سال ۳، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۹

نگاهی اجمالی به
نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی

ابوالقاسم لاله

مقدمه

منظـور از خمینهٔ n بعدی بـه طور شهـودی همـان شیء خمیدهٔ n بعدی است. درحالت یك بعدی می‌توان خط اعداد حقیقی، $\mathbf{R}$، دایره، S^1، و بازه‌های باز را به‌عنوان مثال ذکر کـرد. در حالت دو بعدی، صفحهٔ‌مختصات، $\mathbf{R}^2$، سطح کره، S^2، چنبره، نوارموبیوس، بطری کلاین، صفحهٔ تصویری حقیقی، $\mathbf{R}P^2$، مثالهایی ازخمینه‌های دو بعدی هستند. به‌همین‌ترتیب، فضای n تاییهای‌حقیقی‌مرتب، $\mathbf{R}^n$، وکرهٔ n بعدی متشکل از $(n+1)$ تاییهای $(x_1, \dots, x_{n+1})$ کـه $\sum x_i^2 = 1$، مثالهای خمینه‌های n بعدی‌هستند. مشخصهٔ خمینهٔ n بعدی این است که می‌توان یك همسایگی حول هر نقطهٔ آن‌را با n پارامتر مدرج کرد. وقتی می‌نویسیم M^m، مقصود این است که خمینهٔ M یك خمینهٔ m بعدی است.

مطالعهٔ خمینه‌های سه‌بعدی، از یك دیدگاه، تعمیمی از مطالعهٔ خمینه‌های دو بعدی یا رویه‌هاست. بیش از یك قـرن است کـه توپولوژیدانها می‌دانند که چگونه خمینه‌های دو بعدی را تشریح و رده‌بندی‌کنند، اما این مسألـه در مورد خمینه‌های سه‌بعدی هنوز حل نشده‌است. این به‌علت پیچیدگیهای فزاینده‌ای‌است که خمینه‌های سه بعدی، ممکن است دارا بـاشند. روشی در توپولـوژی موسوم به«جراحی» در بررسی میزان پیچیدگی خمینه‌های سه‌بعدی‌کارایی قابل‌توجهی دارد.

نظریهٔ خمینه‌ها درقرن نوزدهم برای‌براوردن نیازی‌که به‌درك هندسی رابطه‌های کیفی وجود داشت، پدیـد آمـد. مثلا مجموعهٔ جوابهای یك‌معادلهٔ دومتغیری را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ‌نقاطی از صفحه مشخص کـرد. هرنقطه، جفتی از مقادیر برای متغیرها را نشان می‌دهدکه درمعادلهٔ مزبور صدق می‌کنند. مجموعهٔ نقاط نوعاً یك‌خم یا مجموعه‌ای ازخمهاست. به‌همین‌ترتیب مجموعهٔ‌جوابهای یك‌معادلهٔ سه‌متغیری را اغلب به‌صورت یك رویهٔ دوبعدی درفضای سه‌بعدی می‌توان درنظر گرفت. برای معادلاتی با بیشتر از سه‌متغیر مجموعهٔ جوابها را می‌تـوان به‌طور هندسی به‌طریق زیر توصیف کرد: این‌مجموعه یك‌خمینهٔ چندبعدی درفضایی با بعد بالاتر است.

در واقـع توپولوژی قـادر به‌حل معادلات نیست، ولی این امکان‌را فراهم می‌آورد‌که بدون پرداختن به‌جزئیات‌کمی، مجموعهٔ جوابها به‌طورکلی مورد بررسی قرار گیرد. ازاین‌رو، گرچه‌خمینهٔ نقاطی کـه مجموعهٔ جوابهای یك معادله را تشکیل می‌دهند شکلی بـدون ابهـام دارد، توپولوژی خمینه وابسته به‌خواص این شکل نیست، بلکه شامل آن دسته ازخاصیتهایی است‌که تحت تغییرشکل خمینه به طریقـی اختیاری، البته بـدون ایجاد بریدگی، شکاف و سوراخ، حفظ می‌شوند.

اولین‌قدمهای اساسی درنظریهٔ توپولوژیك‌خمینه‌های سه‌بعدی اواخر قرن‌گذشته به وسیلهٔ پوانکاره، دن، و هگارد[1] برداشته شد.

یك اشکال درمطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی این است‌کـه تجسم مستقیم تمامی یك خمینه دشوار است و ازاین‌رو نمایش تجریدی نقش مهمتری ایفا می‌کند. بسیاری از رویه‌ها را می‌توان‌تجسم‌کرد بدین سبب‌که آنها را می‌توان ازبیرون یعنی از بعدسوم دید؛ یك بعد اضافی به‌رویه جای‌کافی برای خم‌شدن و بسته شدن می‌دهد.

در قرن نوزدهم ریاضیدانان دریافتندکه خمینه‌های دو بعدی را می‌توان به‌صورت چند ضلعیهایی که اضلاع آنها به‌طریقی‌معین برهم منطبق می‌شوند نمایش داد. با این ایده می‌توان خمینه‌های سه بعدی را با استفاده از چندوجهیها مورد مطالعه قرار داد. مثلا چنبرهٔ سه‌بعدی را می‌توان ازانطباق‌تجریدی وجوه مقابل یك‌مکعب مستطیل به‌دست‌آورد. به‌عنوان‌مثالی دیگر، یك دوازده‌وجهی‌منتظم را درنظر بگیرید. دوازده وجه این‌شکل پنج‌ضلعیهایی منتظم هستند و دوتا دوتا طوری قـرار گرفته‌اند کـه اعضای هرجفت موازی می‌باشند و یالهای هرجفت از وجوه موازی را می‌تـوان دو به‌دو به‌قسمی درنظر گرفت‌که صفحهٔ مار برآنها ازمرکز بگذرد. هرجفت از پنج‌ضلعیهای متقابل‌را درنظر بگیرید. پنج‌ضلعی اول را به‌اندازهٔ ۱/۱۰ دور کامل در خلاف جهت عقربه‌هـای ساعت حول محور عمود برسطح آن دوران داده و به‌طور تجریدی بر پنج‌ضلعی دوم منطبق‌کنید. این‌کار خمینه‌ای سه‌بعدی موسوم به‌خمینهٔ پوانکاره پدید می‌آورد(این‌خمینه هم‌ارز خمینه‌ای است‌که پوانکاره درسال ۱۹۰۴ کشف‌کرد و دارای اهمیت ویژه‌ای در نظریـهٔ خمینه‌های سه‌بعدی است). اگرهمین‌کار را به‌جای ۱/۱۰ دور با ۳/۱۰ دور دوران انجـام دهیم به‌خمینه‌ای سه‌بعدی موسوم به‌فضای دوازده وجهـی زایفرت-وبر[2] می‌رسیم. این‌کار را می‌توان با هرچندوجهی منتظم یا نامنتظم انجام داد و خمینه‌های پیچیده‌ای حاصل می‌شوند.

به‌زبان شهودی، مقصود از هندسهٔ ذاتی یك رویه بررسی آن دسته از خواص هندسی رویه است که برای یك موجود خیالی‌که جهانش به‌آن رویـه محـدود می‌شود معنی‌دار باشند. مثلا طول، مساحت و زاویه مفاهیم ذاتی هستند. همهٔ مفاهیم ذاتی را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان‌کرد، بدین معنی‌کـه هرگاه در هرنقطهٔ

---

1. Heegaard 2. Seifert-weber

رویه یک مفهوم ضرب داخلی برای مجموعهٔ بردارهای مماس بر رویه در آن نقطه منظور کنیم، می‌توانیم به مفاهیم طول، مساحت و زاویه دست یابیم. زاویه و طول بردار از فرمولهای معمولی مثلثاتی استخراج می‌شوند. طول به‌صورت انتگرال سرعت حرکت یک نقطهٔ مادی روی مسیر موردنظر تعریف می‌شود، و غیره. خواص ذاتی تحت تبدیلات همانمتری حفظ می‌شوند (مقصود از همانمتری تبدیلی است که ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ می‌کند). با منظور کردن ضربهای داخلی گوناگون می‌توان هندسه‌های مختلفی روی یک مجموعه وضع کرد. مثلا، می‌دانیم یک چنبره و یک مربع که اضلاع مقابلش برهم منطبق شده‌اند توپولوژی یکسانی دارند. به‌کمک این مطالب می‌توانیم نوعی «هندسهٔ مسطح» روی چنبره بنا کنیم که متمایز از هندسهٔ متداول چنبره به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ فضای سه‌بعدی اقلیدسی است. هندسهٔ ذاتی یک ناحیهٔ کوچک حول هر نقطه در مربع، شبیه هندسهٔ ذاتی یک ناحیهٔ کوچک از صفحه است. خاصیت مزبور حتی برای نقاط واقع بر اضلاع یا رأسهای مربع نیز برقرار است. وقتی همهٔ همسایگیهای یک فضا هندسهٔ قابل‌انطباق داشته باشند، یعنی بتوان فقط با توسل به‌هندسهٔ ذاتی نقاط گوناگون را از هم تمیز داد، می‌گوییم هندسه موضعاً همگون است.

دست‌کم دو تفاوت اساسی بین هندسهٔ خمینه‌های دو بعدی و هندسهٔ خمینه‌های سه‌بعدی وجود دارد. اول اینکه در حالت دوبعدی فقط سه هندسهٔ موضعاً همگون وجود دارند (اقلیدسی، کروی، هذلولوی) در صورتی که پنج هندسهٔ موضعاً همگون دیگر (اضافه بر سه‌تای قبل) هستند که می‌توان خمینه‌های سه بعدی را به‌آنها مجهز ساخت. اما تفاوت دیگری نیز هست که منشأ پیچیدگیهای برطرف ناشدنی است. ممکن‌است دوخمینهٔ سه‌بعدی موضعاً همگون را طوری باهم «ترکیب» کرد (به‌صورت مجموع همبند که بعداً شرح آن خواهد آمد) که خمینهٔ سه بعدی حاصل نتواند هندسهٔ موضعاً همگون را بپذیرد. نکتهٔ امیدوارکننده این است که توپولوژیدانها می‌توانند به وسیلهٔ روشهای کاملا توپولوژیک خمینه‌های سه‌بعدی را به‌قطعات بسیار ساده‌ای تجزیه کنند. مطالعات بسیار عمیق در این رشته این حدس پایه‌دار را به‌وجود آورده‌است که در مورد «اغلب» خمینه‌های سه‌بعدی این گونه پیچیدگیها نقش عمده‌ای ندارند. در واقع ثابت شده‌است که «اغلب» خمینه‌های سه بعدی می‌توانند ساختار هندسهٔ موضعاً هذلولوی را بپذیرند. و این جای امیدواری بسیاری است زیرا خمینه‌های هذلولوی سه‌بعدی دارای خواص جالبی هستند. مثلا موستو[1] ثابت کرده است که اگر یک خمینهٔ سه‌بعدی ساختار موضعاً هذلولوی را بگیرد، هندسهٔ مزبور به‌وسیلهٔ توپولوژی کاملا تعیین می‌شود. نتیجه‌ای از قضیه موستو این است که همهٔ خمینه‌هایی را که دارای هندسهٔ موضعاً همگون هستند می‌توان علی‌الاصول رده‌بندی کرد. دربخش آخر این مقاله توضیحات بیشتری دراین موارد داده می‌شود. چرا بعد سه برای رده‌بندی خمینه‌ها مهم است؟

اساساً سه نوع مسألهٔ رده‌بندی در ارتباط با رستهٔ خمینه‌های هموار، قطعه به‌قطعه‌خطی (مانند «چندوجهیها»)، و توپولوژیک وجود دارند که این رسته‌ها را به‌ترتیب با Diff، PL، و Top نشان می‌دهیم. درابعاد ۵ یا بیشتر، براساس کارهای کربی[1] و زیبنمان[2] می‌دانیم که رده‌بندی خمینه‌های PL و Top متفاوت است. در ابعاد ۷ یا بیشتر، بر اساس کارهای میلنر[3] و هرش[4]، می‌دانیم که رده‌بندیهای PL و Diff متفاوت هستند. اما در بعد سه یا کمتر، همه رده‌بندیها یکسان می‌باشند (کارهای موئیز[5])، لذا دراین‌مورد، رستهٔ PL دراثباتها ساده‌تر است.

گروه بنیادی

یک کمان دریک فضای توپولوژیک X، یک خم است که دو نقطه ازفضا را به‌هم وصل می‌کند. اگر یک کمان در جایی خاتمه یابد که کمان دیگری شروع می‌شود، می‌توانیم این دو کمان را با پیمودن درامتداد اولی وسپس درامتداد دومی «ترکیب» کنیم. این ایدهٔ «ترکیب» را به‌عنوان عمل «ترکیب» کمانها درنظر می‌گیریم. این عمل روی مجموعهٔ کمانها عملی بسته و شرکتپذیر است.

اگر نقطهٔ شروع و نقطهٔ خاتمهٔ یک کمان برهم منطبق باشند آن کمان را یک طوقه[6] گوییم. حال اگر یک نقطهٔ p را در فضای توپولوژیک مورد نظرمان تثبیت کنیم و آن را نقطهٔ پایه برای طوقه‌ها بنامیم، می‌توانیم هردوطوقه به‌پایهٔ p را باهم «ترکیب» کنیم.

منظورمان از یک طوقهٔ بدیهی در نقطهٔ p، طوقهٔ ثابت در آن نقطه است. این طوقه را به O یا O_p نمایش می‌دهیم. وارون یک طوقه، طوقه‌ای است منطبق برطوقه اول با جهت سیرمعکوس. دوطوقه درفضای X را هوموتوپ نامیم اگر در داخل X یکی را بتوان به‌طور پیوسته به‌دیگری تبدیل کرد. اکنون به‌جای طوقه‌ها ردهٔ هوموتوپی طوقه‌ها را در نظر می‌گیریم. حال اگر $[\alpha]$، $[\beta]$ رده‌های هم‌ارزی دوطوقهٔ α، β باشند تعریف می‌کنیم

$$[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha * \beta]$$

(«$*$» عمل روی طوقه‌ها و «$\circ$» عمل روی ردهٔ هوموتوپی طوقه‌هاست).

مجموعهٔ رده‌های هوموتوپی طوقه‌ها به‌پایهٔ p تحت‌عمل فوق، یک گروه را تشکیل می‌دهند که به گروه بنیادی فضای X با نقطهٔ پایهٔ $p \in X$ موسوم است و آن‌را با $\pi_1(X, p)$ نشان می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که اگر X کمانی‌ـ‌همبند باشد، یعنی بتوان هردو نقطهٔ آن را با یک کمان پیوسته به‌هم وصل کرد، آنگاه $\pi_1(X, p_1)$ و $\pi_1(X, p_2)$ برای هر دو نقطهٔ p_1 و p_2 از X یکریخت هستند. مقصود از یک فضای ساده‌ـ‌همبند فضایی است که گروه بنیادی آن به پایهٔ هر نقطه، گروه بدیهی (تک عنصری) باشد.

1. Mostow

1. Kirby
2. Siebenmann
3. Milnor
4. Hirsch
5. Moise
6. loop

علت دیگر اهمیت بعد سه، مطلبی است در ارتباط با نظریهٔ گروهها. می‌توان ثابت کرد که هر گروه شمارا، گروه بنیادی یک خمینهٔ چهاربعدی است، و هر گروه متناهیاً تولید شده گروه بنیادی یک خمینهٔ چهاربعدی بسته است.

هیچ یک از این احکام در بعد سه درست نیست. بدین ترتیب مسألهٔ رده‌بندی خمینه‌ها در بعد چهار یا بیشتر، حتی اگر توجه خود را به خمینه‌های فشرده محدود کنیم، حل شدنی نیست زیرا ثابت شده است که رده‌بندی گروههای متناهیاً تولیدشده یک مسألهٔ حل‌ناپذیر است. این بدان معناست که هیچ الگوریتمی برای رده‌بندی خمینه‌ها وجود ندارد. مسألهٔ رده‌بندی در بعد سه هنوز حل نشده است.

مثالهایی از خمینه‌های سه بعدی فشرده

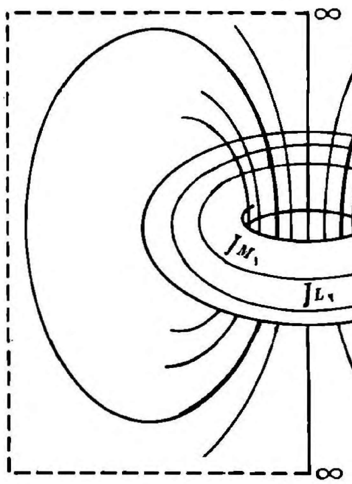
الف) کرهٔ سه‌بعدی، S^3

مدل ۱: کره سه‌بعدی S^3 به‌عنوان مرز یک سادك چهاربعدی. این مدل خوبی نیست چون از خود S^3 پیچیده‌تر است. اگر S^3 را از طریق مثلث‌بندی که توسط یک سادك چهاربعدی تولید می‌شود در نظر بگیریم، S^3 اجتماعی از پنج چهاروجهی است (در فضای چهاربعدی). مثلاً اگر S^1 را مرز یک سادك دوبعدی که یک مثلث است بگیریم، مرز این سادك دوبعدی از سه سادك یک‌بعدی (اضلاع مثلث) تشکیل می‌یابد، و هریک از این سادکهای یک‌بعدی روبه‌روی یک رأس از مثلث است. درحالت کرهٔ S^2، می‌توان آن را مرز یک سادك سه‌بعدی که یک چهاروجهی است در نظر گرفت؛ مرز این چهاروجهی از چهار سادك دوبعدی تشکیل یافته است و هریک از این مثلثها روبه‌روی رأسی از این چهاروجهی است. در مورد S^3 انتظار داریم که مرز یک سادك چهاربعدی باشد و این مرز از پنج سادك سه‌بعدی (یعنی چهاروجهی) تشکیل یافته باشد.

مدل ۲: S^3 به‌عنوان اجتماع گویها. با الهام گرفتن ازحالت ابعاد پایینتر، S^3 را می‌توان با دوختن دو گوی سه‌بعدی B^3_1 و B^3_2 به‌هم توسط یک همسانریختی درامتداد مرزهایشان به‌دست آورد.

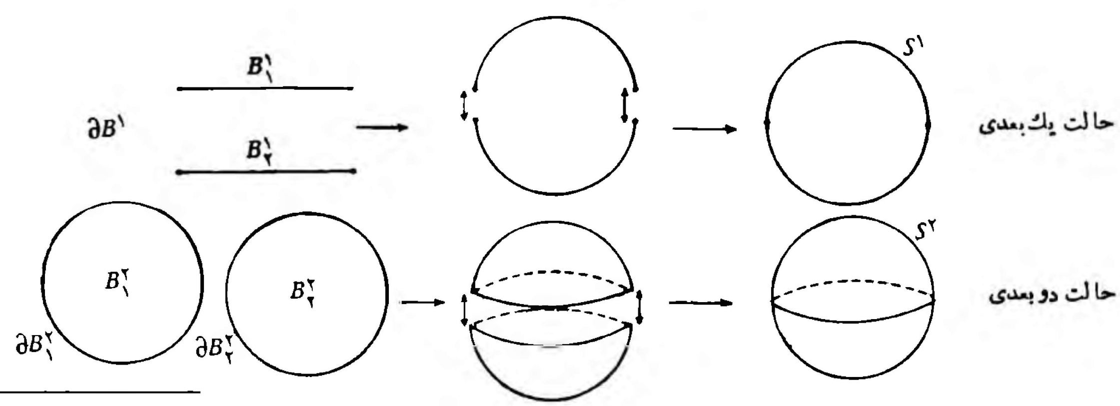
مدل ۳: S^3 به‌صورت فشرده‌شدهٔ یک نقطه‌ای $\mathbf{R}^3$. این مفهوم با استفاده از تصویر کنجنگاری، شبیه‌حالت دوبعدی ارائه می‌شود.

مدل ۴: S^3 به‌صورت اجتماع دو چنبرهٔ توپر. فرض کنید T یک چنبرهٔ توپر باشد که از دوران قرص $(x-2)^2+y^2 \leqslant 1$ حول محور y درفضای سه‌بعدی به‌دست می‌آید. خم بستهٔ سادهٔ J_M را با ضوابط $z=0$، $(x-2)^2+y^2=1$، تعریف می‌کنیم. این خم مرز یک گوی در T است اما روی مرز T هیچ ناحیه‌ای را محصور نمی‌کند. آن را یک نصف‌النهار مرز T می‌نامیم. خم بستهٔ سادهٔ J_L را که با ضوابط $y=0$، $x^2+z^2=1$ تعریف می‌شود یک خم مداری، از مرز T می‌نامیم. فرض کنید T_1 و T_2 دونسخه از T باشند و J_{M_1}، J_{L_1}، J_{M_2}، J_{L_2} خمهای بستهٔ سادهٔ نصف‌النهاری و مداری متناظر آنها باشند. اگر h یک همسانریختی ازمرز T_1 برروی مرز T_2 باشد که J_{M_1} را برروی J_{L_2} می‌فرستد آنگاه فضای به‌دست آمده از دوختن دو چنبرهٔ توپر در طول نقاط نظیر مرزی، ازنظر توپولوژیک همان S^3 است.



نمایهٔ یک گروه

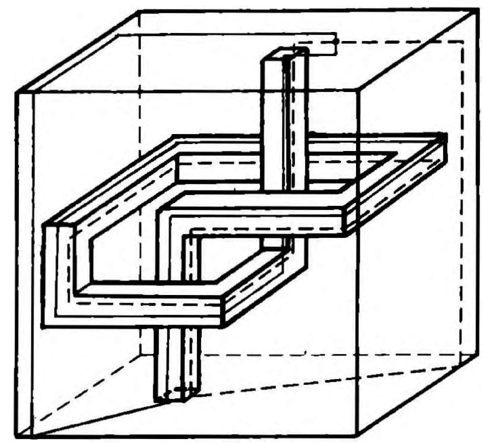
منظور از نمایهٔ یک گروه[1] G عبارت است از جفت $(S,\{r_j\})$ که شامل یک مجموعه از مولدهای G مانند S، و مجموعهٔ کاملی از رابطه‌های بین این مولدها، مانند $\{r_j\}$، است. مقصود از یک‌مجموعهٔ‌کامل روابط، مجموعه‌ای از روابط است که بتوان هر رابطه بین عناصر گروه را از آن نتیجه گرفت. نمایهٔ یک گروه را متناهی گویند اگر هر S و $\{r_j\}$ مجموعه‌هایی متناهی باشند. گروه G را متناهیاً تولید شده گویند اگر دست‌کم یک نمایهٔ متناهی داشته باشد.



1. group presentation

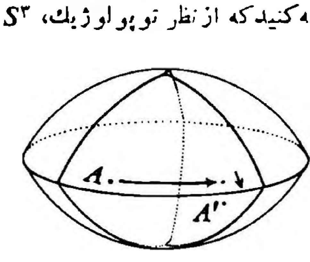
ب) کرهٔ هومولوژی

فرض کنید C_1 و C_2 دو مکعب باشند هریك با یك سوراخ گره‌دار؛ و نیز فرض کنید J_{M_i} یك خم بستهٔ ساده روی مرز C_i باشد به‌طوری که J_{M_i} یك خمینهٔ جهت‌پذیر دوبعدی در C_i را محصور کند اما روی مرز C_i هیچ ناحیه‌ای را محصور نکند. و همچنین فرض کنید J_{L_i} خم بستهٔ سادهٔ دیگری روی مرز C_i باشد که J_{M_i} را فقط دریك نقطه قطع می‌کند و از آن عبور می‌کند. اگر h یك همسانریختی‌از مرز C_1 برروی مرز C_2 باشدکه J_{M_1} و J_{L_1} را به‌ترتیب برروی J_{L_2} و J_{M_2} می‌فرستد، آنگاه فضای به‌دست‌آمده از دوختن دو مکعب C_1 و C_2 در امتداد نقاط نظیر مرزی یك‌خمینهٔ سه‌بعدی است که ازنظر گروههای هومولوژی مانند S^3 است یعنی همهٔ گروههای هومولوژی S^3 و این خمینهٔ سه‌بعدی یکریخت هستند.



پ) فضای عدسی[1]

فرض کنید B گوی واحد در $\mathbf{R}^3$ باشد، $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$؛ و نیز فرض کنید p و q دو عدد صحیح نسبت بههم اول باشند. $L(p,q)$ را می‌توان به‌صورت به‌اصطلاح یك‌فضای خارج‌قسمت از B به‌دست‌آورد، یعنی فضایی‌که ازبرهم منطبق‌کردن بخشهایی از B، به‌ترتیبی‌که ذکر خواهد شد، حاصل می‌شود. به‌طور دقیق، هرنقطهٔ A روی سطح نیمکرهٔ بالا را به زاویهٔ $2\pi p/q$ در طول مدار افقی‌که از آن می‌گذرد دوران می‌دهیم وسپس آن را برنقطهٔ قرینهٔ خود نسبت به‌صفحهٔ xy، A'، منطبق می‌کنیم. توجه کنیدکه برای حفظ پیوستگی این انطباق، باید هرنقطهٔ استوا بر $(q-1)$ نقطهٔ دیگر در استوا منطبق شود. (ر.ك. شکل مربوط به $p=1$ و $q=3$). نیز توجه‌کنیدکه ازنظر توپولوژیك، $L(1,1)=S^3$.



1. lens space

ت) فضای تصویری سه‌بعدی $L(1,2)=\mathbf{R}P^3$

$\mathbf{R}P^3$ از منطبق‌کردن نقاط روبه‌رو بـه قطر سطح کرهٔ توپر برهم به‌دست می‌آید.

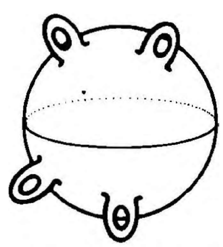
ث) در واقع هر خمینهٔ سه‌بعدی فشرده را می‌توان با برداشتن مجموعه‌ای متناهی از چنبره‌های توپر دوبه‌دو مجزا از S^3 و بازگرداندن آنها به‌نحوی دیگر (به‌وسیلهٔ همسانریختیها) به‌دست آورد.

روشهای مطالعهٔ خمینه‌های سه‌بعدی

احتمالاً طبیعیترین روش مطالعه خمینه‌های سه‌بعدی، تجزیهٔ آنها به‌قطعات کوچکتر است. برای این‌منظور روشهای گوناگونی‌وجود دارند.

۱. تقسیم هگارد[1]

در این روش، خمینه را به دو تکهٔ همسانریخت با زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^3$ تقسیم می‌کنند، کـه به آنها دستواره[2] می‌گویند. هردستواره تشکیل شده است از یك‌گوی بستهٔ توپر کـه برآن تعدادی «دسته» توپر نصب شده است (ر.ك. شکل زیر). تعداد دسته‌ها را گونهٔ[3] دستواره می‌نامند.



دستواره با گونهٔ چهار

می‌توان نشان دادکه هرخمینهٔ همبند بستهٔ جهت‌پذیر سه‌بعدی دارای یك تقسیم هگارد است، و هرخمینهٔ سه‌بعدی را می‌توان از دو دستواره بـا گونهٔ برابر به‌وسیلهٔ انطباق مرزهـای آنها بههم به‌دست آورد. مجموعـهٔ همسانریختیهای انطباق، بسیار بزرگ و پیچیده است، و اینکه آیا دو همسانریختی انطباق، خمینهٔ سه‌بعدی یکسانی را به‌وجود می‌آورند یا نه مسألهٔ دشواری است.

۲. جراحی[4]

بـا این روش، می‌توانیم هر خمینهٔ جهت‌پذیری را بسازیم: بـرای این منظور چنبره‌های توپر $T_1, \dots, T_n$ را از S^3 حذف می‌کنیم و مجدداً آنها را در امتداد مرزهایشان به‌طریقـی دیگر بـه S^3 می‌دوزیم. به‌بیان دقیقتر، یك چنبرهٔ توپر را درامتداد مرز ایجادشده بـه‌کرهٔ سوراخدار می‌چسبانیم به‌طوری که هر نقطهٔ مرزی برنقطهٔ مرزی جدیدی از چنبره که توسط یك همسانریختی مرز چنبره معین می‌شود، منطبق‌می‌گردد. به‌علت اینکه چنبره همسانریختیهای بسیاری دارد این‌کار را به‌طرق گوناگونی می‌توان انجام داد.

1. Heegaard splitting 2. handlebody 3. genus 4. surgery

فضای پوششی

اگر X یك فضای توپولوژیك باشد، آنگاه جفت مرتب $(\widetilde{X}, p)$ یك فضای پوششی است اگر:

(i) $\widetilde{X}$ یك فضای توپولوژیك کمانی-همبند باشد؛

(ii) $p: \widetilde{X} \to X$ پیوسته باشد؛

(iii) هر $x \in X$ یك همسایگی باز $U = U_x$ داشته باشد به‌طوری که $p^{-1}(U)$ اجتماع مجزایی از مجموعه‌های باز S_i در $\widetilde{X}$، موسوم به لایه‌ها باشد که $p|_{S_i}: S_i \to U$ یك همسانریختی برای هر i است.

فضای پوششی را کامل گویند اگر $\widetilde{X}$ ساده-همبند باشد.

۳. پوششهای شاخه‌دار[1] S^3

در آنالیز مختلط، خصوصاً در نظریهٔ ادامهٔ تحلیلی، ساختن خمینه‌های دوبعدی (رویه‌های ریمان) و نگاشتهایی از آنها برروی کرهٔ ریمان $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ که نگاشتهای پوششی شاخه‌دار هستند بسیار متداول است. این‌کار به‌ابعاد بالاتر نیز قابل تعمیم است، و وسیله‌ای برای ساختن خمینه‌های سه‌بعدی است.

تعریف. فرض کنید M^n و N^n خمینه‌های فشرده باشند با زیرخمینه‌های سرهٔ $A^{n-2} \subset M$ و $B \subset N^{n-2}$. دراین‌صورت، یك نگاشت پیوستهٔ $f: M \to N$ پوشش شاخه‌داری با مجموعه‌های شاخه‌ای A (دربالا) و B (درپایین) است اگر:

۱. مؤلفه‌های پیش‌تصویر مجموعه‌های باز N پایه‌ای برای توپولوژی M باشند، و

۲. $f(A) = B$، $f(M-A) = N-B$، و $N-B$ دقیقاً مجموعهٔ نقاط در N باشد که به‌طور یکسان پوشیده می‌شوند، یعنی همسایگیهایی چون U دارند به‌طوری که f هر مؤلفه $f^{-1}(U)$ را به‌طور همسانریخت برروی U می‌فرستد.

تذکر: $f: M-A \to N-B$ یك نگاشت پوششی است.

مثال ۱. نگاشت مختلط $z \mapsto z^k$ که در آن، قرص واحد k بار خودش را می‌پوشاند، در مبدأ، k بار شاخه‌دار است. نگاشت مختلط $z \mapsto z^k/|z^{k-1}|$ فاصله ازمبدأ را حفظ می‌کند و به‌نگاشت پیوسته‌ای از کرهٔ ریمان به‌خود آن توسعه می‌یابد

$$\mathbf{C} \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

که در دونقطهٔ ۰ و ∞ با شاخص k شاخه‌دار می‌شود.

مثال ۲. به‌عنوان حالت خاص مثال بالا، برای $k = ۲$، یك‌پوشش شاخه‌دار دولایه‌ای، $S^2 \to S^2$ را توصیف می‌کنیم. اگر یك قرص باز را ازتصویر برداریم،که بستار آن نقاط شاخه را شامل نباشد، و دو قرص در بالا را برداریم که برروی قرص مزبور فرستاده می‌شوند، آنگاه چیزی که باقی می‌ماند یك‌پوشش‌شاخه‌دار ازیك قرص به‌وسیلهٔ یك حلقه[1] است.

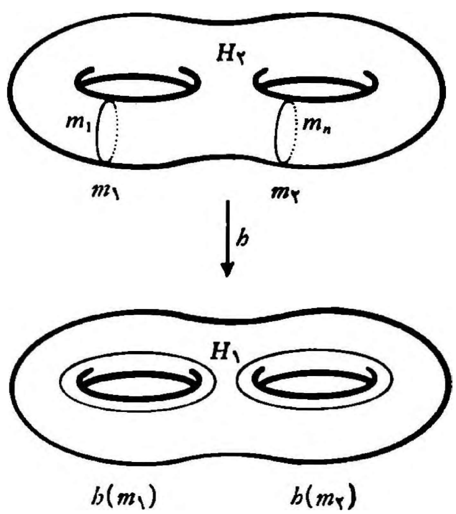
ازمیان این سه روش، به‌شرح روش اول می‌پردازیم.

(نمودارهای) تقسیم هگارد

فرض کنید D^2 یك قرص باشد. یك دستواره از گونهٔ g، نتیجهٔ اتصال g «دسته»، $D^2 \times [-۱, ۱]$، به‌یك‌گوی سه‌بعدی B^3 به‌وسیلهٔ دوختن اجزاء $D^2 \times \{\pm ۱\}$ به $۲g$ قرص مجزا از ∂B^3 است به‌نحوی که‌حاصل یك‌خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیر مرزدار باشد. دو دستواره ازیك‌گونه همسانریخت هستند. مرز یك‌دستواره از گونهٔ g، یك خمینهٔ دوبعدی بسته از گونهٔ g است. فرض‌کنید H_1، H_2 دو دستواره باشند از یك‌گونه، مثلاً g، و فرض‌کنید $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ یك همسانریختی باشد، دراین‌صورت، فضای انطباق زیر را داریم

$$M^3 = H_1 \cup_h H_2$$

M^3 یك‌خمینهٔ سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر است. سه‌تایی(H_1, H_2, h) یك تقسیم هگارد (یا نمودار هگارد) از گونهٔ g برای خمینهٔ M^3 نامیده می‌شود. در واقع خمینهٔ M^3 تا حد همسانریختی به‌وسیلهٔ $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ مشخص می‌شود. در واقع M^3 به‌وسیلهٔ تصاویر $h(m_1)$، ...، $h(m_n)$ روی ∂H_1 (نمودار هگاردآن) که دراینجا m_1، ...، m_n نصف‌النهارها[2]ی متعارف روی ∂H_2 هستند تعیین می‌شود.

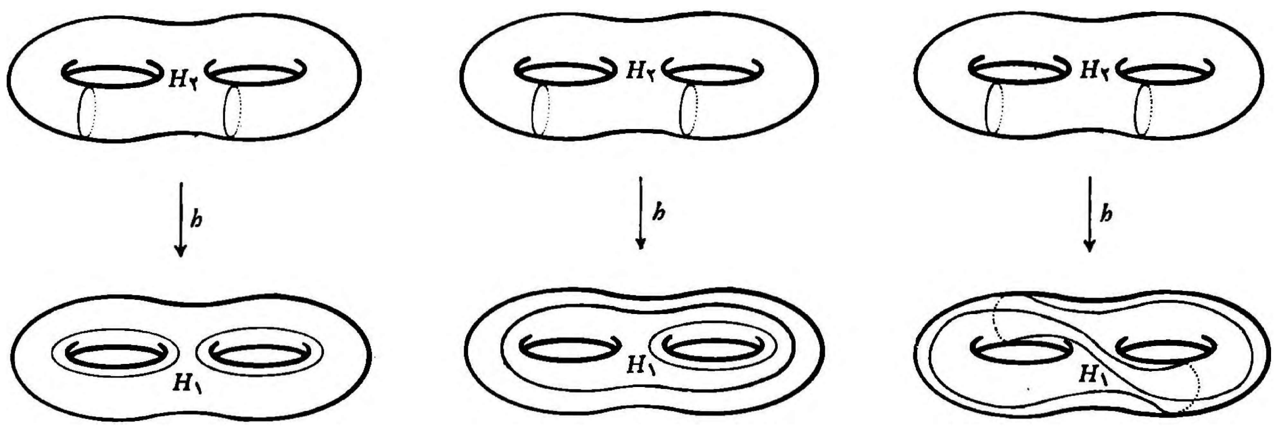


تصویر m_i روی ∂H_1 تحت همسانریختی انطباق $h: \partial H_2 \to \partial H_1$ خمهای شاخص نمودار نامیده می‌شود.

متأسفانه یك خمینهٔ سه بعدی بینهایت نمودار هگارد متمایز دارد، ولذا مسألهٔ رده‌بندی، به‌رده‌بندی نمودارها موکول می‌شود. مثلاً سه‌نمودار زیر همگی S^3 را ایجاد می‌کنند.

1. branched coverings

1. annulus 2. meridians



قضیهٔ زیر برای اثبات این مطلب به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۱. یک خمینهٔ سه‌بعدی ساده‌همبند M^3 به‌طور توپولوژیک S^3 است، اگر بتوان آن را به صورت پیوند دو چنبرهٔ توپر M_1 و M_2 نوشت به‌طوری‌که $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$.

همچنین قضیهٔ زیر را برای رابطهٔ بین یک خمینه و نمودارهای هگارد آن داریم.

قضیهٔ ۲. از خمینه‌های «هم‌ارز» به نمودارهای هگارد «هم‌ارز» می‌رسیم و از نمودارهای هگارد «هم‌ارز» به خمینه‌های «هم‌ارز».

مجموع همبند

روش دیگر مطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی به کمک «مجموع همبند»[1] است. اگر M_1 و M_2 دو خمینهٔ n بعدی باشند، «مجموع همبند» آنها، $M_1 \# M_2$، به‌وسیلهٔ برداشتن درون یک گوی n بعدی B_i از M_i و انطباق خمینه‌های سوراخ شده $M_i - \text{int}\, B_i$ برهم به‌وسیلهٔ همسانریختی عکس‌کنندهٔ جهت $h: \partial B \to \partial B_2$ به‌دست می‌آید به‌طوری که

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \text{int}\, B_1) \cup_h (M_2 - \text{int}\, B_2)\,.$$

در واقع «#» عمل شرکت‌پذیر و تعویض‌پذیر خوش‌تعریفی روی ردهٔ خمینه‌های سه بعدی جهت‌پذیر و همسانریختیهای حفظ‌کنندهٔ جهت است.

تعریف. یک خمینهٔ سه‌بعدی M^3 را اول گویند اگر $M = M_1 \# M_2$ نتیجه دهد M_1 و یا M_2 برابر S^3 است.

قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۳. هرخمینهٔ سه‌بعدی فشرده که یکریخت با S^3 نباشد، با مجموعی همبند چون $P_1 \# P_2 \# \dots \# P_k$ ازخمینه‌های اول یکریخت است. P_iها تا حد یکریختی به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

تعریف. یک خمینهٔ سه‌بعدی M^3 را کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی گوییم اگر M^3 بسته، همبند، و ساده‌همبند باشد.

تعریف. خمینه‌های سه‌بعدی جهت‌پذیر M_1 و M_2 را همنهشت گوییم اگر دو کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی S_1، S_2 موجود باشند به‌طوری‌که $M_1 \# S_1$ و $M_2 \# S_2$ یکریخت باشند (یعنی یک همسانریختی حفظ‌کنندهٔ جهت بین آنها موجود باشد).

تعریف. یک خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیر M^3 را که کرهٔ هوموتوپی سه‌بعدی نباشد، تجزیه‌پذیر[1] گوییم اگر M همنهشت با $M' \# M''$ باشد که هیچ یک از M' و M''، کرهٔ هوموتوپی سه بعدی نباشد. M تجزیه‌ناپذیر خوانده می‌شود اگر تجزیه‌پذیر نباشد.

قضیهٔ ۴. هرخمینهٔ سه‌بعدی تجزیه‌ناپذیر M یا همنهشت است با $S^2 \times S^1$، یا ناکروی[2] است (یعنی $\pi_i(M) = 0$ برای $i \geqslant 2$) و یا دارای گروه بنیادی غیربدیهی متناهی است.

با توجه به قضیهٔ ۴ این مسائل مطرح می‌شوند: خمینه‌های سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیری که ناکروی هستند یا گروه بنیادی آنها غیربدیهی و متناهی است چیستند و کره‌های هوموتوپی سه بعدی چه می‌باشند. مطلب اخیر ما را به‌حدس پوانکاره می‌رساند که در حالت سه‌بعدی مسأله‌ای حل نشده‌است.

گروههای هوموتوپی بالاتر

مفهوم گروه بنیادی را می‌توان به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد. به‌این‌منظور به‌جای طوقه‌های یک‌بعدی باید طوقه‌های nبعدی را در نظر گرفت. منظور از یک طوقهٔ n بعدی، یک نگاشت پیوسته ازمکعب n بعدی است به‌طوری‌که مرز آن به‌یک‌نقطه فرستاده شود. بقیهٔ کار با الهام از حالت یک‌بعدی ادامه می‌یابد و به گروههای هوموتوپی مراتب بالاتر می‌رسیم.

می‌توان ثابت کرد که همهٔ گروههای هوموتوپی مرتبهٔ بالاتر، یعنی بزرگتر از ۱، تعویض‌پذیر (آبلی) هستند.

---

1. connected sum

1. decomposable
2. aspherical

حدس پوانکاره. هر کـرهٔ هوموتوپی سه بعدی، همسانریخت با کرهٔ سه‌بعدی است.

اگر حدس پوانکاره درست باشد، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۵. هرخمینهٔ سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر که گروه بنیادی آن یك گـروه آزاد با $n > 0$ مولد بـاشد، «مجموع همبند» n نسخه از $S^2 \times S^1$ است.

سه قضیهٔ اساسی دربارهٔ خمینه‌های سه‌بعدی

سه‌قضیه اساسی دربارهٔ خمینه‌های سه‌بعدی عبارت‌انـد از لم دن[1]، قضیهٔ طوقه[2] و قضیهٔ کره[3].

لم دن. فرض‌کنید M^3 یك‌خمینه سه‌بعدی و $f: D\to M$ نگاشتی از یك قرص باشد که هیچ تکینه‌ای روی ∂D نداشته باشد (یعنی اگر $x\in\partial D$، $x\neq y$، $y\in D$، آنگاه $f(x)\neq f(y)$). دراین صورت یك نشانندهٔ[4] $g: D\to M$ با خاصیت $g(\partial D)=f(\partial D)$ وجود دارد.

قضیهٔ طوقه. فرض کنید M^3 یك خمینهٔ سه بعدی باشد کـه درآن ∂M از تعدادی رویه تشکیل شده است و نیز فرض‌کنید L یك‌طوقهٔ متعلق به‌مجموعهٔ باز U از یك مؤلفهٔ جهت‌پذیر N از ∂M باشد به‌طوری‌که L در M هوموتوپ با صفر باشد ولی در ∂M، هوموتوپ با صفر نباشد. آنگاه یك طوقه سادهٔ L_0 در U با همان خاصیت وجود دارد. (مقصود از یك طوقهٔ ساده، یك خم بسته است که خود را قطع نکند.)

قضیهٔ کره. فرض‌کنید M^3 یك خمینهٔ سه‌بعدی جهت‌پذیـر بـاشد به‌طوری‌کـه $\pi_2(M)\neq 0$. دراین صورت، یك کـرهٔ دوبعدی S^2 نشانده شده در M وجود دارد به‌طوری‌که S^2 در M هوموتوپ با صفر نباشد.

تذکر: شرط $\pi_2(M)\neq 0$ این مطلب را بیان می‌کند که در M تصویر یك کرهٔ دوبعدی وجود دارد که‌احتمالا خودش را قطع می‌کند و نمی‌توان آن را در M به‌طور پیوسته به‌یك نقطه تبدیل کرد. حکم قضیه، وجود تصویر یك‌کرهٔ دوبعدی با همان خاصیت را بیان می‌کند‌که این تصویر با کره همسانریخت است.

می‌توان ثابت کرد‌که وجود یك‌کرهٔ دوبعدی غیر قابل انقباض در M نتیجه می‌دهـد کـه (اگر M فشرده باشد و $\partial M=\varnothing$) $\pi_1(M)$ یك گروه دوری‌نامتناهی یا یك‌حاصلضرب‌آزاد غیر بدیهی است. لذا قضیهٔ‌کره نتیجه می‌دهـد کـه اگـر یك‌گروه را بتوان به‌صورت $\pi_1(M)$ نمایش دادکه $\pi_2(M)\neq 0$، آنگاه‌گروه را می‌تـوان به‌حاصلضرب آزاد تجزیه کـرد (احتمالا زیر گروههای متناهی نیز با آن همراه است).

نکته: وجـه مشترك این سه‌قضیه، یـافتن یك شیء هندسی از ساده‌ترین نوع با خواص ذکر شده است.

1. Dehn lemma
2. loop theorem
3. sphere theorem
4. embedding

ساختار هندسی

یك متریك روی یك خمینهٔ M موضعاً همگون نامیده می‌شود اگر برای هر x و y مفروض در M همسایگیهای U و V به‌ترتیب حول x و y و یك همانمتری $(U,x)\to(V,y)$ موجود باشد.

می‌گوییم M یك ساختار هندسی می‌گیرد اگر M یك متریك موضعاً همگون، و کامل را بپذیرد.

مطالب فـوق گویای بخشی از پیشرفتهای نظریـهٔ خمینه‌های سه‌بعدی تا اوائل دههٔ ۱۹۶۰ است کـه بیشتر ناشی از تحقیق در مورد حدس پوانکاره بود. اما نظریه خمینه‌های سه بعدی در حال حاضر وضعیت بسیار پیشرفته‌تری دارد. اکنون عـلاوه برتعـداد بسیار زیادی ازمسائل حل‌نشده و مددگیری از بسیاری ازشاخه‌های متنوع ریاضی، تحقیق در مـورد حدس ترستن[1] کـه دربرگیرندهٔ حدس پوانکاره نیز هست یکی از مسائل بسیار مهم و محوری این نظریه می‌بـاشد. در ادامهٔ مقالـه، تـوضیحاتی اجمالی در جهت روشن‌شدن حدس مزبور می‌آید، هرچندکه مقدمات‌ریاضی زیادی برای درك واقعی آن لازم است.

حدس ترستن. درون هرخمینهٔ سه‌بعدی فشرده تجزیـه‌ای متعـارف می‌پذیرد که هربخش آن دارای ساختار هندسی است.

بـرای پرداختن به‌این حدس، خمینه‌هـای سه بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و اول را در نظر می‌گیریم (تعمیم بحث به خمینه‌های سه‌بعدی‌جهت‌ناپذیر نیز چندان دشوار نیست و لی بدان نمی‌پردازیم). اصولا سه‌نوع ازاین‌گونه خمینه‌ها وجود دارند:

۱. خمینه‌هایی کـه گروه بنیادی آنها متناهی است. این‌گونه خمینه‌ها گوی سه‌بعدی هستند و خمینه‌های بسته‌ای می‌بـاشند کـه به‌وسیلهٔ یك کرهٔ هوموتوپی پوشیده می‌شونـد. برای این خمینه‌ها حدس ترستن به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

حدس. اگـر M^3 خمینه‌ای بسته و جهت‌پـذیر باشد بـا $\pi_1(M)$ متناهی، آنگاه M ساختار هندسی نوع S^3 را می‌گیرد.

این‌حدس متضمن‌حدس پوانکاره است وعلاوه بر آن می‌گوید همهٔ کنشها[2]ی آزاد گروههای متناهی روی S^3، مزدوج با کنشهای متعامد[3] هستند.

این مطلب اثبات شده‌است که اگر یك‌گروه متناهی G کنشی آزاد روی S^3 داشته باشد آنگاه G یکریخت بـا زیرگروهی از SO_4 است (گروه دورانهای فضای اقلیدسی چهاربعدی). همچنین ثابت شده است که اگر G ازمرتبهٔ 2^k باشد یا گروهی غیردوری از مرتبهٔ $3 \cdot 2^l$ به‌ازای $l\geqslant 1$ بـاشد آنگاه همهٔ‌کنشهای آزاد G روی S^3 بـا کنشهای متعامد مـزدوج هستند. همین حکم در مورد هر گروه Gی غیردوری و غیر دووجهی[4] ازمرتبهٔ 2^k3^m ثابت شده است.

1. Thurston
2. actions
3. orthogonal
4. non-dihedral

۲. خمینه‌های سه‌بعدی فشردهٔ جهت‌پذیر با گروه بنیادی نامتناهی. این گونه خمینه‌ها برحسب موجودبودن یا نبودن یک کرهٔ دوبعدی نشانده شده در آنها، که وقتی خمینه را در امتداد آن می‌بریم خمینه دو تکه شود، به دو دسته تقسیم می‌شوند. ازطرفی فرض اول بودن خمینهٔ سه‌بعدی نتیجه می‌دهد هر کره‌ای که بریدن خمینه‌درامتداد آن،خمینه را به تکه‌هایی تقسیم کند باید مرز یک گوی باشد.

ثابت شده‌است که $S^2 \times S^1$ تنها خمینهٔ اول جهت‌پذیر شامل یک کره نشانده شده‌است که بریدن خمینه در امتداد آن خمینه را تکه نمی‌کند.

بقیهٔ خمینه‌های سه بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و اول، تحویل‌ناپذیر[1] اند، یعنی هر کرهٔ دوبعدی نشانده‌شده در آنها مرز یک گوی سه‌بعدی است. اکنون بنا به قضیهٔ کره، اگر M جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه $\pi_2(M)=0$. به‌علاوه اگر $\pi_1(M)$ نامتناهی باشد اثبات شده است که پوشش اکمل M انقباض‌پذیر[2] است و M خود ناکروی می‌باشد. در این مرحله برحسب اینکه مرز خمینهٔ سه‌بعدی M، «نافشردنی[3]» باشد یا نه کارمان ادامه می‌یابد. گفته می‌شود یک رویهٔ بستهٔ جهت‌پذیر F در درون M نافشردنی است اگر $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ یک تکریختی باشد، و F مرز یک گوی سه‌بعدی در M نباشد.

اکنون یک‌خمینهٔ سه‌بعدی فشرده، جهت‌پذیر، و تحویل‌ناپذیر M با گروه بنیادی نامتناهی را در نظر بگیرید. ممکن است M مرز داشته باشد یا نداشته باشد. اگر ∂M نافشردنی نباشد، با استفاده از قضیهٔ طوقه و روشهای بریدن خمینه‌ها می‌توان اثبات کرد M به‌تکه‌هایی بریده می‌شود که دارای مرز نافشردنی هستند.

اکنون مسألهٔ ما به‌حالت یک‌خمینهٔ سه‌بعدی‌فشرده،جهت‌پذیر، تحویل‌ناپذیر با مرز نافشردنی ساده شده است (این‌شامل حالت $\partial M = \varnothing$ نیز می‌باشد).

تعریف. یک فضای تاری زایفرت[4] یک خمینهٔ سه بعدی M است اگر بتوان آن را به دایره‌هایی مجزا، موسوم به تارها، تجزیه کرد، به‌طوری‌که هر تار دارای یک‌همسایگی غلافی (چنبرهٔ توپر) باشدکه از تارهایی تشکیل‌یافته که نصف‌النهارهای آن نیستند.

در مورد چنبره‌های نافشردنی دوطرفه[5] (یک رویهٔ N^2 نشانده‌شده‌در یک خمینهٔ M^3 دوطرفه‌است اگر N^2 همسایگی‌غلافی N^2 را به‌دوتکه تقسیم کند) ثابت شده‌است که‌خانوادهٔ متناهی‌مجزایی از این چنبره‌ها نشانده‌شده در M، که M را به تکه‌هایی تقسیم می‌کند وجود دارد، که یا فضای‌تاری زایفرت است یا هیچ چنبرهٔ نافشردنی نشانده‌شده را احتمالا به‌جز آنهایی که «موازی» با مرز هستند نمی‌پذیرد.

به‌علاوه ثابت شده است که یک‌چنین خانوادهٔ کمین ازچنبره‌ها در M تا ایزوتوپی یکتاست. تکه‌های این تقسیم آخری است که حدس زده‌شده ساختارهای هندسی می‌پذیرند. نیز ثابت شده است که فضای تارهای زایفرت ساختارهای هندسی می‌گیرند، بنا براین فقط باید حالتی را در نظر گرفت که خمینهٔ سه‌بعدی M فشرده، جهت‌پذیر، و تحویل‌ناپذیر است و هر چنبرهٔ نافشردنی نشانده شده در آن «موازی» با ∂M می‌باشد.

1. irreducible
2. contractible
3. incompressible
4. Seifert fibre space
5. two-sided

یک خمینهٔ سه‌بعدی M هاکن[1] نامیده می‌شود اگر M اول باشد و شامل یک رویهٔ دوطرفهٔ نافشردنی غیرهمسانریخت با S^2 باشد (که مرز آن، درصورت وجود، روی ∂M قرار گیرد). اگر M یک‌خمینهٔ هاکن باشد که فضای تاری زایفرت نباشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که هر زیرگروه $\pi_1(M)$ یکریخت با $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ مزدوج با گروه بنیادی مؤلفه‌ای از ∂M است. یک چنین خمینه‌ای ناچنبره‌ای[2] نامیده می‌شود.

اکنون ترستن ثابت کرده است که یک چنین خمینه‌ای دارای ساختار هذلولوی است. درنتیجه حدس هندسی‌سازی ترستن برای همهٔ خمینه‌های هاکن، و از آنجا، برای همه مجموعهای هسبند خمینه‌های هاکن برقرار است.

آنچه باقی مانده است، خمینه‌های سه‌بعدی بستهٔ جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر غیرهاکن است با گروه بنیادی نامتناهی. همهٔ این‌گونه خمینه‌ها باید بسته باشندولذا حدس ترستن به‌صورت زیر مطرح می‌شود.

حدس. فرض کنید M یک خمینهٔ سه‌بعدی بسته، جهت‌پذیر و تحویل‌ناپذیر با گروه بنیادی نامتناهی،و غیرهاکن باشد. آنگاه M یک فضای تاری زایفرت است یا ساختار هذلولوی را می‌پذیرد.

در جهت اثبات این حدس پیشرفت کمی به‌دست آمده یا دست‌کم انتشار یافته است.

مراجع

1. Hemple, *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies (86), Princeton University Press, Princeton, Newjersey (1976).
2. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, NewYork (1977).
3. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish Inc., Berkeley (1977).
4. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, NewYork (1980).
5. Scott, "The geometries of 3-manifolds," *Bull. London Math. Soc.*, (15) (1983) 401-487.
6. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, preprint, Princeton Univ. Press (1977).
7. Weeks, J., *The Shape of Space*, Marcel-Dekker, NewYork (1985).

مرجعهای ۲ و ۳ و ۴ و مقالهٔ ۵ پیشنیاز کمتری می‌طلبد. مرجع ۶ هنوز به‌صورت کتاب انتشار نیافته است. مقالهٔ ۵ بسیار خواندنی است.

1. Haken
2. atoroidal