احتمال روی گروهها: قدم‌زدن تصادفی و پخش ناوردا •

اوران سافیـکاست *

ترجمهٔ آرش فهیم

بُرزدن کارتها، رشد حجم و نابرابریهای هارنک[1] چه ارتباطی با یکدیگر می‌توانند داشته باشند؟ همهٔ آنها در مطالعهٔ قدم‌زدن تصادفی[2] روی گروهها پیش می‌آیند. احتمال روی گروهها، در باب اندازه‌های احتمال و فرایندهایی تصادفی است که خواصشان تا حدی به‌وسیلهٔ یک ساختار گروهی زیربنایی تعیین می‌گردد. این شاخه واجد جنبه‌های گوناگونی است و می‌توان در آن هم نظریه‌های پیچیده و هم تحلیل مسائل ملموس را یافت. علی‌رغم وجود بسیاری مثالهای جالب دیگر، توجه ما معطوف به قدم‌زدن تصادفی و پخشها[3]ی ناورداست که هر دو فرایندهایی با نموهای مستقل مانا هستند. قدم‌زدن تصادفی به‌صورت جهشی [گسسته] است حال آنکه پخشها مسیرهای پیوسته دارند. این دو در خواص مهمّی اشتراک، دارند ولی از برخی جنبه‌ها، ازجمله ماهیت گروه زیربنایی مربوط، متفاوت‌اند: این گروه برای قدم‌زدن تصادفی، متناهی‌مولد است و برای پخش، همبند. توجه ما روی خواص اساسی این فرایندها متمرکز خواهد بود و از بسیاری از نتایج به‌دست آمده چشم می‌پوشیم؛ برخی از آنها را می‌توان در [V+] و [W] یافت.

هدف ما ارائهٔ نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی و پخش ناوردا روی گروههای دلخواه است با تأکید بر روابط این مباحث با جبر، آنالیز و هندسه. با مطالعهٔ این فرایندها امید داریم چیزی در بارهٔ گروه زیربنایی و مباحث مربوط به آن بیاموزیم. به‌عنوان مثال، برخی خواص جوابهای معادلهٔ پخش گرما و معادلهٔ لاپلاس روی پوشش عام خمینه‌های فشرده به خواص قدم‌زدن تصادفی روی گروه بنیادی مربوط می‌شود. از این دیدگاه، درک خواص بنیادی قدم‌زدن تصادفی روی رده‌های وسیعی از گروهها مهمتر از مطالعهٔ دقیق مثالهای خاص است. دانش فراهم‌آمده در مورد مثال حرکت براونی dبعدی (ازجمله پیشرفتهای زیبای اخیر که لاولر[4]، شرام[5] و ورنر[6] به‌دست آورده‌اند) ایده‌آلی دور از دسترس و شاید دست‌نیافتنی به‌نظر می‌رسد که موجب سؤالات، ایده‌ها و بینشهایی طبیعی می‌شود، ولی در مورد گروهها در حالت کلی، مجبوریم به اطلاعات بسیار کمتری قناعت کنیم.

این مقاله دو بخش دارد که یکی دربارهٔ قدم‌زدن تصادفی است و دیگری در بارهٔ پخش. این دو بخش از طرق بسیار با یکدیگر پیوند دارند ــ هم در سطح ایده‌ها و هم از لحاظ احکام و قضایا ــ و این پیوندها بیش از آن است که شرح آنها در این مقاله بگنجد. ورای اختلاف موقعیتها، که از گروه متقارن S_n تا گروه لی $SL_n(\mathbb{R})$ و تا چنبرهٔ بینهایت بعدی $\mathbb{T}^\infty$ گسترده‌اند، وحدتی بین مسائل مورد بحث وجود دارد و هر پیشرفت اساسی در یک مبحث خاص بر کل موضوع پرتو می‌افکند.

قدم‌زدن تصادفی

فرض کنید G گروهی باشد که توسط یک مجموعهٔ متقارن متناهی S تولید شده است. در نتیجه $s \in S$ ایجاب می‌کند $s^{-1} \in S$ و $G = \cup_{n=0}^{\infty} S^n$. گراف کیلی (G, S) دارای مجموعهٔ رئوس G و یالی از x به y است اگر و تنها اگر به‌ازای یک $s \in S$، $y = xs$. برای درک، ایدهٔ اساسی قدم‌زدن تصادفی، متحرکی را که روی رأسی از این گراف قرار دارد، تصوّر کنید. در هر مرحله، متحرک قدمی در طول یکی از یالهای مجاور، با انتخاب تصادفی یکنواخت یال از میان گزینه‌های ممکن، برمی‌دارد. بعد از n مرحله، متحرک، کجا خواهد بود؟

به‌طور کلیتر، اگر اندازهٔ احتمال p روی G داده شده باشد، قدم‌زدن تصادفی مربوط به آن، $(X_n)_{n\geq 0}$، در هر مرحله با انتخاب s در G با احتمال $p(s)$ و حرکت به $X_{n+1} = X_n s$ انجام می‌شود. توزیع بعد از n مرحله، توان پیچشی $p^{(n)}$ است که $p * q(x) = \sum_y p(y)q(y^{-1}x)$.

1. Harnack 2. random walks 3. diffusions 4. Lawler
5. Schramm 6. Werner

بُرزدن کارتها

به چه دلیل کسی ممکن است به مطالعهٔ قدم‌زدن تصادفی روی گروهها علاقه‌مند شود؟ شاید به این دلیل ساده که هر کسی قدم‌زدن تصادفی را [عملاً] به‌کار می‌برد، همان‌طورکه موسیو ژوردانِ مولیر نثر را به‌کار می‌برد بدون آنکه تشخیص دهد نثر است. در حقیقت، برای بیشتر روشهای برزدن کارتها می‌توان مدلی به‌صورت قدم‌زدن تصادفی روی گروه متقارن S_n ($n = ۵۲$) ارائه کرد که در آن روند برزدن به انتخاب تصادفی از میان یک مجموعهٔ خاص از جایگشتها تعبیر می‌شود. یک سؤال به‌وضوح در وسط صحنه قرار می‌گیرد: چند بار باید کارتها را بُر زد تا کاملاً مخلوط شوند؟ بیر[1] و دیاکونیس اثبات کردند که ۷ بار برزدن لازم و کافی است و پای این قضیه به نیویورک تایمز هم کشیده شد. نه تنها این سؤال برای خیلیها جذاب است بلکه ریاضیاتِ برزدن ورقْ زیبایی و غنای شگفت‌انگیزی دارد. اینکه چنین جواب دقیقی می‌توان به این سؤال داد خود نکتهٔ جذابی است که توسط دیاکونیس مورد مطالعه قرار گرفت و با نام «پدیدهٔ تقطیع[2]» مطرح شد.

برزدن کارتها خیلی پیش از این در ریاضیات مورد بحث قرار گرفته بود: به‌عنوان مثال، توسط پوانکاره، بورل و دیگران ([HO] را ببینید). امّا اولین قضیهٔ کمّی، قضیهٔ زیر از دیاکونیس و شهشهانی دربارهٔ ترانهش تصادفی است. برای توضیح این فرایند، فرض می‌کنیم که کارتها روی میزی به‌طور مرتب در یک ردیف چیده شده‌اند. دو کارت را به‌طور مستقل و یکنواخت به تصادف برمی‌داریم و با هم جابه‌جا می‌کنیم. برای ترانهش تصادفی، بعد از تقریباً $\frac{۱}{۲} n \log n$ بار تکرار این کار، همگرایی ناگهانی به توزیع یکنواخت روی می‌دهد که مثالی از پدیدهٔ تقطیع است. برای یک دست ورق استاندارد که ۵۲ کارت دارد، این به‌معنای مناسب‌بودن تقریباً ۱۰۰ ترانهش تصادفی برای کاملاً مخلوط‌کردن کارتهاست. برای بیان یک نتیجهٔ دقیق، توجه می‌کنیم که فاصلهٔ تفاضلی کل بین دو اندازهٔ احتمال p و q به‌صورت $||p - q||_{\mathrm{TV}} = \sup |p(A) - q(A)|$ تعریف می‌شود که سوپریمم روی تمام زیرمجموعه‌های A از G گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۱. برای ترانهش تصادفی روی گروه متقارن S_n، $p^{(k)}$ را قانون بعد از k مرحله می‌گیریم. اگر $k(n,c) = \frac{۱}{۲} n(c + \log n)$، آنگاه ثابت Aای موجود است که به‌ازای هر n و هر $c > ۰$،

$$||p^{(k(n,c))} - u_n||_{\mathrm{TV}} \geq Ae^{-c}$$

که در آن u_n اندازهٔ احتمال یکنواخت روی S_n است. به‌علاوه ثابت Bای و تابع مثبت fای با شرط $\lim_{c\to\infty} f(c) = ۰$ وجود دارند که به‌ازای هر n و هر $c < ۰$،

$$||p^{(k(n,c))} - u_n||_{\mathrm{TV}} \geq ۱ - f(c) - Bn^{-۱} \log n$$

ترانهشهای مجاور (جابه‌جایی کارتهای مجاور) و جادادن تصادفی (برداشتن کارتی به تصادف و قراردادن آن به تصادف در جایی مستقل) دو مثال دیگر از شیوه‌های برزدن‌اند که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای اینکه کارتها به‌طور یکنواخت کاملاً مخلوط شوند، تعداد دفعات لازم برزدن برای ترانهش مجاور از مرتبهٔ $n^۳ \log n$ و برای جادادن تصادفی از مرتبهٔ $n \log n$ است. در هر دو حالت ضریب ثابت دقیق شناخته شده نیست و وجود یا عدم وجود یک زمان تقطیع دقیق هم مسألهٔ حل‌نشده‌ای است. حدسهای پخته از این قرار است که به حدود ۳۰۰۰۰ ترانهش مجاور و چند صد جادادن تصادفی برای مخلوط‌کردن ۵۲ کارت نیاز است.

به‌ازای n بزرگ، حدود سه تا از هر چهار جفت جایگشت، گروه متقارن را تولید می‌کند اما سرنخی از این مسأله به‌دست نیامده است که برای کاملاً مخلوط‌کردن کارتها با استفاده از چنین جفتی از جایگشتها، معمولاً به چند بار برزدن نیاز است. در بیست سال گذشته، آلدوس[1]، دیاکونیس و همکاران و پیروان فراوان آنها از روشهای متنوعی برای درک قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متقارن و گروههای متناهی دیگر استفاده کرده‌اند. ما در اینجا دو رهیافت بسیار متفاوت را، تا حدی به‌تفصیل، شرح می‌دهیم. شرح مفصلتر را در [D] ببینید.

یک روش برزدن را در نظر بگیرید. در روش احتمالاتی موسوم به «جفت‌سازی»، دو نسخهٔ وابسته (X_n, Y_n) از فرایند ــ اولی مانا و دومی شروع شده از یک حالت ثابت دلخواه ــ با این خاصیت که با گذشت زمان با احتمال بیشتر و بیشتری مساوی می‌گردند، ساخته می‌شوند. فرض کنید T زمانی تصادفی است برابر با اولین nای که به‌ازای آن X_n و Y_n برابر می‌شوند. این T زمان جفت‌شدن نامیده می‌شود و می‌توان فاصلهٔ تفاضلی کل بین قانون $p^{(n)}$ مربوط به Y_n و اندازهٔ مانای u (یعنی قانون X_n) را به کران زیر محدود کرد.

$$||p^{(n)} - u||_{\mathrm{TV}} \geq \mathrm{Prob}(T > n)$$

بنابراین، مسأله به جفت‌سازی مناسبی که برای آن $\mathrm{Prob}(T > n)$ را بتوان تخمین زد، تبدیل می‌شود. این روش دارای این مزیت است که تنها به قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی محدود نمی‌گردد بلکه در مباحث دیگر نیز کاربرد وسیع دارد.

نظریهٔ نمایش (مثلاً نمایش گروههای متقارن) زمانی‌که قدم‌زدنْ تقارنهایی اضافی دارد امکانات عظیمی پیش‌رو می‌گذارد. مطالعهٔ قدم زدن تصادفی روی گروههای متناهی بزرگ را می‌توان به‌عنوان عملیات روی یک ماتریس بزرگ یعنی ماتریس احتمال تغییر وضعیتِ قدم‌زدن در نظر گرفت. نظریهٔ نمایش همچنین به کوچک‌کردن اندازهٔ مسأله از طریق قطری‌سازی جزئی ماتریس به‌صورت بلوکی کمک می‌کند. اما ممکن است بلوکها هم بعد بزرگی داشته باشند. مثلاً برای گروه متقارن S_n، اندازهٔ ماتریس اولیه $n! \times n!$ است و پس از تقسیم براساس نمایشهای تحویل‌ناپذیر، بزرگترین بلوک هنوز اندازهٔ $\sqrt{n!} \times \sqrt{n!}$ دارد. اما اگر قدم‌زدن تحت خودریختی داخلی ناوردا باشد (یعنی $x \mapsto axa^{-۱}$، که یک مثال معمولی از تقارنهای اضافی است که در بالا به آنها اشاره شد)، در این‌صورت هر بلوک یک ماتریس اسکالر است و می‌توان نتایج ظریفی، همانند حالت ترانهش تصادفی، به‌دست آورد. یک رهیافت بسیار مفید دیگر شامل مقایسهٔ قدم‌زدن‌های تصادفی مختلف و بررسیهای ترکیبیاتی مقدماتی ازجمله هندسهٔ مسیرها در گرافهای کیلی متناهی متناظر است. به‌عنوان نمونه، دیاکونیس و نویسندهٔ این مقاله از مقایسه با

1. Bayer 2. cut-off

1. Aldous

ترانهش تصادفی به‌منظور کرانیابی مؤثر برای تعداد برزدن‌های مورد نیاز در ترانهش مجاور، جادادن تصادفی و بسیاری مثالهای دیگر استفاده کرده‌اند.

با وجود این، نتایجی نظیر قضیهٔ ۱ تنها برای معدودی مثال خاص در دست است. هر چند نتایج رضایت‌بخش ضعیفتری برای معدودی رده‌های بزرگتر قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای متناهی به‌دست آمده است، هیچ شناخت کلی واقعی از چگونگی قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی حاصل نشده است، خصوصاً برای قدم‌زدن‌هایی که برپایهٔ مجموعه‌های کوچک، از مولّدها استوار است.

بنابراین، تعداد زیادی سؤال مبارزطلب و مسألهٔ حل‌نشده وجود دارد. یکی از آنها به‌شرح زیر است. در هر گراف دلخواه، مرز مجموعهٔ A، ∂A، مجموعهٔ تمام یالهایی است که A را به متمم آن، A^c، وصل می‌کنند. یک خانواده از (k,c)-بسط‌دهنده‌ها[1] عبارت‌است از گردایه‌ای نامتناهی از گرافهای متناهی که هر رأس آنها حداکثر k همسایه دارد و برای هر زیرمجموعهٔ A داریم

$$\min\{\#A, \#A^c\} \leq c\#\partial A$$

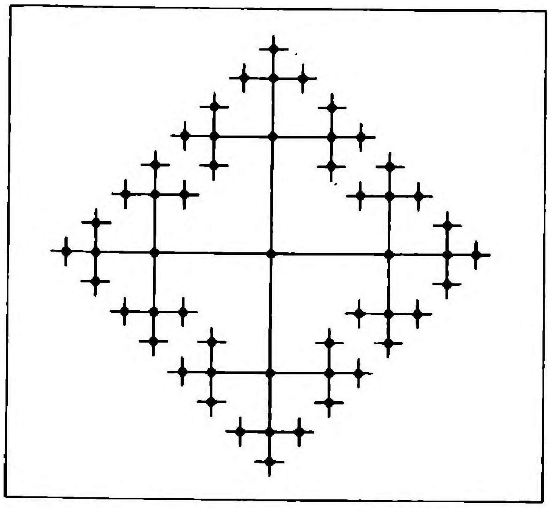
این گرافها خاصیتهای همبندی بسیار خوبی دارند و به‌عنوان مدلهایی برای شبکه‌های ارتباطی، فایدهٔ عملی نیز دارند. قدم‌زدن تصادفی روی بسط‌دهنده‌ها شامل چند حرکت موضعی است ولی به‌سرعت به تعادل میل می‌کند. اولین نمونه‌های بسط‌دهنده‌ها توسط مارگولیس[1] با استفاده از نظریهٔ نمایش گروه نامتناهی $SL_n(\mathbb{Z})$ مطابق خاصیت کاژدان (T) ساخته شدند ([L] را ببینید). اینکه آیا گروه متقارن می‌تواند خانواده‌ای از (k,c)-بسط‌دهنده‌ها به‌دست دهد، پرسشی است که پاسخی نیافته است.

پیش از گذار به گروههای نامتناهی، تأکید می‌کنیم که قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای متناهی و متناهی‌مولد از طرق زیادی به یکدیگر مربوط می‌شوند. نتایج مربوط به گروههای نامتناهی خاص (به‌عنوان مثال خاصیت کاژدان (T)) می‌تواند منجر به نتایج جالبی دربارهٔ خارج‌قسمتهای متناهی شود؛ برعکس، بسیاری از گروههای نامتناهی را می‌توان با گروههای متناهی تقریب زد. با این همه، یک قدم‌زنِ تصادفی با وسعت دید کم که روی گروه متناهی دوری بزرگ $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ قدم می‌زند به‌سرعت در نخواهد یافت که گروه، $\mathbb{Z}$ نیست. ماجرای موفقیت‌آمیز جدیدی که این نکته را روشن می‌سازد محاسبات گریگورچوک[2] و زوک[3] در باب اندازهٔ طیفی (یعنی اندازهٔ μ روی $[-1,1]$ که $p^{(n)}(e) = \int_{-1}^{1} \lambda^n d\mu(\lambda)$) مربوط به قدم‌زدن تصادفی روی حاصلضرب تاجی[4] $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ است (این گروه بعداً در بخش گروههای حل‌پذیر شرح داده خواهد شد). آنها کار را با تقریب‌زدن به‌وسیلهٔ قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی دنبال نمودند؛ به‌همراه لینل[5] و شیک[6] نشان دادند که این محاسبات به سؤالی از اتیا در مورد خواص تقسیم‌پذیری اعداد L^2-بتی فضاهای پوششی خمینه‌های فشرده پاسخ منفی می‌دهد.

تولد مبحث قدم‌زدن تصادفی روی گروهها

برای قدم‌زدن تصادفی روی یک گروه متناهی‌مولد، $\phi(n)$ را احتمال برگشت به نقطهٔ شروع بعد از $2n$ قدم بگیرید. بنابراین، اگر p اندازهٔ احتمالی باشد که قدم‌زدن بر مبنای آن انجام می‌پذیرد، داریم $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$. همه جا

1. Margulis 2. Grigorchuk 3. Żuk 4. wreath product
5. Linnel 6. Schick



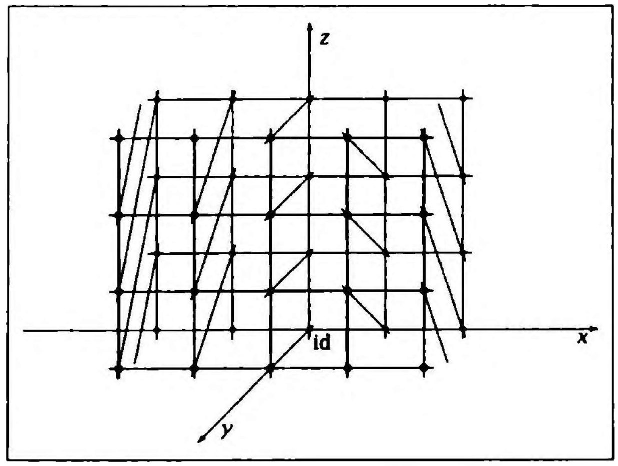
شکل۱ گوی با شعاع ۴ درگروه آزاد $\mathbb{F}_2$ روی دو مولّد.

فرض می‌کنیم محمل p گروه را تولید کند و p دارای محمل متناهی و متقارن باشد؛ یعنی $p(x) = p(x^{-1})$. به‌دلیل فرض تقارن، $\phi(n) = p^{(2n)}(e)$ تابعی نزولی از n است (رفتار $p^{(2n+1)}(e)$ اهمیت کمتری دارد: برای قدم‌زدن تصادفی ساده روی اعداد صحیح، $p^{(2n+1)}(e) = 0$ به‌ازای هر n).

قدم‌زدن تصادفی، بازگشتی است اگر، با احتمال ۱، بینهایت بار به‌نقطهٔ شروع بازگردد. در حدود سال ۱۹۲۰ پولیا ثابت کرد که قدم‌زدن تصادفی ساده روی مشبکهٔ مربعی در ابعاد ۱ و ۲ بازگشتی است ولی در ابعاد ۳ و بیشتر نیست. درحقیقت، نتایج مقدماتی نظریهٔ احتمال نشان می‌دهد که بازگشت با $\sum_n \phi^{(n)} = +\infty$ معادل است و برای مشبکهٔ مربعی dبعدی، $\phi(n) \sim c(d)n^{-d/2}$. از دیدگاه ما، درک رفتار $\phi^{(n)}$ اساسیترین مسأله در نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی است.

در ۱۹۵۸، کستن[1]، در پایان‌نامهٔ دکتری خود ــ با الهام از سؤال کاتس در مورد حاصلضرب ماتریسهای تصادفی 2×2 ــ موضوع قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی‌مولد را ابداع کرد. او در دنبال پایان‌نامه‌اش ثابت کرد که $\phi(n)$ با سرعت نمایی برحسب n نزول می‌کند اگر و تنها اگر گروهْ میانگین‌ناپذیر[2] باشد. گروه توپولوژیک G میانگین‌پذیر[3] است اگر تابعک پیوستهٔ خطی v تعریف‌شده روی فضای تمام توابع بورل اندازه‌پذیر کراندار موجود باشد که $v(f) \geq 0$ وقتی $f \geq 0$، $v(1) = 1$، و $v(f_x) = v(f)$ که $f_x(y) = f(xy)$. این چنین تابعک خطی، میانگین ناوردا از چپ نامیده می‌شود. با وجود ارتباط میانگین‌پذیری با ساختار جبری گروه، هیچ توضیح جبری قانع‌کننده‌ای برای تمایز گروههای میانگین‌پذیر و میانگین‌ناپذیر در دست نیست. قبل از کار کستن، فولنر میانگین‌پذیری را برحسب برابرْمحیطی مشخص کرد و ثابت کرد که یک گروه میانگین‌ناپذیر است اگر و تنها اگر ثابت C موجود باشد که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی $A \subset G$، $\#A \leq C\#\partial A$. این نتیجه‌های ابتدایی چگونگی ارتباط نظریهٔ قدم‌زدن تصادفی با ایده‌های جبری و هندسی را به‌خوبی نشان می‌دهد.

1. Kesten 2. nonamenable 3. amenable



شکل۲ قسمتی از گراف کیلی روی گروه هایزنبرگ.

تمام گروههای آبلی و، به‌طورکلیتر، تمام گروههای حل‌پذیر، میانگین‌پذیرند. شکل ۳ را ببینید. گروه آزاد $\mathbb{F}_k$ روی $k \geq 2$ مولد و گروه بنیادی یک رویهٔ دوبعدی جهت‌پذیر با گونای $g \geq 2$ میانگین‌ناپذیرند. ازجمله مثالهای حیرت‌آور گروههای میانگین‌ناپذیر، گروههایی هستند که همهٔ اعضایشان مرتبهٔ متناهی یکسان دارند. (این مثالهای عمیق متعلق به آدیان[1] است و در اثبات از محک هم‌رشدی گریگورچوک استفاده می‌شود). برای قدم‌زدن تصادفی طبیعی ساده روی گروه آزاد $\mathbb{F}_k$ ($k \geq 2$) داریم

$$\phi(n) \sim c(k) n^{-\frac{3}{2}} (2\sqrt{k}/(k+1))^{2n}, \quad n \to \infty \text{ وقتی }$$

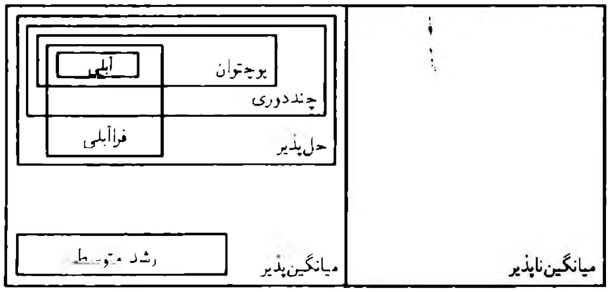
اما برای بیشتر قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروههای میانگین‌ناپذیر، محاسبهٔ سرعت دقیق نزول نمایی ϕ یعنی شعاع طیفی $\rho = \lim_{n\to\infty}\phi(n)^{1/2n}$ دشوار، و این سرعت نامعلوم مانده است.

تا بیست سال بعد از پایان‌نامهٔ کِستن، در مورد ویژگیهای قدم‌زدن تصادفی روی گروههای متناهی‌مولد پیشرفت کمی صورت گرفت. این حدس که تنها گروههای نامتناهی که پذیرای قدم‌زدن تصادفی بازگشتی‌اند، توسیعهای متناهی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^2$ هستند به حدس کستن معروف شد. مطابق آنچه خواهیم دید، درستی این حدس را واروپولوس در اواسط دههٔ ۸۰ ثابت کرد [V+] و [W]. حدس مشابه در مورد گروههای لی همبند توسط بالدی[2]، لوئونه[3] و پیریر[4] با استفاده از کارهای گیوارک[5]، کین[6]، و روینت[7] در ۱۹۷۷ حل و فصل شد، اما به‌دلیل ساختار نظریهٔ گروههای لی، ماجرای آن تا حدی متفاوت است.

ناورداهای شبه‌ایزومتریک

در دههٔ ۱۹۸۰ گروموف به ترویج مفهوم شبه‌ایزومتری [شبه‌طولپایی] بین دو فضای متریک و نگرش به گرافهای کیلی گروهها به‌عنوان اشیای هندسی بنیادی که به‌خودی خود شایستهٔ مطالعه‌اند، پرداخت. نگاشتهای شبه‌ایزومتری نگاشتهایی هستند که فواصل بزرگ را زیاد تغییر نمی‌دهند حال آنکه هیچ محدودیتی بر فواصل کم و توپولوژی موضعی اعمال نمی‌کنند. به‌عنوان نمونه، پوشش عام یک خمینهٔ ریمانی فشرده و گروه بنیادیش اشیایی شبه‌ایزومتریک

1. Adyan 2. Baldi 3. Lohoué 4. Peyrière 5. Guivarc'h 6. Keane 7. Roynette



شکل۳ نمودار کلی روابط شمول بین رده‌های گوناگون گروههای متناهی‌مولد.

هستند. دو گراف کیلی مربوط به دو مجموعهٔ مولد متناهی متفاوت از یک گروه واحد، شبه‌ایزومتریک هستند. یک گروه متناهی‌مولد با هر یک از زیرگروههایش که شاخص متناهی داشته باشند، شبه‌ایزومتریک است.

اگر گراف کیلی (G,S) داده شده باشد، تابع رشد حجم $V(n)$ تعداد اعضایی است که درگوی به شعاع n حول عضو همانی e قرار دارند، یعنی تعداد اعضایی از گروه که می‌توان آنها را به‌صورت حاصلضرب حداکثر n مولّد نوشت. نمود برابرمحیطی[1] تابع زیر است:

$$I(n) = \inf\{\#\partial A : A \subset G, \#A \geq n\}$$

رفتار تابع رشد حجم V و رفتار نمود برابرمحیطی I در بینهایت، ناورداهایی شبه‌ایزومتریک‌اند. مثالی غیرواضح‌تر از ناوردای شبه‌ایزومتریک، رفتار تابع قدم‌زدن تصادفی ϕ است ([W] را ببینید). این نحوهٔ نگرش به قدم‌زدن تصادفی بسیار ثمربخش از آب درآمده است. یک سؤال طبیعی این است که آیا این سه ناوردا، V، I و ϕ، همگی اطلاعات یکسانی در مورد گروه G می‌دهند یا نه.

بدیهی است که تابع رشد حجم، I یا ϕ را معین نمی‌کند: هر گروه میانگین‌ناپذیرْ تابع رشد حجم نمایی دارد، اما بسیاری گروههای میانگین‌پذیر هستند که تابع رشد حجمشان چنین است. خواهیم دید که حتی بین گروههای میانگین‌پذیر، تابع V رفتار I یا ϕ را معین نمی‌کند و رابطهٔ بین نمود برابرمحیطی I و احتمال تابع بازگشت ϕ کاملاً شناخته نشده است. مشکل مواجهه با این قسم سؤالات از گوناگونی و پیچیدگیِ ساختارهای جبری گروههای متناهی‌مولد دلخواه ناشی می‌شود. این است دلیل اهمیت قضیهٔ مشهور گروموف که می‌گوید هرگروهی که رشد حجم آن از بالا به یک چندجمله‌ای محدود باشد شامل یک زیرگروه پوچتوان با شاخص متناهی است. کشفِ مهم در زمینهٔ قدم‌زدن تصادفی، قضیهٔ زیر است که به واروپولوس تعلق دارد. [V+] را ببینید.

قضیهٔ ۲. فرض کنید ثابت مثبت cای موجود است، به‌طوری که به‌ازای هر n، $V(n) \geq cn^d$. در این صورت ثابتهای مثبت C_1 و c_1 موجودند به‌طوری که به‌ازای هر n، $\phi(n) \leq C_1 n^{-d/2}$ و $I(n) \geq c_1 n^{1-1/d}$.

توجه کنید که فرض این قضیه محدودیت بسیار اندکی برای گروه ایجاد می‌کند. از یک طرف این بدان معناست که نمی‌توان ابزارهای پیچیده‌ای برای اثبات این چنین نتیجه‌ای به‌کار برد. از طرف دیگر، ساختارگروهی جنبهٔ ضروری

1. isoperimetric profile

دارد چرا که گرافهایی منظم ـــ که لزوماً گراف کیلی نیستند ـــ موجودند که از هر نقطهٔ مرجع رشد نمایی دارند، هر چند قدم‌زدن تصادفی بازگشتی است. هم کلید اثبات اصلی واروپولوس و هم کلید استدلالی که رئوس آن در زیر می‌آید، یک نابرابری ساده از نوع حسابانی است. روی هر گراف کیلی (G,S) به‌ازای هر $y \in G$ و هر تابع با محمل متناهی f داریم

$$\sum_{x\in G}|f(xy)-f(x)| \le |y|\sum_{x\in G}|df(x)|$$

که در آن $|y|$ طول کلمهٔ y (کوچکترین k که $y = s_۱ \cdots s_k$ و $s_i \in S$)، و $|df(x)| = \sum_{s\in S}|f(xs)-f(x)|$ همتای گسستهٔ گرادیان است. این نابرابری را برای اثبات نابرابری تابعی زیر که شامل وارون تابع V یعنی $w(t) = \inf\{n : V(n) > t\}$ است می‌توان به‌کار برد. با قراردادن $\Psi(t) = Cw^۲(۸t)$، داریم

$$||f||_۲^۲ \le \Psi(||f||_۱^۲/||f||_۲^۲)\,||df||_۲^۲ \qquad (N)$$

که برای هر تابع f با محمل متناهی روی G، که در آن ℓ^pـ نرمها برحسب اندازهٔ شمارشی‌اند، برقرار است. اگر $V(n) \ge cn^d$، در می‌یابیم که $\Psi(t) \le Ct^{۲/d}$ و بنابراین، نابرابری (N) شبیه نابرابری روی $\mathbb{R}^d$ است که توسط نش در مقالهٔ معروفش دربارهٔ پیوستگی هولدری جوابهای معادلات سهموی معرفی شد. نش نابرابریش را برای کنترل رفتار نیم‌گروههای پخش گرمای خاصی به‌کار برد. در این زمینه، (N) به حکم مربوط به ϕ در قضیهٔ ۲ منجر می‌گردد.

قلمرو چندجمله‌ایها

با اندکی کار، از قضیهٔ رشد چندجمله‌ای گروموف و قضیهٔ ۲ تأییدی برای حدس کستن به‌دست می‌آید: تنها گروههای متناهی‌مولدی که قدم‌زدن تصادفی بازگشتی را می‌پذیرند، توسیعهای متناهی $\{۰\}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^۲$ هستند. کارهای گروموف و واروپولوس همچنین اجزای اصلی نتایج دقیقتر زیرند، که در آنها برای دو تابع مثبت، $f(n) \approx g(n)$ بدین‌معنی است که ثابتهای c و C موجودند که $۰ < c \le \frac{f(n)}{g(n)} \le C < +\infty$.

قضیهٔ ۳. برای هر گروه متناهی‌مولد G، خواص زیر معادل‌اند: (۱) $V(n) \approx n^d$؛ (۲) $I(n) \approx n^{۱-۱/d}$؛ (۳) $\phi(n) \approx n^{-d/۲}$؛ (۴) G دارای یک زیرگروه پوچتوان N با شاخص متناهی است، و $d = \sum_i ir_i$ که در آن r_i رتبهٔ بی‌تابی گروه آبلی $N_i/N_{i+۱}$ است و (N_i) یک رشتهٔ پایین مرکزی N است که به‌صورت $N_۱ = N$ و $N_{i+۱} = [N, N_i]$ تعریف می‌شود.

بنابراین، در قلمرو چندجمله‌ای/پوچتوانی، V، I و ϕ اساساً اطلاعات یکسان می‌دهند. ساده‌ترین گروه غیرآبلی با رشد چندجمله‌ای گروه شمارش‌پذیر هایزنبرگ است

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & y & z \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} ; x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$$

این گروه به‌وسیلهٔ چهار ماتریس حاصل از قراردادن $x = \pm ۱$ به‌همراه $y = z = ۰$ و $y = \pm ۱$ به‌همراه $x = z = ۰$ تولید می‌شود. گراف کیلی متناظر در شکل ۲ نشان داده شده است. برای آن، $V(n) \approx n^۴$، $I(n) \approx n^{۳/۴}$ و $\phi(n) \approx n^{-۲}$.

رشد فوق‌چندجمله‌ای

گروههای زیادی هستند که حجم آنها سریعتر از هر چندجمله‌ای رشد می‌کند. در حقیقت اکثر گروهها این‌چنین هستند، حتی در میان گروههای میانگین‌پذیر. بنابراین نتیجهٔ زیر مکمل مفیدی برای قضیهٔ ۲ است.

قضیهٔ ۴. $\alpha \in [۰,۱]$ را ثابت بگیرید، فرض کنید ثابت مثبت cای موجود است که به‌ازای هر n، $\log V(n) \ge cn^\alpha$. در این صورت، ثابتهای مثبت $c_۱$ و $c_۲$ موجودند به‌طوری که به‌ازای هر n، $\log\phi(n) \le -c_۱ n^{\alpha/(\alpha+۲)}$ و $I(n) \ge c_۲ n/[\log n]^{۱/\alpha}$.

کران ϕ را واروپولوس و کران برابرمحیطی را کولون[۱] و نویسندهٔ این مقاله به‌دست آورده‌اند. این قضیه می‌گوید که برای هر گروه با رشد نمایی، $\log\phi(n) \le -c_۱ n^{۱/۳}$ و $I(n) \ge c_۲ n/\log n$. در زیر خواهیم دید که این کرانها برای برخی گروهها دقیق‌اند ولی برای همه دقیق نیستند. قضیهٔ ۴ برای گروههای با رشد متوسط نیز که رشد حجمشان از هر چندجمله‌ای سریعتر و از هر نمایی کندتر است، مفید است. وجود چنین گروههایی در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ توسط گریگورچوک کشف شد. در مورد قدم‌زدن تصادفی روی چنین گروههایی اطلاعات کمی در دست است، اما تحقیقات فزاینده‌ای در مورد ساختار ردهٔ بزرگی از مثالها انجام می‌شود ([BGS] را ببینید).

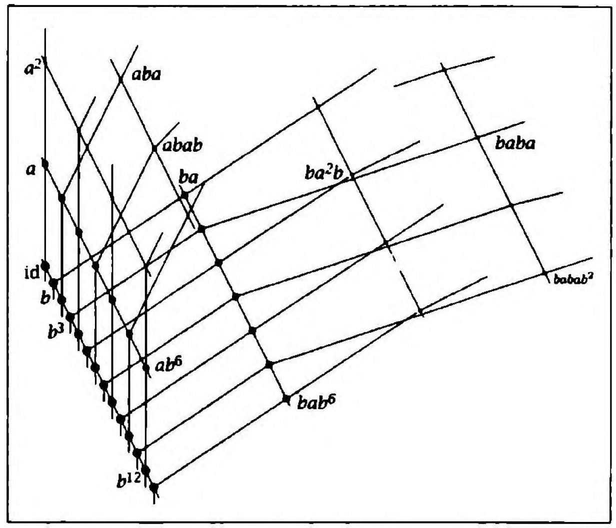
گروههای حل‌پذیر

بنا به قضیه‌ای از میلنر و ولف، گروههای حل‌پذیر یا رشد چندجمله‌ای و یا رشد نمایی دارند. شکل ۳ را ببینید. این بحث را با ذکر نتیجه‌ای بسیار رضایت‌بخش در مورد گروههای چند دوری[۲] آغاز می‌کنیم. بنا به یک قضیهٔ ساختاری عمیق، گروههای چنددوری، با تقریب توسیع متناهی، زیرگروههای میانگین‌پذیر گسستهٔ گروههای لی همبند هستند. در اینجا لفظ گسسته به توپولوژی‌ای که زیرگروه ازگروه مرجع به ارث برده برمی‌گردد. گروههای چنددوری را به‌دلیل ساختار جبری خاص آنها می‌توان خوب درک کرد، و حاصل آن، نتیجهٔ رضایت‌بخش زیر است.

قضیهٔ ۵. فرض کنید G زیرگروه میانگین‌پذیر گسستهٔ یک گروه لی همبند باشد. در این‌صورت G متناهی‌مولد است و نیز یا عدد صحیح dای موجود است که $V(n) \approx n^d$ یا $V(n)$ رشد نمایی دارد. در حالت دوم، $I(n) \approx n/\log n$، $\log\phi(n) \approx -n^{۱/۳}$.

کران پایین $\log\phi$ را آلکسوپولوس و کران بالای I را پیتت به‌دست آورده است. کرانهای دیگر از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شوند. یکی از ساده‌ترین مثالهای

1. Coulhon 2. polycyclic



شکل۴ بخشی از گراف کیلی $\mathbb{A}_{۲} = \langle a, b : aba^{-۱} = b^{۲} \rangle$. برای این گراف کیلی داریم: $\log \phi(n) \approx -n^{۱/۲}$، $I(n) \approx n/\log n$.

گروه چند دوری با رشد نمایی، ضرب نیم‌مستقیم $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^{۲}$ است که عمل گروه آن برای $(x,u),(y,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{۲}$ به شکل

$$(x,u)\cdot(y,v) = (x+y, u+A^x v) \quad \text{با} \quad A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

تعریف می‌شود. این نسخه‌ای گسسته از گروه لی Sol است که یکی از ۸ هندسهٔ به‌کار برده شده در توصیف خمینه‌های ۳بعدی در برنامهٔ هندسی‌سازی ترستن است.

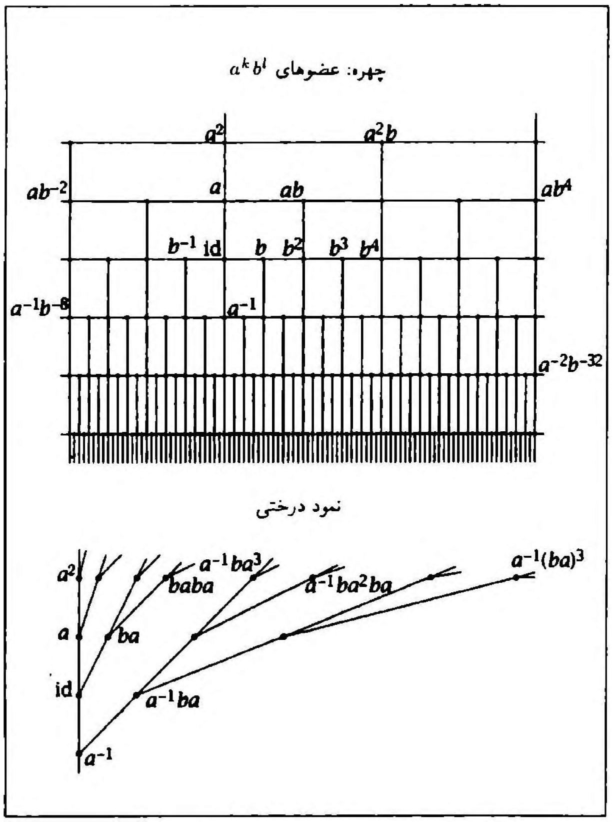
برای گروههای حل‌پذیر کلی با رشد حجم نمایی، اوضاع متفاوت است. ساده‌ترین گروههای حل‌پذیر، گروههای فراآبلی هستند که گروه تعویضگر آنها آبلی است. حتی در این ردهٔ گروهها، رفتار توابع I و ϕ ممکن است تغییرات وسیعی داشته باشد. به‌ازای $۱ < \lambda$، فرض کنید $\mathbb{A}_\lambda$ زیرگروهی از گروه آفین $ax+b$ باشد که توسط $u_\pm(x) = x \pm ۱$ و $v_\pm^\lambda(x) = \lambda^{\pm ۱}x$ تولید می‌شود. این گروهها فراآبلی هستند و رشد حجم نمایی دارند. آنها در $ax+b$ گسسته نیستند و بیشترشان چند دوری نیستند. وقتی λ عدد صحیح است، $\mathbb{A}_\lambda$ را می‌توان به‌صورت $\langle a, b : aba^{-۱} = b^\lambda \rangle$ عرضه کرد که در آن $a = v_+$ و $b = u_+$ (اینها به‌نام گروههای باumسلاگ-سولیتار[1] نیز شهرت دارند).

شکلهای ۴ و ۵ گراف کیلی $\mathbb{A}_{۲}$ را نشان می‌دهند. وقتی λ جبری است، برای $\mathbb{A}_\lambda$ داریم $I(n) \approx n/\log n$ و $\log \phi(n) \approx -n^{۱/۳}$. وقتی λ متعالی است، $\mathbb{A}_\lambda$ با حاصلضرب تاجی $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ یکریخت است و برای آن، $\log \phi(n) \approx -n^{۱/۳}(\log n)^{۲/۳}$.

در مطالعهٔ گروههای فراآبلیْ حاصلضربهای تاجی $\mathbb{Z}_{۲} \wr \mathbb{Z}$ نقش مهمی ایفا می‌کنند. اینها را «گروههای چراغ‌دار[2]» نیز می‌نامند. فرض کنید $\mathbb{Z}^d$ نقشهٔ

1. Baumslag-Solitar

۲. lamplighter. در گذشته به شخصی که چراغهای خیابان را روشن می‌کرد اطلاق می‌شد.-م

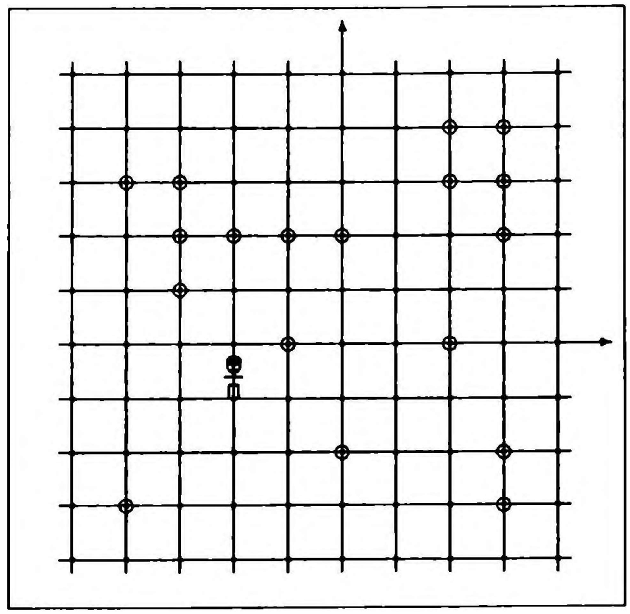


شکل۵ چهره و نمود $\mathbb{A}_{۲} = \langle a, b : aba^{-۱} = b^{۲} \rangle$.

(چندبعدی و نامتناهی) یک شهر باشد. در هر چهارراه یک لامپ که می‌تواند خاموش یا روشن باشد وجود دارد (تنها تعدادی متناهی لامپ می‌تواند روشن باشد). به‌علاوه، یک چراغ‌دار با گشتن در شهر چراغها را روشن و خاموش می‌کند. هر عضو $\mathbb{Z}_{۲} \wr \mathbb{Z}^d$ را می‌توان به‌صورت «منظرهٔ» تشکیل شده از لامپها و چراغ‌دار که در جایی ایستاده است، تصوّر کرد. شکل ۶ را ببینید. توجه کنید که این توصیف روشن، از نشان‌دادن چگونگی ضرب دو عنصر عاجز است. با این حال، حرکتهای اساسی در قدم‌زدن تصادفی طبیعی روی $\mathbb{Z}_{۲} \wr \mathbb{Z}^d$ را می‌توان به‌صورت $۲d$ حرکت ممکن چراغ‌دار به رئوس مجاور به‌همراه عملِ خاموش یا روشن‌کردن چراغ در رأسی که در آن قرار می‌گیرد توصیف کرد. قضیه‌ای از دانسکر[1] و وارادان[2] می‌گوید N_n، تعداد نقاطی که با قدم‌زدن تصادفی ساده روی $\mathbb{Z}^d$ تا زمان n فتح می‌شوند، در رابطهٔ $\log \mathbb{E}(e^{-\lambda N_n}) \sim -c(\lambda,d)n^{d(d+۲)}$ وقتی $n \to \infty$ صدق می‌کند که در آن $\mathbb{E}$ امید ریاضی است. معلوم می‌شود تنها چیزی که باید ثابت کرد این است که $\log \phi(n) \approx -n^{d/(d+۲)}$ روی گروه چراغ‌دار $\mathbb{Z}_{۲} \wr \mathbb{Z}^d$ برقرار است [PSa].

مثالهای فوق نشانگر این است که برای گروههای فراآبلی متناهی‌مولد با رشد نمایی، بینهایت رفتار متفاوت از ϕ سر می‌زند (در حقیقت، با استدلالهایی اضافی، دیده می‌شود که این امر در مورد گروههای فراآبلیِ متناهیاً عرضه شده صادق است). برای نمود برابرمحیطی I هم اوضاع به همین شکل است و ارشلر (دیوبنیا)[3] در یک تحقیق امیدبخش در حال به‌دست آوردن

1. Donsker 2. Varadhan 3. Erschler (Dyubina)



شکل ۶ یک عضو گروه دوبعدی چراغدار $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2$.

کرانهای دقیق برابرمحیطی جدیدی برای حاصلضربهای تاجی است. دو مسألهٔ مبارزطلب حل‌نشده و مرتبط با هم در مورد گروههای فراآبلی متناهی‌مولد به‌شرح زیرند: (الف) رده‌بندی تمام رفتارهای ممکن ϕ و I؛ (ب) آیا رفتار ϕ رفتار I را معیّن می‌کند و برعکس؟ بنابراین علی‌رغم برخی دستاوردهای قابل توجه، درک کامل رفتار قدم‌زدن تصادفی و برابرمحیطی روی گروههای متناهی‌مولد، حتی در مورد گروههای حل‌پذیر هنوز بسیار دور از دسترس است. این امر در تقابل با نتایجی در مورد پخش ناوردا روی گروههای لی همبند است که می‌خواهیم آنها را توضیح دهیم؛ در مورد اخیر، به یمن وجود نظریهٔ ساختاری ساده‌تر و رضایت‌بخش‌تر، تصویر کاملی پدیدار شده است.

فرایندهای پخش ناوردا

حال بیایید صحنه را قدری تغییر دهیم و فرایندهای پخش ناوردا از چپ را روی گروههای موضعاً فشردهٔ همبند بررسی کنیم. حرکت براونی روی $\mathbb{R}^d$ مثال کلاسیک در این زمینه است و بیشتر مطالعات روی آن انجام گرفته است. این فرایندها را می‌توان به‌طرق مختلف مشخص نمود، ولی خواص حیاتی آنها داشتن نموهای مستقل مانا و پیوستگی مسیر است. به بیان دیگر، بنا به قضیه‌ای از هانت[1]، مولّدهای بینهایت کوچک[2] آنها عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دومی هستند که به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$L = \sum_i X_i^2 + X.$$

که در آن هر X_i میدان برداری ناوردا از چپ است و بنابراین می‌توان آن‌را عضوی از جبر لی در نظر گرفت. حتی اگر G گروه لی نباشد این امر معنی

1. Hunt 2. infinitesimal generators

دارد، زیرا گروههای همبند موضعاً فشردهٔ حد تصویری گروههای لی هستند (به‌عنوان مثال، [H] را ببینید). تشابه این با قدم‌زدن تصادفی جالب توجه است و نقش مولّدها را در اینجا X_iها ایفا می‌کنند.

خانواده‌ای از اندازه‌های احتمال $(\mu_t)_{t>0}$ نیم‌گروه پیچشی را تشکیل می‌دهد اگر $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ و $\mu_t \to \delta_e$ وقتی $t \to 0$. این نیم‌گروه گاوسی است اگر به‌ازای هر همسایگی U از e، وقتی $t \to 0$، $t^{-1}\mu_t(G/U) \to 0$. این خاصیت با پیوستگی مسیرهای نمونه‌ای فرایند تصادفی مربوط معادل است. برای هر فرایند پخش ناوردا از چپ $Z = (Z_t)$ روی گروه G، قانونهای μ_t برای Z_t، $t > 0$، یک نیم‌گروه پیچشی گاوسی ایجاد می‌کند که برای آن تابع $u(t,x) = \int_G f(x,y)d\mu_t(y)$ جواب معادلهٔ پخش گرمای $(\partial_t - L)u = 0$، $u(0,x) = f(x)$ است.

برای تکمیل این تصویر با دورنمایی هندسی، یک «تابع فاصلهٔ» طبیعی $d(x,y)$ (با مجازشمردن مقدار ∞) به‌نام فاصلهٔ ذاتی یا فاصلهٔ کارنو-کاراتئودوری، معرفی می‌کنند که به‌صورت

$$d(x,y) = \sup\{f(x) - f(y) : f \in C^\infty(G), \Gamma(f,f) \le 1\}$$

تعریف می‌شود که در آن $\Gamma(f,f) = \frac{1}{2}(Lf^2 - 2fLf) = \sum_i |X_i f|^2$ «مجذور میدان»[1] است. این تعریف کلیتر است ولی اساساً با تعاریف دیگری که برپایهٔ ایدهٔ طول مسیر هستند معادل است. خصوصاً اگر G یک گروه لی باشد و L عملگر لاپلاس-بلترامی یک ساختار ریمانی ناوردا از چپ باشد، آنگاه d فاصلهٔ ریمانی است. تابع رشد حجم $V(t)$ی متناظر با آن به‌صورت حجم هر گوی متری با شعاع t نسبت به اندازهٔ هار ناوردا از چپ روی G تعریف می‌شود.

سؤالهای اصلی در مورد این پخشها عبارت‌اند از: آیا μ_t چگالی هموار برحسب اندازهٔ هار دارد؟ و اگر دارد، رفتار این چگالی چیست؟ رفتار این چگالی چگونه به خواص تابع فاصلهٔ d، به تابع رشد حجم، و به خانوادهٔ میدانهای برداری (X_i) مربوط می‌شود؟ چگونه با ساختار جبری گروه G ارتباط می‌یابد؟ با فرض اینکه $(\mu_t)_{t>0}$ یک چگالی پیوستهٔ $x \mapsto \mu_t(x)$ دارد، مقدار $\mu_t(e)$ در مبدأ دقیقاً جایگزین احتمال بازگشت $\phi(n)$ در قسمت اول مقاله است و اساسیترین سؤال مربوط است به رفتار $\mu_t(e)$ وقتی‌که t به صفر یا بینهایت میل می‌کند.

برای اختصار، توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که $L = \sum X_i^2$ یعنی $X = 0$. حالتی که $X \neq 0$، جالب است و هم به استدلالهای اضافی و هم به ایده‌های متفاوتی نیاز دارد، اما این بیشتر یک مسألهٔ تکنیکی است.

نظریهٔ موضعی

G را یک گروه لی همبند با بعد n در نظر بگیرید. فرض طبیعی در این زمینه این است که خانوادهٔ (X_i) جبر لی G را تولید می‌کند. این بدان‌معنی است که X_iها به‌همراه تعویضگرهایشان از هر مرتبه‌ای، به‌طور خطی جبر لی را تولید می‌کنند. ما همواره این فرض را در نظر داریم. برای عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ دوم L، این شرط با شرط مشهور «زیربیضوی بودن» هورماندر[2] متناظر

1. carré du champs 2. Hörmander

است. نظریه‌ای موضعی که درصدد بیان آن هستیم می‌تواند (و باید) به‌عنوان مدلی برای بررسی عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیربیضوی عمومی که کار عمیق‌تر و مشکل‌تری است در نظر گرفته شود. هندسهٔ فاصلهٔ d به خودی خود یک عرصهٔ تحقیقاتی به‌نام هندسهٔ زیرریمانی است و ارتباط نزدیکی با نظریهٔ کنترل دارد. از یک جهت ساختار گروه در اینجا بی‌اهمیت است هر چند به ساده‌سازیهای مهمی منجر می‌گردد ([V+] را ببینید).

تحت شرط هورماندر، μ_t به‌ازای هر $t > 0$ یک چگالی مثبت هموار دارد، فاصلهٔ d نسبت به هر فاصلهٔ اقلیدسی موضعی مشخص، پیوستهٔ هولدری است و عملگر L زیربیضوی است. عدد صحیح $m \in [n, 1 + \binom{n}{2}]$، وابسته به خانوادهٔ (X_i)، موجود است که وقتی $t \to 0$، $\mu_t(e) \sim ct^{-m/2}$. این m با این حقیقت نیز که $V(t) \sim bt^m$ وقتی $t \to 0$، مشخص می‌شود. درست مانند حالت توابع همساز در فضای اقلیدسی، ثابت $C = C_L$ موجود است که به‌ازای هر $r \in (0, 1)$ و هر جواب مثبت $Lu = 0$ در d-گوی $B(x, r)$ داریم

$$\sup_{B(x,r/2)} u \leq C \inf_{B(x,r/2)} u \qquad \text{(GH)}$$

ماهیت هندسی این نابرابری هارنک آن را به‌صورت یک ابزار قوی درمی‌آورد و نقش ایفاشده توسط فاصلهٔ d را روشن می‌سازد.

پس تحت شرط هورماندر، نیم‌گروههای گاوسی متقارن روی گروههای لی بسیار خوش‌رفتار هستند. قبل از بحث دربارهٔ رفتار آنها در درازمدت و در مقیاس بزرگ، مختصراً در حالتی که G گروه لی نیست، آنچه را به‌طور موضعی رخ می‌دهد بررسی می‌کنیم. این حالت به شکلی بسیار نابدیهی نظریهٔ عمومی آنالیز و هندسه روی فضاهای دیریکله را روشن می‌کند. مثالهای بسیار ساده ولی جالب، حاصلضرب تعداد شمارایی گروه دایره و حاصلضرب تعداد شمارایی گروه متعامد با ابعاد مختلف‌اند. در این حالات، آیا $(\mu_t)_{t>0}$ می‌تواند به‌ازای هر $t > 0$ چگالی پیوستهٔ خوبی داشته باشد؟ با وجود اینکه نظریهٔ این‌گونه نیم‌گروههای گاوسی در [H] عرضه شده است، این پرسش در آنجا پاسخ داده نشده است. طبیعی است که (حداقل در ابتدا) توجهمان را به ناورداهای دوطرفه یعنی نیم‌گروههای گاوسی مرکزی روی گروههای فشرده معطوف کنیم. در حقیقت، در حالت چنبرهٔ بینهایت بعدی $\mathbb{T}^\infty$ مسائل حل‌نشدهٔ جالب و مبارزطلب زیادی وجود دارد؛ در این حالت، مولّد بینهایت کوچک را می‌توان به‌سادگی به‌صورت $L = \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_i\partial_j$ نوشت و این مجموع نامتناهی را چنین تعبیر کرد که روی توابعی که فقط به تعدادی متناهی مختص وابسته‌اند، عمل می‌کند.

نتیجه‌ای که اخیراً بندیکف[1] و نویسندهٔ مقاله به‌دست آورده‌اند، این است که هر گروه فشرده، همبند، موضعاً همبند و متریک‌پذیر G تعداد زیادی نیم‌گروه گاوسی مرکزی با یک چگالی مثبت پیوستهٔ هموار نسبت به اندازهٔ هار دارد. کمیت $\mu_t(e)$ با میل‌کردن t به صفر می‌تواند به اشکال متفاوت زیادی، ازجمله با رفتارهایی نظیر $e^{[\log 1/t]^{1+\lambda}}$، $e^{t^{-\lambda}}$ و $e^{e^{t^{-\lambda}}}$ و غیره که $\lambda > 0$، رشد انفجارگونه داشته باشد.

یک شرط کافی (که خیلی با شرط لازم فاصله دارد) برای اینکه $(\mu_t)_{t>0}$ چگالی پیوسته‌ای داشته باشد این است که فاصلهٔ ذاتی وابسته به آن پیوسته باشد. این شرط نیز یک نابرابری بیضوی هارنک را ایجاب می‌کند، به این صورت که اگر d پیوسته باشد آنگاه به‌ازای هر دامنهٔ Ω و هر مجموعهٔ فشردهٔ K در Ω، ثابت $C(\Omega, K)$ موجود است به طوری‌که هر جواب مثبت پیوستهٔ $Lu = 0$ در Ω در شرط

$$\sup_K u \leq C(\Omega, K) \inf_K u \qquad \text{(H)}$$

صدق می‌کند.

ببینید که ماهیت هندسی نابرابری در اینجا گم شده است، به این مفهوم که نمی‌دانیم چگونه با انتخاب زوج (Ω, K) به‌صورت گویهای هم‌مرکز مناسبی (نظیر آنچه در (GH) بود)، ثابت $C(\Omega, K)$ را مستقل از مقیاس بکنیم. این حقیقتِ شگفت‌انگیز را که یک چنین نابرابری هارنک در ابعاد نامتناهی می‌تواند وجود داشته باشد، بندیکف و برگ[1] به‌طور مستقل در پایان‌نامه‌های دکتری خود کشف کردند. جالب توجه این است که نابرابری (H) را می‌توان برحسب رفتار $\mu_t(e)$ مشخص کرد.

قضیهٔ ۶. فرض کنید L مولّد بینهایت کوچک یک نیم‌گروه گاوسی مرکزی متقارن $(\mu_t)_{t>0}$ روی یک گروه فشردهٔ همبند G باشد. در این صورت L در نابرابری بیضوی هارنک (H) صادق است اگر و تنها اگر $\log\mu_t(e) = o(1/t)$ وقتی $t \to 0$، [BS].

یکی از اجزای ضروریِ اثبات قضیهٔ ۶، بررسی پخشهای ناوردای دوطرفه روی گروههای لی سادهٔ فشرده است که نقش ایفا شده توسط بعد را آشکار می‌سازد و شامل رفتار در زمان کوتاه، متوسط و طولانی است.

رفتار در درازمدت روی گروههای لی

اکنون به گروههای لیِ همبند نافشرده برمی‌گردیم و رفتار $\mu_t(e)$ را در درازمدت وقتی t به بینهایت میل می‌کند، تحت این شرط ثابت که خانوادهٔ (X_i) جبر لی را تولید کند، مورد بحث قرار می‌دهیم. این رفتارِ در زمان طولانی حقیقتاً قلب مطلب است، زیرا همان جایی است که ساختار گروه مهمترین نقش را ایفا می‌کند.

در آغاز [یادآور می‌شویم که] رفتار رشد حجم V در بینهایت، مستقل از انتخاب خانوادهٔ (X_i) است. گیوارک در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ ثابت کرد که رشد حجم در بینهایت یا نمایی است یا با یک تابع توانی قابل مقایسه است که نمای Dی آن عدد صحیحی است که تنها به گروه مورد بحث وابسته است. گروهی که برای آن V رفتار چندجمله‌ای از خود بروز می‌دهد گروه نوع (R) نامیده می‌شود که R نمایندهٔ rigid [صلب] است. نمایش الحاقی G با ارتقاء[2] عمل خودریختی داخلی $x \mapsto axa^{-1}$ به جبر لی به‌دست می‌آید. گروه نوع (R) را می‌توان به‌طور جبری با استفاده از مفاهیم نمایش الحاقی، که ویژه‌مقدارهایش موهومی محض هستند، مشخص کرد. گروه $U(m)$ متشکل از تمام ماتریسهای حقیقی بالا مثلثی تک‌توانِ حقیقی $m \times m$ از نوع (R) است و برای آن، $V(t) \approx t^D$ که $D = \frac{1}{6}(m-1)m(m+1)$.

گروههای نوع (R) میانگین‌پذیر و تک‌مدولی هستند، یعنی، دارای اندازهٔ هار ناوردا از دوطرف‌اند، اما بسیاری گروههای لیِ میانگین‌پذیر تک‌مدولی

1. Bendikov

1. Berg　　2. lift

با رشد نمایی (که بنابراین، از نوع (R) نیستند) وجود دارند. ساده‌ترین مثال چنین گروهی، گروه Sol است که در بخش مربوط به قدم‌زدن تصادفی روی گروههای حل‌پذیر معرفی شد. Sol را می‌توان به‌صورت حاصلضرب نیم‌مستقیم $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}$ با عمل ضرب در $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ توصیف کرد.

رفتار $\mu_t(e)$ روی گروههای لی میانگین‌پذیر تک‌مدولی با قضیهٔ زیر تشریح می‌شود.

قضیهٔ ۷. برای هر گروه لی همبند تک‌مدولی میانگین‌پذیر، اگر $V(t) \approx t^D$ وقتی $t \to \infty$، آنگاه $\mu_t(e) \approx t^{-D/2}$ وقتی $t \to \infty$. اگر V نمایی باشد آنگاه $\log \mu_t(e) \approx -t^{-1/3}$ وقتی $t \to \infty$.

کران دوطرفه تحت رشد چندجمله‌ای از آنِ واروپولوس است. در مورد رشد نمایی، کران پایین از آنِ الکسوپولوس وکران بالا از آنِ واروپولوس است که برای دومی اثباتهای مجزای مستقلی توسط هبیش[1] و رابینسن عرضه شده است. [V+] را ببینید. قضیهٔ ۷ مشابه قضیهٔ ۵ است و می‌توان آن‌را با گزاره‌ای در مورد نمود برابرمحیطی، همانند قضیهٔ ۵، تکمیل کرد. ([P]، [V+] را ببینید). این دو نتیجه، مربوط به قدم‌زدن تصادفی و بخش، همزمان پدیدار شدند و با روشهای مشابه قابل اثبات‌اند. اخیراً در اثری از الکسوپولوس [A] قضیهٔ ۷ با رفتار مجانبی در درازمدت روی گروههای با رشد حجم چندجمله‌ای، یعنی گروههای نوع (R)، تکمیل شده است. رهیافت الکسوپولوس، که با ساختار جبری گروههای نوع (R) ارتباط محکمی دارد، از تکنیکها و ایده‌های حوزه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE)، به‌نام نظریهٔ همگن‌سازی، گرفته شده است که با رفتار بزرگ، مقیاس عملگرهای دیفرانسیلی با ضرایب دوره‌ای در $\mathbb{R}^n$ سروکار دارد.

البته، برای گروههای میانگین‌ناپذیر، $\mu_t(e)$ با سرعتی نمایی زوال می‌یابد؛ این سرعت با فاصلهٔ طیفی λی $L = \sum X_i^2$ توصیف می‌شود که به‌صورت اینفیمم خارج‌قسمت رالی[2]

$$\frac{\int_G \sum |X_i f|^2 dv}{\int_G |f|^2 dv}, f \neq 0, f \in L^2(G, v)$$

تعریف می‌شود و در آن v اندازهٔ هار ناوردا از راست روی G است. فاصلهٔ طیفی صفر می‌شود اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. باید خاطرنشان کرد که در تقابل صریح با حالتِ گروههای متناهی‌مولد، در ردهٔ گروههای موضعاً فشردهٔ همبند نظریهٔ ساختاری رضایت‌بخشی موجود است که بین گروههای میانگین‌پذیر و میانگین‌ناپذیر تمایز می‌گذارد [Pa]. گروههای لی همبند میانگین‌ناپذیر معمولی، همگی گروههای لی نافشردهٔ نیم‌ساده هستند مثل $SL_n(\mathbb{R})$، و مؤلفهٔ همبند همانی در $SO(p,q)$. یکی از نتایج اولیهٔ مربوط به بخش روی گروههای لی قضیهٔ حدی مرکزی موضعی بوگرول[3] است که همانند بالا برای گروههای لی نیم‌ساده، یک نتیجهٔ مجانبی دقیق به شکل $\mu_t(e) \sim ct^{-a/2}e^{-\lambda t}$ وقتی $t \to +\infty$ به‌ازای عدد صحیحی چون $a \geq 3$ و $\lambda > 0$ به‌دست می‌دهد. عموماً چنین نتایج دقیقی بسیار سخت حاصل می‌گردند. چه در حالت جابه‌جایی و چه در حالت نیم‌ساده، نظریهٔ نمایش ابزار خوبی برای این مقصود است اما برای گروههای دیگر، ازجمله گروههای حل‌پذیر و پوچتوان، تا حد زیادی در ارائهٔ اطلاعات مفید در مورد رفتار $\mu_t(e)$ ناتوان است.

1. Hebisch 2. Raleigh 3. Bougerol

درک دقیقِ رفتار $\mu_t(e)$ در درازمدت و در کلیترین حالت، علی‌رغم نظریهٔ ساختاری گروههای لی سالها دور از دسترس به‌نظر می‌رسید. اما در ۱۰ سال اخیر واروپولوس نظریه‌ای ارائه کرده است که آنچه را برای هر نیم‌گروه گاوسی متقارن روی گروههای لی حقیقی همبند رخ می‌دهد توصیف می‌کند، چه گروه میانگین‌پذیر باشد چه نباشد، چه تک‌مدولی باشد چه نباشد. شکل نتیجهٔ اصلی شبیه قضیهٔ ۷ است اما اثباتها متفاوت‌اند. ماهیت اثبات قضیهٔ ۷ بیشتر آنالیزی است در حالی‌که اثبات قضیهٔ ۸ که در پایین آمده شامل احتمالات، جبر و هندسه نیز هست.

واروپولوس [Vb] گروههای لی حقیقی همبند را به دو دسته تقسیم کرد، (B) و (NB). این رده‌بندی جبری آنقدر پیچیده است که نمی‌توان در اینجا دقیقاً توصیفش کرد. تمام گروههای نیم‌ساده (غیرفشرده)، مثلاً $SL_n(\mathbb{R})$، در (NB) هستند. در مورد گروههای میانگین‌پذیر، این رده‌بندی به رده‌بندی ساده‌تری تبدیل می‌شود، (C) در مقابل (NC)، که برحسب مفاهیم نمایش الحاقی و هندسهٔ ریشه‌ها(ی تعمیم‌یافته) [Va] قابل درک است. ردهٔ (R) از گروههای صلب دقیقاً با آن رده از گروههای (NC) که تک‌مدولی هستند تطبیق می‌کند. مثالهای دیگری از گروههای (NC) گروههای AN هستند که از تجزیهٔ KAN ایواساوا[1] برای گروههای نیم‌ساده آمده‌اند، مثلاً گروه $ax+b$. برای توصیف ساده‌ترین خانواده از مثالهایی که در آنها گروههای (C) و (NC) هر دو ظاهر می‌گردند، قرار می‌دهیم $\mathbb{S}_\ell = \mathbb{R} \ltimes_\ell \mathbb{R}^2$ که در آن $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ و حاصلضرب به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + y, u + A_\ell^x v)$$

که

$$A_\ell = \begin{pmatrix} e^{\ell_1} & 0 \\ 0 & e^{\ell_2} \end{pmatrix}$$

در این صورت $\mathbb{S}_\ell$ از نوع (C) است اگر $\ell_1 \ell_2 < 0$ و از نوع (NC) است اگر $\ell_1 \ell_2 > 0$.

نتیجهٔ اصلی واروپولوس، رده‌های (B) و (NB) (و بنابراین (C) و (NC)) را برحسب رفتار $\mu_t(e)$ در درازمدت توصیف، و تمام رفتارهای ممکن را رده‌بندی می‌کند.

قضیهٔ ۸. (۱) به‌ازای هر گروه از نوع (NB) و هر $L = \sum X_i^2$، عدد حقیقی نامنفی a (که ممکن است به L وابسته باشد) موجود است که $\mu_t(e) \approx t^{-a} e^{-t\lambda}$ وقتی $t \to \infty$. (۲) به‌ازای هر گروه از نوع (B)، $\log(e^{t\lambda}\mu_t(e)) \approx -t^{1/3}$ وقتی $t \to \infty$. در اینجا λ فاصلهٔ طیفی عملگر متناظر L است.

عوامل t^{-a} و $e^{-t^{1/3}}$ را که به‌ترتیب در حالات (NB) و (B) ظاهر می‌شوند، می‌توان برحسب احتمال اینکه یک حرکت براونی اقلیدسی خاص در یک ناحیهٔ محدّب خاص تا زمان t باقی بماند تفسیر کرد. ماهیت دقیق

1. KAN Iwasawa decomposition

حرکت براونی (یعنی ماتریس کوواریانس آن) به‌وسیلهٔ ساختار جبری گروه و به‌وسیلهٔ L تعیین می‌شود. ناحیهٔ محدّب توسط هندسهٔ ریشه‌ها تعیین می‌گردد. این ناحیه، فشرده است و به اینکه گروه از نوع (B) یا (NB) باشد بستگی ندارد و این دلیلِ رفتار $e^{-t^{1/3}}$ در مقابل رفتار چندجمله‌ای است. آگاهی دقیقی از ماتریس کوواریانس حرکت براونی و از ناحیهٔ همبند بالا برای تعیین ثابت a در حالت (NB) ضروری است. در حقیقت، محاسبهٔ مقدار دقیق a نوعاً بسیار دشوار است و این مقدار به‌طور پیوسته برحسب L تغییر می‌کند.

ادامهٔ این نتایج به ارائهٔ توصیفی از رفتار توانهای پیچشی هر تابع نامنفی متقارن پیوسته با محمل فشرده منجر می‌شود. این رفتار دقیقاً تقلیدی از رفتار نیم‌گروههای پیچشی گاوسی متقارن است برحسب اینکه گروه از نوع (B) یا (NB) باشد. نتیجه را، هر گاه با استفاده از مفاهیم توان پیچشی بیان شده باشد، می‌توان به‌طور سرراست در قالب گروههای همبند موضعاً فشرده فرمولبندی کرد. محدودیت همبندی G ضروری است، و این را در مورد گروههای متناهی‌مولد $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ که در بخش مربوط به گروههای حل‌پذیر مورد بحث قرار گرفت، دیدیم.

در خاتمه [یادآور می‌شویم که]، شرحی هندسی از رده‌های (B) و (NB) موجود است که نکته‌ای نهایی به این رده‌بندی جالب توجه می‌افزاید [Vc]؛ این شرح شامل ناورداهای پرکردن[1] است که در زمینه‌های متنوعی، خصوصاً توسط گروموف، بررسی شده‌اند. ناوردای پرکردن ۲بعدی $\psi_2(t)$ یک خمینهٔ ریمانی ساده‌ـهمبند به‌صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر طوقهٔ مفروض به طول حداکثر t، تمام قرصهای غوطه‌وری را که مرزشان این طوقه باشد در نظر می‌گیریم و اینفیمم مساحت تمام این قرصها را می‌یابیم. آنگاه $\psi_2(t)$ سوپریمم این مساحتهای اینفیممی به‌ازای همهٔ این طوقه‌هاست. به‌ازای هر بعد $k = 2, \ldots, n-1$، که nبعد توپولوژیک خمینه است، یک kـناوردای پرکردن وجود دارد. خصوصاً، $\psi_{n-1}(t)$ بزرگترین حجم ممکن یک مجموعهٔ فشرده با مرز هموار را که حجم $(n-1)$بعدی آن حداکثر t باشد به‌دست می‌دهد و رابطهٔ نزدیکی با نمود برابرمحیطی دارد. اساساً یک گروه (NB) است اگر و تنها اگر همهٔ ناورداهای پرکردن آن از بالا به یک چندجمله‌ای محدود شده باشند، در حالی که یک گروه (B) است اگر و تنها اگر حداقل یکی از ناورداهای پرکردن آن سریعتر از هر چندجمله‌ای رشد کند. بنابراین، برای هر گروه لی حقیقی همبند، سه رده‌بندی معادل موجود است: رده‌بندی آنالیزی/ احتمالاتی بر طبق رفتار نیم‌گروههای گاوسی متقارن در درازمدت، رده‌بندی هندسی برحسب ناوردای پرکردن و رده‌بندی جبری (B) در برابر (NB). شکّی نیست که این نتایج بنیادی به پیشرفتهای بیشتری در زمینهٔ پخشهای ناوردا، آنالیز همساز و هندسه روی گروههای لی منجر خواهد شد.

مراجع

[A] G. ALEXOPOULOS, Centered sub-Laplacians on Lie groups of polynomial volume growth, *Mem. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[BGS] L. BARTHOLDI, R. GRIGORCHUK, and Z. ŠUNIK, *Branch Groups*, Handbook of Algebra, vol. 3 (M. Hazewinkel, ed.), North-Holland, Amsterdam, 2001.

[BS] A. BENDIKOV and L. SALOFF-COSTE, Central Gaussian semigroups of measures with continuous density, *J. Funct. Anal.*, to appear.

[D] P. DIACONIS, *Group Representations in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes Monograph Ser., Hayward, CA, 1986.

[H] H. HEYER, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[Ho] M. HOSTINSKY, *Méthodes Générales du Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[L] A. LUBOTZKY, *Discrete Groups, Expanding Graphs* and *Invariant Measures*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[Pa] A. PATERSON, *Amenability*, Math. Surveys and Monographs, vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[P] CH. PITTET, The isoperimetric profile of homogeneous Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* **54** (2000), 255-302.

[PSa] CH. PITTET and L. SALOFF-COSTE, Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks, *Geometric Group Theory Down Under, Canberra 1996* (J. Cossey et al., eds.), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 293-316.

[Va] N. VAROPOULOS, Diffusion on Lie groups I, II, III, *Canad. J. Math.* **46** (1994), 438-448, 1073-1093; **48** (1996), 641-672.

[Vb] ———, Analysis on Lie groups, *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (1996), 791-917.

[Vc] ———, A geometric classification of Lie groups, *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), 49-136.

[V+] N. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, and T. COULHON, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Math., vol. 100, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[W] W. WOESS, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Math., vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

******

• Laurent Saloff-Coste, "Probability on groups: random walks and invariant diffusions", *Notices Amer. Math. Soc.*, (9) **48** (2001) 968-977.

* لوران سلف‌ـکاست، دانشگاه کورنل، آمریکا
lsc@math.cornell.edu

1 filling invariants