همبندی و حلقه‌های دود*

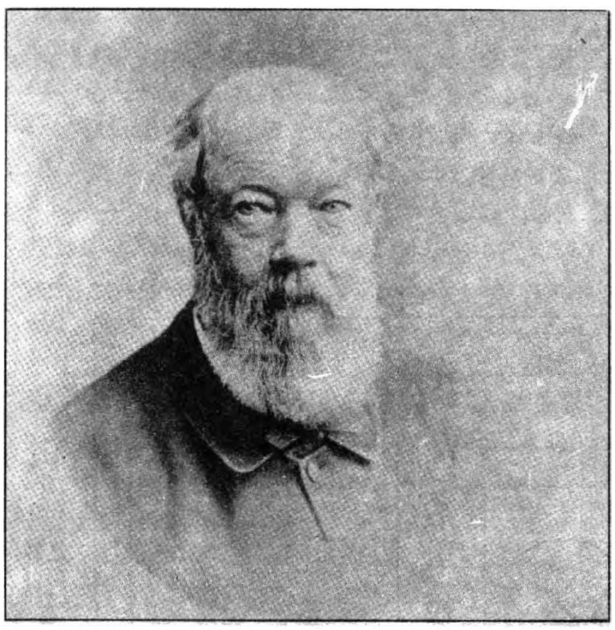
تامس آرچیبالد*
ترجمهٔ امیر اکبری مجدآباد نو

مقدمه

جیمز کلارك ماکسول در نقدی بر رساله‌ای، در فلسفهٔ طبیعی اثر تامسن و تیت، نوآوری مهمی را که در رویکرد نویسندگان به ریاضیات دیده می‌شود، خاطرنشان می‌کند:

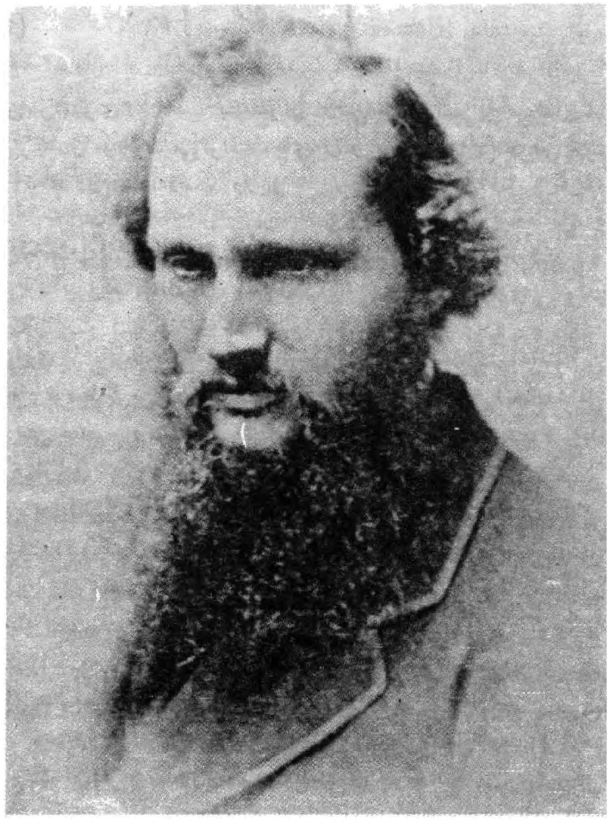
> نخستین چیزی که در نحوهٔ تنظیم این رساله مشاهده می‌کنیم اهمیتی است که به سینماتیك داده شده است... و صفحات زیادی است که تحت این عنوان به آنچه تاکنون قسمتی از هندسهٔ محض تلقی می‌شد اختصاص یافته است. به عنوان مثال، نظریهٔ خمیدگی خطها و رویه‌ها مدتهای مدید بخش مهمی از هندسه تلقی می‌شده اما در رسالات مربوط به حرکت به اندازهٔ چهارعمل اصلی یا قضیهٔ دوجمله‌ای خارج از موضوع قلمداد می‌شده است.
>
> ولی ایدهٔ راهنمای مؤلفان... این است که هندسه خود بخشی از علم حرکت محسوب می‌شود، و در آن نه تنها روابط بین اشکال فضایی بلکه همچنین فرایند تولید این اشکال به وسیلهٔ حرکت یك نقطه یا یك خط، مورد بحث قرار می‌گیرد. [۱]

این «ایدهٔ راهنما» که موجودات هندسی را به مفهومی به صورت اشیاء فیزیکی درنظر گیریم، سالیان دراز در ذهن ریاضیدانان بوده است. مسائل ریاضی بیشماری ریشه درمشاهدهٔ جهان طبیعی دارند. اما، همچنین ممکن است جوابهای بعضی از مسائل با نسبت‌دادن خاصیتهای فیزیکی به اشیاء ریاضی تحت‌مطالعه، ساده شود. به‌علاوه ممکن است برخی ساختهای ریاضی که معمولا «هندسی‌محض» تلقی می‌شوند با درنظر گرفتن چنین موجودات ریاضی-فیزیکی تولید شوند.



پیترگوتری تیت

هدف من دراین مقاله این است که با بررسی جریان پیدایش دومین اتحادگرین (که نزد فیزیکدانها به‌قضیهٔ گرین معروف‌است) و تعمیمهایش درطی یك دورهٔ پنجاه ساله، از ۱۸۲۸ تا ۱۸۷۸، بعضی از جنبه‌های این تلاقی پرثمر ریاضیات و فیزیك را روشن کنم. در طی این دوره، با وجود افزایش تأکید بردقت منطقی در



ویلیام تامسن (لرد کلوین)

بعضی محفلها، بسیاری از ریاضیدانان همچنان اثباتهای فیزیکی را برای قضایای تحلیلی معتبر می‌دانستند. در چنین اثباتهایی از خاصیتهای فرضی فیزیکی مانند تراکم‌ناپذیری به‌منظور مشخص کردن ناحیه‌هایی درفضا استفاده می‌شد. این گرایش در ریاضیات قرن نوزدهم انگلستان با قدرت بسیار بروز کرد، اگرچه درجاهای دیگر هم ناشناخته نبود.

اتحاد دوم گرین، که با آن درحساب دیفرانسیل و انتگرال برداری آشنا شده‌ایم، می‌گوید

$$\iiint (\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,dx\,dy\,dz = \oint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)da.$$

انتگرالگیری درسمت چپ روی ناحیه‌ای محدود به‌رویهٔ بسته‌ای چون S انجام می‌شود. پس انتگرال سمت راست یك انتگرال رویه‌ای روی S است، و n قائم برونسو بر S است. و سرانجام، φ و ψ دوتابع حقیقی پیوسته‌ـمشتق‌پذیر (میدان اسکالر) روی $\mathbf{R}^3$ هستند. این قضیه بار اول درمقاله‌ای که جورج گرین در ۱۸۲۸ منتشر کرد همراه با لمهای دیگری که گرین درمطالعه‌اش در الکترواستاتیك ومغناطیس به‌کارمی‌برد، ظاهرشد. نتایج گرین ابتدا ناشناخته ماند، ولی ویلیام تامسن (بعدها معروف به لردکلوین) دو نسخه از جزوهٔ گرین را درسال ۱۸۴۵ به‌دست آورد و از آن پس نتایج گرین خیلی مطرح و معروف شد و درنظریهٔ ریاضی پتانسیل، یکی از مهمترین ابزارهای فیزیك ریاضی در دهه‌های بعدی، نقش اساسی پیدا کرد.

منشأ نظریهٔ پتانسیل، دسته‌ای از نتایج است که از تلاشهای دانشمندان فرانسوی فیزیك ریاضی (شاخصترین آنها، پواسون، لاپلاس وبیو[1]) برای بسط روشهای نیوتن به‌دست آمدند. لاپلاس کوشید تا بسیاری از پدیده‌های طبیعی‌را به‌عنوان نتیجهٔ نیروهایی متناسب با معکوس مجذور فاصله بین اشیاء تحت تأثیر یکدیگر، توضیح دهد. برای رسیدن به‌این هدف، لازم بود انتگرالهای نیروهای برداری محاسبه شود. لاپلاس نشان دادکه می‌توان چنین نیروهایی را به‌صورت آنچه اکنون گرادیان یك تابع اسکالر نامیده می‌شود درنظر گرفت، و بنابراین توانست محاسبات را بسیار ساده‌کند. چنین تابعی، که گرادیان آن یك‌نیروست، به‌عنوان پتانسیل آن نیرو شناخته می‌شود. (در ادامهٔ این مقاله همچنین پتانسیلهای سرعت‌را خواهیم دید،که توابعی هستندکه گرادیانشان، سرعتی را به دست می‌دهد.) کار گرین، همانند کار لاپلاس، هم به فیزیك ریاضی مربوط می‌شد و هم به‌نظریهٔ پتانسیل زیرا هم‌رابطهٔ بین پتانسیلها و انتگرالهایشان را بیان می‌کرد و هم کاربرد این نتایج را درمسائل فیزیکی [۲].

مفهوم پتانسیل در ابتدا یك ابزار ریاضی بود ولی در دههٔ ۱۸۵۰ تعبیری فیزیکی یافت. درحالت خاص، اگر تابعی برداری یك‌پتانسیل داشته باشد، انتگرال آن پتانسیل در امتداد یك‌خم‌فقط به نقاط انتهایی انتگرالگیری بستگی دارد، و انتگرال در امتداد خم بسته صفر است. این مطلب مبین این حقیقت است‌که تابع برداری یك دیفرانسیل‌کامل است. از نظر فیزیکی، این‌مطلب دلالت می‌کندکه نیروی توصیف شده به‌وسیلهٔ تابع، پایستار است، بنابراین توابع پتانسیل ارتباط نزدیکی با انرژی پتانسیل‌دارند.

مقالهٔ ۱۸۲۸ گرین

مقالهٔ گرین که در ۱۸۲۸ به‌میزان محدود در ناتینگهام منتشرشد، مقاله‌ای دربارهٔ کاربردآنالیز ریاضی در نظریه‌های الکتریسیته و مغناطیس نام داشت [۳]. جورج گرین (۱۷۹۳–۱۸۴۱) که پسر آسیابانی بود، به‌کتابخانهٔ یکی از اشراف محلی علاقه‌مند به علوم دسترسی یافته بود. این فرصت و استعدادگرین، به‌او امکان دادکه برآثار اساسی لاپلاس، لاگرانژ، و پواسون تسلط پیدا کند. گرین با الهام ازکار لاپلاس درگرانش وکارپواسون در الکترواستاتیك و مغناطیس، به‌بررسی الکترواستاتیك با استفاده ازفرضیه‌های‌مشابه اما با روشهای جدید پرداخت.

آنچه بیش ازهمه موردنظرماست، قضایای ریاضی کلی گرین در ابتدای این مقاله است، که او بعداً آن قضایا را در محاسبات الکتریکی و مغناطیسی خاص به‌کار برد. دومین اتحادگرین قضیهٔ اساسی این بخش است. این قضیه، ابزار اصلی برای حل معادلهٔ لاپلاس و معادلهٔ پواسون به‌روش گرین است. بحث مفصل دربارهٔ این‌روش، که امروز روش توابع گرین نامیده می‌شود، ما را از مقصودمان بسیار دور می‌کند.

اتحادی‌که گرین اثبات‌کرد، با نمادگذاری جدید به‌این

1. Biot

صورت نوشته می‌شود

$$\int U\nabla^2 V d^3x+\oint U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = \int V\nabla^2 U\, d^3x+\oint V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma. \quad (۱)$$

در اینجا U و V دو تابع دلخواه هستند که در ناحیهٔ مشتق‌گیری، پیوسته‌ـمشتق‌پذیرند، و در اینجا n، قائم درونسو از رویهٔ σ است. گرین از نماد δ برای بیان آنچه که ما با ∇^2 نمایش داده‌ایم، استفاده می‌کرد. اثبات گرین از این اتحاد، متکی است بر کاربرد انتگرالگیری جزء به‌جزء در مورد عبارت

$$\iiint\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz = \int(\nabla V)\cdot(\nabla U). \quad (۲)$$

با این فرض که U و V به‌قدر کافی مشتق‌پذیر باشند، می‌توانیم انتگرالگیری جزء به‌جزء را نسبت به‌هر متغیری انجام دهیم. برای مثال قرار می‌دهیم

$$v=\frac{\partial V}{\partial x}dx \quad \text{و} \quad u=\frac{\partial U}{\partial x}dx$$

سپس با جانشانی در (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\iint dy\,dz\left(\int\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}dx\right)$$
$$=\iint V(x_1)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_1}dy\,dz$$
$$-\iint V(x_0)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_0}dy\,dz-\int V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx\,dy\,dz.$$

سپس گرین استدلال می‌کند که اگر σ یك جزء رویه و n یك بردار قائم درونسو باشد، داریم

$$\iint dy\,dz\left(V(x_1)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x_1}-V(x_0)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x_0}\right) = -\int d\sigma\frac{\partial x}{\partial n}V\frac{dU}{dx}.$$

پس انتگرال جزئی به‌این‌صورت است

$$\iint dydz\left(\int\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}dx\right) = -\int d\sigma\frac{\partial x}{\partial n}V\frac{\partial U}{\partial x}-\int V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

بنابراین، با انتگرالگیری نسبت به هر سه متغیر به دست می‌آید

$$\iint dx\,dy\,dz(\nabla V)\cdot(\nabla U)$$

$$=-\int d\sigma V\frac{\partial U}{\partial n}-\int V\nabla^2 U. \quad (۳)$$

این برابری را اغلب به‌عنوان اولین اتحاد گرین می‌شناسند. بنابر تقارن موجود، می‌توانیم جای U و V را در (۳) عوض کنیم تا اتحاد دوم را به‌دست آوریم

$$\int d\sigma V\frac{\partial U}{\partial n}-\int V\nabla^2 U=-\int d\sigma U\frac{\partial V}{\partial n}-\int V\nabla^2 U.$$

بسیاری از باریك‌بینی‌هایی که امروزه معمول است در اثبات این اتحاد توسط گرین رعایت نشده است. اثبات کامل این اتحاد شامل بررسی صحیح رابطهٔ بین بینهایت‌کوچکها و متناهیهاست، و باید از هم‌ارزی انتگرالهای چندگانه و مکرر که گرین آن را تشخیص نمی‌داد، استفاده‌کنیم. گرین ممکن‌است در این زمان با پیشرفتهای آنالیز دقیق که کوشی باعث آن بوده به‌خوبی آشنا نبوده باشد، زیرا وی محدودیت دسترسی خود را به‌آخرین تحقیقات اظهار داشته است. در واقع استدلالهای او به‌هندسهٔ بینهایت کوچکها متکی است. دراین مورد، کار او به‌کار بیشتر معاصرانش، حتی در فرانسه،شباهت دارد.

دستاورد گرین‌را سالیان دراز تقریباً به‌طورکامل‌نادیده گرفتند. هیچ یك از افراد معدودی‌که رسالهٔ او را خریدند قادر به‌تشخیص ارزش آن نبودند و روشها و نتایج او تقریباً مهجور ماند [۴]. اگر الکتریسته‌دان ایرلندی رابرت مورفی ذکری از کار گرین نمی‌کرد، دستاورد او ممکن بود فراموش شود. مورفی از گرین به‌عنوان مبدع اصطلاح پتانسیل یاد می‌کند، گرچه تعریف خود مورفی از پتانسیل اشتباه است و نشان می‌دهد که او واقعاً اثر گرین را ندیده بوده است [۵].

خود گرین بعدها علاقهٔ دوباره‌ای به‌کار اولیه‌اش نشان نداد. کوششهای او در این مدت صرف تحقیقات دیگر و آموزش در کیمبریج می‌شد. مقالات دیگر او از مقبولیت فوری بیشتری برخوردارشد. بخشی‌از آنها در گزارشهای انجمن فلسفهٔ کیمبریج منتشرشد و ازطریق این‌نشریه توجه جامعهٔ علمی انگلیس‌را به‌خود جلب‌کرد. بنابراین گرین قبل از مرگش در ۱۸۴۱ شهرتی برای خودش داشت، ولی این شهرت با کشف دوبارهٔ مقالهٔ ۱۸۲۸ او فوق‌العاده افزایش یافت.

تامسن، گرین را دوباره‌کشف می‌کند

کسی که اولین‌بار توجه جامعهٔ علمی بین‌المللی را به‌نتایج گرین جلب کرد، ویلیام تامسن (بعدها لردکلوین) بود. او درسال ۱۸۴۲ ارجاع مورفی به‌مقالهٔ گرین را ملاحظه‌کرد و به‌دلایل متعددی علاقه‌اش به‌این موضوع جلب شد. خود وی مشغول تحقیق درنظریهٔ ربایش بود و مقاله‌هایی در این باره در ۱۸۴۲ و ۱۸۴۳ منتشر کرد. مورفی به‌استفادهٔ گرین از واژهٔ پتانسیل اشاره‌کرده بود. این مفهوم را، به طوری که تامسن می‌گوید، گاوس نیز با موفقیت زیادی درمقالهٔ ۱۸۳۹اش دربارهٔ نیروهای عکس مجذوری به‌کار گرفته بود. بدون شك تامسن متعجب بودکه چطور گرین، که او با نامش آشنا بود، مفهوم پتانسیل‌را به‌کار برده بود، و نسبت به‌ماهیت

دقیق نتیجه‌های او کنجکاو بود.

تامسن نتوانست اثر گرین را تا ۲۵ ژانویهٔ سال ۱۸۴۵— یعنی کمی قبل از آنکه در پی تکمیل مطالعاتش در کیمبریج به‌فرانسه سفر کند — ببیند. بر حسب اتفاق، هاپکینز معلم تامسن دو نسخه از اثر گرین را داشت که هرگز مطالعه‌شان نکرده بود و آنها را به وسیلهٔ تامسن به‌فرانسه فرستاد. تامسن خیلی تحت تأثیر کلیت نتایج گرین قرار گرفت و بلافاصله تلاش کرد تا آنها را در تحقیقات خودش به‌کار برد. وی پس از رسیدن به فرانسه مقاله را به‌لیوویل، استورم و شال نشان داد. به‌زودی جامعهٔ ریاضی پاریس کاملا از کار گرین با خبر شد. به‌عنوان مثال، لیوویل درمقاله‌ای در ۱۸۴۸ برای گرین و گاوس از لحاظ معرفی اصطلاح پتانسیل امتیاز یکسانی قائل شد [۶]. تامسن نسخهٔ دیگر مقالهٔ گرین را به‌وسیلهٔ کیلی به آلمان فرستاد، و او هم مقاله را تحویل کرله سردبیر مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی داد. کرله ترجمهٔ آلمانی مقاله را در سه بخش بین سالهای ۱۸۵۰ و ۱۸۵۴ منتشر کرد و به‌این ترتیب، این اثر را محققین علاقه‌مند در آلمان به‌خوبی شناختند. بنا براین، ۲۵ سال پس از انتشار اولیهٔ مقالهٔ گرین، روشهای او به‌نوشته‌های علمی و کتابهای درسی اروپا راه یافتند [۷]. یکی از اولین اشخاصی که از دستاورد گرین استفاده کرد برنهارد ریمان (۱۸۲۶—۱۸۶۶) بود که آن موقع مشغول نوشتن رسالهٔ دکتریش در گوتینگن بود.

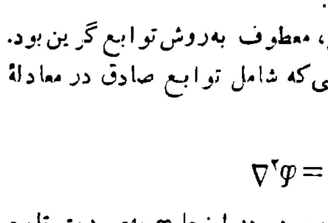
ریمان و نواحی چندگانه‌ـهمبند

بیشتر توجه ریمان به‌مقالهٔ گرین، معطوف به‌روش توابع گرین بود. گرین درحل مسائل مقدار مرزیی که شامل توابع صادق در معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2\varphi = 0$$

هستند، از این‌روش استفاده کرده بود. در اینجا φ به‌صورت تابع پتانسیل نیروی الکترواستاتیک ناشی از یک چگالی بار روی یک هادی تعبیر می‌شود. ریمان پی برد که روشهای گرین می‌تواند در مطالعهٔ توابع یک‌متغیرمختلط مفید واقع شود، زیرا بخشهای حقیقی ومختلط چنین توابعی باید درمعادلهٔ لاپلاس صدق کنند. با به‌کارگیری این دیدگاه، ریمان روشهایی ابداع کرد که او را قادر می‌ساخت تابع مختلط را با استفاده از مقادیر مرزی و ناپیوستگیهایش مشخص کند. درجریان این‌کار، ریمان ایدهٔ نواحی چندگانه‌ـهمبند صفحه را معرفی کرد: یک‌ناحیه ساده‌ـهمبند است اگر یک برش آن را به‌دوقسمت تقسیم کند، و همبندیش مساوی تعداد برشهای لازم برای تفکیک آن است. (شکل ۱ را ببینید.) این مفهوم در رسالهٔ دکتری ریمان آمده بود (۱۸۵۱) و با انتشار مقالهٔ او در زمینهٔ انتگرالهای آبلی (۱۸۵۷) رواج بیشتری یافت [۸]. دراینجا بود که این ایده مورد توجه هرمان‌فون‌هلمهولتس قرار گرفت که در تلاش به‌کارگیری ایده‌های گرین درمسیر دیگری بود.

Zweifach zusammenhängende Fläche.



Sie wird durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt q in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. Mit Zuziehung der Curve a kann in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

شکل ۱. مثال ریمان از رویهٔ دوگانه‌ـهمبند.

هلمهولتس و گردابها

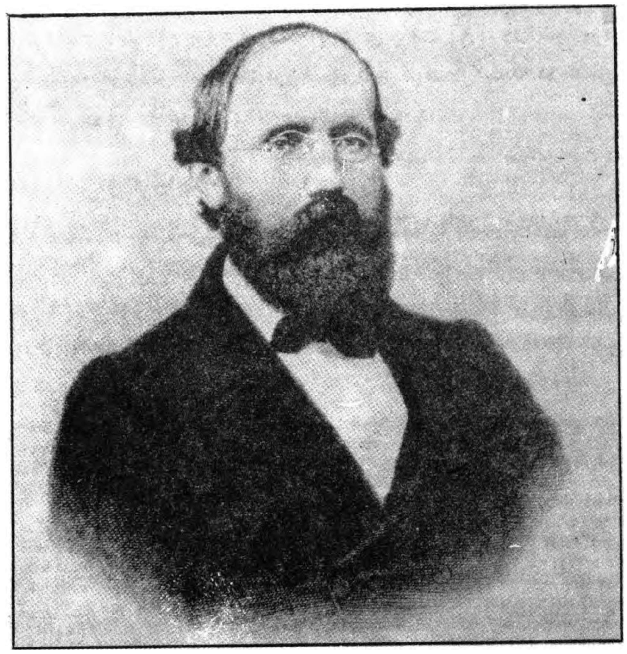
مقالهٔ ۱۸۵۸ هلمهولتس‌دربارهٔ انتگرالهایی‌ازمعادلات هیدرودینامیک که حرکت گردابی را به‌دست می‌دهند نیز عمیقاً تحت تأثیر کار گرین بود [۹]. هلمهولتس (۱۸۲۱—۱۸۹۴) درضمن‌مطالعهٔ فیزیولوژی گوش به‌حل مسائل مقدار مرزی در مکانیک سیالات علاقه‌مند شد. (او درآن زمان استاد علم تشریح در بن بود [۱۰].) علاوه‌براین هلمهولتس مشابهتی بین بعضی مسائل هیدرودینامیک و مسائلی در نظریهٔ الکترومغناطیس دیدکه مدت مدیدی توجهش را جلب کرد. تلاشهایی که برای یک بررسی نظری مفصل از تشابه نظریهٔ الکترومغناطیس و دینامیک سیالات صورت می‌گرفت ممکن است ملهم از شباهت ظاهری بین پدیده‌های الکتریکی و هیدرودینامیکی بوده باشد. در نیمهٔ قرن نوزدهم جریان الکتریکی را عموماً به عنوان جریان یک یا دو «سیال الکتریکی» در امتداد یک هادی درنظرمی‌گرفتند. حرکت این سیال یک اثرمغناطیسی تولیدمی‌کند. آندره‌ـماری‌آمپر در دههٔ ۱۸۲۰ نشان دادکه مغناطیس را می‌توان نتیجه‌ای ازجریانهای الکتریکی میکروسکوپی فرضی دریک جسم درنظرگرفت، و بنابراین وجود پدیده‌های الکترومغناطیسی باید به‌این معنی باشدکه یک جریان به‌جریانهای دیگر تبدیل می‌شود. هرگاه جریان اولیه در امتداد یک‌خط راست‌جاری‌شود، جریانهای نظیر اثرهای مغناطیسی باید مارپیچی و تشکیل‌دهندهٔ گردابهای میکروسکوپی باشند.

تحقیقات هلمهولتس و دیگران در این زمینه، با هدف دقیق ساختن این‌تصویر نسبتاً مبهم انجام‌شد. درمقالهٔ ۱۸۵۸، هلمهولتس پرسش زیر را مورد بررسی قرار داد: فرض‌کنید ظرفی سربسته داشته باشیم که با سیال بی‌اصطکاک تراکم‌ناپذیری پرشده باشد. چگونه عمل روی مرز ظرف برحرکت [سیال] در داخل ظرف تأثیر می‌گذارد؟

هلمهولتس ظاهراً به‌محض خواندن مقالهٔ گرین، ارزش قضایای گرین را در بررسی چنین مسائلی دریافت، اما به‌دلیل‌دیگر مسئولیتهای دانشگاهی، پروراندن ایده‌هایش را در این زمینه‌کنار گذاشت. ولی او درهمین اواخرمقالهٔ ۱۸۵۷ ریمان را نیزخوانده بود که برای او روشن می‌کرد قضیهٔ گرین تنها وقتی‌که نواحی مورد بررسی ساده‌ـهمبند باشند، قابل استفاده است. این بدان‌دلیل است‌که توابع دارای پتانسیل — که امروز آنها را میدانهای برداری پایستار می‌نامیم— در واقع ممکن است در نواحی چندگانه‌ـهمبند، چند مقداری باشند.

حال ببینیم‌که هلمهولتس‌چطور از قضیهٔ گرین‌استفاده می‌کند. او با معادلهٔ اویلر درباب دینامیک سیالات شروع می‌کند، که با نمادهای برداری می‌توان آن را چنین نوشت

$$\vec{F}=\frac{1}{\rho}\nabla\vec{p}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} \qquad (۴)$$



برنهارد ریمان

$$\nabla\cdot\vec{v}=0. \qquad (۵)$$

در اینجا ρ چگالی سیال، $\vec{p}$ فشار، و $\vec{v}$ سرعت است. هلمهولتس فرض کرد که

$$\vec{F}=\nabla V$$ (که V یك نیرو-پتانسیل است)

و

$$\vec{v}=\nabla\varphi$$ (φ یك سرعت-پتانسیل است).

از (۵) نتیجه می‌شود که φ درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند زیرا $\nabla\cdot\vec{v}=\nabla^2\varphi=0$. سپس هلمهولتس توجه کرد که این دلالت می‌کند به

$$\nabla\times\vec{v}=\nabla\times(\nabla\varphi)=0.$$

هرگاه دیوارهٔ ظرف صلب باشد، این رابطه بدین‌معنی است که مؤلفهٔ سرعت عمود برمرز صفر است. بنابراین، اگر n یك قائم برونسو باشد، $\partial\varphi/\partial n$ همه‌جا متحد صفر است. اما از اتحاد اول گرین داریم

$$\int_R(\nabla U\cdot\nabla V)\,dx^3=\iint V\frac{\partial U}{\partial n}\,ds-\int_R V\nabla^2 U\,dx^3.$$

هرگاه $U=V=\varphi$ داریم

$$\int_R(\nabla\varphi)^2\,dx^3=\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds=0$$

(به‌یاد بیاورید که $\nabla^2\varphi=0$.)

بنابراین $\nabla\varphi=0$، یعنی هیچ حرکتی درسیال القا نمی‌شود. بنابراین هر حرکت یك سیال درظرفی سربسته (با درون ساده‌همبند) که یك پتانسیل سرعت دارد باید منحصراً به حرکت مرز بستگی داشته باشد. هلمهولتس نشان دادکه حرکت مرز چنین حرکتی را درسیال به‌طور یکتا معین می‌کند. نتیجهٔ مهم دیگر این بود که گردابها تنها به‌وسیلهٔ حرکتی که پتانسیل سرعت ندارد، قابل تولید هستند. مهمتر اینکه، اگر گردابها از ابتدا موجود باشند، تحت اثر نیروهای پایستار، پایدارند.

وقتی که گردابهایی وجود دارند، می‌توان بخشی از سیال را که بدون گرداب است به‌عنوان یك ناحیهٔ چندگانه‌ـهمبند، که گردابها «سوراخهایش» هستند، درنظرگرفت. بنابراین برای حل مسائل مقدار مرزی درچنین ناحیه‌ای، درحالت ایده‌آل باید تعمیمی ازقضیهٔ گرین داشته باشیم که با چنین حالتهایی سروکار داشته باشد. هلمهولتس برمطلوب بودن چنین تعمیمی تأکیدکرد و توجه کرد که به‌این‌منظور، مفهوم ریمان ازهمبندی را می‌توان به‌سهولت به سه‌بعد تعمیم داد.

درکار هلمهولتس موجودات هندسی فوراً فیزیکی می‌شوند، به‌این دلیل که سه‌بعدی هستند. همچنین نقاط فضا به‌مرلکولهای یك سیال، و سوراخها درفضا به‌گردابها نظیر می‌شوند. دراین مورد، می‌توان به‌موجودات هندسی‌تعبیرهای فیزیکی روشنی نسبت‌داد، و سؤالات‌فیزیکی (مثلا دربارهٔ جوابهای مسائل مقدار مرزی‌خاص) مسائل ریاضی مهمی را مطرح می‌کنند.

تحقیقات هلمهولتس درمیان دانشمندان‌انگلیسی‌فیزیك‌ـریاضی، به‌خصوص تامسن، بیشتر جلب‌نظرکرد تا درمیان همکاران آلمانی او. دلیل‌این‌امر تا حدی‌علاقهٔ مشترك هلمهولتس و تامسن به‌مدلهای هیدرودینامیکی برای نظریهٔ الکترومغناطیس بود؛ این علاقه ناشی از موضع آنها دربرابر تفکری بودکه درآن زمان درزمینهٔ نظریهٔ الکترومغناطیس درآلمان رواج داشت. این‌نظریه، مبتنی برتحقیقات همکار گاوس، ویلهلم‌وبر، پدیده‌های الکتریکی را برپایهٔ یك قانون نیروی وابسته به‌سرعت توضیح می‌داد. هم هلمهولتس و هم تامسن فکرمی‌کردندکه چنین نیرویی نمی‌تواند در اصل بقای انرژی صدق‌کند. هلمهولتس‌آشکارا احساس می‌کرد که چون تحصیلات رسمی ریاضی نداشته است، معاصرین‌آلمانیش مهارتهای ریاضی او را جدی نمی‌گیرند. بنابراین در میان عالمان فیزیك‌ـریاضی انگلیس بودکه مقالهٔ‌هلمهولتس با بیشترین‌علاقه وادراك خوانده‌شد.

تیت، تامسن، حلقه‌های دود و اتمها

رهیافت هلمهولتس، هواخواهی پرشوری را در پیتر گوتری تیت (۱۸۳۷–۱۹۰۱)، یك اسکاتلندی تحصیل کردهٔ کیمبریج که در ۱۸۵۸ در بلفاست تدریس می‌کرد، برانگیخت. درآن زمان تیت درتلاش‌تسلط‌یافتن برروش‌کواترنیونهای ویلیام همیلتن و نشان‌دادن فایدهٔ فیزیکی این‌روش ازطریق‌به‌دست‌آوردن‌کاربردهای‌مهم بود. به این دلیل اثر هلمهولتس توجه او را جلب کرد و آن را برای استفادهٔ خودش به‌انگلیسی ترجمه‌کرد [۱۱].

یك توضیح معترضه دربارهٔ کواترنیونها: امروزه، این‌مجموعه از اشیاء بیشتر در درسهای جبر یا اثباتهایی درنظریهٔ جبری‌اعداد مطرح می‌شود. در این مباحث می‌توانیم ازخاصیتهای‌کواترنیونها به‌عنوان یك‌حلقهٔ تقسیم‌تعویض‌ناپذیر استفاده‌کنیم. این‌کاربردها از کاربرد مورد نظر اولیه درهندسه وآنالیز بسیار دور هستند. همیلتن

هرمان فون هلمهولتس

کواترنیونها را در ۱۸۴۳ ابداع کرد، و به‌وسیلهٔ آنها ایدهٔ عملگرها را معرفی کرد. به‌خصوص عملگر دل یا نابلا یا ∇ی ما برایش مهم بود. کواترنیون درنظر همیلتن و تیت، توصیف‌کنندهٔ خارج‌قسمتی بوداز چیزهایی که ما بردارمی‌نامیم؛ چنین خارج‌قسمتی شامل یك ۴ تایی است که امتداد و سه دورانی را که جفت دلخواهی از بردارها را برهم منطبق می‌کند، مشخص می‌کند [۱۲]. بعداً خواهیم دیدکه تیت چگونه از این رهیافت برای به‌دست آوردن چیزی که «اثباتهای فیزیکی» احکام تحلیلی نامید، استفاده‌کرد.

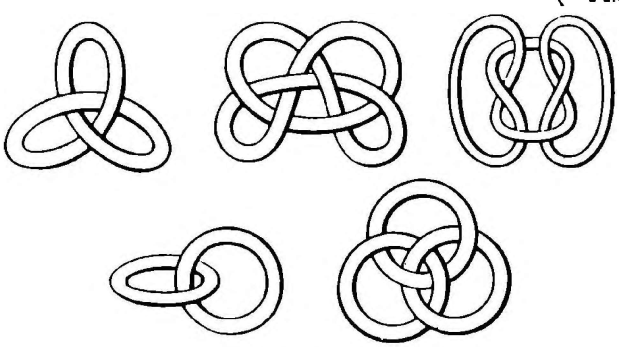
تیت در ۱۸۶۰ به ادینبورو رفت و همکاریی را با ویلیام تامسن آغاز کرد که بعداً در گلاسکو ادامه یافت. از ۱۸۶۶ تا ۱۸۶۷ همکاری آنها در اوج بود و دراین مدت رساله‌ای در فلسفهٔ طبیعی را (که دهها سال در بریتانیا کتاب درسی فیزیك مقدماتی محسوب می‌شد) تهیه می‌کردند. در اوایل ۱۸۶۷ تیت اثباتی تجربی از خاصیتهای پایداری گردابها به وسیلهٔ حلقه‌های دود، و نیز نظریهٔ ریاضی هلمهولتس را درباب این مسأله به‌تامسن ارائه کرد. تامسن این واقعه را در نامه‌ای به هلمهولتس چنین شرح می‌دهد:

> ولی حالا حرکات گردابی جای هرچیز دیگر را گرفته است، چون چند روز قبل تیت در ادینبورو راه بسیارخوبی برای تولید آنها بهمن نشان داد. یك‌جعبه (یا دربوش) جعبه‌ای (هرجعبهٔ بسته‌بندی کهنه‌ای برای این منظورخوب است) را ببرید وسوراخ بزرگی دروجه مقابل ایجاد کنید. قسمت باز AB را با تکه پارچه‌ای مسدود کنید به‌طوری‌که پارچه محکم نباشد، و با دستتان به‌وسط پارچه بزنید. اگر چیزی درحال دودکردن را درجعبه قرار دهید، می‌بینید که با هرضربه حلقهٔ زیبایی خارج می‌شود.

سپس تامسن به‌شرح چیزهای بسیار جالبی که دربارهٔ این پدیده و نظریه یافته، می‌پردازد.

> دائمی بودن این دوران و رابطهٔ غیرقابل تغییری که شما ثابت کرده‌اید بین آن و بخشی از سیال، هنگامی‌که چنین حرکتی دریك سیال‌کامل انجام می‌گیرد، وجود دارد، نشان می‌دهدکه اگر یك سیال‌کامل‌گذرنده از تمام فضا و متشکل از جوهر همهٔ مواد وجود داشته‌باشد، دوام یك‌حلقهٔ‌گردابی به‌اندازهٔ دوام اتمهای سخت جامد خواهدبودکه لوکرتیوس و پیروانش (و اسلافش) آن را علت خواص دائمی اجسام می‌دانستند... بنابراین اگر دوحلقهٔ گردابی در یك‌سیال کامل تولید شوند، ومانند حلقه‌های یك‌زنجیر ازمیان یکدیگر بگذرند، هرگز نمی‌توانند با یکدیگر برخوردکنند یا یکی دیگری را بشکند. آنها تشکیل اتمی فناناپذیر خواهند داد. [۱۳]

تامسن فوراً نظریه‌ای ریاضی دربارهٔ این اتمهای گردابی ظاهراً فناناپذیر ساخت، ونتایج او کمی کمتر ازسه هفتهٔ بعد درانجمن سلطنتی ادینبورو خوانده شد. مقالهٔ او دربارهٔ حرکت گردابی، که تفصیل بیشتری از موضوع را دربرداشت در ۱۸۷۸ منتشر شد [۱۴]. در اینجا او با مسأله‌ای‌که هلمهولتس درمورد تعمیم قضیهٔ گرین به نواحی چندگانه‌ـهمبند طرح کرده بود مواجه شد وآن را حل کرد. زیرا برای بررسی خواص اتمهای گردابی لازم بودکه مسائل مقدارمرزی درمواردی‌که گردابهای پیچیده (مانندآنهاکه درشکل آمده‌اند) بخشی ازمرز را تشکیل می‌دهند، حل شود. (شکل ۲ را ببینید.)



شکل ۲. گره‌های ویلیام تامسن.

در این‌مقاله، تامسن صورت اولیهٔ قضیهٔ گرین‌را چنین‌نوشت:

$$\int_R \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi'\, dV = \oint \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, da - \int_R \varphi\nabla^2\varphi'\, dV$$

$$= \oint \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, da - \int_R \varphi'\nabla^2\varphi\, dV.$$

در اینجا φ و φ' باید تك‌مقداری باشند. سپس تامسن به بررسی این موضوع پرداخت که اگر φ' چندمقداری باشد، یعنی اگر R را یك‌ناحیهٔ‌چندگانه‌ـهمبند درنظر گیریم، چه اتفاقی می‌افتد، و بعد مسأله را درحالت‌کلی بررسی‌کرد. فضای چندگانه‌ـهمبند را می‌توان با برشهایی یا با تعبیهٔ آنچه تامسن سدهای متوقف‌کننده نامید، ساده‌ـهمبند ساخت. انتگرال در امتداد یك مسیر (تقریباً)

بسته از یك طرف سد تا طرف دیگر مقدار ثابت k_i را دارد، که برای همهٔ چنین مسیرهایی یکی است؛ این گونه ثابتهای k_i برای هر سد متوقف‌کننده وجود دارند و انتگرال موردنظر به‌این‌صورت درمی‌آید

$$\int_R \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' \, dV$$
$$= \oint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_i k_i \iint \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma' - \int_R \varphi \nabla^2 \varphi' \, dV$$
$$= \oint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \sum_i k_i \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma' - \int_R \varphi' \nabla^2 \varphi \, dV.$$

در اینجا $d\sigma'$ یك‌جزء از رویهٔ سد را نمایش می‌دهد.

تامسن با مجهزشدن به این سلاح توانست حرکت سیال در نواحی چندگانه‌ـهمبند را بررسی کند، و نتیجه گرفت که مؤلفهٔ قائم سرعت یك‌سیال در هرنقطه از مرز، حرکت را در داخل یك‌ناحیهٔ چندگانه‌ـهمبند معین می‌کند. (مشروط براینکه گردش سیال در هر ناحیه برما معلوم باشد.) وی سپس با توجه به‌اینکه در بعضی از رویه‌ها سدهای متوقف‌کننده باید خود را قطع کنند، و تشخیصشان مشکل است، به‌این موضوع پرداخت که بهترین تعریف مرتبهٔ همبندی چیست. بنابراین تعریفی را پیشنهاد کرد که از آنچه او «مسیرهای انطباق‌ناپذیر» می‌نامید ـ وما رده‌های‌هوموتوپی‌مسیرهای بسته با نقطهٔ مبنا می‌نامیم ـ در آن استفاده می‌شد. او نقطه‌ای را روی رویه انتخاب کرد و ملاحظه کرد که اگرمعلوم شود چند مسیر دوبه‌دوانطباق‌ناپذیر روی آن رویه می‌توان رسم کرد، همبندی‌رویه مشخص می‌شود. مثلا، برای یك‌ناحیهٔ ساده‌ـهمبند همهٔ مسیرهای بسته روی رویه، هوموتوپیك هستند. اگرچه به این ترتیب تعریف روشنی از همبندی به‌دست‌آمد، استفاده از این‌روش برای به‌دست آوردن تعمیم قضیهٔ گرین ممکن‌نیست زیرا برای این‌کار به‌سدهای متوقف‌کننده نیازمندیم.

بنابراین‌علاقهٔ تامسن به اتمهای گردابی اورا مستقیماً به‌تعمیمی از قضیهٔ گرین، و به مسألهٔ تعریف مناسب همبندی هدایت کرد. روش اثبات او اساساً مشابه به روش گرین است که سدهای‌متوقف‌کننده به‌آن اضافه شده، و این همان روشی است که امروزه معمولا در درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری تدریس می‌شود.

روایت کواترنیونی تیت از قضیهٔ گرین

در اواخر ۱۸۶۰، علاقهٔ تیت به‌کواترنیونها به‌جنگی صلیبی منجر شد. او در ۱۸۷۱ خطاب به انجمن بریتانیایی گفت:

> یك بررسی دکارتی را... با معادل کواترنیونیش... مقایسه کنید. مشکل بتوان گفت که فرق آنها با یکدیگر از فرق دستگاه اعشاری با مقیاس دودویی یا با حساب قدیمی یونانی، یا ازفرق بخش‌منظم دستگاه متری با «بی‌دستگاهی» نامعقول بریتانیای‌کبیر، بیشتر و نمایانتر است.

درهمین سخنرانی تیت خاطرنشان کرد که از نظرگاه کواترنیونی:

> فوراً به‌نظرمی‌رسد که قضیهٔ مشهورگرین چیزی نیست جز معادلهٔ مشهور پیوستگی برای‌سیالی ناهمجانس که چگالیش در هرنقطه متناسب با یك‌پتانسیل الکتریکی، وتغییرمکان یا سرعتش متناسب و درجهت نیروی الکتریکی ناشی از پتانسیل دیگری باشد [۱۵].

ببینیم منظور او دقیقاً چه بود. تیت درمقالهٔ ۱۸۷۰اش،دربارهٔ قضیهٔ گرین و سایر قضایای وابسته، فرض کرد ناحیه‌ای فضایی چون R به‌طور یکنواخت با نقاط پرشده باشد [۱۶]. اگرنقاط درونی و بیرونی این نواحی به‌وسیلهٔ برداری نمایش داده شود، ممکن‌است افزایش یا کاهش‌خالصی درحجم ـ یعنی درتعداد نقاط ـ درناحیهٔ R حاصل شود. این به‌دوطریق قابل محاسبه است:

۱. می‌توانیم افزایش‌کل چگالی را درسراسر R بیابیم

$$\int_R \operatorname{div} \sigma \, dV \quad \Big(\text{با نمادگذاری تیت } \iiint S \cdot \nabla\sigma \, ds\Big) \qquad (۶)$$

۲. می‌توانیم افزونی بردارهای گذرندهٔ درونسو را نسبت به‌بردارهای گذرندهٔ برونسو براوردکنیم:

$$\iint \sigma \cdot \vec{n} \, da \quad \Big(\text{با نمادگذاری تیت } \iint s.\sigma UV ds\Big). \qquad (۷)$$

عبارات (۶) و (۷) باید مساوی باشند تا آنچه که ما حالا قضیهٔ دیورژانس می‌نامیم از معادلهٔ پیوستگی به‌دست‌آید. اگرفرض کنیم که چگالی ـ مثلا، سیالی الکتریکی ـ به‌وسیلهٔ پتانسیل $P_۱$ معین می‌شود وتغییرمکان متناسب با نیروی σ با پتانسیل P است، داریم

$$\nabla(PP_۱) = P\nabla P_۱ + P_۱\nabla P$$

و

$$\nabla^۲(PP_۱) = P\nabla^۲ P_۱ + P_۱\nabla^۲ P + ۲(\nabla P \cdot \nabla P_۱). \qquad (۸)$$

اما بنابرقضیهٔ دیورژانس

$$\int_R \nabla^۲(PP_۱)\, dV = \int_R \operatorname{div}(\nabla PP_۱)\, dV$$
$$= \int_{\partial R} (\nabla PP_۱) \cdot \vec{n}\, da$$
$$= \int_{\partial R} (P\nabla P_۱ + P_۱ \nabla P) \cdot \vec{n}\, da.$$

بنابراین از (۸) داریم

$$\int_{\partial R} (P\nabla P_۱ + P_۱\nabla P) \cdot \vec{n}\, da$$
$$= \int_R (P\nabla^۲ P_۱ \nabla^۲ P)\, dV + ۲\int_R \nabla P \cdot \nabla P_۱\, dV.$$

اما در اینجا سمت چپ، بنابرقضیهٔ دیورژانس، برابراست با

$$= \int_R (P\nabla^۲ P_۱ - P_۱\nabla^۲ P)\, dV.$$

از ترکیب این دو، قضیهٔ گرین به‌شکل

$$\int_R (\nabla P \cdot \nabla P_1)\, dV = -\int_R P_1 \nabla^2 P + \int_{\partial R} P \frac{\partial P}{\partial n}\, da$$
$$= -\int_R P \nabla^2 P_1 + \int_{\partial R} P \frac{\partial P_1}{\partial n}\, da$$

به‌دست می‌آید. توجه کنید که استدلال فوق متکی است بر در نظر گرفتن نقاط هندسی به عنوان موجودات فیزیکی متحرکی که از خواص پیوستگی شبیه خواص یك سیال برخوردارند.

نظریات تیت در نقدی که به تاریخ ۱۸۹۲ بر ترمودینامیك پوانکاره نوشت، به‌خوبی تلخیص شده است:

> حدود چهل سال قبل، اعضای یك محفل ریاضی در کیمبریج، از لزوم به‌کار بردن کلمات در کتابهای درسی فیزیك-ریاضی مرتباً اظهار تأسف می‌کردند. ایده‌آل آنها دنیایی بود عاری از هرچیز به‌جز فرمول، که گرچه نمی‌توان به‌آن دست یافت ولی می‌توان بسیار به‌آن نزدیك شد. اما آدم در طی چهل سال چیزهایی یاد می‌گیرد، و از این‌رو امروز افراد باقیماندهٔ آن محفل برداشت کاملا متفاوتی از موضوع پیدا کرده‌اند. آنها برحسب تجربه آموخته‌اند که ریاضیات را، دست‌کم تا آنجایی‌که در تحقیقات فیزیکی مطرح می‌شود، صرفاً ابزاری کمکی برای تفکر بدانند. این یکی از بزرگترین حقایقی بود که دستاوردهای فارادی در طول زندگی علمیش، آن را به‌کرسی نشاند [۱۷].

نتیجه

سیاحت ما از گرین تا تیت ما را از نظریهٔ الکترواستاتیك و پتانسیل، از راه آنالیز مختلط و دینامیك سیالات به رده‌های هوموتوپی‌نگاشتها و آنالیز برداری رساند. اگرچه من فقط چندتایی از مسائل جالب مربوط به‌این مباحث را مختصراً بررسی کرده‌ام، امیدوارم نشان داده باشم که تفکر فیزیکی نه تنها درطرح مسائل ریاضی، بلکه درحل آنها نیز مهم است. خصوصاً، تفکر فیزیکی ممکن است به‌خلق بعضی مفاهیم ریاضی بینجامد که به‌خودی خود نیز سودمندند، مثلا مفهوم همبندی در رده‌بندی گرهها که تامسن آن را توصیف کرد، مفید واقع شد. تیت با حل این مسألهٔ رده‌بندی در ۱۸۷۵، به اولین نتایج اساسی درنظریهٔ گرهها دست یافت.

مراجع

1. J.Clerk Maxwell, Review of Thomson and Tait in *Nature*, vol. xx, reprinted in *Scientific Papers*, vol. 2., 777.
2. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.
3. George Green, *Mathematical Papers*, ed. N. Ferrers, Macmillan, London, 1871; reprint, Chelsea, New York, 1970.
4. H. Gwynedd Green, A Biography of George Green, in A. Montagu ed., *Studies and Essays in the History of Science and Learning*, Schumann, New York, 1956.
5. For information on Murphy, see W. Thomson, *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, Macmillan, London, 1872, 1-2 and 126.
6. J. Liouville, reprinted in [5] 174.
7. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 113-119.
8. G. F. B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1892, 92-96.
9. H. Helmholtz, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, Welche den Wirbelbewegungen entsprechen, in *Journal für Mathematik* 55 (1858), 25-55.
10. Leo Königsberger, *Hermann von Helmholtz*, Vieweg, Braunschweig, 1902, vol. 1, 307-312.
11. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 511.
12. P. G. Tait, and P. Kelland, *Introduction to Quaternions*, Macmillan, London, 1904, 37-38.
13. S. P. Thompson, *Life of Lord Kelvin*, Chelsea, New York, 1976, vol. 1, 514-515.
14. W. Thomson, On vortex motion, *Trans. Royal Soc. Edinburgh* 25 (1869), 217-260.
15. C. G. Knott, *Life and Scientific Work of P. G. Tait*, Cambridge University Press, 1911.
16. P. G. Tait, *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 1911, vol. 1, 136-150.
17. C. G. Knott, *Life and Scientific Work of P. G. Tait*, Cambridge University Press, 1911, p. 273.

* ** ** ** ** ** ** *

• Thomas Archibald, "Connectivity and smoke-rings: Green's second identity in its first fifty years," *Mathematics Magazine*, (4) **62** (1989) 219-232.

★ تامس آرچیبالد، دانشگاه آکادیای کانادا