بررسی انحنا و شکل از طریق هندسهٔ مقایسه‌ای•

استین مارک‌ورسن*
ترجمهٔ اسدالله رضوی

۱. مقدمه

در این مقاله به بررسی برخی از جنبه‌های انحنا [= خمیدگی] از نظر هندسهٔ مقایسه‌ای می‌پردازیم. انحنا یکی از مهم‌ترین مفاهیم در هندسهٔ دیفرانسیل است. تعمیم این مفهوم از خم به‌رویه و به‌خمینه‌های ریمانی کلی، بسیاری از مفاهیم را که از لحاظ ریاضی و فیزیکی مهم‌اند روشن ساخته است. کشسانی، تحدب، تقارن، فضا‌ـ‌زمان و گرانش از جملهٔ این مفهومها هستند.

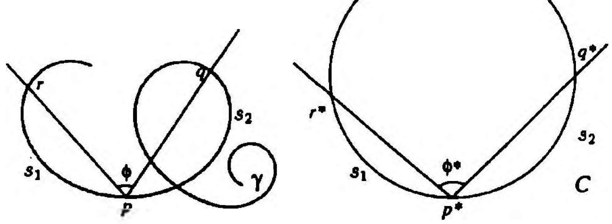
اگرچه سابقهٔ مفهوم انحنا به‌زمان نیوتن می‌رسد، روشهای مبتنی برهندسهٔ مقایسه‌ای نسبتاً جدید هستند و پژوهش و در آنها اساساً با کارهای راوخ و الکساندروف در طول دههٔ ۱۹۵۰ شکوفا شده است. رک. [۱۸]، [۲۸]، [۱۹].

۲. بعد ۱

ابتدا یک خم جهتدار γ را در صفحه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که γ هموار و منظم باشد به این معنی که دارای یک میدان برداری مماس هموار باشد. گیریم p نقطه‌ای روی γ باشد و γ برحسب طول قوس با شروع از $p = \gamma(0)$ پارامتری شده باشد. همچنین فرض کنیم $q = \gamma(s_1)$ و $r = \gamma(-s_2)$ (که $s_1 > 0$ و $s_2 > 0$) دو نقطهٔ دیگر روی γ باشند. در اینجا همواره فرض بر این است که p روی γ بین q و r است. لولای اقلیدسی در نقطهٔ p را که از پاره‌خطهای $\overline{pq}$ و $\overline{pr}$ تشکیل شده با زاویهٔ $\phi = \measuredangle rpq$ در نظر می‌گیریم. به شکل ۱ نگاه کنید.

تعریف کلاسیک انحنای γ به‌صورت $\kappa_{\gamma(s)} = \frac{d\theta}{ds}$ است که در آن $\theta(s)$ زاویهٔ بین مماس بر γ در نقطهٔ $\gamma(s)$ و جهت ثابت مفروض دلخواهی در صفحه است.

ولی مثلاً اگر بخواهیم فقط بدانیم که آیا γ انحنایی ناکمتر از ۱ دارد یا نه، ساختار مقایسه‌ای زیر را به‌کار می‌بریم:



شکل ۱ سه نقطه روی γ یک لولا و یک لولای مقایسه‌ای روی دایرهٔ واحد C مشخص می‌کنند. انحنای $\kappa_\gamma \geq 1$ از رابطهٔ $\phi \leq \phi^*$ معلوم می‌شود.

فرض می‌کنیم C دایره‌ای به‌شعاع ۱ در صفحه باشد. در این صورت C دارای انحنای ثابت ۱ است. سپس فرض می‌کنیم C برحسب طول قوس از نقطه $p^* = C(0)$ پارامتری شده باشد و به‌ازای s_1 و s_2 مفروض قرار می‌دهیم $q^* = C(s_1)$ و $r^* = C(-s_2)$. لولای مقایسه‌ای که به وسیلهٔ $\overline{p^*q^*}$ و $\overline{p^*r^*}$ تعریف می‌شود زاویهٔ $\phi^* = \measuredangle r^*p^*q^*$ را به دست می‌دهد. به شکل ۱ نگاه کنید.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که انحنا دقیقاً با مقایسهٔ ϕ^* و ϕ نمایان می‌شود. اگر ϕ به‌طور نسبی کوچک باشد، انحنا به‌طور نسبی بزرگ است.

قضیهٔ ۱. برحسب نمادهای فوق‌الذکر، خم γ در همه‌جا دارای انحنای $\kappa_\gamma \geq 1$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر نقطهٔ p روی γ یک قوس U_p از γ حول p وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر r و q در U_p، از ساختار مقایسه‌ای نتیجه شود:

$$\phi \leq \phi^* \qquad (۱.۲)$$

به‌علاوه اگر $\kappa_\gamma \geq 1$ و اگر تساوی در (۱.۲) به‌ازای qای و rای برقرار شود یعنی داشته باشیم

$$\phi = \phi^* \qquad \text{به‌ازای } q \text{ و } r\text{ای در } U_p، \qquad (۲.۲)$$

آنگاه قوس γ بین q و r در U_p قسمتی از یک دایره به‌شعاع ۱ است.

۱.۲ یادداشت. این قضیهٔ ظاهراً در متون موجود نیامده است و از آنجایی که قسمت عمدهٔ جوهرهٔ هندسه مقایسه‌ای را می‌نمایاند، رئوس اثبات آن را ذکر می‌کنیم.

لم زیر مورد نیاز ما خواهد بود:

لم ۲. انحنای γ در p از حد زیر به‌دست می‌آید:

$$\kappa_\gamma(p) = \lim_{q,r\to p} 2\left(\frac{\pi-\phi}{s_1+s_2}\right) \qquad (۳.۲)$$

اثبات لم. دایرهٔ بوسان خم γ در نقطهٔ $\gamma(0)$ حد یکتای دوایری است که به‌وسیلهٔ سه نقطه روی γ مشخص می‌شوند وقتی که این سه نقطه به $\gamma(0)$ میل کنند. برای نمونه رجوع کنید به [۱۲]، صفحهٔ ۹۱. شعاع $R = R(p,q,r)$ دایرهٔ مار بر سه نقطهٔ p، q، r از رابطهٔ $\frac{1}{R} = 2\frac{\sin(\phi)}{|qr|}$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت حد $\frac{1}{R}$ وقتی $q,r \to p$ عبارت است از انحنای دایرهٔ بوسان (و در نتیجه انحنای خم γ) در نقطهٔ p. حکم لم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lim_{\phi\to\pi}\left(\frac{\pi-\phi}{\sin(\phi)}\right) = 1 = \lim_{q,r\to p}\left(\frac{|qr|}{s_1+s_2}\right) \quad \square \qquad (۴.۲)$$

اثبات قضیهٔ ۱. ابتدا فرض می‌کنیم (۱.۲) به‌ازای همه r و q ها در U_p برقرار است. حال باید نشان دهیم $\kappa_\gamma(\gamma(0)) \geq 1$. و این رابطه به‌آسانی از لم ۲ با توجه به نابرابری زیر به‌دست می‌آید

$$k_\gamma(\gamma(0)) = \lim_{s_1+s_2\to 0} 2\left(\frac{\pi-\phi}{s_1+s_2}\right) \geq \lim_{s_1+s_2\to 0} 2\left(\frac{\pi-\phi^*}{s_1+s_2}\right) = 1 \qquad (۵.۲)$$

اینک برای اثبات عکس آن فرض می‌کنیم $\kappa_\gamma \geq 1$. یک دستگاه مختصات (x,y) در صفحه مشخص می‌کنیم به‌طوری که محور xها مماس بر γ در نقطهٔ p باشد. در این صورت داریم (به‌عنوان نمونه رجوع شود به [۱۲]، ص ۱۱۱)

$$\gamma(s) = (x_\gamma(s), y_\gamma(s)) = \left(\int_0^s \cos(\theta(\tilde{s}))d\tilde{s}, \int_0^s \sin\theta((\tilde{s}))d\tilde{s}\right) \qquad (۶.۲)$$

که در آن

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa_\gamma(\tilde{s})d\tilde{s} \qquad (۷.۲)$$

به‌همین ترتیب در یک دستگاه مختصات انتخابی مناسب (x^*, y^*) داریم:

$$C(s) = (x_C^*(s), y_C^*(s)) = \left(\int_0^s \cos(\theta^*(\tilde{s}))d\tilde{s}, \int_0^s \sin\theta^*(\tilde{s})d\tilde{s}\right) \qquad (۸.۲)$$

که در آن

$$\theta^*(s) = \int_0^s \kappa_C(\tilde{s})d\tilde{s} \qquad (۹.۲)$$

و لذا بنابر فرض

$$\theta(s) \geq \theta^*(s) = s \qquad (۱۰.۲)$$

و در نتیجه تا وقتی که $\theta(s) \leq \pi$، داریم $x_\gamma(s) \leq x_C^*(s)$، و $y_\gamma(s) \geq y_C^*(s)$. حال فرض کنیم η زاویهٔ بین وتر $\overline{pq}$ و محور xها باشد و زاویهٔ η^* را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. در این‌صورت داریم

$$\cos(\eta) = \frac{x_\gamma}{\sqrt{x_\gamma^2 + y_\gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y_\gamma/x_\gamma)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1+(y_C^*/x_C^*)^2}} = \cos\eta^* \qquad (۱۱.۲)$$

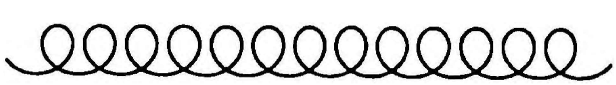
بنابراین $\eta \geq \eta^*$ و با استدلالی مشابه در مورد وتر $\overline{pr}$ نتیجه می‌شود که $\phi \leq \phi^*$. به‌علاوه در (۱۱.۲) تساوی وقتی و فقط وقتی به‌ازای یک s_0 به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $s \in [0, s_0]$ داشته باشیم $\theta(s) = s$ یعنی اگر و فقط اگر $\gamma[0, s_0]$ یک قوس دایره‌ای با انحنای ثابت ۱ باشد. □

۲.۲ یادداشت. قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۱ در مورد رابطهٔ $\kappa_\gamma \geq k$ به‌ازای هر $k \geq 0$ با استفاده از دایره‌ای مقایسه‌ای به‌شعاع $\frac{1}{k}$ به‌دست می‌آید.

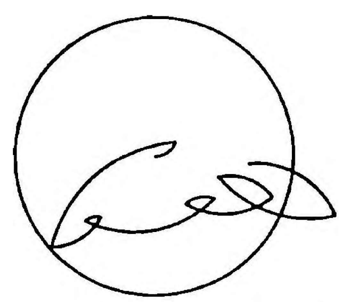
توجه داشته باشید که نوعی محدودیت برای طول U_p در این قضیه لازم است. منحنی شکل ۲ انحنایی مثل $\kappa_\gamma \geq 10^6$ دارد. بدون استفاده از میکروسکوپ، γ (اگر به‌طور کامل در نظر گرفته شود) به‌صورت یک خط مستقیم به‌نظر می‌رسد و این بدان معنی است که به‌ازای مقادیر بزرگ s_1, s_2 ساختار مقایسه‌ای اطلاعات مربوط را درباره انحنا ارائه نمی‌دهد.

به‌علاوه این قضیه اطلاعات نمونه‌واری دربارهٔ رابطهٔ بین ویژگیهای متری (طول و زاویه) از یک طرف و ویژگیهای انحنایی از طرف دیگر به‌دست می‌دهد. این امرْ الهام‌بخش مطالبی دربارهٔ موارد مشابه در ابعاد بالاتر است که در بخشهای بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در واقع، می‌توان (۱.۲) را تعریف تعمیم‌یافته‌ای از این مفهوم که خم η انحنای ناکمتر از ۱ دارد در نظر گرفت. می‌نویسیم $\text{curv}(\eta) \geq 1$. البته این تعریف حتی در حالتی که خم بسیار نامنظم است با معنی است (!) (شکل ۳) و مفهوم وجود کرانهای پایین برای انحنا را در فضاهای متری بسیار کلی ارائه می‌کند. بخش ۶ را ببینید.



شکل ۲ ذره اویلری سطح با انحنای بیش از 10^6 که به وسیلهٔ یک میکروسکوپ قوی مشاهده شده است.



شکل۳ دایرهٔ واحد و خم η با $\mathrm{curv}(\eta) \geq 1$

باید این نکته را ـــ به‌عنوان انگیزهٔ دیگر [ی برای پیگیری این موضوع]ـــ خاطرنشان کنیم که هنوز مسائل حل‌نشدهٔ جالبی در نظریهٔ خمها و انحنای آنها وجود دارد، مثلاً ویژگیهای کلی فنرهای یک‌بعدی و دینامیک آنها هنوز به‌خوبی شناخته نشده است. به‌عنوان نمونه رجوع شود به [۵]، [۳۰] و [۳۴]. اینک یک سؤال جالب در این زمینه مطرح می‌کنیم: فرض کنیم جرمهایی نقطه‌ای به هر یک از دو انتهای یک قطعهٔ متناهی از یک فنر (بدون جرم) در شکل ۲ وصل کنیم و انرژی پتانسیل $\int \kappa^2 ds$ را رها کنیم. چگونه این فنر با گذشت زمان باز می‌شود، یا به‌عبارت دیگر، مسیر فنر در فضای پیکربندی فنرهای اویلری مسطح با یک طولِ ثابت، چگونه است.

۳. بعد ۲

در این بخش تعمیم مشاهدات قبلی را به‌حالت دوبعدی بررسی می‌کنیم. فرض کنیم (M, g) یک رویهٔ مجرد با میدان تانسوری متری g باشد و Δ مثلثی ژئودزیک در M باشد، یعنی Δ ناحیه‌ای ساده‌ـهمبند در M است که مرز آن مرکب از سه قطعه خط ژئودزیک، یعنی ۳ منحنی با کوتاه‌ترین طول است که سه راس این مثلث را به هم وصل می‌کنند. سه زاویهٔ داخلی Δ را به α_i، $i = 1, 2, 3$، نمایش می‌دهیم.

تعریف کلاسیک K_M، انحنای گاوسی رویهٔ M در نقطه‌ای چون p، با استفاده از تانسور انحنای R انجام می‌شود، یعنی بهوسیلهٔ عبارتی غیرخطی برحسب مشتقاوت جزئی مرتبهٔ دوم g در نقطهٔ p. تعریف ۹ را ببینید.

ولی فرض کنیم که فقط می‌خواهیم بدانیم آیا M انحنایی ناکمتر از ۱ دارد یا نه. در این صورت، باز یک ساختار مقایسه‌ای کفایت می‌کند که به‌صورت زیر است:

فرض کنیم $\mathbb{S}^2_1$ کرهٔ به‌شعاع ۱ در $\mathbb{R}^3$ باشد و Δ^* مثلث مقایسه‌ای روی $\mathbb{S}^2_1$ باشد، یعنی مثلثی با اضلاعی به طول اضلاع مثلث مفروض Δ در M (مثلث Δ^*، در حد طولپاییها[1]ی $\mathbb{S}^2_1$، با این طولها به‌طور یکتا مشخص می‌شود و مهمتر آنکه این مثلث وجود دارد اگر و فقط اگر مجموع طولهای اضلاع از 2π بیشتر نباشد، و این فرض تلویحاً در هنگام رجوع به‌ساختارهای مقایسه‌ای پذیرفته می‌شود). زوایای داخلی Δ^* را به α_i^*، $i = 1, 2, 3$، نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۳ (الکساندروف [۲۹]). رویهٔ M دارای انحنای گاوسی $K \geq 1$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر مثلث Δ در M داشته باشیم

$$\alpha_i \geq \alpha_i^* \tag{1.3}$$

1. isometries

اگر $K \geq 1$ و اگر در (۱.۳) تساوی به‌ازای α_iای برای یک مثلث Δ برقرار باشد آنگاه تساوی برای دو زاویهٔ دیگر مثلث نیز برقرار است و ناحیهٔ مثلثی Δ دارای انحنای ثابت $K = 1$ است.

با انتخاب مقیاس مناسب، یعنی با استفاده از کرهٔ $\mathbb{S}^2_k$ با انحنای ثابت k به‌عنوان فضای مقایسه، نتیجهٔ مشابهی برای $K \geq k > 0$ و درواقع برای هر کران پایین انحنا چون $k \in \mathbb{R}$ به‌دست می‌آوریم به این طریق که از مثلثهای مقایسه‌ای در فضای تخت $\mathbb{R}^2$ به‌ازای $k = 0$ و در فضای هذلولوی $\mathbb{H}^2_k$ با انحنای ثابت k به‌ازای $k < 0$ استفاده می‌کنیم. بالاخص حکم زیر را داریم:

نتیجهٔ ۴. M در همه جا دارای انحنای $K \geq 0$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر مثلث ژئودزیک Δ در M داشته باشیم

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \pi \tag{2.3}$$

اگر $K \geq 0$ و اگر تساوی برای یک مثلث Δ در (۲.۳) برقرار باشد آنگاه Δ تخت است.

این نتیجهٔ مقایسه‌ای از نظرکمی با تابع مازاد زاویه‌ای[1] $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ نمایش داده می‌شود. از تقسیم آن بر اندازهٔ هندسی (یعنی مساحت) مثلث در لم ۲ و حد گرفتن وقتی مثلث به یک نقطهٔ p میل می‌کند، می‌توان به انحنا در نقطهٔ p رسید.

قضیهٔ ۵ (گاوس [۱۱]). $K(p)$، انحنای گاوسی رویهٔ M در نقطهٔ p، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$K(p) = \lim_{\Delta \to p} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{Area(\Delta)} \right) \tag{3.3}$$

با در نظر گرفتن این حد به‌عنوان «مشتق» تابع مازاد زاویه‌ای نسبت به مساحت مثلثی، با «انتگرالگیری» به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۶ (گاوس [۱۱]).

$$\int_\Delta K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \tag{4.3}$$

۱.۳ یادداشت. در اینجا هم مانندِ مورد خمها در بخش ۱، رشته مفاهیم خاصی که پیرامون نابرابری الکساندروف (۱.۳) ارائه کردیم منجر به امکان تعریف کرانهای پایینِ انحنا می‌شود. بهاین موضوع در بخش ۶ خواهیم پرداخت.

انحنای گاوسی، برای رویه‌هایِ در $\mathbb{R}^3$ با متر القایی، برابر ست با حاصلضرب دو انحنای اصلی M در نقطهٔ p، که گاوس نیز در [۱۱] آن را اثبات کرده است. ضمناً انحناهای اصلی را قبلاً اویلر در سال ۱۷۶۰ به‌طور جداگانه مطالعه و محاسبه کرده بود، ولی فقط از طریق نتایج گاوس بود ـــ یعنی در شکل قضیهٔ ۵ ـــ که حاصلضرب به‌صورت یک ناوردای متری ذاتی جلوه‌گر شد.

حقیقت زیر را که حتی در سال ۱۶۰۳ بر توماس هاریوت معلوم بود، به‌عنوان حالت خاصی از قضیهٔ ۶ یادآوری می‌کنیم: مساحت یک مثلث ژئودزیک روی کرهٔ واحد $\mathbb{S}^2_1$ با انحنای ثابت $K = 1$ برابر با مازاد زاویه‌ای مثلث است. رک. [۳۱].

1. angular excess

۴. پیامدی کلی در بعد ۲

فرض کنیم یک رویهٔ فشردهٔ بدون مرز M را به مثلثهای ژئودزیک افرازکرده باشیم به‌طوری که دو مثلث حداکثر در یک ضلع مشترک باشند (و اگر چنین باشد در تمام آن ضلع مشترک باشند). در این صورت انحنای کلی رویه برابر مجموع انحناهای کلی مثلثهاست. این مجموع کاملاً ترکیبیاتی است:

اگر تعداد رئوس مثلث‌بندی را به v، تعداد اضلاع را به e و تعداد وجوه (یعنی تعداد مثلثها) را به f نمایش دهیم آنگاه ترکیب $\chi(M) = v - e + f$ را مشخصهٔ اویلر این مثلث‌بندی نامند، و این عدد، اندازهٔ انحنای کلی رویهٔ است.

قضیهٔ ۷ (گاوس-بونه، [۹]).

$$\int_M K dA = \sum_{j=1}^{f} \int_{\Delta_j} K dA = 2\pi.\chi(M) \qquad (1.4)$$

اثبات. فرض کنیم Ω_j نمایش‌دهندهٔ j امین مثلث در خانوادهٔ f مثلثی باشد که رویه را پوشانده‌اند و همچنین A_j، B_j و C_j زوایای متناظر آن مثلث باشند. بنابر قضیهٔ ۶ داریم:

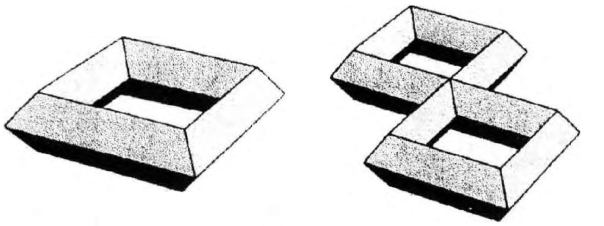
$$\int_M K dA = \sum_{j=1}^{f}(A_j + b_j + C_j) - \sum_{j=1}^{f} 3\pi + \sum_{j=1}^{f} 2\pi \qquad (2.4)$$

مجموع اول در طرف راست برابر است با $2\pi v$، زیرا مجموع زوایا در هر رأس، 2π است. مجموع دوم $3\pi f$ است ولی $2e = 3f$ زیرا $3f$ برابر است با تعداد کل اضلاع، که هر یک دو بار شمرده شده باشند. مجموع سوم به‌وضوح برابر $2\pi f$ است. مجموعاً داریم $2\pi v - 2\pi e + 2\pi f$ که برابر است با $2\pi.\chi(M)$. فهوالمطلوب. □

۱.۴ چندضلعی‌بندی[1]. اگر به‌جای مثلث‌بندی افرازی به‌کار بریم که از چندضلعیهای ژئودزیک ساده‌ـ‌همبند تشکیل شده باشد و رئوس، اضلاع و وجوه چندضلعیها را، به‌جای مثلثها، بشماریم قضیهٔ ۷ باز هم صادق است. در واقع هر چند ضلعی را می‌توان با اضافه کردن رأس، ضلع و وجه، مثلث‌بندی کرد. ولی با این کار، مجموع $v - e + f$ تغییرنمی‌کند (مثلاً یک چهارضلعی را می‌توان با اضافه کردن یک رأس جدید در وسط، مثلث‌بندی کرد. با این کار ۳ وجه جدید و ۴ ضلع جدید به‌دست می‌آید و در حقیقت $0 = 3 + 4 - 1$). واضح است که انحنای کلی نیز بر اثر این افراز جدید تغییر نمی‌کند و لذا این قضیهٔ تعمیم یافته اثبات می‌شود.

۲.۴ تغییر شکل. اگر رویه را با وابرریختی [=دیفئومورفیسم] قطعه‌ای، یعنی با کشیدن و پیچاندن، تغییر شکل دهیم و در واقع حتی اگر همهٔ انحنا را روی رئوس چندضلعیهای یک افراز متمرکز کنیم به‌طوری که اعداد v، e، f و در نتیجه $\chi(M)$ تغییر نکنند، در این صورت قضیهٔ اویلر رابرای چندوجهیهای محدب و همچنین برای چندوجهیهای از گونهٔ بالا تعمیم داده‌ایم: انحنای کلی هر کره برابر 4π است و لذا مشخصهٔ اویلر هرچند وجهی که از تغییر شکل کره به‌دست آید ۲ است. البته اطلاع موجود در قضیهٔ ۷ را می‌توان بر عکس

1. polygonalization



شکل ۴ چنبرهٔ جعبه‌ای دارای مشخصهٔ اویلر $\chi = 0$ است (چون $v = 20$، $e = 40$، $f = 20$) و چنبرهٔ دوگانهٔ جعبه‌ای دارای مشخصهٔ اویلر $\chi = -2$ (چون $v = 39$، $e = 82$، $f = 41$).

به‌کار برد: مشخصهٔ اویلر یک چنبره صفر است (شکل ۴ را ببینید)، و بنابراین انحنای کلی هر رویه‌ای که از تغییر شکل یک چنبرهٔ جعبه‌ای به‌دست می‌آید ۰ است. مشخصهٔ اویلر یک چنبرهٔ دوگانهٔ جعبه‌ای برابر -2 است و لذا انحنای کلی هر رویه‌ای که از تغییر شکل یک چنبرهٔ دوگانه (یعنی مجموع همبند $T^2 \# T^2$) به‌دست آید برابر -4π است. به شکل ۴ نگاه کنید.

۳.۴ محدود کردن $\chi(M)$. حکم زیر نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ گاوس-بونه است.

نتیجهٔ ۸. اگر یک رویهٔ فشرده قطر و انحنای محدود داشته باشد آن رویه نمی‌تواند توپولوژی به‌دلخواه پیچیده داشته باشد.

اثبات. توپولوژی یک رویه به وسیلهٔ $\chi(M)$، مشخصهٔ اویلر، به طور یکتا مشخص می‌شود؛ رک. [۲۶]. بنابراین برای اثبات حکم باید $|\chi(M)|$ را از بالا برحسب $|K|$ و قطر M محدود کنیم، که

$$\mathrm{diam}(M) = \max_{(x,y)\in M\times M} \mathrm{dist}(x,y)$$

که در آن $\mathrm{dist}(x,y)$ فاصلهٔ x تا y با متر القا شده توسط g است.

با تجدید مقیاس متر می‌توان فرض کرد که $1 \leq |K|$. مساحت هر قرص ژئودزیک به‌شعاع r روی رویه‌ای مفروض با انحنای $K(M) \geq -1$ حداکثر برابر مساحت قرص به‌شعاع r در فضای هذلولوی $\mathbb{H}^2_{-1}$ است؛ رک [۴]. در این صورت داریم

$$|\chi(M)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_M |K| dA \leq \int_0^{\mathrm{diam}(M)} \sinh(r) dr \qquad (3.4)$$
$$= \cosh(\mathrm{diam}(M)) - 1$$

بنابراین اگر

$$|K|.\mathrm{diam}^2(M) \leq \mathrm{Arc}\cosh^2(1+q) \qquad (4.4)$$

آنگاه $|\chi(M)| \leq q$. □

در حالت خاص اگر M رویه‌ای جهت‌دار باشد آنگاه $\chi(M)$ **زوج** است؛ رک. [۲۶]. لذا اگر $|K|.\mathrm{diam}^2(M) \leq 3{,}10$ آنگاه $\chi = 0$ پس M با چنبرهٔ T^2 همسانریخت است (یعنی حاصل تغییر شکل آن است). اگر $|K|.\mathrm{diam}^2(M) \leq 5{,}25$، آنگاه $\chi = 2$، $\chi = 0$ یا $\chi = -2$ و لذا M با کرهٔ $\mathbb{S}^2$، چنبرهٔ T^2 و یا چنبرهٔ دوگانهٔ $T^2 \# T^2$ همسانریخت است! نتیجهٔ ۸ چیزی نیست جز حالت خاصی از یک نتیجهٔ خیلی قویتر متعلق به گروموف؛ رک [۱۳]، [۷] و همچنین [۱۶].

۵. مسألهٔ هم‌قطری

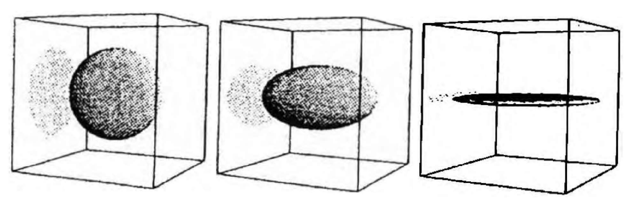
رویهٔ بدون مرز محدبی چون M در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M دارای قطر $\operatorname{diam}(M) = \pi$ است. بیشترین مساحتی که M تحت این شرایط می‌تواند داشته باشد چقدر است و این ماکسیمم در مورد چه رویه یا رویه‌هایی تحقق پیدا می‌کند؟

ممکن است تحت تأثیر جواب معروف مسألهٔ هم‌محیطی برای رویه‌ها، وسوسه شویم که اشتباهاً فکر کنیم مسألهٔ حاضر هم همان جواب را دارد یعنی کرهٔ $\mathbb{S}^2_1$. ولی کره مسأله را حل نمی‌کند. فضای حدی دنبالهٔ تغییر شکلها در شکل ۵، یعنی « قرص دوگانهٔ» به‌قطر π را در نظر می‌گیریم، به‌عبارت دیگر رویهٔ حاصل از یکی گرفتن مرزهای دو قرص به شعاع $\frac{\pi}{2}$ را. مساحت کره 4π است، در حالی که قرص دوگانه به‌قطر π دارای مساحت $2\pi \times (\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^3}{2} > 4\pi$ است. الکساندروف در مرجع [۱] صفحهٔ ۴۱۷ این حدس را مطرح کرده است که قرص دوگانه جواب مسألهٔ هم‌قطری است. این مسأله هنوز حل نشده است ولی چند پیامد جالب مسأله پیدا شده است. رک. [۲۵].

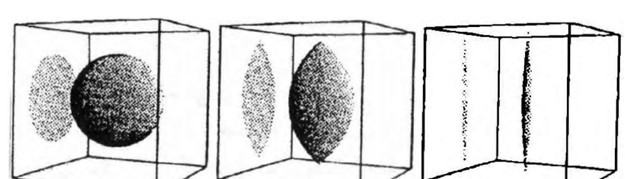
در اینجا پدیدهٔ جالب دیگری را در جهت مخالف ذکر می‌کنیم. می‌توان کره را بر روی پاره‌خط راستی به‌طول π «فروریخت» به‌طوری که نه تنها قطر $\operatorname{diam}(M) = \pi$ ثابت بماند بلکه انحنای K_M همواره نا کمتر از ۱ بماند. شکل ۶ رویه‌های دواری را نشان می‌دهد که دارای انحنای ثابت $K_M = 1$ در همه‌جا بجز در دو نقطهٔ تکین میخی شکل‌اند که این دو نقطه محل تلاقی رویه با محور دوران است ([۳۳] جلد III، صفحهٔ ۲۳۷).

۶. انحنا در بعد n

اینک برخی از نتایج اخیر را در حالت کلی‌تر یعنی در حالت n بعدی بررسی می‌کنیم. همیشه این‌طور نیست که طبیعت راز و رمز خود را به‌صورت فضاهای



شکل۵ تغییر شکل کرهٔ واحد به‌طوری که $k \geq 0$



شکل۶ تغییر شکل کرهٔ واحد به‌طوری که $k \geq 1$

پیکربندی یک یا دوبعدی آشکار کند. یک فضای پیکربندی هموار M^n و یک مفهوم هموار برای طول و زاویه (یعنی یک متر g) روی M در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم تابع فاصلهٔ مربوطه، dist_M، ساختار یک فضای‌متری کامل را به M می‌دهد (به این معنی که هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد). زوج (M^n, g) یک خمینهٔ ریمانی نامیده می‌شود. مشتق هموردِ متناظر یکتای لوی‌-چیویتا یعنی ∇ روی (M, g) به‌اصطلاح شتاب خمها در M معنی دقیقی می‌بخشد و ترکیب زیر از مشتقات دوم مفهوم «صحیح» انحنای M را به‌دست می‌دهد، (رک. [۱۰]):

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (۱.۶)$$

در اینجا بهتر است از یکی از بزرگترین پیشگامان هندسهٔ دیفرانسیل جدید مطلبی نقل کنیم:

> تانسور انحنای خمینهٔ ریمانی، عفریت کوچکی در جبر (چند) خطی است که معنای هندسی کامل آن مبهم است

م. گروموف [۱۷]

ولی اگر تانسور انحنا را به‌مجموعهٔ صفحات دوبعدی در فضای همهٔ بردارهای مماس محدود کنیم، تابعی روی آن مجموعه به‌دست می‌آوریم که انحنای مقطعی M، $\sec_M$ ، نامیده می‌شود و می‌توانیم آن را انحنای گاوسی M مربوط به هر صفحهٔ دوبعدی تصور کنیم.

تعریف ۹. فرض کنیم σ یک صفحهٔ دوبعدی باشد که به‌وسیلهٔ یک پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_i, e_j\}$ در فضای مماس n بعدی M در نقطهٔ p تولید شده است. در این صورت انحنای مقطعی σ عبارت است از

$$\sec_M(\sigma) = g(R(e_i, e_j)e_i, e_j) \qquad (۲.۶)$$

به‌عکس، تانسور انحنای کامل به طور یکتا توسط انحناهای مقطعی مفروض روی زیرمجموعه‌ای مناسب از صفحات دوبعدی در کلاف مماس M معین می‌شود. رک. [۸] صفحهٔ ۱۶.

هوپف با الهام از موفقیتهای به‌دست آمده در بعد ۲ این سؤال طبیعی را در سال ۱۹۳۲ مطرح کرد:

> وقتی انحنای یک متر ریمانی g روی M^n خواص معینی داشته باشد، آن خواص چه چیزهایی روی توپولوژی M^n ایجاب می‌کند؟

هـ. هوپف [۲۷] و [۳]

در زیر، توجه خود را به‌خاصیت کران پایین داشتن انحناهای مقطعی معطوف می‌کنیم، یعنی فضای زیر از فضاها را در نظر می‌گیریم:

تعریف ۱۰. فرض کنیم $k \in \mathbb{R}$. مجموعهٔ همه خمینه‌های ریمانی فشردهٔ (M^n, g) با بعد n و با ضابطهٔ $\sec_M(\sigma) \geq k$ به‌ازای هر صفحهٔ ۲بعدی σ را به $\mathcal{M}_k(n)$ نمایش می‌دهیم.

اولین چیزی که لازم است ذکر شود یک حقیقت متحیرکننده است که به‌طور ضمنی در بالا به‌وسیلهٔ قضایای ۱ و ۳ بدان اشاره شد و مستقیم‌ترین

و کلیترین رابطهٔ بین متر و انحنا را نشان می‌دهد. برای بیان آن به دو تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱۱ ([۲]). فرض کنیم (X,dist) یک فضای متری باشد. توابع تداخلی برستوفسکی[1] روی مجموعهٔ چهارتایی‌هایی از نقاط q، u، a و d در X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$B_k(q,u,a,d)=\measuredangle_k u^*q^*a^*+\measuredangle_k a^*q^*d^*+\measuredangle_k d^*q^*a^*-2\pi$$
(۳.۶)

که در آن زاویهٔ $\measuredangle_k u^*q^*a^*$ زاویهٔ رأس q^* در مثلث مقایسه‌ای $\Delta_k^*(u,q,a)$ در فضای دوبعدی با انحنای ثابت k و اضلاعی به‌ترتیب به‌طول $\mathrm{dist}(u,q)$، $\mathrm{dist}(q,a)$ و $\mathrm{dist}(a,u)$ است.

۱.۶ یادداشت. باید توجه داشت که B_k بدون اینکه نیازی به‌وجود مفهوم زاویه در فضای متری X باشد، خوشتعریف است. در مورد اصطلاح توابع تداخلی باید گفت که چهار نقطهٔ q، u، a و d سه مثلث در X مشخص می‌کنند که همگی در رأس q مشترک‌اند. فرض کنیم مثلثهای مقایسه‌ای مربوطه با رأس مشترک q^* در یک فضای مقایسه‌ای با انحنای ثابت k ساخته شده‌اند. B_k میزان تداخل این سه مثلث در آن فضای مقایسه‌ای را به دست می‌دهد.

تعریف ۱۲. فضای متری (X,dist) دارای انحنای برستوفسکی $\mathrm{curv}(X)\ge k$ است اگر به‌ازای هر چهارتایی از نقاط q، u، a و d در X، $B_k(q,u,a,d)\le 0$.

قضیهٔ زیر می‌گوید که یک کران پایین انحنای مقطعی دقیقاً به‌وسیلهٔ توابع برستوفسکی مشخص می‌شود.

قضیهٔ ۱۳ (توپونوگوف، برستوفسکی، [۸]، [۲] و [۶]). خمینهٔ ریمانی M^n دارای انحنای مقطعی $\sec(M)\ge k$ است اگر و فقط اگر $\mathrm{curv}(M)\ge k$.

۷. فضاهای الکساندروف

هر فضای طولی یک فضای متری است که در آن، فاصله‌ها به‌وسیلهٔ بزرگترین کران پایین طول خمها سنجیده می‌شود. اصطلاح فضای الکساندروف به‌فضای طولی کاملی مانند (X,dist) اطلاق می‌شود که در آن $\mathrm{curv}(X)$ از پایین کراندار و بعد هاوسدورف آن متناهی باشد. هر خمینهٔ ریمانی $(M^n,g)\in\mathcal{M}_k(n)$ یک فضای الکساندروف است.

توجه داشته باشید که رویه‌های چنبرهٔ جعبه‌ای و چنبرهٔ دوگانهٔ جعبه‌ای هرچند فضاهای طولی هستند ولی فضای الکساندروف نیستند. در واقع چون انحنای کل این رویه‌ها نامثبت است و همهٔ انحنا را اندازه‌های دیراک مشخص می‌کنند بنابراین برای خنثی کردن انحنای مثبت در نقاطی که رویه اکیداً محدب است، نیاز به انحنای $-\infty$ در نقطه‌ای داریم.

از طرف دیگر توجه کنید که فضاهای حدی تغییر شکلهای هم‌قطری کره که در شکلهای ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند، فضاهای الکساندروف هستند. در مورد فرو ریختن روی یک بازه باید گفت که در حالت کلی اگر X یک فضای الکساندروف با انحنای $\mathrm{curv}(X)\ge k$ باشد و G یک گروه لی فشرده از طولپاییهای X باشد آنگاه فضای خارج قسمتی X/G یک فضای الکساندروف با انحنای $\mathrm{curv}(X/G)\ge k$ است. در حالت خاص شکل ۶، بازهٔ حدی از تقسیم $\mathbb{S}^2_1$ به گروه S^1، گروه دورانهای حول محور قائم تقارن به‌دست می‌آید.

موضوع بسیار کلیتر در مورد «سؤال هویف» که اهمیت اساسی دارد، این است که هر فضای حدی X از دنباله‌ای از خمینه‌های ریمانی M_i^n در $\mathcal{M}_k(n)$ یک فضای الکساندروف است که احیاناً بعد آن کمتر از n ولی انحنای آن ناکمتر از k است. رک. [۲۴].

در مثالهای شکلهای ۵ و ۶ واضح است که فضاهای حدی چگونه‌اند و (در نتیجه روشن است که آنها) فضای الکساندروفی هستند با انحنای $\mathrm{curv}(M_\infty=2D_{\pi/2})\ge 0$ برای قرص دوگانه و $\mathrm{curv}(M_\infty=I_\pi)\ge 1$ برای بازه. ولی در حالت کلی به یک توپولوژی (متری) روی مجموعهٔ مثلاً فضاهای متری فشردهٔ جدایی‌پذیر نیاز داریم تا بتوانیم به‌نحوی ثمربخش دربارهٔ مفهوم فضاهای حدی بحث کنیم.این چنین متری، یعنی متر گروموف-هاوسدورف d_{GH} به‌وسیلهٔ گروموف در [۱۴] و [۱۵] ساخته شده است که مفهوم کلاسیک فاصلهٔ هاوسدورف d_H بین زیرمجموعه‌های فشردهٔ یک فضای متری فشرده را تعمیم می‌دهد. به بیان دقیق (و قدری خلاصه‌وار) داریم

تعریف ۱۴. فرض‌کنیم X و Y فضاهای متری فشرده ی باشند. دراین صورت

$$d_{GH}(X,Y)=\inf d_H(X,Y)$$
(۱.۷)

اینفیمم [بزرگترین کران پایین] نسبت به همه مترهای روی اجتماع مجزای $Z=X\coprod Y$ گرفته می‌شود که مترهای مفروض روی X و Y را توسیع می‌دهد. فاصلهٔ هاوسدورف d_H با رابطهٔ $d_H(X,Y)\le\epsilon$ تعریف می‌شود اگر هر نقطهٔ $X\subset Z$ به‌فاصله‌ای نابیشتر از ϵ از یک نقطهٔ $Y\subset Z$ قرار داشته باشد، و به‌عکس.

در حال حاضر ساختار مجموعهٔ فضاهای الکساندروف با توپولوژی متری هاوسدورف-گروموف به‌شدت مورد مطالعه و بررسی است. برای ملاحظهٔ مقاله‌های مروری جدید و دقیق در این زمینه، رک. [۲۰] و [۶].

احکام ساختاری برای فضاهای الکساندروف خاص خیلی اهمیت دارند زیرا اثر مستقیم روی «نزدیک بودن به مفهوم ریمانی» دارند که در قضیهٔ پایداری زیر نشان داده شده است:

قضیهٔ ۱۵ (پرلمان، [۶]، [۳۲] و یاماگوچی [۳۵]). فرض کنیم X یک فضای الکساندروف با بعد n باشد و $\mathrm{curv}(X)\ge k$. در این صورت عدد مثبتی چون $\epsilon=\epsilon(X)$ وجود دارد به‌طوری که هر فضای الکساندروف فشردهٔ n بعدی دیگر مانند Y با انحنای $\mathrm{curv}(Y)\ge k$ و $d_{GH}(X,Y)\le\epsilon$ با فضای مفروض X همسانریخت[1] است. اگر X و Y خمینه‌های ریمانی باشند آنگاه به‌جای خاصیت «همسانریختی» در حکم قضیه می‌توان «وابرریختی»را قرار داد.

۸. برنامهٔ شناسایی

در این بخش آخر برخی قضایا و حکمهای ساختاری را بیان می‌کنیم که در راستای سؤال هویف می‌توان آنها را قضایای شناسایی به‌مفهوم زیر دانست: در هر یک از این گزاره‌ها مجموعه‌ای از شرایط روی برخی از ناوردهای متری

1. Berestovskii overlap functions

1. homeomorphic

خمینه که خوب انتخاب شده‌اند، خمینه را از نظر توپولوژی با متری مشخص می‌کند یعنی تا حد همسانریختی، و ابرریختی یا طولپالی. البته برنامهٔ کامل شناسایی اصولاً معطوف به‌بزرگ کردن مجموعهٔ خمینه‌هایی است که به این نحو قابل تشخیص‌اند. رک. [۲۲].

قضیهٔ کره و قضیه کرهٔ قطری اکنون قضایای کلاسیک، و مشهوری از این نوع به‌شمار می‌آیند:

قضیهٔ ۱۶ (راوخ، برگر، کلینگنبرگ، [۸]). فرض کنیم M_n یک خمینهٔ ریمانی فشردهٔ ساده‌ـهمبند کامل باشد که انحنای مقطعی آن در شرایط زیر صدق کند:

$$1 \le \sec(M) \le 4 \qquad (۱.۸)$$

در این صورت یا M^n همسانریخت با کرهٔ $\mathbb{S}^n$ است یا M^n فضای متقارن **فشرده‌ای از رتبهٔ یک است.**

قضیهٔ ۱۷ (گرو، شیوهاما، [۲۳]). فرض کنیم M^n یک خمینهٔ ریمانی با انحنای مقطعی $\sec(M) \ge 1$ و $\operatorname{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ باشد. در این صورت M با کرهٔ $\mathbb{S}^n$ همسانریخت است.

واضح است که برای اجرای این برنامه لازم است ناورداهای متریِ خیلی بیشتری معرفی کنیم با این امید که از تأثیرات متقابل آنها توپولوژی ها و هندسه‌های پیچیده‌تری (اگر نه همهٔ آنها) به‌دست آید. از بین این ناورداهای متری که تاکنون در این مبحث با موفقیت به‌کار برده شده‌اند، ناورداهای زیر قابل ذکرند: پهنا[1]، سیستول[2]، شعاع پرکننده[3]، شعاعهای بسته‌بندی[4]، شعاعهای پوششی[5]، ناوردای مازادی[6]، گستره[7] و غیره

ناورداهای فوق‌الذکر به‌صورت زیر با تعمیم طبیعی قطر تعریف می‌شوند:

تعریف ۱۸ ([۲۱]). qـگسترهٔ یک فضای متری فشردهٔ X که با $\mathrm{xt}_q(X)$ نشان داده می‌شود عبارت است از بیشینهٔ متوسط فاصله بین نقاط qـتاییهای X:

$$\mathrm{xt}_q(X) = \max_{x_1,\dots,x_q} \mathrm{xt}_q(x_1,\dots,x_q) \qquad (۲.۸)$$

که در آن $\mathrm{xt}_q : X^q \mapsto \mathbb{R}$ تابع qـگسترهٔ زیر است:

$$\mathrm{xt}_q(x_1,\dots,x_q) = \binom{q}{2}^{-1} \sum_{i<j} \operatorname{dist}(x_i,x_j) \qquad (۳.۸)$$

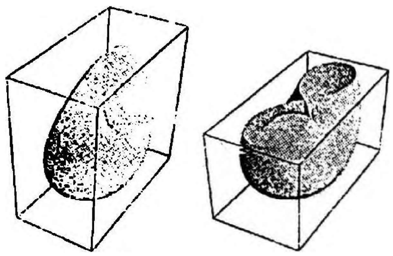
هر qتایی $(x_1,\dots,x_q) \in X^q$ که qـگسترهٔ X را به‌دست دهد. qـگسترندهٔ X نامیده می‌شود.

توجه کنید که به‌وضوح داریم: قطر $X = \mathrm{xt}_2(X)$، و بنابراین می‌توان $\mathrm{xt}_3(X)$ را سه شعاع X و $\mathrm{xt}_4(X)$ را چهار شعاع X و غیره نامید.

در پایان یکی از موارد استفادهٔ گستره‌ها را در برنامهٔ شناسایی ذکر می‌کنیم:

قضیهٔ ۱۹ (گرو و مارک‌ورسن [۲۱]، [۲۲]). تابع مثبتی چون $\epsilon(n)$ وجود دارد به طوری که هر خمینهٔ ریمانی M^n که $\sec(M^n) \ge 1$ و $\mathrm{xt}_{n+1}(M^n) \ge \frac{\pi}{2} - \epsilon(n)$، با کرهٔ $\mathbb{S}^n$ همسانریخت و یا با فضای تصویری حقیقی $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ و ابرریخت [= دیفئومورف] است. اگر $\mathrm{xt}_{n+1}(M^n) = \frac{\pi}{2}$ و $\operatorname{diam}(M^n) = \frac{\pi}{2}$، آنگاه M با $\mathbb{R}p^n_1$ طولپاست.

1. width 2. systole 3. filling radius 4. packing radii
5. covering radii 6. excess invariant 7. extent



شکل۷ صفحهٔ تصویری دوبعدی (و برش افقی بالای آن) که به درون $\mathbb{R}^3$ تغییر شکل یافته است.

۱.۸ یادداشت در مورد صفحهٔ تصویری. $\mathbb{R}P^2_1$ صفحهٔ تصویری حقیقی با انحنای ثابت ۱ در $|K| \times \operatorname{diam}^2(M) = \frac{\pi^2}{4} \le 2{,}46$ صدق می‌کند. این حکم، حکمِ بعد از نتیجهٔ ۸ را نقض نمی‌کند زیرا $\mathbb{R}P^2$ همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده جهت‌پذیر نیست. در حقیقت همان‌طور که مستقیماً از روی شکل معلوم می‌شود، صفحهٔ تصویری شامل یک نوار موبیوس است که جهت‌پذیر نیست.

۲.۸ یادداشت در مورد اثبات قضیهٔ ۱۹. نخست با استفاده از روشهای مقایسه‌ای و به کمک حکمی در مورد صلب‌بودن مثلثها و گسترنده‌ها در فضای الکساندروف (شبیه قسمت مربوط به صلب بودن در قضیهٔ ۳)، گزارهٔ زیر در مورد فضاهای الکساندروف اثبات می‌شود.

گزارهٔ ۲۰. فرض کنیم X یک فضای n بعدی الکساندروف با $\operatorname{curv}(X) \ge 1$ باشد. در این صورت $\mathrm{xt}_{n+1}(X) = \operatorname{diam}(X) = \frac{\pi}{2}$ اگر و فقط اگر X با $\mathbb{S}^n_1/H$ طولپا باشد که در آن H یک گروه آبلی متناهی از برگشت[1]‌های طولپا در گروه متعامد $O(n+1)$ است که روی کرهٔ $\mathbb{S}^n_1$ بدون نقطهٔ ثابت **عمل می‌کند.**

حال اگر این چنین فضای $\mathbb{S}^n_1/H$ خمینه باشد آنگاه یا با $\mathbb{R}P^n_1$ طولپاست و یا با $\mathbb{S}^n$ همسانریخت است. چون بنابر قضیهٔ قطر و کره، M^n با کره همسانریخت است اگر $\operatorname{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$، می‌توان فرض کرد که $\operatorname{diam}(M) \le \frac{\pi}{2}$. در این صورت M^n فضای گروموفـهاوسدورفی نزدیک به $\mathbb{R}P^n$ یا به یک فضای تکین همسانریخت با $\mathbb{S}^n$ است، و حکم از قضیهٔ ۱۵، قضیهٔ پایداری یاماگوچی و پرلمان، نتیجه می‌شود.

سپاسگزاری. خوشوقتم از کارستن‌گرو به خاطر بحثهای روشنگر و الهام‌بخشِ زیادی که دربارهٔ هندسهٔ مقایسه‌ای داشتیم، تشکر کنم.

مراجع

1. A. D. Alexandrov, *Die Innere Geometrie der Konvexen Flächen*, Akademie Verlag Berlin, 1955.

2. Berestovskiĭ, *Spaces with bounded curvature and distance geometry*, Sibirskiĭ Mat. Zh **27** (1986), 26-34, = Siberian Math. J. **27** (1986), 8-19.

3. M. Berger, *Riemannian manifolds: From curvature to topology*, Chern . A Great Geometer of the Twentieth Century (S.

1. involution

T. Yau, ed.), International Press Co., Ltd., Hong Kong, 1992, pp. 184-238.

4. R. Bishop and R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.

5. M. Brφns, W. Kliem, and S. Markvorsen, *Nonlinear models of a vibrating elasticum*, Journal of Sound and Vibrations **158** (1992), 35-43.

6. Y. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man, *A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below* I, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 2, 3-51.

7. P. Buser and H. Karcher, *Gromov's Almost Flat Manifolds*, Astérisque, vol. **81**, Societé Mathématique de France, 1981.

8. J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, Math Library, vol. 9, North-Holland. 1975.

9. M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

10. ———, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1992.

11. K. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, 1965, Translation of Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, 1827.

12. A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993.

13. M. Gromov, *Almost flat manifolds*, Journal of Differential Geometry **13** (1978), 231-242.

14. ———, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Math. I.H.E.S. **53** (1981), 53-73.

15. ———, *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes*, Cedic/Fernand Nathan, 1981, Redigé par J. Lafontaine et P. Pansu.

16. ———, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1982), 179-195.

17. ———, *Sign and Geometric Meaning of Curvature*, Lecture Notes (Milano), June 1990.

18. K. Grove, *Metric differential geometry*, Differential Geometry (V. L. Hansen, ed.), Springer Verlag, 1985, Lecture Notes in Math, No. 1263, pp. 171-227.

19. ———, *Ramifications of the classical sphere theorem*, To Marcel Berger on his 65'th birthday, 1992.

20. ———, *On the role of singular spaces in riemannian geometry*, Paper based on Lectures given at the Global Analysis Research Center of Seoul National University, 1993.

21. K. Grove and S. Markvorsen, *Curvature, triameter, and beyond*, Bulletion of Amer. Math. Soc. (New Series) **27** (1992), 261-265.

22. ———, *New extremal problems for the Riemannian recognition program via Alexandrov Geometry*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 1-28.

23. K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Annals of Mathematics **106** (1977), 201-211.

24. K. Grove and P. Petersen V, *Manifolds near the boundary of existence*, Journal of Differential Geometry **33** (1991), 379-394.

25. ———, *Volume comparison à la Alexandrov*, Acta Mathematica **169** (1992), 131-151.

26. M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

27. H. Hopf, *Differentialgeometric and topologische Gestalt*, Jahresbericht d. DMV **41** (1932), 209-229.

28. H. Karcher, *Riemannian comparison constructions*, Global Differential Geometry (S. S. Chern, ed.), The Mathematical Association of America, 1989, pp. 170-222.

29. W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter, 1982.

30. J. Langer and D. A. Singer, *Curve straightening and a minimar argument for closed elastie curves*, Topology **24** (1985), 75-88.

31. S. Markvorsen, *Om Arealet af Sfæriske Polygoner*, Tech. report, Mathematical Institute, Technical University of Denmark, 1994, MAT-PR Nr. 9, 5p., in Danish.

32. G. Perel'man, *Alexandrov's spaces with curvature bounded from below* II, To appear.

33. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, I-V, Publish or Perish 1979, Second Edition.

34. C. A Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, vol. X et XI Seriei Secundae, Venditioni Exponunt Orell Füssli Turici, 1960.

35. T. Yamaguchi, *Collapsing and pinching under a lower curvature bound*, Annals of Mathematics **133** (1991), 317-357.

******

• Steen Markvorsen, "On curvature and shape, a comparison geometric survey", *Expo. Math.* **13** (1995) 417-432.

* استین مارک‌ورسن، مؤسسهٔ ریاضی دانشگاه فنی دانمارک