نظریهٔ ابعاد در جبر

احمد حقانی[*]

از شناخته شده ترین راههای بررسی ساختار یك دستگاه ریاضی، یافتن و مطالعهٔ ناورداهای آن دستگاه است. منظور از ناوردای یك موجود ریاضی‌عموماً یك یا چندکمیت عددی، اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و یا به‌طورکلی مجموعه‌ای از اشیای ریاضی است که به آن موجود نسبت داده می‌شود، بــه قسمی کــه با "مقایسهٔ" ناورداهای دو موجود بتوان معین کرد که آیا آنها "یکسان" هستند و یا تا چه "اندازه" از یکدیگر متفاوت و دورند. درضمن‌مثالهای زیر، مراد از مقایسه و یکسانی روشن می‌گردد.

۱. اگر V و W فضاهایی برداری بریك هیأت F باشند، آنگــاه شرط لازم و کافی برای یکریخت بودن آنها تساوی ابعادشان است. پس بعد یك فضای برداری، ناوردایی از آن فضاست.

۲. فرض شود G گروهی متناهی و آبلی با مرتبه‌ای بزرگتر از ۱ است. یك فهرست منحصر به فرد از اعداد صحیح مثبت چون $d_1, d_2, \dots, d_n$ به‌قسمی که $d_1 > 1$، $d_1 | d_2, \dots, d_{n-1} | d_n$ به G منسوب می گردد کــه به فاکتورهای ناوردای G موسوم است. در این صورت، گروههــای متناهــی آبلــی G_1 و G_2 یکریخت‌اند اگر و تنها اگرفهرست فاکتورهای ناوردای آنها برابر باشند.

۳. عدد پیچشی[1]، یك ناوردای خمهاست. اگر $\gamma: [0, 1] \to \mathbf{C}$ خمی بسته با درازای متناهی و a نقطه‌ای ازصفحهٔ مختلط باشد و بر خم واقع نباشد، عدد پیچشی γ حول a عبارت‌است از

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} \cdot$$

حال اگــر γ_1 و γ_2 خمهای بسته‌ای بــا درازای متناهــی در $\mathbf{C} - \{0\}$ باشند به‌طوری کــه $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = 1$، آنگاه شرط لازم وکافی برای آنکه γ_1 و γ_2 در$\mathbf{C} - \{0\}$ هموتوپیك باشند آن است‌که $n(\gamma_1; 0) = n(\gamma_2; 0)$. دراین مثال، معیار یکسانی، هموتوپی‌خمهاست درحالی‌که مقایسه به‌وسیلهٔ تساوی معمولی اعداد صحیح انجام می‌پذیرد.

۴. در توپولوژی جبری، به‌فضــای توپولوژیك گروهــی موسوم به گروه بنیادی منسوب می گردد که در مبحث رده‌بندی فضاهای توپولوژیك ابزاری نیرومنداست. مثلاً با محاسبهٔ گروه بنیادی رویه‌ها و مقایسهٔ آنها ــ توسط یکریختی گروهها ــ می‌تــوان رویه‌های فشرده را به‌تقریب همانریختی[1] رده‌بندی کرد.

۵. سیستمهای جبری دیگری نیز به عنوان ناوردا ظاهر می‌شوند. فی‌المثل اگر X یك فضای فشردهٔ هاسدورف و $C(X)$ جبر کلیهٔ توابع پیوسته از X به $\mathbf{C}$ باشد، آنگاه شرط لازم وکافی برای همانریخت بودن X با فضای فشرده وهاسدورف Y آن‌است‌که جبرهای $C(X)$ و$C(Y)$ یکریخت باشند. دراین مثال یك جبر، ناوردای فضایی توپولوژیك‌است.

اما سهم نظریــهٔ حلقه‌هــا از این‌بررسی، یعنی یافتن ومطالعهٔ ناورداها، چیست؟ باید اذعان‌کردکه در مقایسه با برخی دیگر از شاخه‌های ریاضیات، این سهم چندان قابل‌توجه نیست، و این‌خود انعکاس‌این‌واقعیت‌است‌که موضوع رده‌بندی حلقه‌ها،جزدرمواردی که حلقه‌ها مقید به‌انواع شرایط مناسب باشند، در مراحل ابتدایی پیشرفت‌است. تنها درقضایای‌معدودی‌ـ‌چون‌قضیهٔ ودربورن[2]ــ آرتین در تشخیص حلقه‌های آرتینی نیمه‌ساده به‌عنوان حاصلجمع مستقیم حلقه‌های ماتریسی برهیأتهای‌کج[3]؛ و یا قضیهٔ تراکمی جاکوبسن که برطبق آن یك حلقهٔ اولیه[4] در حلقهٔ درونریختیهای یك فضای برداری‌مناسب به‌صورت"متراکم" ظاهرمی‌گردد؛ ویا قضیهٔ گالدی[5] که شرایط لازم وکافی برای وجود داشتن حلقهٔ خارج‌قسمتهای‌یك حلقهٔ مفروض‌را به‌طوری‌که این‌حلقهٔ خارج‌قسمتها آرتینی‌نیمه‌ساده باشد، به‌دست می‌دهد ـ می‌توان ردپایی از ناورداها را دید. اما در نظریهٔ عمومی حلقه‌ها، از ناوردا‌ــ آن‌گونه‌که در بالا توصیف شد ــ تاکنون خبری نبوده است و در عوض مفهومی به‌نام "بعد" نقش ناوردا را برای حلقه‌ها و آن‌هم به‌طور محدود ایفا می‌کند. بعدهای مختلفی کــه برای حلقه‌ها تعریف شده‌اند عمومــاً اسباب اندازه‌گیری‌اند بــدین معنا کــه دوری، حلقه را از یك موقعیت "ایده‌آل" معین می‌کنند. گرچه عموماً این‌ملاکهای دوری به‌تنهایی منجر به‌شناسایی کامل حلقه نمی‌شوند، معهذا گاه اطلاعات ذیقیمتی

1. winding number

1. homeomorphism
2. Wedderburn
3. skew fields
4. primitive
5. Goldie

از ساختار حلقه به‌دست می‌دهند.

از طرف دیگر، بررسی توأم بعدهای مختلف، رهیافت وحدت‌بخشی به‌نظریهٔ حلقه‌ها به‌شمار می‌رود که نمود و تجلی آن را در اختصاص سه فصل عمده از کتاب معتبر [۹] به بعدها و یا انتشار [۱۰] و کتب و مقالات متعددی که کلاً راجع به‌بعدهاست می‌بینیم. از این دیدگاه‌است که نگارنده به‌معرفی بعدها و به بیان توسعه و تحولی که از این رهگذر عاید جبر شده‌است خواهد پرداخت، و ازمیان انبوه قضایا و نتایج حاصله تنها به‌توصیف گزیده‌ای کوچك قناعت خواهد کرد. مهمترین بعدهایی که در نظریهٔ حلقه‌ها مطرح شده‌اند عبارت‌اند از: بعد کرول[1]، بعد همولوژیك فراگیر[2]، بعد گلدی و بعد گلفاند ـ کیریلوف. این ترتیب بی‌ارتباط با تاریخ پیدایش آنها نیست. این مقاله را اختصاص به بعد کرول و بعد همولوژیك فراگیر می‌دهیم و در آن روی سخن ما با خوانندگانی است که لزوماً آشنایی چندانی با جبر ندارند. معهذا امید است که خبرگان این رشته نیز در این مقاله مطالبی درخورتوجه بیابند.

بعد کرول

از آنجا که قسمت بزرگی از نظریهٔ حلقه‌ها، لااقل به‌لحاظ تاریخی، مربوط به‌حلقه‌های جابه‌جایی [تعویض‌پذیر] می‌شود، طبیعی است که مفهوم بعد ابتدا در جبر جابه‌جایی [تعویض‌پذیر] مطرح شده باشد. لذا این امر به‌طور طبیعی بعدی را مطمح نظر می‌سازد که ریشه در هندسهٔ جبری دارد وازارتباطات اولیه و پایداری که جبرجابه‌جایی با هندسهٔ جبری دارد ناشی می‌گردد. در اینجا ذکر مقدماتی از هندسهٔ جبری خالی از فایده نخواهد بود.

هیأت F راکه به‌طور جبری بسته است (فرضاً $F=\mathbf{C}$) در نظر گرفته و مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب اعضای F را با A^n_F، موسوم به‌فضای آفین، نشان می‌دهند. اگر X زیرمجموعه‌ای از A^n_F باشد گویند Xمجموعه‌ای جبری‌است هرگاه‌درجبر $F[X_1, \ldots, X_n]$ چندجمله‌ایهای n متغیره برهیأت F، زیرمجموعه‌ای چون T یافت شود به‌طوری که X مجموعهٔ صفرهای مشترك اعضای T باشد. با استفاده از مجموعه‌های جبری، A^n_F را می‌توان تبدیل به‌یك فضای توپولوژیك کرد، بدین‌ترتیب که مکملهای مجموعه‌های جبری را به‌عنوان مجموعه‌های باز این توپولوژی،که امروزه به توپولوژی زاریسکی موسوم است،قرارمی‌دهند (شرح جزئیات‌ونیز نتایج دیگر در[۶] مندرج‌است).دراین‌صورت، یك واریته(آفین)،زیرمجموعهٔ بسته‌ای چون Y از A^n_F است که تحویل‌ناپذیرباشد، یعنی نتوان آن را به‌صورت اجتماع زیرمجموعه‌های سره‌ای که هریك در Y بسته است نوشت. البتهY را همراه با توپولوژی القاشده ازتوپولوژی زاریسکی درنظرخواهیم داشت. به هر مجموعهٔ جبری X، ایده‌آل $I(X)$ از حلقهٔ $A=F[X_1, \ldots, X_n]$ نظیر می‌گردد و این، مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهایی‌است که هرکدام درتمامی اعضای X صفر می‌شود. برطبق (نتیجه‌ای از) قضیهٔ معروف هیلبرت موسوم به‌قضیهٔ صفرها[3]، تناظر

$$Y \to I(Y)$$

تناظری یك به‌یك از واریته‌های فضای آفین به‌مجموعهٔ ایده‌آلهای اول جبر A است. این تناظر، ترتیب شمولی را معکوس می‌سازد و لذا زنجیرهٔ کاهشی و سرهٔ

$$Y \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_t$$

از واریته‌ها را متناظر با زنجیرهٔ افزایشی وسرهٔ

$$P \subset P_1 \subset \cdots \subset P_t$$

ازایده‌آلهای اول می‌کند. بعد یك فضای توپولوژیك X،سوپریمم کلیهٔ اعدادصحیح m تعریف می‌گردد به‌قسمی کـه زنجیرهٔ سره‌ای به‌طول m از زیرمجموعه‌های بسته و تحویل ناپذیر در X وجود داشته باشد. نوتر در ۱۹۲۳ ثابت کرد که بعد واریتهٔ Y به‌عنوان یك فضای توپولوژیك برابراست‌با ماکسیمم طولهای زنجیره‌های سره وافزایشی‌ازایده‌آلهای اول‌که از $P=I(Y)$ آغازمی‌گردند. بدین‌ترتیب، شمارش طول زنجیره‌های ایده‌آلهای اول، ابتدا در جبر جابه‌جایی و سپس درجبر ناجابه‌جایی به‌عنوان وسیلهٔ طبیعی تعریف بعد مورداستفاده قرار گرفت.گرچه این‌کار توسط نوتر در مورد حلقهٔ چندجمله‌ایها آغـاز شد اما این بعد به کرول منسوب است به‌این دلیل‌که‌کرول توانست این شمارش‌را به‌همهٔ حلقه‌های جابه‌جایی نوتری گسترش داده و آن را به‌عنوان ابزاری جدید در مطالعهٔ ایده‌آلها به‌کار گیرد.

در بقیهٔ این مقاله، R حلقه‌ای با عضو واحد (ناصفر) فرض می‌شود. ارتفاع ایده‌آل اول P، سوپریمم اعـداد صحیح n است به‌قسمی‌که $n+1$ ایده‌آل اول P_i با شرط

$$P=P_0 \underset{\neq}{\supset} P_1 \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} P_n$$

وجود داشته باشند. سوپریمم را با $ht(P)$ نشان می‌دهند. به طور مثال در حلقهٔ $\mathbf{Z}$ ازاعداد صحیح، $ht(0)=0$ وبرای هرعدد اول p، $ht(p\mathbf{Z})=1$.

مفهوم ارتفاع عملاً هنگامی مفید است کـه مقدارش عددی طبیعی باشد و از ابتدا معلوم نیست‌که چرا چنین‌کمیتی‌باید متناهی باشد. مثلاً درحلقهٔ چندجمله‌ایها $F[X_1, X_2, X_3, \ldots]$ ارتفاع ایده‌آل M تولید شده توسط‌کلیهٔ متغیرها بینهایت‌است:

$$M=(X_1, X_2, X_3, \ldots) \underset{\neq}{\supset} (X_2, X_3, X_4, \ldots)$$

$$\underset{\neq}{\supset} (X_3, X_4, \ldots) \underset{\neq}{\supset} \cdots .$$

کرول نشان داده‌است‌که برای حلقهٔ جابه‌جایی Rی‌که هر ایده‌آل آن دارای مجموعهٔ مولد متناهی باشد، هرگـز چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد. شرط مذکور در مورد حلقهٔ R معادل آن است کـه هر زنجیرهٔ افزایشی (و سره) از ایده‌آلهـای R متناهی باشد، و چنین حلقه‌ای را *نوتری* نامند.

قضیهٔ ایده‌آل اصلی‌کرول (۱۹۲۸). حلقهٔ جابه‌جایی R نوتری فرض می‌شود. اگر $x \in R$ و P در مجموعهٔ ایده‌آلهای اول کـه حاوی x هستندکمین [مینیمال] باشد، آنگاه $ht(P) \leqslant 1$.

خاطرنشان می‌شود که ارتفاع از مفاهیم اساسی جبر است و

1. Krull 2. global 3. Nullstallensatz

قضیهٔ زیر که ارتباط آن را با یکتایی تجزیه بیان می‌کند مبین این امر است. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل را اصلی گویند هرگاه توسط تنها یك عضو تولید شود.

قضیه. دامنهٔ جابه‌جایی‌ونوتری R مفروض‌است. شرط لازم وکافی برای‌آنکه R یك دامنهٔ یکتایی تجزیه باشد، آن‌است که هر ایده‌آل اول به‌ارتفاع ۱، اصلی باشد.

نتیجه‌ای که فوراً از قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول عاید می‌شود، این‌است که در حلقهٔ جابه‌جایی نوتری R اگر ایده‌آل I توسط t عضو تولید شود، فرضاً $I=x_1R+\dots+x_tR$، و P درمجموعهٔ ایده‌آلهای اول کـه حاوی I اند، کمین باشد آنگاه $ht(P)\leqslant t$. حال چنانچه R موضعی نیز باشد، یعنی دارای یك ایده‌آل بیشین [ماکسیمال] منحصر به‌فرد چون M باشد، آنگاه ارتفاع M کوچکتر یا مساوی حداقل تعداد مولدهای لازم برای تولیدکردن ایده‌آل M است. هنگامی کـه این دوکمیت مساوی باشند، حلقه را منظم (موضعی) نامند. چنین حلقه‌هایی به عنوان حلقه‌های موضعی نقاط ناتکین واریته‌های جبری ظاهر می‌گردند.

به‌لحاظ اهمیت فـراوان نقاط تکین، مختصراً مفاهیم مربوط به‌آن را توصیف می‌کنیم. فرض شود Y یك واریتهٔ آفین در A_F^n، و P نقطه‌ای متعلق بـه Y باشد. Y در P ناتکین نامیـده می‌شود هرگاه مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right\|$$

برابر $n\text{-}\dim Y$ باشدکـه در آن چند جمله‌ایهای $f_1,\dots,f_t$ تشکیل یك مجموعهٔ مولد برای ایده‌آل $I(Y)$ می‌دهند و $\dim Y$ بعد فضای توپولوژیك Y است. (این تعریف مستقل از مجموعهٔ مولد فوق‌است). برطبق قضیه‌ای از زاریسکی، شرط لازم و کافی برای آنکه Y در P ناتکین‌باشد آن‌است که $O_{P,Y}$، حلقهٔ موضعی P، منظم باشد. توضیح آنکه می‌توان درحلقهٔ مختصات Y، یعنی‌در

$$A(Y)=\frac{F[X_1,\dots,X_n]}{I(Y)}$$

اعضا رابه‌صورت توابعی بر Y که مقادیرشان در F اند، تصور کرد. دراین‌صورت، مجموعهٔ توابعی که در P صفرشوند تشکیل ایده‌آلی بیشین از $A(Y)$ رامی‌دهند (واین همخود نتیجه‌ای ازقضیهٔ صفرهای هیلبرت‌است). چنانچه $A(Y)$ را دراین ایده‌آل بیشین موضعی‌سازی[1] کنیم، حلقهٔ موضعی حاصل با $O_{P,Y}$ نشان داده می‌شود کـه به حلقهٔ موضعی P موسوم‌است. نکتهٔ جالب آن‌است که همواره بعد فضای Y با ارتفاع تنها ایده‌آل بیشین $O_{P,Y}$ برابراست، لـذا بعد حلقهٔ مزبور را برابر $\dim Y$ تعریف می‌کنند.

حال‌که تااندازه‌ای سبب نامگذاری روشن گشت، بعدکلاسیك کرول حلقهٔ دلخواه R رابه‌عنوان سوپریمم اعداد صحیح n تعریف می‌کنیم به‌قسمی که‌زنجیره‌ای سره و افزایشی به‌طول n از ایده‌آلهای اول در R وجود داشته باشد. این کمیت بـا $\dim R$ نشان داده

1. localization

می‌شود. یکی از نتایج قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول آن‌است که ارتفاع هرایده‌آل اول دریك حلقهٔ جابه‌جایی نوتری عددی‌است طبیعی، لذا برای یك چنین حلقه‌ای بعدکلاسیك کرول همانا سوپریمم ارتفاعهای ایده‌آلهای اول آن حلقه‌است. آشکاراست که بعد کلاسیك کرول هرهیأت صفراست و $\dim \mathbf{Z}=1$. از جمله اولین نتایج حاصله، قضیهٔ زیراست که ارتباط شرایط نوتری و آرتینی‌را برای‌حلقه‌های جابه‌جایی به‌دست می‌دهد: حلقه را آرتینی (چپ) نامند هرگاه هر زنجیرهٔ سره وکاهشی از ایده‌آلهای (چپ) آن متناهی باشد.

قضیه. R جابه‌جایی فرض می‌شود. در این‌صورت R آرتینی‌است اگر و تنها اگر R نوتری، و بعدکلاسیك کرول آن صفرباشد.

با استفاده از این قضیه است که ساختار حلقه‌های جابه‌جایی آرتینی به‌عنوان حاصلجمع مستقیم یکتایی از حلقه‌هـای موضعی آرتینی به‌دست آمده‌است. بنابرقضیهٔ فـوق، بعدکلاسیك کرول، دوری یك حلقهٔ جابه‌جایی را از آرتینی بودن مشخص می‌سازد.

آیا حلقه‌هایی وجود دارندکه به‌هراندازهٔ دلخواه از آرتینی بودن به‌دور باشند؟ آری، زیرا برای هرعدد طبیعی n داریم

$$\dim \mathbf{C}[X_1,\dots,X_n]=n.$$

اما وجود حلقه‌های کاملاً متفاوت که بعدکلاسیك کرول آنها مساوی است (مثلاً $\dim Z_p=\dim Z=\dim \mathbf{C}[X]=1$؛ p عـدد اول) مبین این مطلب است کـه این بعد به‌تنهایی برای بررسی و شناخت کامل حلقه‌ها کافی نیست.

پس از آنکه بعد کلاسیك کرول مطرح شد، بـه‌طور طبیعی محاسبهٔ بعد حلقهٔ R که به‌نحوی با حلقهٔ S درارتباط باشد برحسب $\dim R$ موردنظر قرار گرفت. مثلاً S می‌تواند هریك ازحلقه‌های زیر باشد:

R/I، که در آن I ایده‌آلی در R است؛
$R[X_1,X_2,\dots,X_n]$ و یا به‌طورکلی حلقهٔ چند جمله‌ایها بـا ضرایب در R برحسب متغیرهای $\{X_i\}_{i\in I}$؛
$R[[X_1,\dots,X_n]]$ یعنی سریهای صوری با ضرایب در R؛
حلقهٔ گروه G با ضرایب در R یعنی $R[G]$؛
$R[X,\sigma]$ که σ یك درون‌ریختی R است.
$R[X,d]$ که $d: R\to R$ یك تابع مشتق‌است.
⋮

دقیقترین نتایج عموماً در حالتی‌که R نوتری باشد حاصل شدند زیرا در چنین موقعیتی‌نظریهٔ ایده‌آلها پیشرفته‌تراست. بعدکلاسیك کرول را می‌توان برای اعداد ترتیبی (اردینال) نیز تعریف‌کرد، که دراین صورت مسألهٔ وجود بعد را باید مدنظرداشت.

کرمزاده مشاهدهٔ جالب زیررا داشته‌است. وی ابتدا مجموعهٔ $X=\mathrm{Spec}(R)$ متشکل از کلیهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ دلخواه R را به دو طریق تبدیل به‌یك فضای توپولوژیك کرده وسپس بعدمشتق[1] X رانسبت به‌این توپولوژیها به‌دست می‌آورد. آنگاه ثابت‌می‌کند که بعد مشتق فضای توپولوژیك X وجود دارد اگر وتنها اگر بعد کلاسیك کرول حلقهٔ R وجود داشته باشد، و اختلاف این ابعـاد

1. derived dimension

حداکثر ۱ است [۸].

بعد کلاسیک کرول درمورد حلقه‌های ناجابه‌جایی ــ خصوصاً اگر ساده باشند یعنی ایده‌آلی بجز ایده‌آلهای بیمایه نداشته باشند ــ اطلاع زیادی به دست نمی‌دهد. بنابراین، می‌بایست این مفهوم به‌طریقی مناسب تعمیم داده شود. این عمل توسط رنتسلر و گابریل در ۱۹۶۷ به‌انجام رسید [۱۲]. پیش از آنکه تعریف آنان را از بعد ارائه کنیم، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که انگیزهٔ اصلی تعریف را روشن می‌کند. دامنهٔ جابه‌جایی R به طوری که $\dim R = n > 0$، مفروض است. در این صورت عضوی ناصفر چون x در R وجود دارد به‌طوری که: $\dim(R/xR) = n-1$. لذا زنجیرهٔ نامتناهی

$$R \supseteq Rx \supseteq Rx^2 \supseteq Rx^3 \supseteq \cdots$$

از ایده‌آلها با این ویژگی وجود دارد که هریک از مدولهای خارج قسمت Rx^i/Rx^{i+1} با R/Rx یک‌ریخت است، و در نتیجه به "اندازهٔ" حلقه‌ای از بعد کلاسیک $n-1$ "بزرگ" است.

اکنون E را مجموعه‌ای مرتب می‌گیریم و برای هردو عضو a و b در E قرار می‌دهیم

$$[a, b] = \{x \in E: \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

کمیتی به‌نام $\operatorname{dev} E$ (انحراف E) بدین گونه به‌این مجموعه نسبت می‌دهیم: اگر E گسسته باشد (یعنی در E استلزام $a \leqslant b \to a = b$ برقرار باشد)، $\operatorname{dev} E = -\infty$. چنانچه E ناگسسته ولی آرتینی باشد (یعنی تمام زنجیره‌های سره و کاهشی از اعضای E متناهی باشند) تعریف می‌کنیم $\operatorname{dev} E = 0$. به‌طور کلی برای عدد ترتیبی α تعریف می‌کنیم $\operatorname{dev} E = \alpha$ هرگاه اولاً $\operatorname{dev} E \neq \beta < \alpha$ و ثانیاً در هر زنجیرهٔ کاهشی از اعضای E نظیر

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots$$

کلیهٔ $[a_{i+1}, a_i]$ها، مگر تعدادی متناهی از آنها، دارای انحراف کمتر از α باشند.

به‌طور مثال، اگر $\mathbf{N}$، $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را با ترتیبهای طبیعی درنظر بگیریم، آنگاه $\operatorname{dev}\mathbf{N} = 0$ و $\operatorname{dev}\mathbf{Z} = 1$، اما $\mathbf{Q}$ دارای انحراف نیست. اکنون اگر M یک مدول چپ برحلقهٔ دلخواه R باشد، بعد (چپ) کرول M که با $|M|$ نشان داده می‌شود با انحراف مجموعهٔ کلیهٔ زیرمدولهای M که تحت رابطهٔ شمول مرتب شده باشد تعریف می‌گردد. بعد چپ کرول حلقهٔ R نیز انحراف مجموعهٔ ایده‌آلهای چپ در R تعریف می‌شود. این مفاهیم را طبعاً می‌توان برای مدولهای راست نیز بیان کرده و همچنین بعد راست کرول حلقهٔ R را درنظر آورد.

از جمله اولین نتایج تعریف آن است که مدولهای نوتری دارای بعد کرول هستند، اما عکس این مطلب درحالت کلی درست نیست. علاوه براین، برای حلقهٔ Rی که نوتری چپ باشد نه تنها $|R|$ وجود دارد بلکه در رابطهٔ

$$\dim R \leqslant |R|$$

نیز صدق می‌کند. در مورد حلقه‌های جابه‌جایی نوتری R، تساوی برقرار است: $\dim R = |R|$. به‌طور کلی اگر حلقهٔ (ناجابه‌جایی و از دوطرف) نوتری R و کلیهٔ فاکتورهای آن توسط ایده‌آلهای اول، دارای این ویژگی باشند که در هر ایده‌آل چپ یا راست و ناصفر آنها ایده‌آلی دوطرفه و ناصفر وجود داشته باشد، آنگاه بعد چپ کرول R مساوی بعد راست کرول حلقهٔ R و این هردو مساوی $\dim R$ هستند. چنین حلقه‌هایی طبعاً خیلی به جابه‌جایی بودن نزدیک تلقی می‌شوند، اما رنتسلر و گابریل با عرضهٔ یک مثال جالب و مهم ــ برای اولین‌بار ــ عمومیت تعریف خود را به‌نمایش گذاردند. مثال آنها از جبر وایل بود: nامین جبر وایل بر یک هیأت F عبارت است از F-جبر انجمنی [شرکت‌پذیر]

$$A_n(F) = F[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$$

متشکل از کلیهٔ چندجمله‌ایها برحسب $2n$ متغیر $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ با ضرایب درهیأت F که جمع آنها همانند چندجمله‌ایهای معمولی انجام می‌شود اما ضرب آنها با استفاده از روابط زیر انجام می‌گیرد:

$$X_iX_j = X_jX_i; \qquad Y_iY_j = Y_jY_i; \qquad X_iY_j - Y_iX_j = \delta_{ij}$$

جبر حاصل یک دامنهٔ سادهٔ نوتری والبته ناجابه‌جایی است، لذا $\dim A_n(F) = 0$. اما

$$|A_n(F)| = \begin{cases} n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر باشد} \\ 2n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر نباشد} \end{cases}$$

بدین گونه، بعد کرول تعمیم واقعی بعد کلاسیک کرول محسوب می‌شود زیرا برای حلقه‌های جابه‌جایی نوتری با بعد کلاسیک کرول مطابقت دارد، اما مفهومی است به‌مراتب عامتر از آن. این بعد جدید، نیز خود تعمیمهای تازه‌ای یافته‌است و مطالعه و بررسی آن از عمده‌ترین مشغولیات ذهنی تعداد کثیری از پژوهشگران برای مدتی قریب به ۲۰ سال بوده‌است. به‌عنوان نمونه، دوکاربرد آن درنظریهٔ عمومی حلقه‌ها را ذیلاً خواهیم دید.

قضیهٔ گوردن ــ رابسون [۹]. هرحلقهٔ نیمهٔ اول که دارای بعد کرول باشد، یک حلقهٔ گلدی است (یعنی دارای حلقهٔ خارج قسمتها می‌باشد که نیم‌سادهٔ آرتینی است).

قضیهٔ فوق پیشرفت جالب وعمده‌ای در مبحث "کسرها"ی یک حلقه محسوب می‌شود. نتیجهٔ کیفی دیگری که از مطالعهٔ بعد کرول حاصل شد، در مورد مسألهٔ پوچتوانی است که سابقه‌ای ۶۰ ساله دارد. عضو a از حلقهٔ R پوچتوان نامیده می‌شود هرگاه توان مناسبی از a صفر شود. اگر S زیرحلقه‌ای از R باشد S را پوچتوان نامند هرگاه یک عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری که $s^n = 0$ برای هر $s \in S$. چه وقت زیرحلقه‌ای که هرعضو آن پوچتوان باشد (که در آن صورت زیر حلقه را پوچ نامند) پوچتوان است؟ برطبق قضیه‌ای کلاسیک، منسوب به‌لویتزکی[1]، اگر R نوتری باشد هر زیرحلقهٔ پوچ آن پوچتوان است.

قضیهٔ گوردن ــ رابسون ــ لنگان[2] [۹]. درحلقه‌ای که دارای بعد کرول باشد، زیر حلقه‌های پوچ لزوماً پوچتوان هستند. علاوه براین، در

---

1. Levitsky　　2. Lenagan

چنین حلقه‌ای رادیکال اول پوچتوان، ومقطع تعدادی متناهی ایده‌آل اول، کمین است.

دیگر نتایج به‌دست آمده عموماً کمی هستند. فرض کنید $R \to S$ یك همریختی حلقه‌ای باشد و ما بخواهیم ارتباط بین بعدهای کرول S-مدولها و R-مدولها را مطالعه کنیم. حالت خاص این مطلب، یافتن ارتباط بین بعدهای کرول حلقه‌های S و R است، که در بررسی حلقه‌های نوتری و کوشش درشناخت ساختار آنها مفید واقع می‌گردد. ما از خیل نتایجی که به‌دست آمده و عمدتاً در [۹] ودر[۱۰] به‌تفصیل مذکورند، به‌علت پیچیدگی و تعدد حالتها می‌گذریم و به شرح موقعیت زیر اکتفا می‌کنیم. حلقهٔ نوتری R زیرحلقه‌ای از S فرض می‌شود به‌طوری که S به‌عنوان یك R-مدول توسط اعضای $x_1, \dots, x_n$ تولید می‌شود و $x_i r = r x_i$ برای هر $r \in R$ وهر $i = 1, \dots, n$ برقرار است.

قضیهٔ حقانی-دارات [۵]. اگر M یك S-مدول متناهیاً تولید شده، باشد آنگاه بعدهای کرول M به‌عنوان S-مدول و R-مدول برابرند.

درحالت خاصی که R در مرکز S قرار داشته باشد، بعدهای کرول حلقه‌های مزبور برابر می‌شوند زیرا به‌سادگی می‌توان برای هر ایده‌آل اول p در R یك ایده‌آل اول P در S یافت به‌شرط آنکه $P \cap R = p$، و بدین ترتیب بعدهای کرول با بعدهای کلاسیك کرول مرتبط می‌شوند.

همان‌طور که پیش از این گفته شد، سؤالات کمّی دربارهٔ بعد کرول متعدد و فراوان‌اند. یکی از این‌گونه سؤالات که هنوز پاسخی بدان داده نشده، این است:

سؤال: آیا بعدهای چپ وراست کرول یك حلقهٔ نوتری دوطرفه برابرند؟

تبصره: در معرفی بعد کلاسیك کرول به نقش و تأثیر مهمی که قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول در جبرجابه‌جایی داشته‌است اشاره شد. در واقع این قضیه راهگشای تتبعات و تحقیقات عمیق تازه‌ای شد و لذا طبیعی است که تعمیم مناسبی از این قضیه در حلقه‌های ناجابه‌جایی بیان و اثبات شود. اما جالب آن است که انجام این کار تنها اندکی کمتر از نیم قرن طول کشید. اولین تعمیم توسط جاتگاانکار[1] در ۱۹۷۴ و با استفاده از روشهای مورد استفاده در مباحث مربوط به‌بعد کرول بیان و اثبات شد. سپس گلدی-حاضرنویس-لنگان و چترز[2] تعمیم بهتری ارائه کردند. در این مورد خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به‌کتاب موجز و مفید [۳] مراجعه کند.

بعد همولوژیك

بعد دیگری که در جبر مطالعه شده است، بعد همولوژیك و یا بعد تصویری مدولهاست و این مفهوم و روشهای مربوط به آن از توپولوژی جبری مایهٔ فراوان گرفته‌است. معهذا برای بیان تاریخچهٔ پیدایش آن در نظریهٔ حلقه‌ها، داستان را از هیلبرت آغاز می‌کنیم. وی در دو مقاله‌ای که به‌سالهای ۱۸۹۰ و ۱۸۹۳ منتشر ساخت، دو قضیهٔ عمیق و اساسی دربارهٔ حلقهٔ چندجمله‌ایهای n متغیره برهیأت

1. Jategaonkar
2. Chatters

F اثبات کرد. در مقالهٔ نخست نشان داد که هر ایده‌آل حلقهٔ $R = F[X_1, \dots, X_n]$ دارای مجموعهٔ مولد متناهی است– مطلبی که به‌قضیهٔ پایه‌ای هیلبرت شهرت یافته‌است– وقضیهٔ صفرها را در مقالهٔ دوم مطرح کرد. به‌هرصورت، اگر I ایده‌آلی در R باشد آنگاه قطعاً چندجمله‌ایهای $f_1, \dots, f_r$ در R وجود دارند به‌طوری که هرعضو I ترکیبی‌خطی از $f_1, \dots, f_r$ است وضرایب این ترکیب خود چندجمله‌ایهایی در R هستند. اما چنین ترکیبی عموماً یکتا نیست و فقدان یکتایی توسط روابطی نظیر

$$u_1 f_1 + \dots + u_r f_r = 0$$

موسوم به‌سی‌زیگی[1] اندازه‌گیری می‌شود. هیلبرت مجموعهٔ کلیهٔ rتاییهای $u_1, \dots, u_r$ را مورد مداقه قرارداده و متوجه شد که این بار به‌عوض آنکه با ایده‌آلی روبرو باشد با یك مدول مواجه است که آن هم به‌طور متناهی تولید می‌شود. سپس با ادامهٔ روش به‌سی‌زیگیهای دوم، سوم، ... رسید. وی ثابت کرد که در مرحلهٔ nام مدول صفر عاید می‌شود، به‌عبارت دیگر، بعد از $n-1$ مرحلهٔ یك مدول آزاد به‌دست می‌آید. می‌توان این قضیه و روش اثبات آن را سرآغازظهور آنچه به‌جبرهمولوژیك شهرت یافته‌است، تلقی کرد.

حال R را حلقه‌ای دلخواه و M را یك R-مدول می‌گیریم. همواره می‌توان یك همریختی پوشای $P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ یافت به‌طوری که مدول P_0 تصویری باشد، بدین‌معنا که جمعوند مستقیم یك مدول آزاد باشد. به‌عبارت دیگر، مدول P_0' وجود داشته باشد که $P_0 \oplus P_0'$ آزاد باشد. اگر هستهٔ ϵ را K_0 بنامیم، باز یك مدول تصویری P_1 وجود دارد که K_0 تصویرهمریخت آن باشد و از اینجا دنبالهٔ $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم با ادامهٔ روش، دنبالهٔ "دقیق" زیرکه در آن هر P_i تصویری است ظاهر گردد

$$\dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

چنانچه j کوچکترین عدد صحیح باشد به‌طوری که هستهٔ d_j تصویری باشد، آنوقت $j+1$ طول دنبالهٔ فوق در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که چنین j یی وجود نداشته باشد، طول دنباله ∞ گرفته می‌شود. بعد همولوژیك و یا بعد تصویری M که با pdM نشان داده می‌شود، عبارت است ازطول دنبالهٔ بزرگ (*) واین تعریف مستقل از دنبالهٔ مزبور است، بدین‌معنا که طولهای هردو دنبالهٔ تصویری یك مدول باهم برابرند. بنابراین، $pdM = 0$ اگروتنها اگر M تصویری باشد. و در واقع، بعد تصویری مقیاسی برای دوری مدول از تصویری بودن است. بعد چپ همولوژیك فراگیر R چنین تعریف می‌شود:

$$\mathrm{l \cdot gl \cdot dim}\, R = \sup \{pdM\}$$

و سوپریمم برکلیهٔ R-مدولهای چپ گرفته می‌شود. به‌طریق مشابه، بعد راست همولوژیك فراگیر برای R تعریف می‌گردد و این دو کمیت عموماً مساوی نیستند. اما هنگامی که حلقهٔ R جابه‌جایی و یا

1. Syzygy

از هردوطرف نوتری باشد، این دو بعد برابرند. برخی از نتایج مهم به‌شرح زیرند.

۱. $\mathrm{l}\cdot\mathrm{gl}\cdot\dim R=0$ اگر و تنها اگر R نیم‌سادهٔ آرتینی باشد.

۲. حلقهٔ R را موروثی[1] چپ نامند هرگاه هر ایده‌آل چپ آن، تصویری باشد. قضیه‌ای از کاپلانسکی حاکی است که اگر R موروثی چپ باشد آنگاه هر زیر مدول یک R-مدول چپ تصویری، بازهم تصویری‌است (علت نامگذاری). ازقضا عکس این مطلب نیز درست است و توسط کارتان و آیلنبرگ اثبات شده‌است [۲] و البته $\mathrm{l}\cdot\mathrm{gl}\cdot\dim R\leqslant 1$ اگرو تنها اگر R موروثی چپ باشد. دامنه‌های جابه‌جایی موروثی حائز اهمیت ویژه‌ای هستند زیرا درچنین دامنه‌هایی اولاً هر ایده‌آل متناهیاً تولید می‌شود (پس دامنه نوتری‌است) وثانیاً هرایده‌آل‌دارای نمایشی یکتا به‌صورت حاصلضربی از توانهای ایده‌آلهای اول است. این‌حلقه‌هاموسوم‌اند به‌دامنه‌های ددکیند که اشیای‌اساسی درنظریهٔ جبری اعدادند. طرق دیگری برای رده‌بندی آنها یافته شده‌است وتعمیم آنها درجبرناجابه‌جایی نیزانجام پذیرفته‌است. به‌غیر از هیأتها و دامنه‌های ایده‌آل اصلی که مثالهای پیمایه‌از دامنه‌های ددکیند هستند؛ می‌توان از حلقهٔ اعداد گاوسی $Z[i]$ نام‌برد. به‌طورکلی، حلقهٔ "اعداد صحیح" ازهرهیأت که توسیع متناهی $\mathbf{Q}$ باشد، یک دامنهٔ ددکیند است [۱].

۳. قضیهٔ هیلبرت که در مقدمه توصیفی از آن به‌عمل آمد، در واقع بیان این مطلب‌است که اگر F هیأت باشد آنگاه

$$\mathrm{gl}\cdot\dim F[X_1,\dots,X_n]=n.$$

۴. بعد همولوژیک فراگیر کدام حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری R متناهی‌است؟ برای پاسخ می‌توان فرض‌کرد که R موضعی هم باشدزیرا $\mathrm{gl}\cdot\dim R=\sup\mathrm{gl}\cdot\dim R_P$ (P ایده‌آل اول در R). دراین‌صورت قضیهٔ زیبای زیر را داریم.

قضیه. حلقهٔ جابه‌جایی نوتری و موضعی R مفروض است. شرط لازم وکافی برای متناهی بودن بعد همولوژیک فراگیر R آن‌است که R منظم باشد و دراین صورت $\mathrm{gl}\cdot\dim R=\dim R$.

بدین ترتیب، باردیگر اهمیت حلقه‌های منظم موضعی آشکار می‌گردد. در جبرجابه‌جایی ثابت شده‌است که هرحلقهٔ منظم موضعی لزوماً یک دامنه‌است، اما بااستفاده ازروشهای همولوژیک به‌سؤالی که از زمان کرول مطرح بوده‌است در حوالی ۱۹۶۰ این‌گونه پاسخ داده شد.

قضیهٔ آسلاندر[2]ـباکزبام[3]ـکاپلانسکی. هرحلقهٔ نوتری‌منظم‌موضعی، یک دامنهٔ یکتایی‌تجزیه است [۷].

بالاخره دومطلب دیگر را متذکر می‌شویم. اول آنکه اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی نوتری و دارای بعد همولوژیک فراگیر متناهی باشد، آنگاه R حاصلجمع مستقیم تعدادی متناهی دامنه‌است و $\mathrm{gl}\cdot\dim R=\dim R$. دوم آنکه تعمیم مفهوم حلقهٔ منظم موضعی به‌جبرناجابه‌جایی ازطریق روشهای همولوژیک میسر گشت [۱۱].

۵. باردیگر حلقهٔ چندجمله‌ایها، $R=F[X_1,\dots,X_n]$، بر یک هیأت F را درنظرمی‌گیریم. درحالت $n=1$ حلقهٔ R یک‌حلقهٔ ایده‌آل اصلی‌است و درنتیجه، هرمدول تصویری‌ومتناهیاً تولیدشده برآن، آزاد است. سر[1] در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ حدس‌زد که این مطلب برای $n>1$ نیز درست‌است. اثبات صحت حدس سر بیست سال بعد توسط کوئیلن و سوسلین به‌طورهمزمان اما مستقل از یکدیگر انجام پذیرفت [۱۳]، اما درطی این بیست سال کوششهایی که برای حل این مسأله شد، به‌گسترش رشتهٔ جدیدی به‌نام نظریهٔ Kی جبری کمکهای فراوان‌کرد. این نکته جالب‌است که حدس سر برای هیأتهایی که جابه‌جایی نباشند برقرار نیست.

۶. در بند ۴ ملاحظه شدکه در مورد حلقه‌های جابه‌جایی نوتری، متناهی بودن بعد همولوژیک فراگیر، ساختار حلقه را مستقیماً (چنانچه موضعی‌باشد) ویا به‌طور غیرمستقیم (ازطریق‌موضعی‌سازیهای آن توسط ایده‌آلهای بیشین) برحسب حلقه‌های منظم موضعی معین می‌سازد. بنابراین طبیعی‌است که درمراحل دیگر، متناهی بودن بعد فراگیر بدون شرط نوتری مطالعه شود. می‌دانیم برای حلقهٔ جابه‌جایی R حلقهٔ کل خارج‌قسمت $Q(R)$ وجود دارد و

$$\mathrm{gl}\cdot\dim R=0 \leftrightarrow R \ \text{هیأت‌است}$$

$$\mathrm{gl}\cdot\dim Q(R)=1\leftrightarrow \mathrm{gl}\cdot\dim R=1$$

اما توصیف حلقه‌های جابه‌جایی موضعی با بعد همولوژیک فراگیر ۲ کمی پیچیده‌تراست و این مضمون قضیهٔ زیراست.

قضیهٔ واسکانسلوس [۱۵]. R را حلقهٔ جابه‌جایی موضعی با بعد همولوژیک فراگیر ۲ فرض می‌کنیم. در این صورت، R یا منظم موضعی(ونوتری) است یایک‌دامنهٔ ارزه[2]‌ای‌است ویا دامنه‌ای‌است حاوی یک ایده‌آل اول P با این‌شرایط: $P=PR_P$؛ حلقهٔ R/P یک حلقهٔ منظم موضعی نوتری از بعد ۲ است، R_P دامنه‌ای‌ارزه‌ای است‌که ایده‌آلهایش دارای مجموعه‌های مولد شمارا هستند؛ R تنها تعدادی شمارا ایده‌آل اول اصلی دارد.

یادآور می‌شودکه دامنهٔ جابه‌جایی و دلخواه R ارزه‌ای نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x\in Q(R)$ اگر $x\notin R$ آنگاه $x^{-1}\in R$. طبعاً توصیف حلقه‌های جابه‌جایی‌موضعی با بعد همولوژیک فراگیر بیشتر از ۲ بسیار پیچیده‌تر به‌نظرمی‌رسد وتعیین ویژگیها، شناخت انواع و به‌طورکلی یافتن ساختار این حلقه‌ها تاکنون میسر نبوده است.

۷. محاسبهٔ بعد همولوژیک فراگیر حلقه‌های مشخص، مشغولیت عمده‌ای برای پژوهشگران بوده و هست. در اینجا نیزاز انبوه نتایج حاصله فقط چند نمونه را ذکر می‌کنیم که به‌کم وکیف حلقه‌ها می‌پردازند.

---

1. hereditary 2. Auslander 3. Buchsbaum

1. Serre 2. valuation

۱.۷. هیأت F و گروه G مفروض‌اند. توسط این‌دو می‌توان حلقه‌ای موسوم به جبر گروه G بر هیأت F ساخت که با $F[G]$ نشان داده می‌شود. اگر H زیرگروهی با شاخص متناهی در G باشد، منظور ما یافتن ارتباط بین بعدهای همولوژیك فراگیر حلقه‌های $F[G]$ و $F[H]$ است و این کار توسط سر [۱۴] انجام گرفته است: شرایط کافی برقراری $\mathrm{l.gl.dim}\,F[G]<\infty$ آن‌است که

$$\mathrm{l.gl.dim}\,F[H]<\infty$$

وچنانچه مشخصهٔ F عدد اول p باشد، در G عضوی از مرتبهٔ p وجود نداشته باشد. هنگامی که G حاصلضرب یك گروه چند دوری در یك گروه متناهی باشد شرط لازم و کافی برای متناهی بودن بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ $F[G]$ آن است که در G عضوی از مرتبهٔ P، در صورتی که مشخصهٔ F برابر P باشد، وجود نداشته باشد [۱۱] و در این‌حال این کمیت متناهی با عدد هرش[1] گروه G برابر است.

۲.۷. برای nامین جبروایل برهیأت F:

$$\mathrm{l.gl.dim}\,A_n(F)=\begin{cases}2n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر نباشد}\\ n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر باشد}\end{cases}$$

۳.۷. اگر $R \xrightarrow{\theta} S$ یك همریختی حلقه‌ای باشد، هر S-مدول را می‌توان توسط همریختی فوق به‌صورت یك R-مدول در نظر گرفت. گوییم S به‌طور نسبی R-نیم‌ساده‌است، اگر به‌ازای هر زوج S-مدول $N\subseteq M$ به‌طوری‌که N یك R-جمعوند مستقیم M است، N یك S-جمعوند مستقیم M باشد. مثلاً اگر G گروهی از مرتبهٔ n و R حلقه‌ای باشدکه در آن n یکه است، آنگاه $R[G]$ به‌طور نسبی R-نیم‌ساده است. و یا چنانچه R جابه‌جایی و S یك R-جبر مرکزی جدایی‌پذیر باشد، آنگاه S به‌طور نسبی R-نیم‌ساده‌است. اکنون فرض کنید R نوتری و $\theta(R)$ در مرکز حلقهٔ S قرار داشته و S یك R-مدول تصویری باشد:

قضیهٔ حقانی [۴]. تحت شرایط فوق

$$\mathrm{l.gl.dim}\,R=\mathrm{l.gl.dim}\,S.$$

نکته: حالت خاص قضیهٔ فوق که در آن $S=F[G]$ و Fهیأت و G گروهی متناهی از مرتبهٔ n باشد، قضیه‌ای کلاسیك در جبر، موسوم به‌قضیهٔ ماشکه[2] است: اگر F دارای مشخصهٔ صفر باشد و یا اگرمشخصهٔ F عدد اول p باشد و اعداد p و n نسبت به‌هم‌اول باشند، آنگاه جبر گروه G برهیأت F نیم‌سادهٔ آرتینی‌است.

وبالاخره در اینجا شایسته‌است از مسأله‌ای که تاکنون تنها در حالتهای بسیار خاص به‌آن جواب داده شده است ذکری به میان آورده شود.

مسأله: اگر S و T دو R-جبر باشند، بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ $S\underset{R}{\otimes}T$ را برحسب بعدهای S و T به‌دست آورید.

1. Hirsch 2. Mashke

۸.۷. ارتباط بعدهای کرول و همولوژیك فراگیر حلقه‌ها. چنانکه دیدیم، برای حلقهٔ چندجمله‌ایها بر یك هیأت و یا برای nامین جبروایل، بعدکرول و بعد همولوژیك فراگیر برابرند، و یا چنانچه R حلقه‌ای جابه‌جایی، نوتری و منظم موضعی باشد، $\mathrm{gl.dim}\,R=|R|$. از طرف دیگر، $|\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}|=0$ در حالی‌که $\mathrm{gl.dim}\,(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})=\infty$. بنابراین،درحالت‌کلی نمی‌توان انتظار داشت‌که رابطه‌ای بین‌این دوبعد برقرار باشد. اما چنانچه به‌جای بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ دلخواه R که سوپریمم بعد همولوژیك R-مدولهای چپ است، به محاسبهٔ سوپریمم بعدهمولوژیك‌آن‌دسته از R-مدولهای چپ‌که برایشان این‌کمیت متناهی‌است اکتفا شود و قرار دهیم

$$\mathrm{FPD}(R)=\sup\{pdM:\qquad pdM<\infty\}$$

آنگاه نتیجهٔ جالب زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. اگرحلقهٔ جابه‌جایی R نوتری باشد، آنگاه

$$\mathrm{FPD}(R)=\dim R=|R|.$$

متأسفانه بیشترسؤالات واضح و طبیعی‌که دراین زمینه به‌ذهن می‌رسند، تاکنون بدون جواب مانده‌اند. از طرف دیگر هر حلقهٔ نوتری که در یك اتحاد چندجمله‌ای صدق‌کند دارای این ویژگی است‌که بعد کرول و بعد همولوژیك فراگیر آن برابرند. تساوی دو بعد مذکور برای دسته‌های دیگری از حلقه‌های ناجابه‌جایی نیز برقرار است، لذا حدس زیر مطرح می‌گرددکه صحت یا سقم آن هنوز معلوم نشده‌است.

حدس: اگر R حلقه‌ای ناجابه‌جایی ولی نوتری و دارای بعد همولوژیك فراگیر متناهی باشد، آنگاه $|R|\leqslant \mathrm{gl.dim}\,R$.

تبصره: ما روشهای همولوژیکی را درارتباط با بعد تصویری بیان کردیم، اما این روشها دربارهٔ انواع دیگر مدولها، خاصه مدولهای "تك‌گزین"[1] و "تخت"[2] نیز به‌کار برده شده و بعدهای نظیر برای مدولها و حلقه‌ها مورد مطالعه قرار گرفته وگاه ارتباط بین این بعدها پیدا شده‌است.

مراجع

1. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).
2. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).
3. A. W. Chatters and C. R. Hajarnavis, *Rings with Chain Conditions*, pitman (1980).

1. injective 2. flat

4. A. Haghany, "On duality and Krull dimension," *J. London Math. Soc.*(2) **14** (1976) 79-85.
5. A. Haghany and B. Sarath, "A formula on the Krull dimensions of Noetherian semi prime algebras," *Bull Iran Math. Soc.* (2) **8** (1981) 109-113.
6. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag (1977).
7. I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon (1970).
8. O. A. S. Karamzadeh, "On the classical Krull dimension," *Fund. Math.* **117** (1983).
9. J. C. Mc Connell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, J. Wiley & Sons (1987).
10. C. Nastasescu and F. Van Oystaeyen, *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company (1987).
11. D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley Interscience (1977).
12. R. Rentschler and P.Gabriel, "Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnes," *Compt. Rend. Acad. Sci.*, Paris, **265** (1967), Series A, 712-715.
13. J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press (1979).
14. J. P. Serre, "Cohomologie des groups discretes," *Prospects in Mathematics,* Annals of Math Studies No. 70, Princeton (1971) 77-169.
15. W. V. Vasconcelos, *The Rings of Dimension Two*, Marcel Dekker (1976).

★ احمد حقانی، دانشگاه صنعتی اصفهان