

مفهوم جبر در تاریخ جبر

الهه خیراندیش*

ساباتای اونگورو با چاپ مقاله‌ای در نشریه آدشیو تاریخ علوم دقیق تحت عنوان "در باره نیاز به از نو نویسی تاریخ ریاضیات یونان باستان [۳]"، در میان مورخان ریاضیات که غالباً خود ریاضیدان نیز هستند سروصدای زیادی به راه انداخت. اعتراض اصلی این نویسنده به اصطلاح "جبر هندسی" است که در اواخر قرن نوزدهم زوین ریاضیدان دانمارکی آن را بر بخشی از ریاضیات یونان باستان اطلاق کرد [۴]. مورخانی که این اصطلاح را در مورد قسمتهایی از کتب اقلیدس و آپولونیوس به کار برده‌اند "جبر هندسی" را جبری می‌دانند که در آن خطوط مستقیم نمایش اعداد حقیقی مثبت هستند و اعمال چهارگانه منحصر به خطوط مستقیم و سطوحی چون مربع و مستطیل است که از حاصل ضرب خطوط به دست می‌آیند [۵]. در میان مثالهای گوناگون کتب ریاضی یونان باستان، قضایایی از مقاله دوم کتاب اصول اقلیدس ظاهراً مناسبترین نمونه‌ها برای توضیح جبر هندسی و مشکل اساسی تعبیر آن بوده‌اند. برای مثال قضیه چهارم این مقاله بدین شرح است: "اگر خط مستقیمی از نقطه دلخواهی قطع شود، مربعی بر روی تمام این خط مساوی با مجموع دو مربع بر روی دو قسمت این خط، به اضافه دو برابر مستطیل احاطه شده با این دو قسمت می‌باشد" [۶]. به زبان دیگر، مقدار سطح مربعی با قطر خط ب د مساوی است با مجموع مقدار سطح دو مربع با اقطار ب ج و ج د و مقدار سطح دو مستطیل ا ج و ج ه که معادل جبری آن چنین است

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab.$$

با در نظر گرفتن اینکه این قضیه کاملاً هندسی است، تبدیل آن به کمک حروف و فرمولهای نمادین مدرن به یک اتحاد جبری، هر چند از نظر ریاضی اشکال ندارد، از نظر تعبیر تاریخی قابل قبول نیست. ادعای اونگورو سخنگوی اصلی معترضان در هر سه مقاله خود این است که نه تنها علمی به صورت "جبر هندسی" در آن دوره از تاریخ امکان پذیر نبوده است بلکه این اصطلاح يك "تناقض" است. از نظر اوترکیب علمی چون هندسه یونان باستان و علم مستقیمی چون علم جبر قابل توجیه تاریخی نیست و زائیده تصورات برخی از مورخان معاصر است که امروزه با در دست داشتن فرمول اتحادها و معادلات درجه دوم می‌توانند قضیه‌هایی هندسی از قبیل "قضیه چهارم، پنجم و ششم

همان طور که سده اخیر شاهد پایه گذاری رشته مستقلی با عنوان تاریخ علم بوده است، تحولات چند دهه گذشته در نگارش تاریخ علم را نیز می‌توان انقلابی در این رشته به شمار آورد. بحث اخیر مورخان ریاضیات بر سر تعریف و نگارش تاریخ علم جبر انعکاسی است از نگرشی عمیقتر به نحوه تعبیر و نگارش تاریخ علم که سالها به یک تجدید نظر کلی نیازمند بوده است. در این مقاله، پس از شرح آراء مختلف در باره چگونگی تعبیر متون ریاضیات دوران باستان، به نقد کوتاهی بر چند جنبه مهم از این نظریات، که با تعریف علم جبر و نگارش تاریخ آن رابطه دارند، می‌پردازیم.

علوم ریاضی از دیدگاه معاصر و مسأله تعبیر "جبر هندسی"

با اینکه تعبیر وقایع تاریخی از دیدگاه معیارهای کنونی آنقدر مسأله جدی و شناخته شده‌ای است که در تاریخ نویسی اصطلاح مستقلی به آن اختصاص یافته است [۱]، مشکل نگارش تاریخ علوم ریاضی از دیدگاه محدود معاصر مدت زیادی نیست که مورد انتقاد شدید مورخین قرار گرفته است. ساهاست که این حرف بر سر زبانهاست که آینه تاریخ باید از زنگار هر گونه پیشداوری و تعصب پاک باشد، و به خصوص نگرستن به سیر علوم از پشت عینک موقعیت فعلیشان طبیعتاً تصویری نادرست از این علوم به ما نشان می‌دهد. با این حال مسأله جدی تعبیر تاریخی متون ریاضی از دیدگاه معیارها و زبان ریاضیات امروز مسأله‌ای است که به تازگی مورد توجه مورخین ریاضیات قرار گرفته، و تازگی آن خود مبین لزوم توجه بیشتر صاحب نظران به این مسأله است. در قسمت بعدی پس از مرور تاریخچه فصل کوتاهی در تاریخ ریاضیات که در میان مورخان به "جبر هندسی" معروف است و به کمک شواهدی از تاریخ که از چشم ایشان دور مانده است به گسترش این مبحث جالب می‌پردازیم.

الف) برخورد مورخ با ریاضیدان و مسأله "دوفرهنگی"

ظاهراً دکتر هویس هاندی اولین مورخی است که با توجه به مشکل حماس تعبیر متون ریاضیات باستان هشدار داد که "خطری که همه کسانی را که می‌خواهند ریاضیات یونان را از دیدگاه امروزی بنویسند تهدید می‌کند این است که ارائه مفاهیم در قالب جدید چگونگی ادراک آنها را نیز مدرن جلوه خواهد داد" [۳]. پس از حدود نیم قرن سکوت در قبال چنین اخطار هوشیارانه و معقولی،

نمی‌شود، همان‌قدر قابل تأیید است که دفاع وان دروردن از واقعیت تاریخی جبر هندسی، با استناد به نوشته‌ای از ثابت بن قره با عنوان: "در تصحیح مسائل جبر با براهین هندسی" [۱۱] که بر ریاضیات این دوران مبتنی است. همچنین متونی که از ریاضیات باستان به جا مانده، به خودی خود و بدون تحمیل حروف و فرمولهای جدید، همانقدر ادعای مدافعین جبر هندسی را که قسمتی از کتب هندسی یونان باستان "جبر است در لباس هندسی" تضعیف می‌کند که شواهدی از تاریخ قبل از قرن هفدهم این برداشت را که جبر هندسی زائیده ظهور ریاضیات نمادین است. پس مفهوم جبر هندسی نه قابل انکار مطلق است نه قابل تأیید مطلق، بلکه فقط قابل تجزیه و تحلیل تاریخی است. مثلاً متن رساله کوتاه ثابت بن قره به نام "در تصحیح مسائل جبر با براهین هندسی" که فقط در یکی از مقاله‌های فوق به آن اشاره شده است، به این دلیل که از قضیه پنجم و ششم مقاله دوم کتاب اصول اقلیدس برای حل مسائلی قابل مقایسه با معادلات درجه دوم جبری استفاده می‌کند و نیز از این منبع به طور صریح نام می‌برد شاید بسا ارزشمندترین شاهد تاریخی برای تثبیت جبر هندسی در مقطع به خصوص از زمان یعنی قرن سوم دوره اسلامی باشد. اما مورخان ریاضیات به جای استفاده بیشتر از شواهدی چون رساله فوق که حتی ترجمه آلمانی آن هم به همراه متن عربی آن نزدیک نیم قرن در دسترس بوده است [۱۲]، با عرضه تعاریف ثابتی از یک مفهوم تاریخی مسأله جبر هندسی را آن قدر پیچیده کرده‌اند که این گمان به وجود می‌آید که حل مشکل جبر هندسی شاید تنها دلیلی نباشد که مورخین ریاضیات را به فکر تعریف علم جبر و تجدیدنظر در تاریخ آن انداخته است.

ب) اختلاف نظر بر سر تعریف و تاریخ علم جبر

در اکثر کتب تاریخ ریاضیات شناخت علمی تحت عنوان "جبر" با کتاب چیرده‌قالبه خوارزمی رابطه داشته است. این شناخت تدریجی نخست توسط محققینی که در قرون وسطی آثار علمی را از زبان عربی به زبانهای اروپایی ترجمه کردند و سپس از راه دسترسی به ترجمه‌های متعدد کتاب جبر ده‌قالبه ایجاد شده است. بنابراین اگر تا به حال سؤالی در مورد پیدایش علم جبر مطرح بوده هرگز به این صورت نبوده است که آیا جبر و مقابله نخستین کتاب در این زمینه هست یا نه، بلکه این بوده که رشته لغوی یا معنی علم جبر چیست. دلیل اصلی اشکالاتی که در گذشته در مورد تعریف و تعبیر تاریخی علم جبر پیش آمده این است که چون لغت "جبر" در زبان عربی دو معنی مختلف دارد (البته مورخینی هم بوده‌اند که به دنبال ریشه‌های غیرعربی این لغت هم گشته‌اند و گفته‌اند که مسلمانان این علم را همراه با نام سریانی آن (*gabru* = جبر) از آرامیها و سریانیهای که در ناحیه بابل به سر می‌برده‌اند اخذ کرده‌اند. [۱۳])، معنی شکستگی یا شکسته‌بندی این لغت، باعث شده است که علم جبر را به از میان برداشتن مقدار منفی و یا کسری یک معادله و یا حتی دو مقدار متساوی ازدو طرف معادله تعبیر کنند. در صورتی که بر پایه معنی دیگر آن، جبر را علمی دانسته‌اند که مجهول معادله را "مجبور" به قبول مقداری کند که در هر دو طرف معادله صادق باشد. تعریف اول که وجود لغت "مقابله" را در کنار "جبر" نادیده می‌گیرد، به عنوان تعریف کلی علم جبر طبعاً گمراه‌کننده است [۱۴]. اما به نظر می‌رسد که انحراف در

مقاله دوم یا قضیه بیست و هشتم و بیست و نهم مقاله ششم کتاب اصول اقلیدس را به صورت قضیه‌های جبری تبدیل کنند. او این افراد را متهم می‌کند که با عینکی مدرن به مفاهیم گذشته می‌نگرند و لذا تعبیری را اختیار می‌کنند که از حساسیت تاریخی برخوردار نیست [۷].

اولین عکس‌العمل در برابر مطالب جالب و جسورانه این نویسنده از طرف وان دروردن، ریاضیدانی که مقالات و کتب زیادی در تاریخ ریاضیات باستان نوشته است، در مقاله کوتاهی بود تحت عنوان: "دفاع از یک نظریه تکان‌دهنده"، که همان سال در همان نشریه به چاپ رسید. این مقاله همان‌طور که از نامش نیز پیداست جواب مستقیمی به اعتراض اونگورو است: "مسا (زوین و پیروانش)، معتقدیم که یونانیان ابتدا به علم جبر پرداخته‌اند و بعدها آن را به زبان هندسی تبدیل کرده‌اند. جبر هندسی یک واقعیت است و همان‌طور که جزئی از جبر است جزئی از هندسه نیز هست. اونگورو در این مورد که ریاضیدانانی چون زوین عقاید خود را درباره جبر هندسی یونانی صرفاً از راه تبدیل قضیه‌های اقلیدسی به زبان سمبلیک جبری به دست آورده‌اند کاملاً در اشتباه است. ... مقاله دوم کتاب اصول اقلیدس به قدری از لحاظ دربر داشتن اصول جبر هندسی مشهور است که حتی گاهی تصور شده که نویسنده مقاله دوم پیرو یک مکتب جبری بوده است" [۸].

تا چند سال بعد از انتشار مقاله وان دروردن مطالبی دفاعی در همین زمینه از ریاضیدانهای دیگر در همان مجله به چاپ می‌رسید. پس از چاپ مقاله فرویدنتال با عنوان: "جبر چیست و تاریخ آن چه بوده است؟" [۹]، حمله نهایی از آندره وایل فرانسوی بود و نامه تند وی به مدیر این نشریه تحت عنوان: "چه کسی به اقلیدس خیانت کرد؟" با این جمله تمام می‌شود: "وقتی یک رشته تحقیقی تازه بین دو رشته به وجود می‌آید، معمولاً منجر به ظهور انگلهایی می‌شود که از هر دو رشته بی‌خبرند، لیکن وانمود می‌کنند که محققان هر یک از این دو، آن رشته دیگر را نمی‌فهمند. متأسفانه امروزه در تاریخ ریاضیات با این جریان روبرو هستیم. بیایید این بیماری را قبل از اینکه مهلك شود براندازیم" [۱۵].

گفتگوی تند و حتی توهین آمیز این عده از محققان گاهی به جای از میان برداشتن مسأله "دو فرهنگ"، یعنی نزدیک کردن مورخ و ریاضیدان یا به طور کلی محقق علوم ریاضی و علوم انسانی، نمکی هم بر زخمهایی که بر اثر جدایی این دو گروه ایجاد شده پاشیده است. برخورد شدید این افکار یادآور آن است که باید به جای زخم‌بندی سطحی، ترمیم عمیق‌تری در این زمینه آغاز شود و شاید این ترمیم از راه تاریخ علوم که خود حکم پلی میان این دو قطب را دارد آسانتر باشد. ولی منتقدین مفهوم "جبر هندسی" و مدافعین آن گاهی فراموش کرده‌اند که هر مفهوم تاریخی را باید از پشت دورنمای زمان و در لابلا شواهد تاریخی جستجو کنند و این شواهد به وضوح نشان می‌دهند که بعد تاریخ اجازه تأیید و انکار، یا حتی تعریف مفهومی را که وجود و معنی ثابتی در تاریخ نداشته است نمی‌دهد. در نبرد میان مورخان علوم ریاضی بر سر مفهوم جبر هندسی نیز غالب و مغلوب کامل وجود ندارد. اعتراض اونگورو به تبدیل بعضی از قضایای اصول اقلیدس به فرمولهای نمادین جبری، با در نظر داشتن اینکه چنین فرمولهایی در کتب تاریخ ریاضیات باستان یافت

جبر قرون اول دوره اسلام چون جبر خوارزمی، ابن ترک، ثابت بن قره، ابوکامل، و حتی عمر خیام، از قضایای اقلیدسی برای استخراج و اثبات جواب مجهول که معمولاً به صورت ضلع مربعی مشخص می شود استفاده می کنند. همه این نوشته ها به زبانهای جدید اروپایی ترجمه شده اند و تحقیقات مربوط به آنها در دسترس محققین دیگر بوده است [۱۹]. ولی واضح است که اگر کسی بخواهد مثلاً آغاز علم جبر را همزمان با جبر سه و لیک قرن بیستم ببیند، به تعریفی از جبر که سابقه این علم را به قرون قبل از آن برساند اعتراض خواهد کرد، چه تعریفی که رکن اصلیش وجود اتحادها و یا حل معادلات درجه دوم است، و چه تعریفی که حتی وجود نوعی روش یا دید عمومی مانند جبر قرن هفدهم ویت و دکارت را لازم می داند [۲۰]. این تمایل باعث می شود که در هر حال یکی از اصلیتزین ارکان برای شناخت علم جبر یعنی "استخراج مجهول" آنقدر پشت پرده تعصب تاریخی پنهان شود که حتی اشاره به مفهوم "مجهول" هم در تعریف آن از قلم بیفتد. این مفهوم باستانی یعنی "استخراج مجهول" که لفظ آن حداقل از قرن چهارم هجری در مورد علم جبر به کار رفته است، نه تنها صریحاً در کتب ریاضیدانان این دوره از تاریخ به چشم می خورد، بلکه در منابع مهم تاریخی دیگر مانند کتاب التفهیم بیرونی و مقدمه ابن خلدون نیز ذکر شده است [۲۱]. اگر مورخان ریاضیات امروز چنین رکنی را به عنوان اصلیتزین پایه علم جبر بپذیرند، و یا حداقل آنقدر مهم بدانند که در تعریف علم جبر بگنجانند، بالطبع امتیاز تأسیس علم مستقلی به نام جبر به ریاضیدانان عربی نویسنده دوران اسلامی باز گردانده خواهد شد [۲۲].

ج) مفهوم تاریخی علوم ریاضی و تاریخ این علوم

مفهوم تجمعی هر علم و ثبت تاریخ آن دو رکنی هستند که نه تنها از هم قابل تفکیک نمی باشند بلکه هر کدام به نوعی به آن دیگری متکی است، بدین معنی که هیچ علمی بدون در نظر گرفتن بعد تاریخی آن بیش از یک تعریف قراردادی نیست و نگارش تاریخ هر علمی نیز به مفهومی از این علم نیازمند است که هم از نظر شواهد تاریخی قابل تأیید باشد و هم گمراه کننده نباشد. پس تبیینی که به این دو عامل توجه نکند از حساسیت تاریخی برخوردار نیست. برخی از منابعی که در این مقاله به آنها اشاره شده است در کار نوشتن تاریخ جبر به دلیل انتخاب تعریفی برای این علم که مجموعه مفاهیم آن را ثابت و شبیه به مفهوم معاصر آن می پندارد فاقد این حساسیت تاریخی هستند. اما مباحثی که در این میان در گرفته ظاهراً باعث شده است که مورخان به یک خانه تکانی اساسی کمر بینند و پشت کردن تدریجی تاریخ نویسان علم به این روش، و نیز به شیوه های غیر قابل قبول دیگری که سالها در نگارش تاریخ علوم رایج بوده است، به خصوص در دهه اخیر، کاملاً محسوس است [۲۳].

آیا ما به راستی شاهد انقلابی در فلسفه و تاریخ ریاضیات هستیم؟ از نظر برخی، نوشته نسبتاً تازه فیلیپ کیتچر با نام ماهیت معرفت دپانی [۲۴] که در طی شش سال که از تحریر آن می گذرد به وسیله حداقل سیزده نویسنده معرفی و توصیه شده است، یادآور انقلابی است که بیش از بیست سال قبل کتاب توماس کوهن درباره انقلابات علمی، در میان محققین در تاریخ و فلسفه علوم به راه انداخت [۲۵]. از نظر خود کیتچر نیز، روش او یک روش کاملاً انقلابی

تعریف و تغییر تاریخ جبر گاهی خیلی جدیدتر از اینها بوده است. اگر برخی از تعاریف علم جبر را که نسلهای بعدی مورخان ریاضیات ضمن اظهار نظر در مورد نحوه نگارش تاریخ ریاضیات پیش آورده اند به دقت بررسی کنیم شاید به عوامل دیگری که ریشه این گونه انحرافات هستند نزدیکتر شویم:

۱. انگود (۱۹۷۵): "استفاده از لغت جبر به عنوان نامی برای بخشی از ریاضیات بابلی و یونانی استعمالی نامناسب، بدون دقت، و گمراه کننده است. اگر جبر معنی واقعی خود را داشته باشد استفاده از این نام برای آن و صلهای ناجور است..."

تفکر در مسائل به صورت جبری این مشخصات را دارد:

۱. قابلیت به کار بردن نمادها؛

۲. سروکار داشتن با نسبتهای ریاضی، نه اشیاء ریاضی؛

۳. رهایی از درگیریهایی مربوط به وجود خارجی مفاهیم" [۱۵].

وان دود (۱۹۷۵): "وقتی من راجع به جبر بابلی، یونانی، و یا عربی صحبت می کنم منظورم جبری است به معنای جبر خوارزمی، آرس مگنای کاردانو، یا جبر مدراس. پس جبر هنر به کار بردن عبارات و حل معادلات جبری است..." [۱۶].

فرویدنتال (۱۹۷۷): "جبر چیست؟ هیچ دادگاهی نیست که در این باره حکم کند. با این حال "جبر" مثل هر لغت دیگری در زندگی روزمره معنی خاصی دارد، مثلاً در مدرسه، جبر حل معادلات درجه اول و دوم است، نوع جبری است که با بلیها با آن شروع به کار کردند... قادر بودن به تشریح روابط و حل مراحل و تکنیکی که به صورت عمومی به کار رود از نظر من در تفکر جبری چنان مقام مهمی دارد که من حاضر م نام جبر را به آن اختصاص بدهم، ولی مگر از یک نام چه توقعی می توان داشت؟" [۱۷].

انگود (۱۹۷۹): "معنی واقعی جبر هر چه باشد، استعمال متعارف این لغت معنی دیگری دارد. میز میز است، صندلی صندلی... بنابراین درخت را میز خواندن گمراه کننده است، هر چند که درخت می تواند به میز تبدیل شود و گاهی هم می شود. ولی در حقیقت خیلی وقتها هم نمی شود و این نکته بسیار مهم است... در نتیجه با مشخصاتی که خود فرویدنتال برای تفکر جبری تعیین کرده، جبر بابلی و یونانی غیر جبری هستند. همین قادر نبودن به "تشریح روابط و حل مراحل" است که مانع این می شود که ریاضیدان بابلی واجد شرایط جبردانی باشد... چیزی که او قادر است به وجود بیاورد دستور العمل است نه فرمولهای عمومی... هیچ جبری در منابع بابلی و یونان قبل از دیوفانتوس وجود ندارد. جبر بابلی و یونانی فقط زمانی به وجود آمد که قضایای مخصوص عددی بابلی و هندسی یونانی به زبان جبری رو نویسی شد. "جبر" فقط در نتیجه تشریح متون به وسیله ریاضیدانان به وجود آمده است" [۱۸].

در هیچ یک از این تفصیلات، برای مشخص کردن اینکه علم جبر چیست یا اینکه تفکر به صورت جبری کدام است، اشاره ای به یکی از ارکان قدیمی و اصلی این علم، یعنی مرحله تشفیص و تثبیت مقدار مجهول نشده است. این مرحله ای است که به طور قطع در مسائل عددی بابلی وجود دارد، و هر چند در خود قضایای هندسی یونان باستان به چشم نمی آید، در متون ریاضی بعد از این دوره مانند قسمتی از

- Michael S. Mahoney, "Die Anfang der Algebraischen Denkweise", *Revue*, 1971, 1: 15-31, English version: The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century", published in S. Gaukroger ed., *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*, 1980: 141-155; Mahoney, Michael S. "Babylonian Algebra: Form Vs. Content", *Studies in the Hist. and Phil. of Science*, 1971, 1: 369-380.
16. B.L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' Point of View", p. 199.
 17. H. Freudenthal, "What is Algebra and What has been its History?", p. 193.
 18. Sabetai Unguru, "Critiques and Contentions...", p. 561 & 557.
 19. Muhammad ibn Mūsā Khwarazmī, *Kitāb mukhtasar fi al-Hisāb al-jabr wa al-muqabalah*. ed. and translated by Fredrick Rosen, London 1831; Ibn Turk, Abd al-Hamid. *al-darurat fi al-muqtarināt min Kitāb al-jabr wa al-muqabalah*, ed. & trans. by Sayili, Aydin in *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al-Hamid ibn Turk and the Algebra of his Time*, Ankara, 1962. Thābit ibn Qurra. *fi tashihi mas'āl al-jabr bi al-barāhīn al-hindasiyah*, ed. and trans. into German by Paul Luckey, see note 12-13; Shuja' ibn Aslam, Abū Kāmil. *Kitāb fi al-jabr wa al-muqabalah* edited and translated as *The Algebra of Abu Kamil* by Martin Levey, Univ. of Wisconsin, 1966; Khayyam Umar. *fi al-barāhīn 'ala mas'āl al-jabr wa l-muqabalah* ed. and translated by F. Woepke as *L'algebre d'Omar alkhayyami*, Paris, 1841, 128 p. English translation from Winter & Arafat's "The algebra of 'Umar Khayyam", *Journal of the Royal Society of Bengal (JRASB)*, 1950, 16: 27-77.
 ۲۰. بهترین منبع برای این تعبیر کتابی است با ارزش درباره تاریخ یونان باستان
 - Jacob Klein, "Die griekische Logistik und die Entstehung der Algebra" *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik*, 1936, 3, 2: 122-135 trans. into English as *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, Cambridge, 1968.
 ۲۱. ابوریحان بیرونی، کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم، تصحیح جلال همدانی، تهران ۱۳۵۲، ص ۴۸؛ ابن خلدون، مقدمه، ترجمه محمدپروین گنابادی، چاپ چهارم، تهران ۱۳۶۲، ص ۱۰۱۱؛ و رجوع کنید به George Saliba, "The Meaning of al-jabr wa al-muqabalah".
 ۲۲. برای بحث جالب و مفصّلی در رابطه با "غریبی" بودن علم، مراجعه کنید به Roshdi Rashed, "Science as a Western Phenomena", *Fundamenta Scientiae*, 1976, 1: 7-21.
 ۲۳. برای بحث مفصّل تر و جزئیات بیشتری در مورد این مطلب رجوع کنید به حسین معصومی همدانی، "تاریخ و ریاضیات، تاریخ ریاضیات و تاریخهای ریاضیات"، نشر ریاضی، سال ۱۳۶۷: ۱، شماره ۲، ص ۱۴۰-۱۴۷.
 24. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1983.
 25. Michael J. Crowe's Review of Kitcher's, *The Nature of Mathematical Knowledge in Historia Mathematica*, 1987, 14: p. 204.
 26. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 3-4.
- است برای برکندن ریشه‌های سه‌نوع‌نگرش در تاریخ علوم ریاضی که از نظراو غیرقابل قبول‌اند، یعنی جداکردن ریاضیات از علوم دیگر، از زمینه‌های اجتماعی، و از جنبه‌های زمانی و تاریخی [۴۶]. اگر هم‌گام با این نویسندگان دهه فعلی را دوران انقلاب در فلسفه و تاریخ علوم بپنداریم، باز از اهمیت دهه قبلی و بحث مورخان درباره نگارش تاریخ علوم ریاضی به‌عنوان یک دوره "پیش انقلابی" کاسته نخواهد شد.
- ### مراجع
۱. این اصطلاح "whig history" و واضح آن هربرت باترفیلد است: Herbert Butterfield, *The Whig Interpretation of History*, London, G. Bell and Sons, 1931.
 2. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, 1975, 15: 67-114.
 3. E.J. Dijksterhuis, *De Elementen Van Euclides*, 2 vols, Groningen & Noordhoff, 1929-30; translated from E. M. Bruins' English version in *Janus*, 1975: 309-10.
 4. H. G. Zeuthen, *Lehre von den Kegelschnitten in Altertum*, Kopenhagen, 1886.
 5. B. L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' Point of View", *Archive for History of Exact Sciences*, 1975: 199-210, p. 203; "What is Algebra", *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, 1983: 70-99, p. 75.
 6. Euclid, *Elements: The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols. edited and translated by T.L. Heath, Dover, New York, 1956, vol I, p. 379.
 7. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", p. 73; "Critiques and Contentions-History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art", *Isis*, 1979, 70: 555-65; Unguru, S. & Rowe, D.E. "Does the Quadratic Equation have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra', 'Application of Areas' and Related Problems" *Libertas mathematicas*, vol I: 1981: 1-49; vol II: 1982: 1-62.
 8. B.L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' point of View", p. 203.
 9. H. Freudenthal, "What is Algebra and What has been its History?" *Archive for History of Exact Sciences*, 1977, 16: 189-200.
 10. Andre Weil, "Who Betrayed Euclid?-extract from a letter to the editor", *Archive for History of Exact Sciences*, 1978, 19: 91-93, p. 93.
 ۱۱. ثابت بن قره، "فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة"، تصحیح از: Paul Luckey, in *Abdruck aus den Berichten der Mathematische-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, XCIII. Band, Sitzung Vom 7. Juli 1941. Van der Waerden (1975), p. 205.
 ۱۲. ترجمه آلمانی این رساله در منبع پیشین آمده است.
 13. Solomon Gandz, "The Sources of al-Khwarizmi's Algebra", *Osiris*, 1936, 1: 263-277, p. 275.
 ۱۴. برای منابع این تعاریف و نتایج آموزنده آن رجوع کنید به George Saliba, "The Meaning of al-jabr wa al-muqabalah", *Centaurus*, 1972, 17: 189-204.
 15. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", p. 77.
- ظاهراً نوشته‌های زیر این تعریف سه قسمتی را الهام بخشیده‌اند.