از گالوا تا اشتاینیتس: صد سال نظریهٔ میدانها•

ایزراییل کلاینر*

ترجمهٔ علیرضا جمالی

شکل‌گیری نظریهٔ میدانها که در حدود ۱۰۰ سال طول کشید، از دهه‌های نخست سدهٔ نوزدهم آغاز شد. در همین دوره نظریه‌های مهم جبری دیگری، یعنی نظریهٔ گروهها، نظریهٔ حلقه‌ها، و جبر خطی نیز نشو و نما یافتند. چنانکه خواهیم دید، سیر تکاملی نظریهٔ میدانها ارتباط تنگاتنگی با تکامل آن سه نظریهٔ دیگر داشته است.

نظریهٔ مجرد میدانها از دل سه نظریهٔ ملموس ـــ که به نظریهٔ گالوا، نظریهٔ اعداد جبری، و هندسهٔ جبری معروف شدند ـــ بیرون آمد. این نظریه‌ها در سدهٔ نوزدهم تأسیس و شکوفا شدند. نظریهٔ همنهشتیها و جبر نمادی (بریتانیایی) هم در پیدایش مفهوم مجرد میدان تأثیر داشتند. توجه روزافزون در سدهٔ نوزدهم به دقت، تعمیم، و تجرید، نیز در این ماجرا مؤثر بود.

در این مقاله دربارهٔ سرچشمه‌های نظریهٔ میدانها و همچنین در مورد برخی از رویدادهای مهم در سیر تکامل آن که به بررسی مجرد میدانها به‌وسیلهٔ اشتاینیتس انجامید بحث خواهیم کرد.

۱. نظریهٔ گالوا

طی سه هزار سال، تا اوایل سدهٔ نوزدهم، جبر به معنی حل معادله‌های چندجمله‌ای، عمدتاً تا درجهٔ چهارم، بود. ولی حتی در این دوره، ایده‌های نظریهٔ میدانی به‌طور ضمنی مطرح بوده است. به‌عنوان مثال، در حل معادلهٔ خطی $ax+b=۰$، چهار عمل جبری در کار می‌آید و بنابراین مفهوم میدان به‌طور ضمنی مطرح می‌شود. در حالت معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، جواب آن، $x=(-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac})/۲a$، مستلزم الحاق ریشه‌های دوم به میدان ضرایب معادله است. مفهوم الحاق یک عضو به یک میدان در نظریهٔ میدانها مفهومی اساسی است.

در نظریهٔ نوین حل‌پذیری معادله‌های چندجمله‌ای، مفاهیم نظریهٔ میدانی هرچند در آغاز هنوز به‌صورت ضمنی مطرح بودند، حضور بسیار چشمگیرتری دارند. اساس کار را لاگرانژ در ۱۷۷۰ فراهم کرد، ولی عناصر نظریهٔ میدانیِ موضوع را آبل و گالوا در دهه‌های نخست سدهٔ نوزدهم معرفی کردند. اثبات روفینی[1] در سال ۱۷۹۹ در مورد حل‌ناپذیری معادلات درجهٔ پنجم اشکالی عمده داشت، زیرا وی شناخت کافی از ایده‌های نظریهٔ میدانی نداشت.

چنین ایده‌هایی نقطه‌های آغازین کار گالوا در مقالهٔ «یادداشتی در باب شرایط حل‌پذیری معادلات با رادیکالها» در سال ۱۸۳۱ بود.

> می‌توان همهٔ توابع گویا از تعدادی کمیت معین را از پیش[2] پذیرفت. به‌عنوان مثال، می‌توان ریشهٔ خاصی از یک عدد صحیح را انتخاب و هر تابع گویا از این ریشه را گویا تلقی کرد. وقتی به این صورت کمیاتی را معلوم در نظر می‌گیریم، خواهیم گفت که آنها را به معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم ملحق می‌کنیم، یا این کمیات به معادله ملحق می‌شوند. با این قراردادها، کمیتی را گویا می‌نامیم که به‌صورت تابعی گویا از ضرایب معادله و تعدادی کمیت ملحق‌شده که به دلخواه روی آنها توافق شده است، قابل بیان باشد ... به‌علاوه می‌توان ملاحظه کرد که ویژگیها و مشکلات یک معادله، بسته به اینکه چه کمیاتی به آن ملحق شده‌اند، می‌تواند کاملاً متفاوت باشد.

واضح است که گالوا شناخت خوبی از میدانهایی که امروز آنها را با $F(u_۱,u_۲,\ldots,u_n)$ نشان می‌دهیم، یعنی میدان حاصل از الحاق کمیات $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n به (میدان) ضرایب معادله، داشت. در مثال خاصی که ذکر شد، گالوا میدان درجهٔ دوم $Q(\sqrt{d})$ را در ذهن داشت.

گالوا نخستین کسی است که اصطلاح «الحاق» را به معنی فنی آن به کار برد. مفهوم الحاق ریشه‌های یک معادله به میدان ضرایب در کار او جنبهٔ اساسی دارد.

یکی از قضیه‌های اساسی این مبحث که به‌وسیلهٔ گالوا ثابت شد، قضیهٔ عضو اولیه است. بنابر این قضیه (با اصطلاحات امروزی) هرگاه E میدان شکافندهٔ یک چندجمله‌ای مانند $f(x)$ روی میدان F باشد، آنگاه به‌ازای تابعی گویا مانند V از ریشه‌های $f(x)$، $E=F(V)$. گالوا این نتیجه را برای

1. Ruffini 2. a priori

تعیین گروه گالوای معادلهٔ $f(x) = ۰$ به کار بست. قضیهٔ عضو اولیه در همهٔ تحقیقات بعدی در نظریهٔ گالوا قضیه‌ای اساسی بود تا اینکه آرتین در دههٔ ۱۹۳۰ با فرمول‌بندی مجدد نظریهٔ گالوا آن را کنار گذاشت، زیرا احساس کرد که این قضیه، ذاتیِ موضوع نیست.

۲. نظریهٔ اعداد جبری

در اینجا مفهوم اساسیِ نظریهٔ میدانی،که ددکیند و کرونکر مستقل از هم آن را ارائه کرده‌اند، مفهوم میدان اعداد جبری $Q(a)$ است، که در آن a یک عدد جبری است. این مفهوم از کجا سر بر آورد؟ عمدتاً از سه مسألهٔ مهم نظریهٔ اعدادی: آخرین قضیهٔ فرما، قانونهای تقابل، و نمایش اعداد صحیح با فرمهای درجهٔ دوم دوتایی ناشی شد. هرچند این سه مسأله با حوزهٔ اعداد صحیح (معمولی) سر و کار دارند، معلوم شد برای اینکه مطالعهٔ آنها ثمربخش باشد لازم است آنها را در حوزه‌هایی که به اعداد صحیح جبری معروف شدند نشاند. مثالهای زیر این ایده‌ها را نشان می‌دهد.

(آ) در اثبات آخرین قضیهٔ فرما به‌ازای (مثلاً) $n = ۳$، یعنی اثبات اینکه $x^۳ + y^۳ = z^۳$ دارای جواب صحیح ناصفر نیست، از تجزیهٔ طرف چپ نتیجه می‌شود $(x+y)(x+yw)(x+yw^۲) = z^۳$، که در آن w یک کعب اولیهٔ واحد است، یعنی $w = (-۱ + \sqrt{۳}i)/۲$. حال این معادله‌ای است در حوزهٔ $D = \{a + bw : a, b \in Z\}$ از اعداد صحیح جبری. این رهیافت به آخرین قضیهٔ فرما را اساساً اویلر (به‌ازای $n = ۳$) و سپس لامه و دیگران به کار بردند.

(ب) قانون تقابل مربعی گاوس در کتاب تحقیقات حسابی او به سال ۱۸۰۱ مطرح شد. به موجب این قانون، (به پیمانهٔ q) $x^۲ \equiv p$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر (به پیمانهٔ p) $x^۲ \equiv q$ حل‌پذیر باشد، مگر آنکه (به پیمانهٔ ۴) $p \equiv q \equiv ۳$، که در این حالت (به پیمانهٔ q) $x^۲ \equiv p$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر (به پیمانهٔ p) $x^۲ \equiv q$ حل‌پذیر نباشد. در اینجا p و q اعداد اولِ فردند.

گاوس و دیگران سعی در تعمیم این نتیجه به قانونهای تقابل «مراتب بالاتر» کردند. به‌عنوان مثال، در مورد تقابل مکعبی پرسشی دربارهٔ رابطهٔ بین حل‌پذیری (به پیمانهٔ q) $x^۳ \equiv p$ و (به پیمانهٔ p) $x^۳ \equiv q$ مطرح می‌شود. مطالعهٔ این مسائل تقابلیِ مراتب بالاتر بسیار دشوارتر از مطالعهٔ تقابل مربعی است. گاوس یادآوری می‌کند که:

> قانونهای قبلاً پذیرفته‌شدهٔ حساب برای پایه‌ریزی یک نظریهٔ عام [دربارهٔ تقابل مراتب بالاتر] کافی نیستند ... چنین نظریه‌ای مستلزم گسترش مداوم حوزهٔ حساب است.

تذکرات گاوس حدسیات بیهوده‌ای نبود. در واقع، خود او با فرمول‌بندی و اثبات یک قانونِ تقابلِ درجهٔ چهارم شروع به اجرای «برنامه» بالا کرد. برای این کار وی حوزهٔ حساب را با معرفی اعدادی که به اعداد صحیح گاوسی $G = \{a + bi : a, b \in Z\}$ معروف شدند، گسترش داد. او چنین قانونی را بدون معرفی G حتی نمی‌توانست فرمول‌بندی کند.

(پ) مسألهٔ نمایش اعداد صحیح با فرمهای درجهٔ دوم دوتایی، یعنی تعیین اعداد صحیح n که $n = ax^۲ + bxy + cy^۲$ (به‌ازای اعداد صحیح ثابت a، b، c)، به‌فرما بر می‌گردد. به‌خصوص، فرما این سؤال را مطرح و حل و فصل کرد که: کدام اعداد صحیح n مجموع دو مربع‌اند، $n = x^۲ + y^۲$؟ گاوس در تحقیقات حسابی مسأله را در حالت کلی به‌صورتی بسیار کامل، با ایجاد یک نظریهٔ جامع و زیبا ولی بسیار دشوار، بررسی کرد. ددکیند دریافت که برای درک عمیق‌تر نظریهٔ گاوس دربارهٔ فرمهای درجهٔ دوم دوتایی، او نیز به گسترش حوزهٔ اعداد صحیح Z نیاز دارد. به عنوان مثال، حتی در حالت سادهٔ نمایش اعداد صحیح به‌صورت مجموع دو مربع، شناختِ مفهومی از رابطهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ به دست می‌آید نه از رابطهٔ $(x+yi)(x-yi) = z^۲$.

۱.۲ ایده‌آلهای ددکیند

سؤال اساسی در گسترش حوزهٔ حساب معمولی به حوزه‌های «مراتب بالاتر» این است که آیا «رفتار» چنین حوزه‌هایی مانند رفتار اعداد صحیح است، یعنی آیا این حوزه‌ها، حوزهٔ تجزیهٔ یکتا هستند یا خیر. این ویژگی است که حل مسائل (آ)-(پ) را آسان می‌کند.

در حالی که حوزه‌های D و G که در بالا معرفی شدند حوزه‌های تجزیهٔ یکتا هستند، بیشتر حوزه‌هایی که در ارتباط با سه مسألهٔ نظریهٔ اعدادیِ ذکرشده مطرح می‌شوند چنین نیستند. به‌عنوان مثال، وقتی طرف چپ $x^p + y^p = z^p$ را به‌ازای $p \geqslant ۲۳$ (که p یک عدد اول است) تجزیه می‌کنیم، حوزه‌های حاصل هیچ وقت حوزهٔ تجزیهٔ یکتا نیستند. ددکیند برای برقراری تجزیهٔ یکتا در چنین حوزه‌هایی (در ۱۸۷۱) ایده‌آلها و ایده‌آلهای اول را معرفی و ثابت کرد که هر ایده‌آل در این حوزه‌ها حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است.

اما این حوزه‌هایی که تجزیهٔ یکتا در آنها برقرار می‌شود کدام‌اند؟ ددکیند برای پاسخگویی به این سؤال ــ یکی از سؤالات اساسیِ نظریه‌اش ــ به معرفی میدانها، به خصوص میدانهای اعداد جبری

$$Q(a) = \{q_۰ + q_۱a + q_۲a^۲ + \cdots + q_na^n : q_i \in Q\}$$

که در آن a ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است، نیاز داشت. این میدانها، به مانندِ اعداد گویا که موطن طبیعی اعداد صحیح‌اند، موطن طبیعی حوزه‌های مورد نظرش بودند. حوزه‌های مورد بحث بعداً به‌صورت «اعداد صحیح $Q(a)$»، یعنی اعضایی از $Q(a)$ که ریشه‌های چندجمله‌ایهایی یکین با ضرایب صحیح‌اند، تعریف شدند. ددکیند نشان داد که این اعضا یک حلقهٔ یکه‌دارِ جابه‌جایی تشکیل می‌دهند که میدان خارج قسمتی آنها $Q(a)$ است.

ددکیند در اثر گرایش به تجرید ــ که پدیده‌ای نسبتاً نادر در دههٔ ۱۸۷۰ بود ــ نظریهٔ خود را با ارائهٔ تعریفهای اصل موضوعی برای حلقه‌ها، میدانها، و ایده‌آلها در قالب وسیع‌تری قرار داد. در زیر، تعریف او را از میدان می‌آوریم:

> منظور ما از میدان، هر دستگاه نامتناهی از اعداد حقیقی یا مختلط است که چنان بسته و کامل است که حاصلِ جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم هر دو عدد از آن اعداد باز عددی از دستگاه است.

بدین ترتیب، میدانها در نظر ددکیند زیرمجموعه‌هایی از اعداد مختلط بودند، که این، البته، همهٔ آن چیزی بود که وی برای نظریهٔ اعداد جبری خود نیاز داشت. با وجود این، ارائهٔ تعریفی اصل موضوعی در نظریهٔ اعداد/جبر، حتی به این صورت محدود، در آن عصر شایان توجه است. همین‌طور است

استفادهٔ او از مجموعه‌های نامتناهی («دستگاهها») پیش از کانتور، و تعریف «توصیفی» و نه «ساختی»[1] او از یک شیء ریاضی به‌عنوان مجموعه‌ای از همهٔ عناصری از یک نوع معین که در ویژگیهایی صدق می‌کنند.

مفهوم میدان در نظر ددکیند یک مفهوم وحدت‌بخش ریاضی بود. وی پیش از تعریف میدان می‌گوید:

> در پاراگرافهای زیر سعی می‌کنم خواننده را با حوزهٔ بالاتری آشنا کنم که در آن، جبر و نظریهٔ اعداد ارتباط تنگاتنگی با هم دارند. من متقاعد شده‌ام که مناسب‌ترین راه برای مطالعهٔ رابطهٔ جبری اعداد بر اساس مفهومی است که مستقیماً به ساده‌ترین ویژگیهای حسابی مربوط است. من بدواً اصطلاح «حوزهٔ گویا» را به کار برده بودم، که بعداً آن به «میدان» تغییر دادم.

هیلبرت گفته است که گاوس، دیریکله، و ژاکوبی نیز تعجب خود را از ارتباط نزدیک نظریهٔ اعداد و جبر، از این لحاظ که این دو موضوع (به قول ددکیند) ریشه‌های مشترکی در نظریهٔ میدانها دارند، بیان کرده بودند.

ددکیند صورتهای مختلفی از نظریهٔ نوآورانهٔ خود در مورد تجزیهٔ ایده‌آلها در میدانهای اعداد جبری ارائه داد. وی در شرح پختهٔ ۱۸۹۴ خود از این نظریه (ویراست چهارم نظریهٔ اعداد دیریکله) مفاهیم و نتایج مهمی را دربارهٔ میدانها آورد که امروز به‌صورت استاندارد در آمده است، از قبیل اینکه: **(i)** اگر S زیرمجموعهٔ دلخواهی از اعداد مختلط و شامل اعداد گویا باشد، اشتراک همهٔ میدانهای شامل S یک میدان است؛ این میدان را «گویا نسبت به S» می‌نامند. **(ii)** او یکریختی میدانها را، که آن را «جایگشت میدان» می‌نامد، به‌صورت نگاشتی از میدانی مانند E به میدانی مانند F که حافظ هر چهار عمل میدان است تعریف می‌کند. وی متذکر می‌شود که هرگاه F ناصفر باشد، نگاشت یک‌به‌یک است؛ و نیز تذکر می‌دهد که این نگاشت روی Q همانی است. **(iii)** در حالتی که E زیرمیدانی از K باشد، درجهٔ K روی E را به‌صورت بُعد K که به‌عنوان فضای برداری روی E در نظر گرفته شده است، تعریف می‌کند. او نشان می‌دهد که اگر این درجهٔ متناهی باشد، هر عضو K روی E جبری است.

۲.۲ ایده‌آلهای کرونکر

کارهای کرونکر گسترده‌تر، و بسیار دشوارتر از کارهای ددکیند است. او کوشید نظریه‌ای عام تدوین کند که نظریهٔ اعداد جبری و هندسهٔ جبری حالتهای خاص آن باشند و ایده‌های خود را در این زمینه طی چند دهه، از دههٔ ۱۸۵۰ به بعد، عرضه کرد. او در اثر مهم سال ۱۸۸۲ خود با عنوان «مبانی نظریهٔ حسابیِ اعداد جبری»، نظریهٔ اعداد جبری را با استفاده از رهیافتی کاملاً متفاوت با رهیافت ددکیند عرضه کرد. یکی از مفاهیم اصلی او نیز مفهوم میدان بود که آن را «حوزهٔ گویایی» نامید و به شرح زیر تعریف کرد:

> حوزهٔ گویایی $(R', R'', R''', \ldots)$ شامل ... هر یک از آن کمیاتی است که توابعی گویا از کمیات R'، R''، R'''، ... با ضرایب صحیح‌اند.

1. constructive

لئوپولد کرونکر (۱۸۲۳-۱۸۹۱)

به تفاوت «تعریف» کرونکر و ددکیند از میدان توجه کنید! تعریف کرونکر از نوع تعریفهای قابل قبول امروزی نیست، بلکه یک توصیفِ ساختی است. ولی این تعریف ناشی از دیدگاه کرونکر دربارهٔ ماهیت ریاضیات بود.

کرونکر اعداد گنگ را موجوداتی واقعی نمی‌دانست زیرا این اعداد متضمن بینهایت‌اند. به‌عنوان مثال، میدان اعداد جبری $Q(\sqrt{۲})$ را به‌صورت میدان خارج قسمتی حلقهٔ چندجمله‌ایهای $Q[x]$ نسبت به ایده‌آل تولید شده با $x^۲ - ۲$ تعریف کرد، هر چند این مفهوم را بر حسب همنهشتیها به‌جای حلقه‌های خارج قسمتی بیان کرد. این ایده‌ها نطفهٔ قضیه‌ای را که به قضیهٔ کرونکر معروف شد در بر دارند، یعنی این قضیه که هر چندجمله‌ای روی یک میدان دارای ریشه‌ای در توسیعی از آن میدان است.

جالب است که تعریف فوق از $Q(\sqrt{۲})$ را با تعریف کوشی از اعداد مختلط در دههٔ ۱۸۴۰ مقایسه کنیم که آنها را چندجمله‌ایهایی روی اعداد حقیقی به پیمانهٔ $x^۲ + ۱$ در نظر می‌گرفت (و نیز این را با تعریف اعداد صحیح گاوسی به پیمانهٔ p). دلیل منطقی کوشی ارائهٔ تعریفی «جبری» از اعداد مختلط بدون استفاده از $\sqrt{-۱}$ بود.

۳.۲ ددکیند در مقابل کرونکر

ددکیند و کرونکر دو جبردان بزرگِ معاصر هم بودند. هر دو نفر آثاری راهگشا دربارهٔ نظریهٔ اعداد جبری منتشر کردند ولی رویکرد بسیار متفاوتی به این موضوع داشتند. هر دو متأثر از «فلسفه» ریاضی خود بودند، و فلسفهٔ آنها بسیار متفاوت بود. شاید کرونکر نخستین «پیش‌شهودگرا»[1] بوده است، و ددکیند احتمالاً نخستین «پیش‌صورتگرا»[2] (به نظر بعضیها نخستین منطق‌گرا). این جملهٔ کرونکر که «خدا اعداد صحیح [مثبت] را آفرید، مابقی کار انسان است» را با این عبارت ددکیند که «اعداد [طبیعی] حاصل ابداع آزادانهٔ ذهن بشر است» مقایسه کنید. از نظر کرونکر ریاضیات باید ساختی و متناهی باشد. ددکیند در به‌کار بردن مفاهیم اصل موضوعی و بینهایت تردید نداشت. در حالی که کرونکر دربارهٔ این مباحث اظهار نظرهای زیادی کرده است، ددکیند به اندکی اکتفا کرد: دیدگاههایش اساساً از دستاوردهایش ــ که مفهومی و مجردند ــ معلوم می‌شود. چند مثال: **(i)** چون حوزه‌های گویایی کرونکر باید با تعدادی متناهی از اعضا (R'، R''، R'''، ...) تولید شوند، مطابق تعریف او، کل اعداد جبری به‌عنوان میدان مورد قبول نیست. ددکیند ابایی نداشت که مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلطی را که

1. preintuitionist 2. preformalist

ریشه‌های چندجمله‌ایهایی با ضرایب صحیح‌اند (یعنی، مجموعهٔ همهٔ اعداد جبری را) یک شیء ریاضیِ واقعی در نظر بگیرد.

(ii) در مقابل، کرونکر هیچ محدودیتی برای ماهیت کمیتهای R'، R''، R'''، ... قائل نشد ــ به‌عنوان مثال، این کمیتها می‌توانستند نامعین[1] یا ریشه‌های معادله‌های جبری باشند. بنابراین از نظر کرونکر $Q(x)$ میدانی مجاز بود. در واقع، الحاق متغیرها به میدان شالودهٔ رهیافت او به نظریهٔ اعداد جبری بود. به یاد آوریم که ددکیند میدانهای خود را به‌صورت زیرمجموعه‌های اعداد مختلط تعریف کرد.

(iii) چون کرونکر (مثلاً) π را به‌عنوان عددی مجاز نمی‌پذیرفت، $Q(\pi)$ را با $Q(x)$ (که x در آن نامعین است) یکسان گرفت، بدین ترتیب ادعا کرد که اعداد متعالی نامعین هستند. از نظر ددکیند $Q(\pi)$ موجودی کاملاً مجاز بود که نیاز به کمکِ $Q(x)$ نداشت.

۳. هندسهٔ جبری

مثالهایی از میدانها که تا اینجا دیده‌ایم عمدتاً میدانهای اعداد بوده‌اند. در اینجا اصولاً با میدانهای توابع سر و کار داریم، به‌خصوص، با توابع جبری و توابع گویا. این مفاهیم اساساً از کرونکر و ددکیند_وبر است.

۱.۳ میدانهای توابع جبری

هندسهٔ جبری مطالعهٔ خمهای جبری و تعمیم آنها به بعدهای مراتب بالاتر یعنی چندگوناهای جبری است. هر خم جبری مجموعهٔ ریشه‌های یک تابع جبری یعنی تابعی مانند $y = f(x)$ است که به‌طور ضمنی با یک معادلهٔ چندجمله‌ای مانند $P(x, y) = 0$ تعریف می‌شود.

رهیافتهای متعددی، به خصوص رهیافتهای آنالیزی، هندسی_جبری، و جبری_حسابی، برای مطالعهٔ خمهای جبری به‌کار رفته‌اند. در رهیافت آنالیزی، که ریمان (در دههٔ ۱۸۵۰) نقش اصلی را در آن داشت، اشیای اساسی مورد مطالعهٔ توابع جبریِ $f(w, z) = 0$ از یک متغیر مختلط و انتگرالهای آنها، موسوم به انتگرالهای آبلی، بودند. در ارتباط با این مفاهیم بود که ریمان مفهوم اساسی رویهٔ ریمان را، که روی آن توابع جبری تک‌مقداری می‌شوند، معرفی کرد. اما روشهای ریمان نادقیق، و به میزان زیادی مبتنی بر اصل دیریکله بود که از نظر فیزیکی واضح ولی از حیث ریاضی سؤال‌برانگیز بود.

ددکیند و وبر، در مقالهٔ مهم ۱۸۸۲ خود «نظریهٔ توابع جبری از یک متغیر»، دقت بخشیدن به ایده‌های ریمان را بر عهده گرفتند. آنها چنین اظهار داشتند:

> هدف از این تحقیقات ... توجیه نظریهٔ توابع جبری از یک متغیر، یکی از دستاوردهای اصلیِ کار خلاقانهٔ ریمان، از دیدگاهی ساده و در عین حال دقیق و کاملاً کلی است.

برای انجام دادن این کار، آنان مفاهیمی را که ددکیند قبلاً برای اعداد جبری معرفی کرده بود به توابع جبری تسرّی دادند. به‌طور مشخص، درست همان‌گونه که یک میدان اعداد جبری توسیعی متناهی مانند $Q(a)$ از میدان اعداد گویای Q است، ددکیند و وبر میدان توابع جبری را به‌صورت توسیعی متناهی مانند $K = C(z)(w)$ از میدان $C(z)$ متشکل از توابع گویا (بر حسب متغیر z) تعریف کردند. یعنی، w ریشه‌ای از چندجمله‌ای $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ است، که در آن $a_i \in C(z)$ (می‌توان فرض کرد که $a_i \in C[z]$). بنابراین، $w = f(z)$ تابعی جبری است که به‌طور ضمنی به‌وسیلهٔ معادلهٔ چندجمله‌ای $P(z, w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n = 0$ تعریف شده است. در واقع، همهٔ اعضای $K = C(z)(w) = C(z, w)$ توابع جبری‌اند.

اینک فرض کنیم A «اعداد صحیح K» باشد؛ یعنی، A متشکل از اعضایی از $K = C(z)(w)$ باشد که ریشه‌های چندجمله‌ایهای یکین روی $C[z]$ هستند. مشابه حالت اعداد جبری، در اینجا هم هر ایده‌آل ناصفر A حاصلضربی یکتا از ایده‌آلهای اول است. ضمناً توابع برخه‌ریخت روی یک رویهٔ ریمان میدانی از توابع جبری تشکیل می‌دهند که توابع تام، «اعداد صحیح» آنها هستند.

اینک ددکیند و وبر آمادگی داشتند که تعریف جبری دقیقی از یک رویهٔ ریمان مانند S از میدان توابع جبری K به‌دست دهند. این رویه (با اصطلاحات امروزی) مجموعهٔ ارزه‌های گسستهٔ نابدیهی روی K است. در اینجا بسیاری از ایده‌های ریمان در مورد توابع جبری به‌طور جبری و دقیق تشریح شدند.

ددکیند و وبر در اصل جبردان بودند. آنها احساس می‌کردند که نظریهٔ توابع جبری ذاتاً موضوعی جبری است و بنابراین باید به‌طور جبری عرضه شود. در این‌باره چنین گفتند: «از این طریق، بخشی با حد و مرز مشخص و نسبتاً جامع از نظریهٔ توابع جبری فقط با ابزارهای متعلق به حوزهٔ خودش بررسی می‌شود».

در فراسوی دستاوردهای فنی آنها در زمینهٔ استحکام بخشیدن به بخشهای مهمی از نظریهٔ توابع جبری ریمان، کشف مفهومی آنها در مورد تشابه بسیار زیاد بین میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع جبری، و در نتیجه بین نظریهٔ اعداد جبری و هندسهٔ جبری، قرار دارد. این تشابه برای هر دو نظریه بسیار پرثمر از آب درآمد. جنبهٔ درخور توجه دیگر تحقیقاتِ آنان کلیت آن و به خصوص کاربردشان در میدانهای دلخواه بود.

۲.۳ میدانهای توابع گویا

همان‌طور که توضیح دادیم، هندسهٔ جبری مطالعهٔ چندگوناهای جبری است. چندگونای جبری مجموعهٔ نقاطی از $\mathbb{R}^n$ (یا $\mathbb{C}^n$) است که در دستگاهی از معادلات چندجمله‌ای مانند $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ که در آن $1 \leqslant i \leqslant k$، صدق می‌کنند. ساختار ایده‌آلی حلقهٔ $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ (یا $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$) که چندجمله‌ایهای $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به آن متعلق‌اند برای درک چندگونای جبری اساسی است زیرا «موطن طبیعیِ» آن حلقه ــ یعنی میدان خارج قسمتی آن، $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ (یا $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$) ــ است. اینها میدانهای توابع گویای (صوری) هستند. دیدیم که کرونکر نیز چنین میدانهایی را در تحقیقات خود در نظریهٔ اعداد جبری معرفی کرد.

۴. همنهشتیها

گاوس مفهوم همنهشتی را در کتاب تحقیقات حسابی خود در سال ۱۸۰۱ معرفی کرد و (علاوه بر چیزهای دیگر) ثابت کرد که می‌توان همنهشتیهای به پیمانهٔ عدد اولی مانند p را جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم کرد. زیرا اعداد صحیح به پیمانهٔ p یک میدان تشکیل می‌دهند ــ میدانی متناهی با p عضو. گالوا با الهام از تحقیقات گاوس دربارهٔ همنهشتیها، میدانهای متناهی با p^n عضو را در مقاله‌ای به سال ۱۸۳۰ با عنوان «در باب نظریهٔ اعداد» معرفی کرد.

---
1. indeterminate

هدف گالوا بررسی همنهشتی (پیمانهٔ p) $F(x) \equiv 0$ به‌عنوان تعمیمی از همنهشتیهای درجهٔ دوم گاوس بود. در اینجا $F(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n تحویل‌ناپذیر به پیمانهٔ p است، یعنی، روی میدان Z_p تحویل‌ناپذیر است. گالوا نشان داد که $F(x)$ نه ریشه‌های مکرر دارد و نه ریشه‌های صحیح یا گویا. نتیجه‌گیری او به شرح زیر بود:

> بنابراین، باید ریشه‌های این همنهشتی را نوعی از نمادهای موهومی تلقی کرد ...، نمادهایی که به کارگیری آنها در محاسبات غالباً همان‌قدر مفید واقع می‌شود که استفاده از عدد موهومی $\sqrt{-1}$ در آنالیز معمولی.

وی ادامه می‌دهد:

> فرض کنیم i [یک نماد دلخواه، و نه عدد مختلط i] نشانگر یکی از ریشه‌های همنهشتی $F(x) \equiv 0$ باشد، که می‌توان فرض کرد از درجهٔ n است. عبارت کلی زیر را در نظر می‌گیریم
>
> $$a + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_{n-1} i^{n-1} (**)$$
>
> که در آن a، a_1، a_2، ...، a_{n-1} نمایشگر اعداد صحیح [به پیمانهٔ p]اند. وقتی به این اعداد همهٔ مقادیر ممکن آنها تخصیص داده شود، عبارت (**) در بین p^n مقدار تغییر می‌کند، که چنانکه ثابت خواهم کرد، همان ویژگیهای اعداد طبیعی را در نظریهٔ مانده‌های توانی دارند.

در واقع، گالوا ثابت کرد که عبارت (**) یک میدان تشکیل می‌دهد. این میدان امروزه به میدان گالوا موسوم است. همچنین ثابت کرد که (با اصطلاحات امروزی) گروه ضربی این میدانْ دوری است. مور[1] در مقاله‌ای به سال ۱۸۹۳ با عنوان «یک دستگاهِ دوگانهٔ نامتناهی از گروههای ساده»، به مشخص‌سازیِ میدانهای متناهی پرداخت [۱۵].

۵. جبر نمادی

در دهه‌های سوم و چهارم سدهٔ نوزدهم، ریاضیدانان بریتانیایی به خصوص پیکاک[2]، گرگوری[3]، و دمورگن[4]، جبری را که به جبر نمادی معروف شد، ابداع کردند. هدف آنان این بود که با تدارک توجیهات منطقی برای جبر ــ که در نظر آنها قانونهای عمل با اعداد، به ویژه اعداد منفی بود ــ جبر را در جایگاهی همتراز با هندسه قرار دهند. آنها این کار را با ایجاد تمایز بین جبر حسابی ــ قانونهای عمل با اعداد مثبت ــ و جبر نمادی انجام دادند که موضوع اخیر را پیکاک تازه تأسیس کرده بود و به قانونهای عمل با اعداد به‌طور اعم می‌پرداخت.

اگرچه این قانونها، طبق اصل موسوم به اصل پایندگی فرمهای هم‌ارز، کلمه به کلمه از قانونهای جبر حسابی گرفته شده بود، این دیدگاه بسیار تازگی داشت. شاهد آن، تعریف پیکاک از جبر نمادی، در رسالهٔ جبر اوست:

> علمی که به‌وسیلهٔ قانونهای تعریف‌شده ولی دلخواه به ترکیبهای علامتها و نمادهای دلخواه پردازد.

سخنی درست و حسابی برای سدهٔ نوزدهم! چنین اظهار نظری در حدود یک سده از عصر آنان جلوتر بود. و البته در حدود یک سده انتظار لازم بود تا حرفهای پیکاک کاملاً به مرحلهٔ اجرا در آیند. با وجود این، ابداع جبر نمادی، هرچند مستقیماً به میدانها مربوط نمی‌شد، پیشرفت مهمی بود که (طبق نظر عده‌ای) خبر از تولد جبر مجرد می‌داد. به‌علاوه، هرچند پیکاک ماهیت «قانونهای دلخواه» را مشخص نکرد، این قانونها بعداً در همان سده به اصول موضوع حلقه‌ها و میدانها تبدیل شدند.

۶. تعریف مجرد میدان

پیشرفتهایی که تا اینجا توصیف کرده‌ایم نزدیک به یک سده طول کشید. از این پیشرفتها نظریه‌های «ملموس» مهمی ــ نظریهٔ گالوا، نظریهٔ اعداد جبری، هندسهٔ جبری ــ ناشی شدند که در آنها مفهوم میدان (گاه به‌طور ضمنی) نقش عمده‌ای ایفا کرد.

در اواخر سدهٔ نوزدهم، گرایش به تجرید و نگرش اصل موضوعی شایع شده بود. به‌عنوان نمونه، پاش[1] (۱۸۸۲)، برای نخستین بار با تأکید بر اهمیت مفاهیم تعریف‌نشده، اصول موضوعی برای هندسهٔ تصویری ارائه داد، کانتور (۱۸۸۳) اعداد حقیقی را به‌صورت رده‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های کوشی از اعداد گویا تعریف کرد، و پئانو (۱۸۸۹) اصول موضوع خود را برای اعداد طبیعی عرضه داشت. در جبر، فون دایک[2] (۱۸۸۲) تعریف مجردی از گروه ارائه کرد که هم گروههای متناهی و هم گروههای نامتناهی را در بر می‌گرفت (کیلی در حدود سی سال قبل از او گروه متناهی را تعریف کرده بود)، و پئانو (۱۸۸۸) تعریف فضای برداری متناهیْ‌بعد را، که از نظر معاصرانش دور مانده بود، عرضه کرد. زمان برای ابداع مفهوم مجرد میدان مناسب بود. خلق این مفهوم در سال ۱۸۹۳ به دست وبر که نامش معمولاً همراه نام ددکیند به‌صورت «ددکیند-وبر» می‌آید صورت گرفت.

تعریف وبر از میدان در مقالهٔ ۱۸۹۳ او با عنوان «مبانی عام نظریهٔ معادلات گالوا» [۲۳] منتشر شد، که هدف او در آن مقاله فرمول‌بندی مجرد نظریهٔ گالوا بود:

> در این مقاله کوشش شده است نظریهٔ معادلات جبریِ گالوا به نحوی عرضه شود که همهٔ حالتهایی را که این نظریه در مورد آنها قابل اِعمال است، به یکسان در بر بگیرد. بدین ترتیب، این نظریه را در اینجا به‌صورت پیامد مستقیمی از مفهوم گروه می‌آوریم که به‌وسیلهٔ مفهوم میدان تشریح شده است، به‌عنوان ساختاری صوری که کاملاً مستقل از تعبیر عددی عناصرِ به کار رفته است.

نحوهٔ ارائهٔ نظریهٔ گالوا به‌وسیلهٔ وبر در واقع خیلی نزدیک به روشِ امروزیِ آموزش این موضوع است. تعریف او از میدان، که بعد از تعریف گروه می‌آید، به شرح زیر است:

> گروهی تبدیل به میدان می‌شود که دو نوع ترکیب در آن ممکن باشد، اولی را می‌توان جمع نامید و دومی را ضرب. ولی، تعریف در حالت کلی باید قدری محدود شود.
>
> ۱. فرض می‌کنیم هر دو نوع ترکیب جابه‌جایی‌اند.
>
> ۲. جمع عموماً در شرطهایی که گروه را تعریف می‌کنند، صدق خواهد کرد.
>
> ۳. ضرب چنان است که

1. E.H. Moore 2. Peacock 3. Gregory 4. De Morgan

1. Pasch 2. von Dyck

هاینریش وبر (۱۸۴۲-۱۹۱۳)

$a(-b) = -(ab)$،
$a(b+c) = ab + ac$،
از $ab = ac$ نتیجه می‌شود $b = c$، مگر آنکه $a = 0$،
با مفروض بودن b و c، عنصر a از $ab = c$ تعیین می‌شود مگر آنکه $b = 0$.

هرچند در اینجا قانون شرکت‌پذیری تحت ضرب ذکر نشده است و اصول موضوع مستقل نیستند، ولی آنها بسیار حال و هوای امروزی دارند. وبر به‌عنوان نمونه‌هایی از مفهوم تازه تعریف‌شده‌اش، علاوه بر میدانهای اعداد نظریهٔ اعداد جبری و میدانهای توابع هندسهٔ جبری، میدانهای متناهی گالوا و «میدانهای همنهشتیهای» کرونکر $\frac{K[x]}{(p(x))}$ را نیز، که در آن K یک میدان و $p(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی K است، ذکر کرد.

وبر قضیه‌های مختلفی را دربارهٔ میدانها ثابت کرد که بعداً در فرمول‌بندی آرتین از نظریهٔ گالوا مفید واقع شدند، و امروزه از نتایج اصلی این نظریه محسوب می‌شوند (بسیاری از آنها را ددکیند قبلاً ثابت کرده بود و او دوباره اثبات کرد). از جملهٔ این قضیه‌ها، قضیه‌های زیر هستند:

(i) هر توسیع جبریِ متناهی یک میدانْ ساده است (یعنی، با یک تک‌عضو تولید می‌شود).

(ii) هر چندجمله‌ای روی یک میدان دارای میدان شکافنده است.

(iii) اگر $F \subseteq F(a) \subseteq F(b)$، آنگاه $(F(a) : F)$ عدد $(F(b) : F)$ را می‌شمارد، که در آن برای میدانهای K و E با شرط $E \subseteq K$، علامت $(K : E)$ نمایشگر بعد K به‌عنوان فضایی برداری روی E است.

باید تأکید کرد که هدف وبر این نبود که میدانها را فی‌نفسهِ بررسی کند بلکه هدفش بسط نظریهٔ میدانها تا حدی بود که بتواند فرمول‌بندی مجردی از نظریهٔ گالوا به دست دهد. در این راستا موفقیت قابل تحسینی به دست آورد. مقالهٔ او، و چندی بعد کتاب دو جلدی‌اش، کتاب درسی جبر، در توسعهٔ جبر مجرد تأثیر بسزایی داشت.

۷. اعداد pـایِ هنزل

هنزل[1] در مقاله‌ای به سال ۱۸۹۹ با عنوان «مبانی جدید نظریهٔ اعداد جبری» شروع به تحقیق در اعداد pـای کرد و این کار را تا پایان عمر ادامه داد. وی با الهام از تحقیقات ددکیند‌ـ‌وبر که در بالا به آن اشاره کردیم، نخستین گام خود را با توجه به مشابهت بین میدانهای توابع و میدانهای اعداد برداشت. از آنجا که سریهای توانی در مطالعهٔ میدانهای توابع مفیدند، هنزل اعداد pـای را برای کمک به مطالعهٔ میدانهای اعداد معرفی کرد:

> سالها پیش با ملاحظهٔ شباهت بین نتایج نظریهٔ توابع جبری از یک متغیر و نتایج نظریهٔ اعداد جبری، این فکر به ذهنم خطور کرد که شیوهٔ مناسب‌تری را جایگزینِ تجزیهٔ اعداد جبری به‌کمک عاملهای اول ایده‌آلی کنیم، شیوه‌ای که کاملاً با بسط یک تابع جبری بر حسب سری توانی در همسایگی یک نقطهٔ دلخواه متناظر است.

در واقع، چنانکه وایرشتراس ثابت کرده بود، در همسایگی نقطهٔ مفروضی مانند α، هر تابع جبری از یک متغیر مختلط را می‌توان به‌صورت یک سری توانی از توانهای صحیح و گویای $z - \alpha$ نمایش داد. اعضای میدان اعداد pـای هنزل سریهای توانی صوریِ $\sum a_k p^k$ با تعدادی متناهی نمای منفی هستند، که در آن $k \in Z$ و $a_k \in Z_p$ (سریهای توانی صوری را ورونسه[1] به سال ۱۸۹۱ در یک چارچوب هندسی معرفی کرد.) و همان‌طور که هر عضو یک میدان توابع جبری را می‌توان با مجموعه بسطهای آن در همهٔ نقاط α از رویه‌ای ریمانی که بر آن تعریف می‌شود یکی گرفت، هر عضو یک میدان اعداد جبری را هم می‌توان با مجموعهٔ نمایشهای آن در میدان اعداد pـایِ $\sum a_k p^k$ به‌ازای هر عدد اول p یکی گرفت.

هنزل در کتابی به سال ۱۹۰۷ مفاهیم توپولوژیک را در میدانهای pـای خود معرفی کرد و آنالیزِ pـایِ حاصل را در نظریهٔ اعداد جبری به کار برد. اعداد pـای در هندسهٔ جبری نیز بی‌اندازه مفید واقع شدند، و در برانگیختنِ مطالعهٔ مجرد حلقه‌ها و میدانها تأثیر داشتند.

۸. اشتاینیتس

آخرین رویداد عمده‌ای در سیر تکامل نظریهٔ میدانها که قصد توصیف آن را داریم، دستاورد عظیم سال ۱۹۱۰ [۲۰] اشتاینیتس است. ابتدا به پیشینهٔ موضوع می‌پردازیم.

بنا به معیارهای امروزی، جبر در سدهٔ نوزدهم غیر مجرد بود و به نحوی از انحا با اعداد حقیقی یا مختلط ارتباط داشت. به‌عنوان مثال، برخی از ریاضیدانان بزرگی که در پیشبرد جبر سدهٔ نوزدهم سهیم بودند، یعنی ریاضیدانانی که ایده‌های آنان جبر سدهٔ بیستم را شکل داد، عبارت بودند از گاوس، گالوا، ژوردان، کرونکر، ددکیند، و هیلبرت. کارهای جبری آنها به فرمهای درجهٔ دوم، دایره‌بری، گروههای جایگشتی، ایده‌آلها در حلقهٔ میدانهای اعداد جبری و میدانهای توابع جبری، و نظریهٔ ناورداها مربوط می‌شد. همهٔ این موضوعها به نحوی با اعداد حقیقی یا مختلط ارتباط داشت.

در اوایل سدهٔ بیستم روش اصل‌موضوعی کم کم به‌صورت یک ابزار مهم ریاضی درآمد. از این لحاظ کتاب مبانی هندسهٔ هیلبرت به سال ۱۸۹۹ بسیار تأثیرگذار بود. همچنین مکتب آمریکاییِ آنالیزِ اصل‌موضوعی شایان ذکر است که نمونهٔ آن در کارهای دیکسن[2]، هانتینگتن[3]، مور، و وبلن[4] دیده می‌شود. این ریاضیدانان در دههٔ نخست سدهٔ بیستم به بررسی دستگاههای اصل موضوعی

1. Hensel

1. Veronese 2. Dickson 3. Huntington 4. Veblen

ارنست اشتاینیتس (۱۸۷۱-۱۹۲۸)

برای گروهها، میدانها، جبرهای شرکت‌پذیر، هندسهٔ تصویری، و جبر منطق پرداختند. هدف اصلی آنها تحقیق در استقلال، سازگاری، و تمامیتِ اصل موضوعی بود که معرف هر یک از این دستگاهها بودند (ر.ک. [۲۵]). همچنین مشخص‌سازیِ اصل موضوعیِ میدان اعداد حقیقی توسط هیلبرت در ۱۹۰۰ و مشخص‌سازی مشابه هانتینگتن در ۱۹۰۵ از میدان اعداد مختلط با این جریان ارتباط داشت. برای ملاحظهٔ تفصیل مطلب، ر.ک. [۲] و [۴].

اثر نوآورانهٔ ۱۵۰ صفحه‌ای اشتاینیتس با عنوان «نظریهٔ جبری میدانها» که در ۱۹۱۰ انتشار یافت سرآغاز بررسی مجرد میدانها به‌عنوان موضوعی مستقل بود [۲۰]. در حالی که وبر میدانها را به‌طور مجرد تعریف کرد، اشتاینیتس آنها را به‌طور مجرد بررسی کرد.

منبع الهام مستقیم اشتاینیتس عبارت بود از اعداد p-ای هنزل:

> به‌خصوص نظریهٔ اعداد جبری هنزل بود که مرا به این تحقیق کلی هدایت کرد. سرآغاز این نظریه میدان اعداد p-ای است، میدانی که نه میدانی از توابع محسوب می‌شود و نه میدانی از اعداد به معنی معمول کلمه.

به‌طور کلی، کارِ اشتاینیتس ناشی از تمایل او به تعیین مفاهیم مجردی بود که بین نظریه‌های متعدد معاصر میدانها: میدانها در نظریهٔ اعداد جبری، در هندسهٔ جبری، و در نظریهٔ گالوا، میدانهای p-ای، و میدانهای متناهی، مشترک است. هدف او مطالعهٔ گسترده‌ای در همهٔ میدانها، بر اساس اصول موضوع میدان بود:

> هدف رسالهٔ حاضر ارائهٔ چشم‌اندازی از همهٔ انواع ممکن میدانها و مشخص کردن عناصر اصلیِ روابط بین آنهاست.

وظیفه‌ای سنگین! برنامهٔ اشتاینیتس شروع کار از ساده‌ترین میدانها و ساختن همهٔ میدانها از آنها بود. او مفهوم مشخصهٔ میدان را مفهومی اساسی در مطالعهٔ ساده‌ترین میدانها تشخیص داد. در زیر چند نتیجهٔ اساسی او را، که امروزه از ارکان نظریهٔ میدانها هستند، می‌آوریم:

(i) رده‌بندی میدانها به میدانهای با مشخصهٔ صفر و میدانهای با مشخصهٔ p. میدانهای اول ــ «ساده‌ترین» میدانها ــ Q، Z_pاند؛ یکی از این دو زیرمیدانی از یک میدان مفروض است.
(ii) ایجاد نظریهٔ توسیعهای متعالی، که به‌صورت ابزاری ضروری در هندسهٔ جبری درآمد.
(iii) تشخیص اینکه نظریهٔ گالوا دقیقاً برای توسیعهای متناهیِ نرمال و تفکیک‌پذیر قابل اِعمال است.
(iv) اثبات وجود بستار جبری هر میدان دلخواه، و یکتایی آن (با تقریب یکریختی).

توصیفی از همهٔ میدانها چنین ادامه می‌یابد:

> شروع کار از یک میدان اول دلخواه، در نظرگرفتن یک توسیع متعالی سرهٔ دلخواه و به دنبالش یک توسیع جبری دلخواه، روشی است برای رسیدن به هر میدان.

در اینجا مفاهیم پایهٔ تعالی و درجهٔ تعالی یک میدان توسیعی، که هر دو را اشتاینیتس معرفی کرد، نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کنند. نکتهٔ مهم دیگر، اصل موضوع انتخاب بود که وی استفاده از آن را می‌پذیرد:

> بسیاری از ریاضیدانان در برابر پذیرش اصل موضوع انتخاب ایستادگی می‌کنند. ولی مواجههٔ فزاینده با مسائلی که بدون این اصل نمی‌توان تکلیف آنها را تعیین کرد، احتمالاً مقاومت در برابر آن را به تدریج از میان خواهد برد.

چنانکه از شهادتهای زیر بر می‌آید دستاورد اشتاینیتس در تکامل جبر مجرد در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ بسیار مؤثر بود.

> مقالهٔ اشتاینیتس منبع اساسی همهٔ تحقیقات [جبری] در مکتب امی‌نوتر بود (وان در واردن [۲۲]).
> [کار اشتاینیتس] . . . نه تنها نقطهٔ عطفی در توسعهٔ جبر است، بلکه همچنین . . . درآمدی عالی و در واقع، ضروری، بر مطالعهٔ جدی جبر نوین است (بئر و هاسه [۲۰]).
> کار اشتاینیتس نشانگر یک نقطهٔ عطف روش‌شناختی در جبر است، که به جبر نوین، منجر شد (پورکرت و ووسینگ [۱۷]).
> [کار اشتاینیتس] را می‌توان دستاوردی تلقی کرد که مفهوم واقعی جبر با آن متولد شده است (بورباکی [۳]).

۹. نگاهی به پیشرفتهای بعدی

در اینجا چند پیشرفت عمده در نظریهٔ میدانها و حوزه‌های وابسته را طی دوسه دهه بعد از کار اساسی اشتاینیتس فهرست‌وار ذکر می‌کنیم.

(آ) نظریهٔ ارزه‌ها. در ۱۹۱۳ کورشاک [1] ایده‌های هنزل دربارهٔ میدانهای p-ای را با معرفی مفهوم میدان ارزه‌ها به‌صورت تجریدی در آورد. وی وجود کامل‌شدهٔ [2] یک میدان نسبت به یک ارزه را ثابت کرد. در ۱۹۱۸ اوستروسکی[3] همهٔ ارزه‌های میدان اعداد گویای Q را تعیین کرد. نظریهٔ ارزه‌ها، که طبق نظر جیکوبسن [۱۰]، «حلقهٔ اتصال محکمی را بین نظریهٔ اعداد، جبر، و آنالیز تشکیل می‌دهد»، هم در نظریهٔ اعداد جبری و هم در هندسهٔ جبری نقش اساسی ایفا کرد (ر.ک. [۳]، [۶]، [۱۰]، و [۲۲]).

(ب) میدانهای صوریِ حقیقی. آرتین و شرایر در ۱۹۲۷ مفهوم میدان

1. Kürschak 2. completion 3. Ostrowski

صوریْ‌حقیقی [صورتاً حقیقی]، یعنی میدانی را که در آن ۱ − مجموعی از مربعات نیست، معرفی کردند. مطابق اظهار نظر بورباکی،

> بدون تردید یکی از نتایج قابل ملاحظه [نظریهٔ آرتین-شرایر] کشف این موضوع است که وجود یک رابطهٔ ترتیبی در یک میدان صرفاً به ویژگیهای جبری آن میدان وابسته است.

به‌طور مشخص، یک میدان را می‌توان مرتب کرد اگر و تنها اگر صوریْ‌حقیقی باشد. آرتین در همان سال به‌کمک نظریهٔ میدانهای صوری‌حقیقی مسألهٔ هفدهم هیلبرت راجع به تجزیهٔ توابع گویای معین مثبت به مجموع مربعات را حل کرد.

(پ) نظریهٔ میدان رده‌ها. این نظریهٔ مطالعهٔ توسیعهای متناهی یک میدان اعداد جبری است که دارای گروه گالوای آبلی هستند. این نظریه ترکیب زیبایی از ایده‌های جبری، نظریهٔ اعدادی، و آنالیزی است، که در آن قانون تقابل آرتین جایگاه مهمی دارد. مطالعات عمده در این زمینه قبلاً به‌وسیلهٔ هیلبرت در «گزارش در باب نظریهٔ اعداد»[1] به سال ۱۸۹۷ صورت گرفته بود. جنبه‌های جدیدتر این نظریه را آرتین، شواله، هاسه، تاگاکی[2]، و دیگران به آن افزودند (ر.ک. [۸]).

(ت) نظریهٔ گالوا. آرتین در سلسله درسهایی به سال ۱۹۲۶ فرمول‌بندی مجرد خود از نظریهٔ گالوا را که امروز معروف است ارائه داد (ولی آن را تا ۱۹۳۸ منتشر نکرد). وی در یک سخنرانی در سال ۱۹۵۰ اظهار داشت:

> من از اوایل کارم در ریاضیات مسحور نظریهٔ کلاسیک گالوا بوده‌ام. این افسون مرا وادار کرده است بارها و بارها به آن برگردم، و به‌منظور یافتن روشهای جدید برای اثبات قضیه‌های اساسی آن تلاش کنم.

نظریهٔ کلاسیک در جهتهای مختلف توسعه یافت. به‌عنوان مثال، کرول در ۱۹۲۷ یک نظریهٔ گالوا برای میدانهای توسیعی نامتناهی پدید آورد، که تناظری یک‌به‌یک بین زیرمیدانها و زیرگروههای «بسته» برقرار می‌کند، و از این راه مفاهیم توپولوژیکی را وارد نظریه می‌کند. همچنین نظریهٔ گالوایی برای میدانهای توسیعی تفکیک‌ناپذیر وجود دارد، که در آن مفهوم اشتقاق[3] میدان نقش مهمی ایفا می‌کند، و نظریهٔ گالوایی برای حلقه‌های تقسیم موجود است که آن را کارتان و جیکوبسن در دههٔ ۱۹۴۰ مستقل از هم ایجاد کردند (ر.ک. [۱۰] و [۲۴]).

(ث) میدانهای متناهی. نظریهٔ میدانهای متناهی فی‌نفسه موضوع تحقیقاتی مستقلی است، ولی کاربردهای مهمی نیز در نظریهٔ اعداد، نظریهٔ کدگذاری، هندسه، و ترکیبیات دارد (ر.ک. [۹] و [۱۴]).

مراجع

1. I. G. Bashmakova nd I. Slavutin, Algebra and algebraic number theory, in *Mathematics of the 19^{th} Century*, ed. by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Brikhäuser, 1992, pp. 35-135.
2. G. Birkhoff, Current trends in algebra, *American Math. Monthly* 1973, **80**:760-782, and corrections in 1974, **81**: 746.
3. N. Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, 1984.
4. L. Corry *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, 1996.
5. H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, 1977.
6. D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1995.
7. E. Galois, Sur la théorie des nombres, English translation in *Introductory Modern Algebra: A Historical Approach*, by S. Stahl, Wiley, 1997, pp. 277-284.
8. H. Hasse, History of class field theory, in *Algebraic Number Theory, Proceedings of an Instructional Conference*, ed. by J. Cassels & A. Fröhich, Thompson Book Co., 1967, pp. 266-279.
9. K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1982.
10. N. Jacobson, *Basic Algebra I, II*, W. H. Freeman, 1974 & 1980.
11. B. M. Kiernan, The development of Galois theory from lagrange to Artin, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 1971/72, **8**: 40-154.
12. I Kleiner, The roots of commutative algebra in algebraic number theory, *Math. Mag.* 1995, **68**: 3-15.
13. D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826-1866*, Birkhäuser, 1999. (Translated from the German by A. Shenitzer.)
14. R. Lidl and H. Niederreiter, *Introduction to Finite Fields and their Applications*, Cambridge University Press, 1986.
15. E. H. Moore, A doubly-infinite system of simple groups, *New York Math. Soc. Bull.* 1893, **3**: 73-78.
16. W. Purkert, Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs I, II, *NTM* 1971, **8**: 23-37 and 1973, **10**: 8-20. (Unpublished English translation by A. Shenitzer.)
17. W. Purkert and H. Wussing, Abstract Algebra, in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, ed. by I. Grattan-Guinness, Routledge, 1994, vol. 1, pp. 741-760.
18. H. M. Pycior, George Peacock and the British origins of symbolical algebra, *Hist. Math.* 1981, **8**: 23-45.
19. J. H. Silverman and J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curvs*, Springer-Verlag, 1992.
20. E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, 2nd ed., Chelsea, 1950.
21. J.-p. Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, Wiley, 1988.
22. B.L. van der Waerden, Die Algebra seit Galois, *Jahresbericht d. DMV* 1966, **68**: 155-165.
23. H. Weber, Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Math, Ann.* 1893, **43**: 521-549.
24. D. Winter, *The Structure of Fields*, Springer-Verlag, 1974.
25. M. Scanlan, Who were the American postulate theorists?, *Jour. of Symbolic Logic* 1991, **56**: 981-1002.

* * * * * *

• I. Kleiner, "History of field theory", in *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser (2007) 63-78.

* ایزراییل کلاینر، دانشگاه یورک، کانادا

1. Zahlbericht 2. Tagaki 3. derivation