امی نوتر و پیدایش جبر مجرد•

ایزراییل کلاینر*

ترجمهٔ علیرضا جمالی

اروینگ کاپلانسکی، جبردان برجسته، امی‌نوتر را «مادر جبر نوین» نامید. همتای او ساندرز مک‌لین اظهار داشت که تاریخ «جبر مجرد»، به‌عنوان موضوعی با هویت مستقل، با مقالهٔ ۱۹۲۱ نوتر «نظریهٔ ایده‌آلها در حلقه‌ها» شروع می‌شود. هرمان وایل مدعی شد که «وی چهرهٔ جبر را با تحقیقات خود دگرگون کرد.» در زیر کوشش می‌کنیم دربارهٔ این اظهارات منصفانه قضاوت کنیم.

طبق نظر وان دِر واردن، شالودهٔ مکتب ریاضی امی نوتر در شعار زیر مستتر است:

> همهٔ روابط بین اعداد، تابعها، و عملها پس از انتزاع از مثالهای خاص و رجوع به ارتباطهای مفهومی، روشن، قابل تعمیم، و به راستی پرثمر می‌شوند.

در نظر ما، این ایده‌ها حاکی از رهیافت مجرد اصل موضوعی در ریاضیات است. اینها برای ما پیش‌پا افتاده به‌نظر می‌رسد ولی در عصر نوتر چنین نبود. در واقع، به‌سبب کارهای اوست که در حال حاضر این ایده‌ها تا حد زیادی عادی به‌نظر می‌رسند. با معیارهای ما، جبر در سدهٔ نوزدهم غیرمجرد بود و از این یا آن طریق به اعداد حقیقی یا مختلط مربوط می‌شد. به عنوان مثال، برخی از جبردانان بزرگ سدهٔ نوزدهم، ریاضیدانانی که آثارشان جبر سدهٔ بیستم را شکل داد، عبارت بودند ازگاوس، گالوا، ژوردان، کرونکر، دِدِکیند، و هیلبرت. تحقیقات جبری آنان در حوزهٔ فرمهای درجهٔ دوم، دایره بُری، توسیعهای میدان، گروههای جایگشتی، و ایده‌آلها در حلقه‌های اعداد صحیح میدانهای اعداد جبری و نظریهٔ ناورداها بود. همهٔ این تحقیقات از طریقی به اعداد حقیقی یا مختلط مربوط می‌شدند.

به علاوه در سدهٔ نوزدهم حتی این کارهای مهم جبری، در برنامهٔ کلی ریاضیات، فرعی تلقی می‌شدند. حوزه‌های اصلی ریاضیات در آن سده عبارت بودند از آنالیز (آنالیز مختلط، معادله‌های دیفرانسیل، و آنالیز حقیقی)، و هندسه (تصویری، نااقلیدسی، و جبری). اما بعد از کارهای نوتر و دیگران در دههٔ ۱۹۲۰، جبر جزو موضوعات اصلیِ ریاضیات شد.

باید تذکر داد که نوتر تنها فرد، یا حتی یگانه فرد شاخصِ مؤثر در رهیافت اصل موضوعی مجرد به جبر نبود. از اسلاف او که در این مقوله تشریک مساعی کردند، کیلی و فروبنیوس در نظریهٔ گروهها، دِدِکیند در نظریهٔ شبکه‌ها، وِبِر[1] و اشتاینیتس[2] در نظریهٔ میدانها بودند. از میان معاصران او، آلبرت[3] در آمریکا و آرتین در آلمان ممتازترند.

در بحث راجع به منشأ مفاهیم ریاضی، نظریهٔ «مهبانگ»[4] چندان صادق نیست. در مورد کارهای نوتر نیز چنین است. به مفاهیمی که او معرفی کرد و نتایجی که به‌دست آورد باید با توجه به دستاوردهای جبر در اواخر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم نگریست. وی به ویژه از تحقیقات ددکیند تأثیر پذیرفت. در بحث مربوط به دستاوردهایش غالباً با فروتنی خاصی می‌گفت: «اینها از قبل در آثار دِدِکیند بوده است» (Es steht schon bei Dedekind). بنابراین در توضیح دستاوردهای نوتر، به ریشه‌های آنها در آثار ددکیند و دیگران که وی از آنان الهام گرفته و کار خود را بر کار آنان بنا کرده است اشاره خواهم کرد.

نوتر در حوزه‌های جبری مهم زیردستاوردهایی داشته است: نظریهٔ ناورداها (۱۹۰۷ـ۱۹۱۹)، جبر جابه‌جایی (۱۹۲۰ـ۱۹۲۹)، جبر ناجابه‌جایی و نظریهٔ

1. Weber 2. Steinitz 3. Albert

۴. big bang، در اینجا، کنایه از اینکه چیزی به یکباره و ناگهان پدید آید ـ م.

نمایشها (۱۹۲۷ـ۱۹۳۳)، و کاربردهای جبر ناجابه‌جایی در مسائل جبر جابه‌جایی (۱۹۳۲ـ۱۹۳۵). بدین ترتیب، او تقریباً به همهٔ موضوعات مطرح در جبر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم (احتمالاً بجز نظریهٔ گروهها به معنی واقعی آن) پرداخت. نکتهٔ مهم این است که وی این موضوعات را دگرگون کرد، و از این رهگذر سنت نوینی در جبر پدید آورد ــ موضوعی که به جبر نوین یا جبر مجرد معروف شده است.

اینک به دستاوردهای نوتر در هر یک از حوزه‌های بالا می‌پردازم.

۱. نظریهٔ ناورداها

این گفتهٔ نوتر که ایده‌های او از قبل در کارهای ددکیند موجود بوده است، می‌توانسته به این صورت باشد که «همهٔ این ایده‌ها با گاوس شروع شده است». در واقع، پیشینهٔ نظریهٔ ناورداها به مطالعات گاوس دربارهٔ فرمهای درجهٔ دوم دوتایی در کتاب تحقیقات حسابی[1] او برمی‌گردد. گاوس رابطه‌ای هم‌ارزی بر چنین فرمهایی تعریف و ثابت کرد که مبینْ یک ناوردای فرم تحت هم‌ارزی است.

منبع دیگر نظریهٔ ناورداها هندسهٔ تصویری است، که در دههٔ ۱۸۲۰ ابداع شد. یک مسألهٔ مهم، متمایز کردن ویژگیهای اقلیدسی اشکال هندسی از خواص تصویری آنها بود. معلوم شد ویژگیهای تصویری، ویژگیهایی هستند که تحت «تبدیلات تصویری» ناوردا می‌باشند.

نظریهٔ ناورداها رسماً به‌وسیلهٔ کِیلی[2] و سیلوستر[3] در اواخر دههٔ ۱۸۴۰ عرضه شد. کیلی این نظریه را برای روشن کردن ارتباطهای عمیق بین هندسهٔ سنجه‌ای [متری] و هندسهٔ تصویری به‌کار بست. گرچه ارتباطهای مهم با هندسه در سراسر سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم ادامه یافت، نظریهٔ ناورداها پس از مدت کوتاهی به حوزه‌ای از تحقیقات، مستقل از ارتباط آن با هندسه، تبدیل شد. در واقع این نظریه به شاخهٔ مهمی از جبر در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم بدل گشت.

خطاب به سیلوستر:

> همهٔ تحقیقات جبری، دیر یا زود، به «کاپیتولِ» جبر مدرن، که سر درِ آن با «نظریهٔ ناورداها» تزیین شده است، ختم می‌شود.

یکی از مسائل مهم نظریهٔ مجرد ناورداها یافتن ناورداهای «فرمها»ی گوناگون بود. بسیاری از ریاضیدانان بزرگ نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم به محاسبهٔ ناورداهای فرمهای خاص پرداختند. این کار به موضوع مهم نظریهٔ ناورداها، یعنی تعیین دستگاه کاملی از ناورداها ــ پایه‌ای ــ برای فرم مفروضی منجر شد. به عبارت دیگر، یافتن ناورداهایی از فرم مفروض به‌طوری که هر ناوردای دیگر را بتوان به‌صورت ترکیبی از آنها بیان کرد ــ حدس زده شد که تعدادی متناهی از آنها موجود است.

کیلی در ۱۸۵۶ ثابت کرد که تعدادی متناهی ناوردا که پیش‌تر برای فرمهای درجهٔ چهارم دوتایی (یعنی، فرمهای درجهٔ چهارم با دو متغیر) یافته بود، یک دستگاه کامل است. در حدود ده سال بعد ژوردان ثابت کرد که هر فرم دوتایی، از هر درجه، یک پایهٔ متناهی دارد. برهان ژوردان برای این نتیجهٔ مهم، محاسباتی بود ــ او دستگاه کاملی از ناورداها را ارائه داد.

در ۱۸۸۸، هیلبرت دنیای ریاضیات را با اعلام یک رهیافت مفهومی جدید به مسألهٔ ناورداها شگفت‌زده کرد. ایدهٔ او در نظر گرفتن عبارتهایی برحسب تعدادی متناهی متغیر، یا به‌اختصار، حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها برحسب این متغیرها، به‌جای ناورداها بود. هیلبرت سپس قضیه‌ای را که به قضیهٔ پایه معروف شد ثابت کرد، یعنی این قضیه را که هر ایده‌آل حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با تعدادی متناهی متغیر که ضرایبشان به میدانی متعلق باشند، یک پایهٔ متناهی دارد. یک نتیجهٔ قضیه این بود که هر فرم، از هر درجه، با هر تعداد متغیر، دارای یک دستگاه کامل متناهی از ناورداهاست.

واکنش ژوردان به اثبات هیلبرت که دستگاه کامل ناورداها را به‌طورِ صریح به‌دست نمی‌داد، این بود که «این ریاضیات نیست، الهیات است.» بعدها وقتی هیلبرت یک برهانِ ساختی برای این قضیه ارائه داد (و آن را چندان مهم تلقی نکرد)، ژوردان وادار به پاسخ شد: «من متقاعد شدم که الهیات نیز فوایدی دارد.»

عنوان رسالهٔ نوتر، که آن را به راهنمایی ژوردان در ۱۹۰۷ نگاشت، عبارت بود از: «در باب دستگاههای کامل ناورداها برای فرمهای دو مجذوری سه‌تایی». این رساله به سبکِ کار ژوردان، محاسباتی بود. رساله با جدولی مشتمل بر دستگاه کامل ۳۳۱ ناوردا برای چنین فرمی به پایان می‌رسید. او بعدها از رسالهٔ خود به‌عنوان «جنگلی از فرمولها» یاد می‌کرد.

ولی وی در طول دههٔ ۱۹۱۰ نتایج چشمگیر متعددی در ناورداها به‌دست آورد. نخست، با استفاده از روشهایی که در دو مقاله (در ۱۹۱۵ و ۱۹۱۶) دربارهٔ این موضوع ابداع کرده بود، به حل مسألهٔ یافتن توسیع گالوای یک میدان اعداد مفروض با گروه گالوای معینی، که نخستین بار به‌وسیلهٔ ددکیند مطرح شده بود، کمک شایانی کرد. سپس طی تحقیقاتش در گوتینگن دربارهٔ ناورداهای دیفرانسیلی، حساب وردشها را برای به‌دست آوردن قضیهٔ معروف به قضیهٔ نوتر، که هنوز هم در فیزیک ریاضی اهمیت دارد، به‌کار بست. فتس گورسی[1] فیزیکدان دربارهٔ این دستاورد می‌گوید:

> کلید رابطهٔ بین قانونهای تقارن با قانونهای پایستگی در فیزیک، قضیهٔ مشهور نوتر است که به موجب آن، دستگاهی دینامیکی که با کنشی تحت یک گروه لی با n پارامتر تعریف شده است، دارای n ناوردا (کمیت پایسته) است که طی تحول دستگاه، با تغییر زمان ثابت می‌ماند[۱۵].

الکساندروف دستاورد او را دربارهٔ ناورداها در این جمله خلاصه کرد که همین تحقیقات «کافی است که ... برای او شهرت یک ریاضیدان تراز اول را به ارمغان آورد».

راهی که امی نوتر را از نظریهٔ محاسباتی ناورداها به نظریهٔ مجرد حلقه‌ها و مدولها رساند چه بود؟ وایل متذکر می‌شود: «تضادی فاحش‌تر از تضاد بین نخستین مقالهٔ او، یعنی رساله‌اش، و تحقیقات پختهٔ بعدی‌اش به سختی قابل تصور است».

ژوردان در ۱۹۱۰ از دانشگاه ارلانگن بازنشسته شد و جای او را ارنست فیشر[2] گرفت. او نیز متخصصی در نظریهٔ ناورداها بود، اما نظریهٔ ناورداها به سبک هیلبرت. نوتر تحت تأثیر او قرار گرفت و به‌تدریج از رهیافت الگوریتمی ژوردان در نظریهٔ ناورداها به رهیافت مفهومی هیلبرت گرایید.

تحقیقات بعدی در ناورداها توجه او را به مقالهٔ مشترک مشهور ددکیند و وبر در نظریهٔ حسابی تابعهای جبری جلب کرد. وی «شیفتهٔ» رهیافت و ایده‌های ددکیند شد، و همین شیفتگی جهت کارهای بعدی او را مشخص کرد.

1. *Disquisitiones Arithmeticae* 2. Cayley 3. Sylvester

1. Fez Gursey 2. Ernst Fischer

۲. جبر جابه‌جایی

دو منشأ اصلیِ جبر جابه‌جایی، هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد جبری است. دو مقالهٔ تأثیرگذار ۱۹۲۱ و ۱۹۲۷ امی نوتر در موضوع جبر جابه‌جایی، به ترتیب، از این دو موضوع سرچشمه گرفته‌اند. او در این مقالات، به‌ترتیب با عنوانهای «نظریهٔ ایده‌آلها در حلقه‌ها» و «بسط مجرد نظریهٔ ایده‌آلها در میدانهای اعداد جبری» اساساً زمینهٔ جدیدی را گشود، و خالق «سبکی نو و دوران‌ساز در تفکر جبری» شد [۳۱].

سرچشمه‌های هندسهٔ جبری در مطالعهٔ تابعهای آبلی و انتگرالهای آنها بود، که تحقیق دربارهٔ آنها از اوایل سدهٔ نوزدهم آغاز شده بود. این رهیافت تحلیلی به موضوع به‌تدریج جای خود را به ابزارهای هندسی، جبری، و حسابی داد. به بیان جبری، شیء اصلی مورد مطالعه، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ است که در آن k یک میدان است (در سدهٔ نوزدهم، k میدان اعداد حقیقی یا مختلط بود). هیلبرت در سدهٔ نوزدهم، و لاسکر[1] و مکولی[2] در اوایل سدهٔ بیستم، ثابت کرده بودند که در چنین حلقه‌ای هر ایده‌آلْ اشتراکی متناهی از ایده‌آلهای اولیه، با ویژگیهایِ یکتاییِ معینی، است. (از لحاظ هندسی، این نتیجه حاکی از آن است که هر واریته اجتماع متناهی یکتایی از واریته‌های تحویل‌ناپذیر است.)

نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود این نتیجه را به حلقه‌های جابه‌جایی دلخواه که در شرط زنجیر افزایشی صدق کنند تعمیم داد. نتیجهٔ اصلی او این بود که در چنین حلقه‌ای هر ایده‌آلْ اشتراکی متناهی از ایده‌آلهای اولیه است، که با ویژگیهای یکتایی همراه‌اند.

چه چیز مهمی در این مقاله بود که (چنانکه گفتیم) مک‌لین آن را نشانهٔ آغاز جبر مجرد، به‌عنوان موضوعی مستقل دانست؟

نخستین نکته، متمایزکردن شرط زنجیر افزایشی به‌عنوان مفهوم اساسیِ مورد نیاز در اثبات نتیجهٔ اصلی بود. در واقع، برهان «به کلی بر نتایج مقدماتی شرط زنجیر. . .استوار و. . .از فرط سادگی، عجیب بود» [۱۵]. برهانهای پیشینِ نتیجهٔ متناظر برای حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها متضمن محاسبات فراوان، مانند نظریهٔ حذف و هندسهٔ مجموعه‌های جبری بود.

ابداع شرط زنجیر افزایشی کار نوتر نبود. ددکیند (در ۱۸۹۴) و لاسکر (در ۱۹۰۵) آن را، به‌ترتیب، در حالتهای ملموسِ حلقه‌های اعداد صحیح جبری و چندجمله‌ای‌ها به‌کار بسته بودند. ولی این شرط برای آنها فرعی بود نه اصلی. متمایزکردن شرط زنجیر افزایشی به‌وسیلهٔ نوتر به‌عنوان مفهومی مهم، نقطهٔ عطفی به‌شمار می‌رود. به یمن تحقیقات او، حلقه‌هایی که در شرط زنجیر افزایشی صدق می‌کنند، و امروز حلقه‌های نوتری نامیده می‌شوند، از توجه ویژه‌ای برخوردار شده‌اند. در واقع، جبر جابه‌جایی به مطالعهٔ حلقه‌های نوتری جابه‌جایی تعبیر شده است. جبر جابه‌جایی به معنی دقیق کلمه، رسماً با مقالهٔ ۱۹۲۱ نوتر وارد صحنه می‌شود.

مفهوم اساسی دیگری که او در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود آن را به‌نحو بارزی مطرح کرد، مفهوم حلقه بود. ابتکار این مفهوم نیز از او نیست. ددکیند (در ۱۸۷۱)

1. Lasker 2. Macauley

این مفهوم را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط که تحت عملهای جمع، تفریق، و ضرب بسته است معرفی کرد و آن را «ترتیب»[1] نامید. هیلبرت در «گزارش نظریهٔ اعداد» (Zahlbericht) مشهور خود در ۱۸۹۷، اصطلاح «حلقه» را وضع کرد، ولی صرفاً در مبحث حلقه‌های اعداد صحیح میدانهای اعداد جبری. فرِنکل[2] (در ۱۹۱۴) اساساً تعریف نوین حلقه را به‌دست داد، اما دو شرط اضافی را به‌عنوان اصل موضوع در نظر گرفت. نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود تعریف حلقه را به‌صورتی که امروز معمول است به‌دست داد (تعریف حلقه را سونو[3] نیز در ۱۹۱۷ ارائه داد ولی مورد توجه قرار نگرفت).

اما صرفاً تعریف مفهوم حلقه به‌وسیلهٔ نوتر نبود که اهمیت پیدا کرد. او از طریق مقالات بدیع خود که در آنها این مفهوم نقشی اساسی داشت، و در بین آنها مقالهٔ ۱۹۲۱ مهم‌تر از همه بود، مفهوم حلقه را به‌صورت مفهومی اصلی در جبر در آورد. بلافاصله این مفهوم به نقطهٔ آغازِ بیشتر مباحث جبر مجرد تبدیل شد، و جایگاه شایستهٔ خود را در کنار مفاهیم گروه و میدان، که پیش‌تر کاملاً تثبیت شده بودند، به‌دست آورد.

همچنین نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود شروع به تأسیس یک نظریهٔ کلی ایده‌آلها برای حلقه‌های جابه‌جایی کرد. مفاهیم ایده‌آل اول، اولیه، و تحویل‌ناپذیر، مفاهیم اشتراک و حاصلضرب ایده‌آلها، هم‌ارزی به پیمانهٔ یک ایده‌آل ـــ خلاصه، اغلب ابزارهای نظریهٔ ایده‌آلها ـــ در اینجا پدیدار شد.

نوتر در اواخر این مقاله مفهوم مدول رویِ یک حلقهٔ ناجابه‌جایی را تعریف و ثابت کرد که برخی از قضیه‌های تجزیه که قبلاً برای ایده‌آلها ارائه شده بودند در مورد زیرمدولها هم صادق‌اند. در اینجا دربارهٔ مدولها در ارتباط با تحقیقات او در جبر ناجابه‌جایی بحث خواهیم کرد.

خلاصه، نوتر در مقالهٔ ۱۹۲۱ خود چندین مفهوم اساسی جبر مجرد مانند حلقه، مدول، ایده‌آل، و شرط زنجیر افزایشی را معرفی کرد و به آنها تشخص و اهمیت بخشید. علاوه بر آن، این مقاله شیوهٔ جدید پرداختن به جبر ـــ شیوهٔ مجرد، اصل موضوعی، و مفهومی ـــ را معرفی کرد و فایدهٔ آن را نشان داد. دستاورد بزرگی برای یک تک مقاله!

ریشه‌های مقالهٔ ۱۹۲۷ نوتر در نظریهٔ اعداد جبری و، تا حد کمتری، در هندسهٔ جبری است. سرچشمه‌های نظریهٔ اعداد جبری عبارت‌اند از: نظریهٔ فرمهای درجهٔ دوم گاوس در ۱۸۰۱، و تحقیقات سال ۱۸۳۲ او دربارهٔ تقابل دومجذوری (که در آن اعداد صحیح گاوسی را معرفی کرد)، و کوششهایی که در اوایل سدهٔ نوزدهم برای اثبات آخرین قضیهٔ فرما به‌عمل آمد. در همهٔ موارد، اساس کار به قضیهٔ یکتایی تجزیه در حلقه‌های اعداد صحیح در میدانهای اعداد جبری برمی‌گردد. وقتی که مثالهایی از چنین حلقه‌هایی پیدا شدند که در آنها تجزیهٔ یکتا برقرار نبود مسأله، به تعبیری، به سعی در «احیا»ی «بهشت گمشده» تبدیل شد. این کار را ددکیند در ۱۸۷۱ (و، به طریقی دیگر کرونکر در ۱۸۸۲) انجام داد که نشان داد تجزیهٔ یکتا را می‌توان با در نظر گرفتن تجزیهٔ ایده‌آلها (که برای این منظور معرفی کرده بود) به‌جای اعضا ثابت کرد. نتیجهٔ اصلی او این بود که هرگاه R حلقهٔ اعداد صحیح یک میدان اعداد

1. order 2. Fraenkel 3. Sono

جبری باشد، آنگاه هر ایده‌آل R حاصلضرب یکتایی از ایده‌آلهای اول است.

ریمان در دهۀ ۱۸۵۰ «رویه‌های ریمانی» را برای سهولتِ مطالعۀ تابعهای جبری (چندمقداری) معرفی کرد. اما، روشهای او عاری از دقت و وابسته به ملاحظات فیزیکی بود. ددکیند و وبر در ۱۸۸۲ مقالۀ بسیار مهمی نوشتند که هدف آن بیان جبریِ دقیقِ برخی از ایده‌های ریمان دربارۀ نظریۀ تابعهای مختلط، به‌ویژه مفهوم رویۀ ریمانی او بود. ایدۀ آنان برقرار کردن تشابهی بین میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع جبری، و انتقال روشها و نتیجه‌های اولی به دومی بود. آنان موفقیت قابل تحسینی در این کار به‌دست آوردند، و (علاوه بر چیزهای دیگر) یک تعریف جبری محض از رویۀ ریمانی و برهانی جبری برای قضیۀ اساسی ریمان ـ روخ[1] به‌دست دادند. نکته‌ای که دستِ‌کم همان قدر اهمیت دارد، اشارۀ آنها به ایده‌ای است که بسیار پرثمر از آب درآمد، یعنی تأثیر متقابل نظریۀ جبری اعداد و هندسۀ جبری.

به بیان دقیق‌تر، درست همان‌طورکه در نظریۀ اعداد جبری عمل می‌شود، به عدد جبری مفروضِ u یک میدان اعداد جبری مانند $Q(u)$ نظیر می‌شود، بنابراین در هندسۀ جبری به یک تابع جبری مفروض یک میدانِ توابع جبری مانند $\mathbf{C}(x,y)$ نظیر می‌شود. $\mathbf{C}(x,y)$ متشکل از چندجمله‌ای‌هایی برحسب x و y است که ضریبهای آنها مختلط‌اند، و در آن y در یک معادلۀ چندجمله‌ای با ضریبهای متعلق به $\mathbf{C}(x)$ صدق می‌کند (یعنی y روی $\mathbf{C}(x)$ جبری است).

اگر A «حلقۀ اعداد صحیحِ» $\mathbf{C}(x,y)$ باشد، یعنی، A متشکل از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های یکین با ضریبهای متعلق به $\mathbf{C}[x]$ که در $\mathbf{C}(x,y)$اند باشد، آنگاه نتیجه‌ای مهم از مقالۀ ددکیند ـ وبر این است که هر ایده‌آل در A حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است.

نوتر در مقالۀ ۱۹۲۷ خود نتیجه‌های پیشگفته دربارۀ تجزیه برای میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع را به حلقه‌های جابه‌جایی تعمیم داد. در واقع، او حلقه‌های جابه‌جایی را که در آنها هر ایده‌آل حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است مشخص می‌سازد. امروز این نوع حلقه‌ها را، حوزه‌های ددکیند می‌نامند. او ثابت کرد R حوزۀ ددکیند است اگر و تنها اگر

(۱) R در شرط زنجیر افزایشی صدق کند،

(۲) به ازای هر ایده‌آل ناصفرِ R مانند I، R/I در شرط زنجیر کاهشی صدق کند،

(۳) R حوزۀ صحیح باشد، و

(۴) R در میدان خارج‌قسمت‌ها صحیحْ‌بسته باشد.

شرط (۴) اهمیت خاصی یافت، زیرا مفهوم اساسیِ وابستگی صحیح (مربوط به وابستگی بستار صحیح) را در معرض توجه قرار داد. این مفهوم که پیش‌تر در آثار ددکیند دربارۀ اعداد جبری موجود بود، اهمیتی اساسی در جبر جابه‌جایی پیدا کرد. همان‌طورکه گیلمر اشاره می‌کند، «مفهوم وابستگی صحیح در $Aufbau$ [مقالۀ ۱۹۲۷ نوتر] و مفهوم شرط زنجیر افزایشی در $Idealtheorie$ [مقالۀ ۱۹۲۱ وی] آمده است» [۱۲].

از میان سایر نتیجه‌های اساسی که او در این مقاله ثابت کرد نتیجه‌های زیر شایان ذکرند:

1. Roch

(الف) (به‌بیان امروزی) قضیه‌های یکریختی و همریختی برای حلقه‌ها و مدولها،

(ب) این حکم که مدول M دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر در هر دو شرط زنجیر افزایشی و کاهشی صدق کند، و

(پ) این حکم که اگر Rـ‌مدول M متناهیْ‌مولد باشد و R در شرط زنجیر افزایشی (کاهشی) صدق کند آنگاه M نیز در این شرط صدق می‌کند.

خلاصۀ دستاوردهای نوتر در جبر جابه‌جایی به شرح زیر است: او علاوه بر اثبات نتایج مهم، مفاهیمی را معرفی و روشهایی را ابداع کرد که به‌صورت ابزارهای استاندارد جبر جابه‌جایی درآمده‌اند. در واقع، می‌توان گفت که موضوع جبر جابه‌جایی با مقالات ۱۹۲۱ و ۱۹۲۷ نوتر و مقالات دهۀ ۱۹۲۰ کرول[1] پدید آمده است.

۳. جبر ناجابه‌جایی و نظریۀ نمایشها

پیش از آنکه معاصران نوتر ایده‌های او را در جبر جابه‌جایی به‌طورکامل درک کنند، او توجه خود را به سایر موضوعات مهم جبر سدۀ نوزدهم و اوایل سدۀ بیستم معطوف داشت، یعنی به دستگاههای اعداد ابرمختلط (دستگاههایی که در حال حاضر آنها را جبرهای شرکت‌پذیر می‌نامیم) و گروهها (به‌ویژه، نمایشهای گروهها). او این دو موضوع را با رهیافت مجرد و مفهومی خود گسترش داد و یکپارچه کرد، رهیافتی که در آن، ایده‌های نظریۀ مدولی که در حالت جابه‌جایی به‌کار برده بود نقشی اساسی داشت.

نظریۀ دستگاههای ابرمختلط با معرفی چهارگان‌ها به وسیلۀ همیلتن در سال ۱۸۴۳، پدید آمد. در اواخر سدۀ نوزدهم، الی کارتان، فروبینوس، و مولین[2] قضیه‌هایی ساختاری برای چنین دستگاههایی روی اعداد حقیقی و مختلط به‌دست دادند، و در ۱۹۰۷ ودربرن[3] این قضیه‌ها را برای دستگاههای ابرمختلط روی میدانهای دلخواه تعمیم داد. در پرتو تحقیقات نوتر در جبر جابه‌جایی، آرتین نتایج ودربرن را به حلقه‌های ناجابه‌جاییِ نیمْ‌ساده که در شرط زنجیر کاهشی صدق کنند، تعمیم داد.

گروهها نخستین دستگاههای جبری بودند که مورد مطالعۀ گسترده قرار گرفتند. مطالعۀ مجرد آنها در اواخر سدۀ نوزدهم آغاز شد. یک ابزار مهم در این مطالعه، نظریۀ نمایشها بود که به‌وسیلۀ برنساید[4]، فروبینوس، و مولین در دهۀ ۱۸۹۰ ابداع شد. ایدۀ این نظریه، بررسی نمایشهای ملموس گروه برحسب ماتریسها به‌جای مطالعۀ مجرد آنها بود. (نمایش یک گروه یک همریختی از گروه به گروه ماتریسهای وارون‌پذیر از مرتبۀ مفروضی است.)

نوتر در مقالۀ ۱۹۲۹ خود با عنوان «اعداد ابرمختلط و نظریۀ نمایشها»، نظریۀ نمایشهای گروهی را برحسب نظریۀ ساختاری دستگاههای ابرمختلط بنا کرد. ابزار اصلی در این رهیافت مدول بود. ایده این بود که به هر نمایش φ از G که با ماتریسهای وارون‌پذیر با درایه‌های متعلق به میدانی مانند k مشخص شده است، یک $k(G)$ـ‌مدول V موسوم به نمایش مدولی φ نظیر شود ($k(G)$ را جبر گروهی G روی k می‌نامند).

برعکس، از هر $k(G)$ـ‌مدولِ M یک نمایش G مانند ψ به‌دست

1. Krull 2. Molien 3. Wedderburn 4. Burnside

می‌آید که تناظری یک‌به‌یک بین نمایشهای G روی k و $k(G)$ـ مدولها برقرار می‌کند. اینک می‌توان مفاهیم استاندارد نظریهٔ نمایشها را برحسب مدولها بیان کرد. برای مثال، دو نمایش هم‌ارزند اگر و تنها اگر مدولهای متناظر آنها یکریخت باشند؛ یک نمایش تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر مدول متناظر آن ساده باشد. اینک روشهای نظریهٔ مدولها، و نظریهٔ ساختاری دستگاههای ابرمختلط (اِعمال‌شده بر دستگاه ابرمختلط $(k(G)$) را می‌توان برای بازسازی مبانی نظریهٔ نمایشهای گروهی به‌کار بست. برای تفصیل، ر.ک. [۸] و [۱۸].

کار نوتر در این زمینه چارچوب مفهومی بسیار کارآمدی را برای مطالعهٔ نظریهٔ نمایشها پدید آورد. به‌عنوان مثال، در حالی که رهیافت کلاسیک (محاسباتی) به نظریهٔ نمایشها تنها روی میدان اعداد مختلط، یا در بهترین حالت روی یک میدانِ جبریْ‌بسته با مشخصهٔ صفر برقرار است، رهیافت نوتر برای هر میدان، با هر مشخصه، بامعنی است.

در دههٔ ۱۹۳۰ در آغاز مطالعات پیشگامانهٔ براوئر[1] در زمینهٔ نمایشهای مدولی، یعنی، نمایشهایی که در آنها مشخصهٔ میدان مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند، استفاده از میدانهای دلخواه در نظریهٔ نمایشها اهمیت پیدا کرد. همچنین ایده‌های نوتر «بذر نظریهٔ نمایشهای صحیح را پاشید» [۱۸]؛ یعنی، نظریهٔ نمایشها روی حلقه‌های جابه‌جایی به‌جای میدانها. خود او نظریهٔ نمایشهای گروهی را به حالت حلقه‌های آرتینی نیمْ‌ساده گسترش داد؛ در اینجا او به مفهوم دو-مدول[2] نیاز داشت.

توضیحی دربارهٔ مدولها می‌آوریم که در تحقیقات نوتر هم در جبر جابه‌جایی و هم در جبر ناجابه‌جایی نقشی عمده داشتند. ددکیند، در ارتباط با تحقیقات ۱۸۷۱ خود در نظریهٔ اعداد جبری، نخستین کسی بود که اصطلاح «مدول» را به‌کار برد، اما منظور او زیرگروهی از گروه جمعی اعداد مختلط (یعنی، یک Zـ مدول) بود. در ۱۸۹۴ وی نظریه‌ای وسیع دربارهٔ این گونه مدولها پدید آورد. لاسکر، در تحقیقات ۱۹۰۵ خود دربارهٔ تجزیهٔ حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها، اصطلاحهای «مدول» و «ایده‌آل» را به یک معنی به‌کار برد (اولی را برای حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbf{C}$، و دومی را برای این نوع حلقه‌ها روی $\mathbf{Z}$).

نوتر نخستین کسی بود که مفهوم مدول را، همراه با حلقه‌ای به‌عنوان حوزهٔ عملها، به‌طور مجرد به‌کار بست، و به توانایی آن پی برد. در واقع، از طریق کارهای او بود که مفهوم مدول اهمیت فعلی‌اش را یافت. مدولها نه تنها به دلیل توانایی وحدت‌بخشیِ خود مهم‌اند بلکه به سبب توانایی خطی‌سازی‌شان نیز اهمیت دارند. و بالاخره، مدولها تعمیم‌های فضاهای برداری هستند و بسیاری از ساختارهای استاندارد فضاهای برداری، مانند زیرفضا، فضای خارج قسمتی، مجموع مستقیم، و ضرب تانسوری در مورد مدولها هم برقرارند. (از توانایی خطی‌سازی در آنالیز آگاهیم. می‌توان گفت که مدولها توانایی مشابهی را در جبر فراهم می‌کنند.)

اهمیت ابداع جبر همولوژیک در این بود که فرایند خطی‌سازی را با ایجاد ابزارهایی برای اجرای آن بسیار به پیش برد. به‌عنوان مثال، تابعگونهای «Ext» و «Tor» شاخصهایی از «بدرفتاری» مدولها روی حلقه‌های دلخواه در مقایسه با مدولها روی میدانها، یعنی فضاهای برداری، به‌دست می‌دهند.

۱. Brauer؛ با Brouwer، توپولوژیدان و شهودگرای معروف، اشتباه نشود.ـ م.

2. bimodule

۴. کاربردهای جبر ناجابه‌جایی در جبر جابه‌جایی

نوتر بر این باور بود که بر نظریهٔ جبر ناجابه‌جایی قانونهای ساده‌تری نسبت به جبر جابه‌جایی حاکم است. وی در خطابهٔ ۱۹۳۲ خود در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در زوریخ، با عنوان دستگاههای ابرمختلط و ارتباط آنها با جبر جابه‌جایی و نظریهٔ اعداد، به ذکر رئوس برنامه‌ای پرداخت که این باور را عملی می‌کرد. برنامهٔ او به «طلیعهٔ نظریهٔ نوین کوهمولوژی» موسوم شده است [**۲۵**]. ایده‌های مربوط به مجموعه‌های عاملی که در این برنامه آمده بود پس از مدت کوتاهی به وسیلهٔ هاسه[1] و شواله[2] «برای یافتن بعضی نتایج اصلی دربارهٔ نظریهٔ میدانهای رده‌ایِ موضعی و سراسری» به‌کار رفت. هدف فوری خودِ نوتر این بود که نظریهٔ جبرهای سادهٔ مرکزی را، به‌صورتی که به‌وسیلهٔ او، براوئر، و دیگران عرضه شده بود، در مسائل مربوط به‌نظریهٔ میدانهای رده‌ای به‌کار گیرد.

برخی از ایده‌های نوتر (و دیگران) در مورد تأثیر متقابل جبر جابه‌جایی و ناجابه‌جایی با اثبات قضیهٔ مشهور آلبرت-براوئر-هاسه-نوتر به‌بار نشست. این قضیه که جیکبسن آن را «یکی از نقاط اوج نظریهٔ جبرها» نامید، توصیف کاملی از جبرهای تقسیمی متناهیْ‌بعد روی میدانهای اعداد جبری به‌دست می‌دهد. این قضیه در مطالعهٔ جبرهای متناهیْ‌بُعد و نمایشهای گروهی اهمیت دارد.

برای روشن شدن زمینهٔ این قضیه، باید تذکر داد که قضیه‌های ساختاریِ ۱۹۰۷ ودربرن برای جبرهای متناهیْ‌بعد مطالعهٔ آنها را به مطالعهٔ جبرهای پوچتوان و جبرهای تقسیمی فروکاست. چون امیدی به روشن ساختن ساختار اول نمی‌رفت (و هنوز، با وجود پیشرفتهای قابل ملاحظه چنین است)، توجه به ساختار دوم معطوف شد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ و اوایل دههٔ ۱۹۳۰ پیشرفتهای چشمگیری در زمینهٔ ساختار جبرهای تقسیمی به‌دست آمد. قضیهٔ آلبرت-براوئر-هاسه-نوتر اوج این تحقیقات بود. اما، باید تأکید کرد که حتی امروزه سؤالات زیادی در مورد جبرهای تقسیمی باقی است.

۵. میراث نوتر

مفاهیمی که نوتر معرفی کرد، نتایجی که او به‌دست آورد، و شیوهٔ تفکری که وی پدید آورد، به بخشی از فرهنگ ریاضی ما تبدیل شده است. چنان که الکساندروف می‌گوید:

> نوتر بود که به ما یاد داد به‌جای محاسبات دست‌وپاگیر جبری به مفاهیم ساده و کلی جبری ــ نگاشتهای همریخت، گروهها و حلقه‌ها با عملگرها، و ایده‌آلها ــ فکر کنیم، و بدین وسیله راهی برای یافتن اصول جبری در مواردی که این گونه اصول به‌خاطر پیچیدگیِ وضعیتهای خاص پنهان مانده بودند گشود... [۱].

همچنین، همان‌گونه که وایل می‌گوید:

> نمی‌توان اهمیت او در جبر را صرفاً از مقالاتش فهمید؛ او از توان زیادی برای ایجاد انگیزه برخوردار بود و بسیاری از پیشنهادهای او تنها در کارهای شاگردان و همکارانش شکل گرفت [۳۱].

1. Hasse 2. Chevalley

در واقع، وایل به دین خود نسبت به او، به‌خاطر تحقیقاتش در گروهها و مکانیک کوانتومی، اذعان می‌کند. از میان کسان دیگری که صریحاً تأثیر او را در تحقیقات جبری خود متذکر شده‌اند می‌توان از جبردانان برجسته‌ای مانند آرتین، دیورینگ[1]، هاسه، جیکبسن، کرول، و کوروش[2] نام برد.

وسیلهٔ مهم دیگری در انتشار ایده‌های نوتر، رسالهٔ وان دِر واردن با عنوان جبر نوین بود که نخستین بار در ۱۹۳۰ منتشر شد و امروز اثری کلاسیک به‌شمار می‌آید. این رساله مبتنی بر درسهای نوتر و آرتین بود. گنجینهٔ غنی ایده‌های زیبا و توانای آن، که به‌طرز بسیار عالی به‌وسیلهٔ وان در واردن عرضه شده است، نسلی از ریاضیدانان را پرورش داد. تأثیر مستقیم این کتاب را دیودونه و برکاف به‌خوبی توصیف کرده‌اند.

دیودونه:

> در آن ایام روی رساله‌ام کار می‌کردم؛ سال ۱۹۳۰ بود و من در برلین بودم. هنوز روزی را که کتاب وان در واردن به بازار آمد به‌یاد دارم. بی‌اطلاعی من از جبر طوری بود که با معیارهای امروزی از پذیرش در دانشگاه محروم می‌شدم. با شتاب به مجلدات آن مراجعه کردم و از دیدن دنیایی جدید که در برابرم گشوده شد متحیر شدم. در آن زمان اطلاعات من از حدود [کتاب] ریاضیات ویژه[3]، دترمینانها، و قدری معلومات دربارهٔ حل‌پذیری معادله‌ها و خمهای گویا فراتر نمی‌رفت. من دانش‌آموختهٔ اِکول نرمال[4] بودم و نمی‌دانستم ایده‌آل چیست، و تنها از [مفهوم] گروه باخبر بودم؛ از اینجا می‌توانید دریابید که اطلاعاتِ یک ریاضیدان جوان فرانسوی در ۱۹۳۰ در چه حدی بوده است [۱۰].

برکاف:

> حتی در ۱۹۲۹، مفاهیم و روشهای آن [یعنی، مفاهیم و روشهای «جبر نوین»] در مقایسه با مفاهیم و روشهای آنالیز در بیشتر دانشگاهها، از جمله دانشگاه هاروارد، هنوز از اهمیت کمتری برخوردار بود. وان در واردن با تشریح انسجام ریاضی و فلسفی آنها و با نشان دادن توان آنها که به‌وسیلهٔ امی نوتر و همکاران جوان‌تر او (به‌خصوص، آرتین، براوئر، و هاسه) گسترش یافته بود، «جبر نوین» را ناگهان به‌صورت یک موضوع بسیار مهم ریاضی درآورد. اغراق نیست بگوییم که تازگی و شور و حال توصیف او دنیای ریاضیات را به هیجان آورد ــ به ویژه ریاضیدانانِ زیر سی سال همچو مرا [۳].

عده‌ای از ریاضیدانان و مورخان ریاضی از «جبری‌سازی ریاضیات» در سدهٔ بیستم گفته‌اند. شاهد این مدّعا، ورود اصطلاحات جبر به حوزه‌هایی مانند هندسهٔ جبری، توپولوژی جبری، نظریهٔ اعداد جبری، منطق جبری، جبر توپولوژیک، جبرهای باناخ، جبرهای فون نویمان، گروههای لی، و حلقه‌های هنگ‌دار [نرمدار] است. تأثیر نوتر در بعضی از این حوزه‌ها مستقیم و در بعضی دیگر غیرمستقیم است. به‌نظر می‌رسد که خود او از این امر آگاه بوده

1. Deuring 2. Kurosh 3. *mathematiques spéciales*
4. École Normale

است، چنانکه در نامه‌ای به هاسه در ۱۹۳۱ می‌گوید:

> روشهای من در واقع روشهای تحقیق و تفکر است؛ به همین دلیل است که این روشها به همه‌جا بدون ذکر نام راه یافته‌اند [۹].

الکساندروف و هوپف[1] این موضوع را در پیشگفتار کتاب خودشان در توپولوژی تأیید می‌کنند:

> دیدگاههای عمومی ریاضیِ امی نوتر به رشتهٔ تخصصی او ــ جبر ــ محدود نماند بلکه هر که با او در ارتباط بود از آنها تأثیر پذیرفت [۹].

در واقع، خود آنها، و مهم‌تر از آن توپولوژی جبری، بیشترین سود را از دیدگاههای او بردند. جیکبسن این مطلب را تأیید می‌کند:

> همان گونه که معروف است، امی نوتر بود که الکساندروف و . . . هوپف را متقاعد کرد که نظریهٔ گروهها را در توپولوژی ترکیبیاتی وارد کنند و نظریهٔ سادکی همولوژیِ موجود را برحسب اصطلاحات نظریهٔ گروهها به‌جای ماتریسهای وقوع که ملموس‌تر بودند فرمولبندی کنند [۱۵].

هندسهٔ جبری حوزهٔ دیگری است که شاهد جبری‌سازی بسیار گسترده در اوایل دههٔ ۱۹۲۰ و اوایل دههٔ ۱۹۳۰ بود. اظهارات زاریسکی[2] و وان درواردن دو تن از سرشناسان هندسهٔ جبری که عمیقاً درگیر فرایند جبری‌سازی بودند روشنگر این موضوع است.

زاریسکی:

> جای تأسف بود که استادان ایتالیایی من هرگز مرا از چنین پیشرفت عظیمی در جبر که مرتبط با هندسهٔ جبری است آگاه نکرده بودند. من خیلی بعد، وقتی به آمریکا آمدم، این موضوع را کشف کردم [۲۳].

وان در واردن:

> وقتی در ۱۹۲۴ به گوتینگن آمدم، دنیای جدیدی به روی من گشوده شد. از طریق امی نوتر آگاه شدم که ابزاری که به‌وسیلهٔ آنها می‌توانستم از عهدهٔ پاسخگویی سؤالاتم [در هندسهٔ جبری] برآیم، قبلاً به وجود آمده‌اند. [۲۴].

نوتر در سالهای ۱۹۲۸ـ۱۹۲۹ استاد میهمان در مسکو بود. الکساندروف تأثیر نوتر بر کار پونتریاگین[3] را در نظریهٔ گروههای پیوسته (جبر توپولوژیک) چنین توصیف می‌کند:

> پی‌بردن به تأثیر امی نوتر بر رشد استعداد ریاضی پونتریاگین دشوار نیست؛ بی‌گمان رنگ‌وبوی تند جبری در آثار پونتریاگین از ارتباط او با امی نوتر ناشی شده است [۱].

آخرین کلام را به گرت برکاف می‌سپارم، که در مقاله‌ای به سال ۱۹۷۶ در تشریح خیزش جبر مجرد در فاصلهٔ سالهای ۱۹۳۶ تا ۱۹۵۰ چنین می‌گوید:

> اگر امی نوتر می‌توانست در کنگرهٔ [بین‌المللی ریاضیدانان در]

1. Hopf 2. Zariski 3. Pontryagin

۱۹۵۰ حضور داشته باشد، بسیار به‌خود می‌بالید. مفاهیم جبری او در ریاضیات معاصر اهمیت اساسی یافته‌اند و جبردانان از آن زمان تا کنون مدام از آن الهام گرفته‌اند [۴].

مراجع

1. P. S. Alexandrov, In memory of Emmy Noether, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 153-179.

2. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, 1969.

3. G. Birkhoff, Current trends in algebra, *Amer. Math. Monthly* 1973, **80**: 760-782.

4. G. Birkhoff. (a) The rise of modern algebra to 1936 and (b) The rise of modern algebra, 1936 to 1950, in *Men and Institutions in American Mathematics.* ed. by D. Tarwater et al, Texas Tech Press. 1976, pp. 41-63 and 65-85.

5. N. Bourbaki, Historical note, in his *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1972, pp. 579-606.

6. J. W. Brewer and M. K. Smith (eds), *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, Marcel Dekker, 1981.

7. T. Crilly, (a) The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862), and (b) The decline of Cayley's invariant theory (1863-1895), *Hist. Math.* 1986 **13**: 241-254, and 1988, **15**: 332-347.

8. C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, 1962.

9. A. Dick, *Emmy Noether, 1882-1935*, Birkhäuser, 1981.

10. J. Dieudonné, The work of Nicolas Bourbaki, *Amer. Math. Monthly* 1970, **77**: 134-145.

11. P. Dubreil, Emmy Noether, *Cahiers du Sém, d' Hist. des Math.* 1986, **7**: 15-27.

12. R. Gilmer, Commutative ring theory, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 131-143.

13. T. Hawkins, Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 1976/77 **16**: 17-36.

14. N. Jacobson, *Basic Algebra*, 2 vols., Freeman, 1974 and 1980.

15. N. Jacobson (ed.), *Emmy Noether: Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983. Contains and introduction by Jacobson to Noether's works.

16. I. Kaplansky, Commutative rings, in *Proc. of Conf. on Commutative Algebra*, ed. by J. W. Brewer and E. A. Rutter, Springer-Verlag, 1973, pp. 153-166.

17. C. H. Kimberling, Emmy Noether and her influence, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp.3-61.

18. T. Y. Lam, Representation theory, in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 145-156.

19. S. MacLane, History of abstract algebra, in *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, ed. by D. Tarwater et al, Texas Tech Press, 1981, pp. 3-35.

20. S. MacLane, Mathematics at the University of Göttingen (1931-1933), in *Emmy Noether: A Tribute to her Life and Work*, ed. by J. W. Brewer and M. K. Smith, Marcel Dekker, 1981, pp. 65-78.

21. U. Merzbach, Historical contexts, in *Emmy Noether in Bryn Mawr*, ed. by B. Srinivasan and J. Sally, Springer-Verlag, 1983, pp. 161-171.

22. A. F. Monna, L'algébrisation de la mathématique, réflexions historiques, *Comm. Math. Inst., Rijksuniversiteit*, Utrecht, 1977.

23. C. Parikh, *The Unreal Life of Oscar Zariski*, Academic Press, 1991.

24. H. Pollard and H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers*, Math. Assoc. of America, 1975.

25. M. K. Smith, Emmy Noether's contributions to mathematics, Unpublished notes (13 pp. ca 1976).

26. B. Srinivasan and J. Sally (eds.), *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer-Verlag, 1983.

27. B. L. van der Waerden, Obituary of Emmy Noether, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 100-111.

28. B. L. van der Waerden, The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 1970-71, **7**: 171-180.

29. B. L. van der Waerden, On the sources of my book *Moderne Algebra*, *Hist. Math.* 1975, **2**: 31-40.

30. B. L. van der Waerden, The school of Hilbert and Emmy Noether, *Bull. Lond. Math. Soc.* 1983, **15**: 1-7.

31. H. Weyl, Memorial address, in *Emmy Noether, 1882-1935*, by A. Dick, Birkhäuser, 1981, pp. 112-152.

* * * * * *

• I. Kleiner, "Emmy Noether and the advent of abstract algebra", in *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser (2007) 91-102.

* ایزراییل کلاینر، دانشگاه یورک، کانادا