در فاصلهٔ ۱۸۹۳_۱۸۹۶ نیز تا حدی تکرار نتایجی بود که پیشتر فروبنیوس به‌دست آورده بود. فروبنیوس به‌وضوح در همهٔ اینها مقدم بود، و برنساید از اینکه پیش از انتشار تحقیقات خود منابع را به اندازهٔ کافی بررسی نکرده بود احساس ناراحتی کرد. وی درس با ارزشی از این تجربه فرا گرفت، و از آن زمان به‌بعد، آثار فروبنیوس را به دقت دنبال کرد. در مقالات بعدیش بارها به کارهای فروبنیوس ارجاع داد، و او را مؤدبانه «آقای فروبنیوس» یا «پروفسور فروبنیوس» می‌خواند. در کتاب نظریهٔ گروههای برنساید [B_1]، از فروبنیوس بیش از همهٔ مؤلفان از جمله ژوردان و هولدر، نقل قول شده است. ولی فروبنیوس، دست‌کم در آغاز، شور و شوقی به کارهای برنساید نشان نداد. فروبنیوس در نامه‌ای به ددکیند در تاریخ ۷ مه ۱۸۹۶، پس از اشاره به مقاله‌ای از برنساید در مورد دترمینان گروهی در ۱۸۹۳ نوشت[۱]:

> این همان آقای برنساید است که چندین سال پیش مرا با کشف مجددِ و سریع همهٔ قضیه‌هایی که در نظریهٔ گروهها منتشر کرده بودم رنجاند، با همان ترتیب و بدون استثناء: ابتدا برهان من از قضیه‌های سیلو، سپس قضیه‌ای در بارهٔ گروههایی که مرتبهٔ آنها خالی از مربع است، در بارهٔ گروههای با مرتبهٔ $p^a q$، در بارهٔ گروههایی که مرتبهٔ آنها حاصلضربی از چهار یا پنج عدد اول هستند، و غیره، و غیره.

با توجه به اینکه این احساسات در ۱۸۹۶ ابراز شده، می‌توان تجسم کرد که بعداً هنگامی که مقالات [B : ۱۸۹۸a، ۱۹۰۰b] و سایر مقالات برنساید را دیده چه احساسی داشته است، یعنی مقالاتی که در آنها برنساید به‌طور ناقص همهٔ نتایج فروبنیوس در بارهٔ دترمینان گروهی، سرشتهای گروه، و روابط تعامد را از نو نتیجه گرفت! دست‌کم یک یا دو بار (مثلاً در صفحهٔ ۲۶۹ چاپ دوم [B_1])، برنساید بیان کرده بود که در [B : ۱۸۹۸a] او «به‌طور مستقل نتایج اصلی مقالات پیشین پروفسور فروبنیوس را به‌دست آورده است». برای ملاحظهٔ تحلیل کارشناسانه‌ای از این ادعای برنساید، خواننده را به [H_2، ص۲۷۸] ارجاع می‌دهیم.

شاید در اثر تقدیر بود که کارهای فروبنیوس و برنساید در نظریهٔ گروهها همواره به هم پیوند می‌خورد: آنها به مسائل یکسانی علاقه‌مند بودند، و در بسیاری از موارد تلاش کردند که درست نتایج یکسانی به‌دست آورند. در مقایسهٔ کارهای آنها، از جمله، به موارد جالب توجه زیر برمی‌خوریم.

۱. فروبنیوس و برنساید هر دو در بارهٔ مسألهٔ وجود p_*متممهای نرمال درگروههای متناهی* به تحقیق پرداختند، و هر کدام شرایط مهمی برای وجود چنین متممهایی به‌دست آوردند. شرایط آنها متفاوت‌اند، و نتایجی که به‌دست آوردند، امروزه، نتایج متعارفی در نظریهٔ گروههای متناهی هستند. نتیجهٔ فروبنیوس در اینجا قویتر به‌نظر می‌رسد زیرا یک شرط لازم و کافی به‌دست می‌دهد، در صورتی که نتیجهٔ برنساید تنها یک شرط کافی عرضه می‌دارد.

۲. *در بارهٔ گروههای متعددی از درجهٔ اول*: مبحثی که بسیار مورد علاقهٔ فروبنیوس بود. در اینجا، برنساید حرف اول را زد زیرا در [B : ۱۹۰۰c] ثابت کرد که هر چنین گروهی یا دوگانهٔ‌متعدی است یا فرادوری[۱] است، که از آن نتیجه می‌شود که هیچ گروه ساده از مرتبهٔ فرد (مرکب) و درجهٔ اول وجود ندارد. مقالهٔ [B : ۱۹۰۰c] بلافاصله بعد از مقالهٔ برنساید [B : ۱۹۰۰b] در بارهٔ «مشخصه‌های گروهی» منتشر شد، و نخستین موارد استعمال سرشتهای گروهی را در خودِ نظریهٔ گروهها نشان داد، واقعیتی که خود فروبنیوس آن را تأیید کرد.

۳. *در بارهٔ گروههای فروبنیوس*: برنساید مشتاقانه به این گروهها پرداخته بود، و صفحاتِ ۱۴۱_۱۴۴ از [B_1، چاپ اول] و پس از آن [B : ۱۹۰۰a] را به بررسی آنها اختصاص داد. او به‌وضوح سعی می‌کرد که ثابت کند هستهٔ فروبنیوس یک زیرگروه است و تا ۱۹۰۱ توانست این حکم را در حالتی که متمم فروبنیوس دارای مرتبهٔ زوج یا حلپذیر است ثابت کند. اگر قضیهٔ فایت_تامسن را مفروض بگیریم، این قضیه یک برهان غیررسمی از نتیجهٔ مطلوب را در همهٔ حالتها به‌دست خواهد داد. شاید این یکی از دلایلی بود که عقیدهٔ برنساید را به اینکه گروههای مرتبهٔ فرد حلپذیرند تقویت کرد، هر چند در این مورد مطمئن نیستیم. به هر حال، در مورد مسألهٔ گروه فروبنیوس، این فروبنیوس بود که حرف اول را زد، زیرا در ۱۹۰۱ ثابت کرد که هستهٔ فروبنیوس در همهٔ حالتها یک زیرگروه است. مهارت زیاد فروبنیوس در سرشتهای القایی برتری را در این مسابقه نصیب او کرد.

۴. *حلپذیری گروههای* $p^a q^b$. این موضوع به‌وضوح هدف مشترکی بود که فروبنیوس و برنساید هر دو بسیار امیدوار بودند به آن برسند. برای وقتی که m نمای p به پیمانهٔ q باشد، برنساید جواب مثبتی در حالت $a < 2m$ ارائه داد [B_1، چاپ اول، ص۳۴۵] ، و پس از آن فروبنیوس فرض برنساید را به $a \leq 2m$ تبدیل کرد. برنساید درستی این نتیجه را در همهٔ حالتها در ۱۹۰۴ ثابت کرد (قضیهٔ ۴.۴ فوق)؛ در اینجا، فراست و بینش برنساید همراه با حساب سرشتها پیروزی را نصیب او کرد.

چون فروبنیوس و برنساید روی مسائلِ مشترک بسیاری کار کردند و نتایج مربوط به‌هم در مورد آنها پیدا کردند، شاید جای تعجب نیست که نسلهای بعد گاهی از اوقات در مورد اینکه کدام نتیجه ازکدام یک از دو مؤلف است، دچار اشتباه شدند. یکی از معروفترین مثالها در این مورد فرمول مشهور شمارشی است به این مضمون که هرگاه گروه متناهی G روی مجموعهٔ متناهی S عمل کند، میانگین تعداد نقاط ثابت اعضای G برابر است با تعداد مدارهای عمل (تابلو را ببینید). از نیمهٔ دههٔ ۱۹۶۰، مؤلفان متعددی ارجاع به این فرمول شمارشی را با عنوان «لم برنساید» شروع کردند. به گفتهٔ نویمان [Ne]، ابتدا گولومب[۲] و دوبراین[۳] در ۱۹۶۱ و ۱۹۶۳_۱۹۶۴ این نتیجه را به برنساید

۱. ترجمهٔ انگلیسی برگرفته از [H_3، ص.۲۴۲]

1. metacyclic 2. Golomb 3. N. G. de Bruijn

«لمی که از برنساید نیست»

$$\#(G\text{-مدارها روی } S) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)$$

که در آن $\pi(g)$ تعداد نقاطی در S است که با g ثابت نگه داشته می‌شوند. بر طبق اظهارنظر رید [PR، ص۱۰۱]، «این لم به شیوهٔ روستاییان در شمارش گاوها تشبیه شده است، یعنی، شمارش پاها و تقسیم آن بر چهار.» طنزآمیز است که، گاهی از اوقات شمردن پاها آسانتر از شمردن گاوهاست! به‌عنوان مثال، برای شمردن تعداد گردنبندهای مختلفی که یک جواهرفروش می‌تواند با استفاده از شش مهرهٔ دو رنگ (مثلاً سبز و سفید) بسازد، می‌توان جواب ۱۳ را، با اِعمال فرمول فوق به گروه دو وجهیِ دوازده عضوی که روی مجموعه‌ای با (۶۴ =)۲^۶ عضو، «مجموعهٔ گردنبندهای رسمی»، عمل می‌کند، به‌دست آورد. برنساید به خاطر اشاعهٔ فرمول کوشی-فروبنیوس از طریق درج آن در کتابش شایستهٔ تمجید است. بعدها تعمیم پردامنه‌ای از این فرمول، مشهور به قضیهٔ اساسی پولیا، نقطهٔ عطف مهمی در حوزهٔ ترکیبیات شمارشی شد.

از دیدگاه نظریهٔ نمایشها، π سرشت نمایش جایگشتی وابسته به عمل G روی S است. برنساید در کتابش ثابت کرد که در حالتی که این عمل دوگانهٔ‌متعدی باشد، π مجموع سرشت بدیهی و یک سرشت تحویل‌ناپذیر G است.

نسبت دادند، پس از آن اطلاق عنوان «لم برنساید» به آن شروع شد. هر چند برنساید این نتیجه را در کتاب نظریهٔ گروههایش [B₁، ص.۱۹۱] آورد، اساساً سروکار چندانی با این لم نداشت. نویمان در مقاله‌اش «لمی که از برنساید نیست» [Ne] شرح داد که کوشی نخستین کسی بود که ایدهٔ لم مذکور را در زمینهٔ گروههای چندگانهٔ‌متعدی به‌کار برد، و فروبنیوس بود که این لم را به‌طور صریح در [F : (۳۶)، ص۲۸۷] صورتبندی کرد، و همو نخستین بار به اهمیت آن در کاربردها پی برد. در انتهای [Ne] قولی از دوبراین نقل شده که در آن توصیهٔ نویمان مبنی بر اینکه این لم را «لم کوشی-فروبنیوس» بنامند مورد تمجید قرار گرفته است؛ اما خود نویمان در کتاب مشترک خود با استوی و تامسن [NST] به علتی نامعلوم تصمیم گرفت که از این نتیجه با عنوان «نَه لم برنساید» یاد کند[1]!

مورد دیگر قضیه‌ای است که پیشتر در بخش I ذکر شد، یعنی این قضیه که درجهٔ نمایش (مختلط) تحویل‌ناپذیر یک گروه مانند G مرتبهٔ G را عاد می‌کند. برخی از مؤلفان این قضیه را به برنساید منسوب کرده‌اند، اما باز هم فروبنیوس بود که نخستین بار این نتیجه را ثابت کرد. این موضوع را به‌آسانی می‌توان با

۱. همچنین این نتیجه به‌طور مستقل به توسط مولین، همان‌گونه که هاوکینز اشاره کرده است، به اثبات رسید.

خواندن صفحهٔ آخر مقالهٔ کلاسیک دترمینان گروهی او [F : (۵۴)] بررسی کرد. برنساید برهانی برای این حکم با اصطلاحات خود عرضه کرد، ولی قضیه به‌طور قطع از آن فروبنیوس بود. ایسایی شور، از شاگردان فروبنیوس، بعداً ثابت کرد که درجهٔ یک نمایش تحویل‌ناپذیر شاخص مرکز G را عاد می‌کند، و سرانجام ایتو[1] ثابت کرد که این درجه، درواقع، شاخص هر زیرگروه نرمال آبلی را عاد می‌کند.

با ذکر این حکایتها در مورد نسبت‌دادنها، بحث خود را راجع به زندگی و کارهای فروبنیوس و برنساید به پایان می‌بریم. اگرچه کارهای آنها ارتباط نزدیکی با هم داشت، به ظاهر مدرکی دالّ بر ملاقات آنها یا حتی مکاتبه بین آنها در دست نیست. هرگاه این دو ریاضیدان بزرگ با هم آشنا بودند، یا مکاتبه‌ای بین آنها صورت می‌گرفت، مانند مکاتبه‌ای که بین فروبنیوس و ددکیند انجام شد، آیا نظریهٔ نمایشهای گروههای متناهی صورت متفاوتی پیدا می‌کرد؟

مراجع

[Ab] S. ABHYANKAR, *Galois theory on the line in nonzero characteristic*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **27** (1992), 68-133.

[Be] H. BENDER, *A group-theoretic proof of Burnside's p^aq^b-theorem*, Math. Z. **126** (1972), 327-328.

[B] W. BURNSIDE, *Bibliography* (compiled by A. Wagner and V. Mosenthal), Historia Math. **5** (1978), 307-312.

[B₁] ———, *Theory of groups of finite order*, Cambridge, 1897; second ed., 1911, reprinted by Dover, 1955.

[Co] F. N. COLE, *Simple groups as far as order* 660, Amer. J. Math. **15** (1893), 303-315.

[Cu₂] C. W. CURTIS, *Frobenius, Burnside, Schur and Brauer: pioneers of representation theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, to appear.

[CR] C. W. CURTIS, and I. REINER, *Methods of representation theory*, Vol. 2, Wiley, New York, 1987.

[Dr] A. W. M. DRESS, *A characterization of solvable groups*, Math. Z. **110** (1969), 213-217.

[FT] W. FEIT and J. G. THOMPSON, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. **13** (1963), 775-1029.

[Fo] A. R. FORSYTH, *William Burnside*, J. London Math. Soc. **3** (1928), 64-80. (Reprinted in Burnside's *Theory of Probability*, Cambridge Univ. Press, 1928.)

[F] F. G. FROBENIUS, *Gesammelte Abhandlungen* I, II, III (J.-P. Serre, ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[Go] D. M. GOLDSCHMIDT, *A group theoretic proof of the p^aq^b theorem for odd primes*, Math. Z. **113** (1970), 373-375.

[HR] I. HALPERIN and P. ROSENTHAL, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

1. N. Itô

Math. Z. **30** (1929), 641-692.

[PR] G. PÓLYA and R. C. READ, *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[So] L. SOLOMON, *The Burnside algebra of a finite group*, J. Combin. Theory **2** (1967), 603-615.

[Z_1] E. ZELMANOV, *Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, Math. USSR-Izv. **36** (1991), 41-60.

[Z_2] ———, *A solution of the restricted Burnside problem for 2-groups*, Math. USSR-Sb. **72** (1992), 543-564.

* * * * * *

- T. Y. Lam, "Representations of finite groups: a hundred years, part II", *Notices of the AMS*, (4) **45** (1998) 465-474.

* ت. ی. لَم، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

lam@math.berkeley.edu

[H_2] T. HAWKINS, *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Archive Hist. Exact Sci. **8** (1971), 243-287.

[H_3] ———, *New light on Frobenius' creation of the theory of group characters*, Archive Hist. Exact Sci. **12** (1974), 217-243.

[L] T. Y. LAM, *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Math., vol. 131, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mat] H. MATSUYAMA, *Solvability of groups of order $2^a p^b$*, Osaka J. Math. **10** (1973), 375-378.

[M_1] T. MOLIEN, *Über Systeme höherer complexer Zahlen*, Math. Ann. **41** (1893), 83-156; Berichtigung: Math. Ann. **42** (1983), 308-312.

[Ne] P. M. NEUMANN, *A lemma that is not Burnside's*, Math. Scientist **4** (1979), 133-141.

[NST] P. M. NEUMANN, G. STOY, and E. THOMPSON, *Groups and geometry*, Oxford Univ. Press, 1994.

[N] E. NOETHER, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*,