

رد پای توپولوژی در کارخانه*

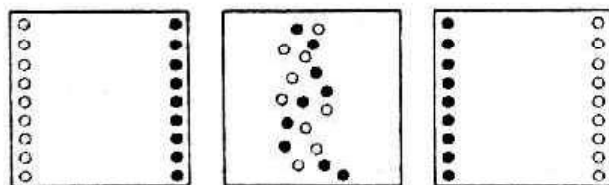
آرون آبرامز^۱، رابرت گریست^۲

ترجمه حسن حقیقی

این گفته بدان معنی نیست که برنامه‌ریزی حالت‌های هماهنگ، کار ساده‌ای است، بلکه به‌عنوان مثال، تلاش فوق‌العاده‌ای لازم است تا بتوان رفت‌وآمدهای هوایی را در فرودگاه‌های شلوغ هماهنگ کرد. در برنامه‌ریزی برای این کار باید از تصادم، به هر قیمتی که شده، جلوگیری کرد. در شکل ۱، مثالی نابدهی از این موضوع در صفحه ارائه شده است: مسأله این است که چگونه می‌توان حرکت این روبات‌ها را هماهنگ کرد به‌طوری که در حین تعویض جای دو ردیف از آنها تصادمی روی ندهد.

یکی از روشهایی که در روبات‌شناسی برای حل مسائل هماهنگ‌سازی به‌کار می‌رود روشی اساساً توپولوژیک است. به تسامح می‌توان گفت در این روش فضای تمام آرایشهای ممکن از روبات‌ها را می‌سازند و سپس همه آرایشهایی را که نشان‌دهنده موقعیت تصادم و یا موقعیت نزدیک تصادم هستند حذف می‌کنند. آنچه باقی می‌ماند، فضایی است که تمام پیکربندیهای این روبات‌ها را دربر می‌گیرد. مسیرهای این فضا مسیر حرکت‌های ایمن هستند.

۲. فضای پیکربندی. در ابتدا مثالی صوری ارائه می‌کنیم، که یک شیء توپولوژیک کلاسیک، به نام فضای پیکربندی N نقطه متمایز برجسته‌گذاری شده از صفحه $\mathbb{R}^2$ است. یعنی تمام N تاییه‌های مرتب از نقاط $\mathbb{R}^2$ با این خاصیت که هیچ دو نقطه‌ای برهم منطبق نباشند. به هر N تایی با این ویژگی، نقطه‌ای را از فضای پیکربندی نسبت می‌دهیم. دو نقطه در فضای پیکربندی نزدیک یکدیگرند اگر فاصله N تاییه‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{2N}$ کم باشد.



شکل ۱ هماهنگ کردن انتقال ایمن و بهینه روبات‌ها در تعویض جای دو ردیف از آنها یک مسأله نابدهی برنامه‌ریزی است.

اگر بخواهیم برای یافتن نمونه‌هایی از اشیای توپولوژیک جالب در جهان پیرامون جستجو کنیم شاید به نظر نرسد که محلی استثنایی برای این کار، داخل محوطه یک انبار خودکار^۱ یا کارخانه است.

در این نوشته ردهای از فضاهای توپولوژیک را که به‌طور طبیعی از چنین محیطی برگرفته می‌شوند شرح می‌دهیم. مثالهایی که می‌آوریم به‌طور همزمان از دو حوزه به ظاهر متفاوت برخاسته‌اند. نویسنده اول این مقاله، در تحقیق برای تهیه پایان‌نامه خود [۱]، پس از همکاری با یومرشایم و زاسلو [۲]، اج. لاتدانو و زد. لاتدانو در مسائلی دربارهٔ قدم زدن تصادفی روی گراف‌ها، این فضاها را کشف کرد. نویسنده دوم، همین فضاها را با همکاری کودیت‌شک در آزمایشگاه هوش مصنوعی دانشگاه میشیگان ([۷]، [۸]) کشف کرد.

در بخشهای ۱ و ۲، علاوه بر بحث مختصر و مقدماتی دربارهٔ فضاهای پیکربندی، به طرح مسائلی دربارهٔ روبات‌ها می‌پردازیم تا زمینه بحث فراهم شود. در بقیه مقاله توجه خود را به رده جالبی از فضاهای توپولوژیک، که مرتبط با برنامه‌ریزی حرکت روی گراف‌ها هستند، معطوف می‌کنیم.

۱. روبات‌ها، و برنامه‌ریزی حرکت به‌صورت توپولوژیک. یک کارخانه خودکار را در نظر بگیرید که مجهز به تعدادی خودرو با هدایت خودکار^۲ (AGV) یا روبات متحرک است که محمولاتی را از جایی به جایی دیگر منتقل می‌کنند. معمولاً هدف این است که تعدادی از این روبات‌ها، مثلاً N تا از آنها را همزمان به حرکت در آوریم و مطابق با الگوریتمی کنترل کنیم که روبات‌ها طبق آن از مبادی به مقصدهای مورد نظر بروند (در کاربردهای انبارداری) یا یک فرایند جرخ‌های را اجرا کنند (در کاربردهای تولید صنعتی). این روبات‌ها گران‌قیمت هستند و در تصادم (با موانع یا با یکدیگر) کارایی خود را از دست می‌دهند. هر کس که از یک فروشگاه، بزرگ مواد غذایی، که راهروهای پهنی بین قفسه‌ها دارد، خرید کرده باشد با این مسأله و راه حل آن آشناست. اگر دو چرخ به سمت یکدیگر در حرکت باشند به هنگام رویارویی کمی تغییر جهت کافی است تا از برخورد اجتناب شود، باین فرض که چرخ دیگر در همان جهت تغییر مسیر ندهد. پرهیز از برخورد در $\mathbb{R}^2$ کاری موضعی است.

1. automated warehouse 2. Automated Guided Vehicles

به طور صوری فضای پیکربندی عبارت است از

$$C^N(\mathbb{R}^2) := (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2) - \Delta$$

که Δ نشان دهنده مجموعه دو به دو قطری (که به اختصار آن را قطر می نامیم)، یعنی

$$\Delta := \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^2)^N : x_i = x_j, i \neq j\}$$

است.

تجسم این فضای پیکربندی، حتی تجسم قسمت کوچکی از آن، آسان نیست زیرا بعد فضا برابر $2N$ است.

تمرین. نشان دهید $C^2(\mathbb{R}^2)$ با $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 - (0, 0))$ یا با معادل آن $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ، که S^1 نشان دهنده دایره یک در $\mathbb{R}^2$ است، همسانریخت است. راهنمایی: هر نقطه را همچون سکه ای در نظر بگیرید و به نحوه یکی یکی قرار دادن سکه ها روی میز فکر کنید. آیا روش اثبات شما نمایشی ساده برای $C^2(\mathbb{R}^2)$ به دست می دهد؟

به این ترتیب با مدل قرار دادن $\mathbb{R}^2$ برای کف کارخانه و نقاط روی $\mathbb{R}^2$ برای روبات های متحرک می خواهیم مسیرها یا چرخه هایی را در $C^N(\mathbb{R}^2)$ بیابیم که رفتارهای معینی را نمایش دهند. موانع را به آسانی می توان در این مدلها گنجانده. آثار مکتوب زیادی درباره این موضوع وجود دارد [۱۲]. نمایش حرکت های چرخه ای پیچیده تر است اما در ابتدا می توان آنها را با ترکیب حرکت های نقطه به نقطه تقریب زد. لازم است چندین فرض برای چنین طرح ساده ای که ارائه می دهیم در نظر گرفته شود و به طور کلی جنبه های متفاوت سینماتیک (مثلاً هندسه رابری^۱) باید مورد توجه قرار گیرند. البته چون روبات ها واقعاً نقطه نیستند و چون به کارگیری الگوریتم های کنترلی با دقت بی نهایت ممکن نیست فقط لازم است که مسیر طرح شده در خارج یک همسایگی قطر Δ در $(\mathbb{R}^2)^N$ قرار گیرد.

با استفاده از فضاهای پیکربندی، ارائه طرح های کنترلی ایمن امکان پذیر می شود. در کار کودیت شک و ریمن [۱۱] نمونه ای از یک راه حل مشخص دیده می شود. آنها میدان های برداری روی این فضاهای پیکربندی را که می توانند برای حرکت از مبدأ به مقصد، در صورت وجود بعضی از موانع، مورد استفاده قرار گیرند به صراحت مشخص می کنند. بردارهای این میدان های برداری را می توان چنان آراست که به نقاط مشترک قطر Δ و مرز $C^N(\mathbb{R}^2)$ نزدیک نشوند. در این صورت ایمنی طرح کنترلی از لحاظ تصادم قطعی است و هیچ مسیری قطر را قطع نمی کند (مفهوم ایمنی قطعی در مقابل مفهوم ایمنی آماری است که در طرح های کنترلی حاصل از شبیه سازی های رایانه ای مطرح می شود). به علاوه چون یک همسایگی قطر حذف می شود، طرح کنترلی نسبت به اختلالات سیستم پایدار خواهد بود. این موضوع خیلی مهم است، زیرا متأسفانه احتمال خرابی گاه به گاه دستگاه های مکانیکی وجود دارد. ترسیم یک میدان برداری مناسب در فضای پیکربندی روشی عالی برای اصلاح طرح است.

کاربرد مذکور کاربرد مستقیم و زیبای ایده های توپولوژیک و دینامیک در مسأله ای با اهمیت عملی زیاد است، و هم اکنون در شرایط صنعتی گوناگون متداول است.

1. steering

۳. گراف. روبات شناسان، تا حد زیادی مستقل از توپولوژیدها، موفقیت بزرگی در شناسایی فضاهای پیکربندی و کار با آنها در جهت مقاصد خودشان در مسائل کنترل به دست آورده اند. اما رده ای از ساختارهای ساده فیزیکی مناسب وجود دارند که هنوز فضاهای پیکربندی آنها مورد استفاده قرار نگرفته اند. فضاهای پیکربندی روی گراف، یا روی شبکه ای از یالها و رأسها از جمله این فضاها هستند.

فرض کنیم روبات ها باید روی ریل هایی که در کف کارخانه نصب شده اند یا از طریق مسیرهایی که با سیم های برق دار آویخته از سقف مشخص شده اند حرکت کنند. برای مثال مرجع [۶] را ببینید. شبکه هایی با این محدودیت کاملاً رایج اند. علت اصلی آن این است که کم هزینه تر از یک سیستم رابری AGV ها، با دو درجه آزادی کامل هستند. در این شرایط، حالت سیستم در هر لحظه از زمان یک نقطه از فضای پیکربندی گراف Γ ، یعنی نقطه ای از فضای

$$C^N(\Gamma) := (\Gamma \times \dots \times \Gamma) - \Delta$$

است. در اینجا نیز همانند مسأله قبل برای اینکه بتوان با ایمنی روی گراف حرکت کرد، باید مسیرهایی مناسب ساخت که اکیداً درون $C^N(\Gamma)$ به مانند و از هر نقطه نزدیک Δ دور باشند. اما مشکلاتی در اینجا هست که شاید مانع از به کارگیری راه حلی مشابه راه حل مسأله قبل شود. از جمله، مشکلاتی که با سؤالات زیر رخ می نمایند.

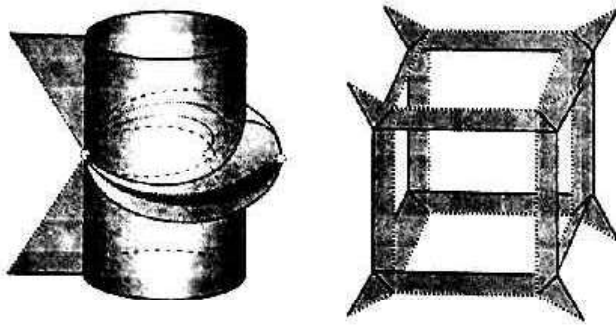
۱. این فضاها به چه چیزی شبیه اند؟

۲. چگونه می توان یک تصادم قریب الوقع را برطرف کرد؟

اولین تفاوت بین این مسأله و مسأله $C^N(\mathbb{R}^2)$ این است که $C^N(\Gamma)$ خمینه نیست، یعنی نمی توان انتظار داشت که هر نقطه دارای یک همسایگی باشد که با یک فضای اقلیدسی همسانریخت باشد. در واقع اگر گراف های بدیهی را که با پاره خط یا دایره همسانریخت هستند نادیده بگیریم، آنگاه گراف موضعاً اقلیدسی نیست و حاصل ضرب های آن نیز چنین نیستند. تفاوت دوم این است که تصادم در درون هر یال دیگر به طور موضعی قابل اجتناب نیست. فرض کنید پهنای راهروهای بین قفسه های یک فروشگاه مواد غذایی فقط به اندازه پهنای یک چرخ خرید است، و در نتیجه عبور فرد دیگر از آن غیرممکن است. در یک چنین فروشگاه پر از خریداری (که مشتریان از چرخ های خرید استفاده می کنند)، مسأله کنترل هماهنگ دشوار است. چگونه چرخ ها می توانند از تصادم در درون یک راهرو پرهیز کنند؟ روشن است که لااقل یکی از افراد درگیر باید تغییری در مقیاس بزرگ در مسیر حرکت بدهد و به انتهای راهرو برود. پرهیز از تصادم در گراف کاری غیرموضعی است.

در ادامه این مقاله، درباره ویژگی های توپولوژیک این فضاهای جالب بحث می کنیم. برای ملاحظه کاربردهای عمیق تر فضاهای پیکربندی در مسائل برنامه ریزی حرکت، مرجع [۱۲] و مراجع ذکر شده در آن را ببینید.

۴. مثال هایی شامل دو روبات. چون گراف شیئی یک بعدی است، فضای پیکربندی $C^N(\Gamma)$ N بعدی است. بنابراین فضاهای پیکربندی دو روبات، اشیایی دوبعدی هستند، که باید بتوان آنها را در ذهن مجسم کرد (حداقل در حالت های ساده). در زیر سه مثال می آوریم.



شکل ۳. فضاهای پیکربندی $C^2(\bullet\bullet)$ [چپ] و $C^2(\times)$ [راست]. خطوط نقطه چین نشان دهنده نقاطی از قطر Δ است که بر مرز C^2 قرار دارند.

مثال ۳. $C^2(\times)$

افزایش تعداد یالهای متصل به رأس مرکزی فضای پیکربندی را پیچیده تر می کند. گراف $\times$ را، که درختی شعاعی است با چهار یال که از یک رأس خارج می شوند، در نظر بگیرید. تجسم $C^2(\times)$ کمی مشکل تر است و قدری کار لازم است تا این تجسم حاصل آید. به منظور برانگیختن حس کنجکاوی خواننده، این فضای پیکربندی را در شکل ۳ آورده ایم [سمت راست].

۵. ساده سازی با استفاده از گسسته سازی. برای مجسم کردن فضاهای پیکربندی پیچیده تر گرافها، کمی ساده سازی برای ساده تر کردن شکل فضا ضروری است. ما از دو روش اصلی استفاده می کنیم: روش اول روشی است که در آن حجره های «ناایمن» فضا را، که نزدیک قطر Δ قرار دارند، برمی داریم. روش دوم روش «درون بری دگر دسی»^۱ یعنی خرد کردن اساسی تر فضا و تبدیل آن به «کالبد»ی با بعد پایین تر است که در بخش ۶ درباره آن بحث خواهیم کرد.

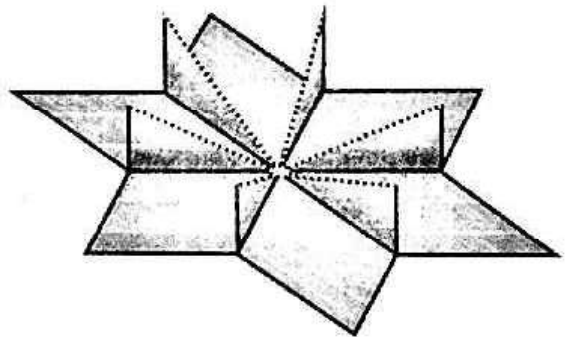
هر گراف Γ به یک ساختار حجره ای مجهز است: «حجره ها» (یا رأسها) و «حجره ها» (یا یالها). حاصل ضرب N گانه Γ در خودش از یک ساختار حجره ای برخوردار می شود. به این صورت که هر حجره حاصل ضرب N حجره Γ است (که این حجره ها ممکن است متمایز نباشند). اما همانند مثال ۱، فضای پیکربندی یک ساختار حجره ای کاملاً طبیعی ندارد. زیرا قطر Δ تمام حجره هایی از حجره های حاصل ضرب را که عواملی مکرر دارند می شکافد. ولی توجه داشته باشید که در بعضی از مثالهای قبل، این پاره حجره ها در حالت تعلیقی قرار دارند که ضروری و اساسی نیست و می توان آنها را در کالبد اساسی تری از فضای پیکربندی خوابانید.

این کالبد را می توان به صورت زیر مشخص کرد [۱]. فضای پیکربندی گسسته را، که با $D^N(\Gamma)$ نمایش می دهیم و به صورت $\Delta - (\Gamma \times \dots \times \Gamma)$ تعریف می کنیم در نظر بگیرید. در اینجا Δ نشان دهنده مجموعه تمام حجره هایی از حجره های حاصل ضرب $\Gamma \times \dots \times \Gamma$ است که پستار آنها قطر Δ را قطع می کند. به عبارت دیگر می توان گفت $D^N(\Gamma)$ مجموعه پیکربندیایی است که در آن به ازای هر جفت روبات مفروضی روی Γ ، هر مسیری از Γ که آنها را به یکدیگر وصل کند، شامل لا اقل یک یال کامل

1. deformation retraction

مثال ۱. $C^2(\bullet\bullet)$

فرض کنیم $\bullet\bullet$ نشان دهنده گرافی باشد که سه یال دارد و یالهایش در یک رأس مرکزی به یکدیگر متصل شده اند. تعیین ساختار حجره ای $C^2(\bullet\bullet)$ ساده است. گراف حاصل ضرب $\bullet\bullet \times \bullet\bullet$ متشکل از ۹ مربع یا حجره دویبعی است که به یکدیگر چسبانده شده اند (حجره ۲ بعدی را ۲-حجره می نامیم). شش حجره از این حجره ها با پیکربندیهای متناظرند که در آنها دو روبات روی یالهای مجزای $\bullet\bullet$ قرار دارند. چون سه یال در $\bullet\bullet$ قرار دارند، پیکربندیهای باقیمانده، که در آن هر دو روبات روی یک یال هستند، سه حجره مربعی را به دست می دهند. که هر یک از آنها به وسیله قطر Δ به یک زوج از حجره های مثلثی تقسیم می شود. بنابراین تعداد ۲-حجره های مثلثی متناظر با پیکربندیهایی که در آنها هر دو روبات روی یک یال ولی در مکانهای متفاوت هستند، شش تا است. با در نظر گرفتن ویژگیهای هر یک از این ۲-حجره ها، می توان شناساییهای لازم را برای رسیدن به فضای داده شده در شکل ۲ انجام داد. همچنین، می توان از استدلالی نسبتاً قوی تر که در مرجع [۹] آمده است، استفاده کرد.



شکل ۲. فضای پیکربندی $C^2(\bullet\bullet)$ که در $\mathbb{R}^2$ نشانده شده است. خطوط نقطه چین حاکی از یالهایی است که روی قطر Δ قرار می گیرند. توجه کنید که رأس مرکزی حذف می شود.

تمرین. دو سکه را روی یک قطعه کاغذ، که یک گراف بزرگ به شکل $\bullet\bullet$ روی آن کشیده شده است، قرار دهید به طوری که هر دو سکه روی یک یال گراف قرار گیرند. با استفاده از دو انگشت سکه ها را چنان حرکت دهید که بدون برخورد با هم جایشان عوض شود. مسیر این حرکت را روی شکل ۲ مشخص کنید.

مثال ۲. $C^2(\bullet\bullet)$

فرض کنیم $\bullet\bullet$ نشان دهنده گرافی با سه یال باشد که از گراف $\bullet\bullet$ با چسباندن دو رأس مرزی به یکدیگر به دست آمده است. یک روش ساختن $C^2(\bullet\bullet)$ این است که فضای $C^2(\bullet\bullet)$ را برگزینیم و از آن پیکربندیهایی را برداریم که در آنها هر دو روبات روی رأسهایی قرار دارند که باید به هم چسبانده شوند. سپس آن بخشهایی از مرز $C^2(\bullet\bullet)$ را مشخص کنیم که در رأسهایی از آنها که در $\bullet\bullet$ باید به یکدیگر چسبانده شوند، یک روبات قرار دارد، و این بخشهای $C^2(\bullet\bullet)$ را به یکدیگر بچسبانیم. حاصل اگر چه فضای پیکربندی خیلی ساده ای است تجسم آن کمی مشکل است؛ ما این فضا را به صورتی که در $\mathbb{R}^2$ نشانده شده، در شکل ۳ رسم کرده ایم [چپ]. هر یک از سه «سوراخ» متناظر با تصادم روباتها در یکی از این سه رأس است. شش یال نقطه چین تصاویر پاره خطهای قطری شکل ۲ هستند.

رأسهای متمایز Γ قرار دارند)، دوازده ۱-حجره (که در آنها یک روبات در یک رأس و روبات دیگر روی یالی است که بستان آن شامل آن رأس نیست)، و صفر تا ۲-حجره دارد (زیرا هر دو یالی یکدیگر را در رأس مرکزی قطع می‌کنند). با کمی تعمق، می‌توان دریافت که $D^2(\Gamma)$ خمینه‌ای همبند است که در آن هر ۰-حجره دقیقاً به دو ۱-حجره متصل است و تمامی ۱-حجره‌ها انتها به انتها، به‌طور دوری به یکدیگر وصل شده‌اند. بنابراین $D^2(\Gamma)$ دایره‌ای توپولوژیک است که دقیقاً با حذف تمامی حجره‌های نزدیک قطر از $C^2(\Gamma)$ ، که تصویر آن در شکل ۲ آمده است، به‌دست می‌آید. عمل گسسته‌سازی زیرمجموعی از $C^2(\Gamma)$ را به‌دست می‌دهد که به نظر می‌آید تمام توپولوژی «اساسی» فضا را دربر دارد. (به عبارت دقیق‌تر نوع هموتوبی فضاهای $C^N(\Gamma)$ و $D^N(\Gamma)$ یکی است؛ تعریف این مفهوم را در بخش ۶ می‌توانید ببینید). اما این حکم یقیناً در مورد گسسته‌سازی $C^2(\Gamma)$ ، که بر اثر آن خمینه‌ای ناهمبند حاصل می‌شود، درست نخواهد بود. در بخش ۶ معیارهایی را بیان خواهیم کرد که تحت آنها فضای حاصل از گسسته‌سازی از لحاظ توپولوژیک مطابق با اصل خواهد بود.

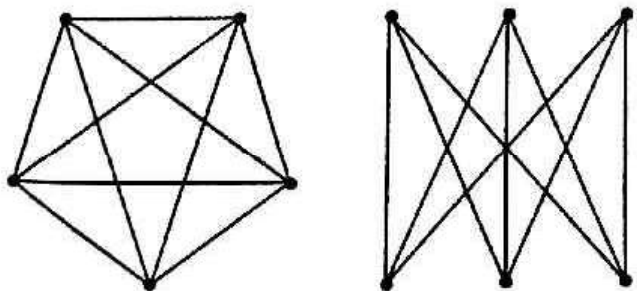
با استفاده از استدلال‌های شمارشی غالباً می‌توان فضاهای پیکربندی گسسته را معین کرد، حتی وقتی که فضای پیکربندی کاملاً نامعلوم است. مثالهای شگفت‌انگیز از فضاهای جالب با گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی گرافهای ناهمبند به‌دست می‌آیند [۱].

مثال ۴. $D^1(K_5)$

گراف کامل K_5 را، که نمودار آن در شکل ۵ [چپ] آمده است، در نظر بگیرید. فضای پیکربندی گسسته دو روبات روی این گراف مجتمعی دوبعدی است، با یک استدلال شمارشی ساده ساختار حجره‌ای آن معلوم می‌شود:

۰-حجره‌ها: هر ۰-حجره با پیکربندیهای متناظر است که در آن دو روبات در رأسهای متفاوت هستند. (چون K_5 دارای پنج رأس است، تعداد این ۰-حجره‌ها دقیقاً برابر است با $20 = 5 \times (5 - 1)$. توجه کنید هیچ رأسی از K_5 در محلهایی که دو یال یکدیگر را در تصویر قطع می‌کنند وجود ندارد و رأسهای گراف فقط در رأسهای پنج‌ضلعی قرار دارند.)

۱-حجره‌ها: هر ۱-حجره با پیکربندی‌ای متناظر است که در آن یک روبات در یک رأس و روبات دیگر روی یالی قرار دارد که نقاط انتهایی آن شامل



شکل ۵ گرافهای ناهمبند K_5 [چپ] و $K_{5,2}$ [راست]. این نمادگذاری مأخوذ از نظریه گراف است که در آنجا این دو گراف مثالهایی اساسی از گرافهای ناهمبند هستند.

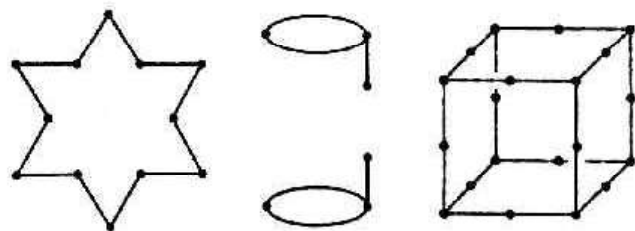
باشد. بنابراین به جای اینکه روبات‌ها را محدود کنیم که به اندازه حداقل ۴ از یکدیگر فاصله داشته باشند (یعنی یک همسایگی Δ را برداریم)، می‌توانیم روبات‌ها را روی Γ به این‌صورت محدود کنیم که «حداقل به اندازه یک یال کامل از یکدیگر فاصله داشته باشند». فضای حاصل نوعی فضای پیکربندی طبیعی در حوزه قدم زدن تصادفی روی گرافهاست [۲]. توجه داشته باشید که $D^N(\Gamma)$ زیرمجموع $C^N(\Gamma)$ است (زیرا «پاره حجره»هایی را که از برش در طول قطر حاصل می‌شوند دربر ندارد) و در واقع بزرگ‌ترین زیرمجموعی از $C^N(\Gamma)$ است که Δ را قطع نمی‌کند.

با این ساختار حجره‌ای طبیعی می‌توان رأسهای $D^N(\Gamma)$ (یا ۰-حجره‌ها) را پیکربندیهای «گسسته» یا آرایشهایی از سکه‌های پرجسبگذاری‌شده در رأسهای گراف تلقی کرد. یالهای $D^N(\Gamma)$ ، یا ۱-حجره‌ها به ما می‌گوید چه پیکربندیهای گسسته‌ای را می‌توان با حرکت دادن یک سکه در طول یک یال Γ به یکدیگر متصل کرد. هر ۲-حجره‌ای از $D^N(\Gamma)$ دو یال مستقل (یا «جابه‌جاشونده») را نمایش می‌دهد، به این معنی که می‌توان یک زوج سکه را مستقل از یکدیگر در طول یالهای مجزا حرکت داد. همچنین هر k -حجره $D^N(\Gamma)$ نمایش‌دهنده امکان حرکت k سکه در طول k یال مجزای Γ است.

به شکل ۲ برمی‌گردیم؛ با گسسته‌سازی $C^2(\Gamma)$ قسمت بزرگی از فضا حذف می‌شود. برای مثال حجره‌های دوبعدی مثلثی پیکربندیهای را نمایش می‌دهند که در آنها هر دو روبات در درون یک یال قرار دارند. چون این دو به اندازه یک یال کامل از یکدیگر فاصله ندارند، این حجره‌ها حذف می‌شوند. همین حکم برای تمامی حجره‌های دوبعدی دیگر نیز که نمایش‌دهنده پیکربندیهای هستند که در آنها روبات‌ها در درون یالهای مجزا قرار دارند درست است. در چه پیکربندیهای فاصله بین روبات‌های روی Γ به اندازه یک یال کامل است؟

تمرین. نشان دهید با گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی مثالهای ۱ تا ۳، فضاهای شکل ۴ به‌دست می‌آید. تقریب فضاهای پیکربندی به توسط این فضاها تا چه حد دقیق است؟

می‌توان گسسته‌سازی مثال ۱ را به شیوه دیگری انجام داد که هر چند نسبت به شیوه پیش‌گفته چندان مستقیم نیست اما می‌توان آن را به چند مثال زیبا که بعداً عرضه می‌کنیم تعمیم داد. یادآوری می‌کنیم که فضاهای پیکربندی گسسته از ساختاری حجره‌ای برخوردارند که از Γ به آنها می‌رسد. تمام حجره‌هایی از حاصلضرب Γ^N که به‌طور کامل در $C^N(\Gamma)$ نیستند با گسسته‌سازی برداشته می‌شوند. به این ترتیب در مثال ۱، شمارشی ساده نشان می‌دهد که فضای $D^2(\Gamma)$ دوازده ۰-حجره (که در آنها هر دو روبات در



شکل ۶ گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی مثالهای ۱ تا ۳ (از چپ به راست).

مثال ۵. $D^1(K_{3,2})$

تحلیلی تقریباً مشابه در مورد گراف $K_{3,2}$ که نمودار آن در شکل ۵ [راست] آمده است، نشان می‌دهد که $D^1(K_{3,2})$ نیز رویه جهت‌پذیر بسته همبند است. ساختار حجره‌ای طبیعی $D^1(K_{3,2})$ دقیقاً دارای ۳۶ وجه، ۷۲ یال، و ۳۰ رأس است. بنابراین

$$\chi(D^1(K_5)) = 36 - 72 + 30 = -6 \quad (2.5)$$

و در نتیجه گونای این رویه چهار است.

به‌منظور شناخت فضاهای حاصل از گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی با ابعاد بالاتر، می‌توان صورت مناسبی از استدلال دوگانی [۱] را به‌کار برد، یعنی به جای اینکه ببینیم چگونه روبانهای متمایز روی Γ به اطراف حرکت می‌کنند، پیکربندیهای سوراخها، یعنی ناحیه‌هایی از Γ را که هیچ روبانی روی آنها نیست، در نظر می‌گیریم. چون سوراخها برچسبگذاری طبیعی ندارند، می‌توان استدلال دوگانی را مستقیماً در فضای پیکربندی فاقد برچسبگذاری به‌کار برد. این استدلال دوگانی رابطه‌ای را بین $D^N(\Gamma)$ و $D^{1-N}(\Gamma)$ که V تعداد رأسهای Γ است، نتیجه می‌دهد. با این استدلالها، ادعاهای مطروحه در مثالهای زیر به اثبات می‌رسد.

مثال ۶.

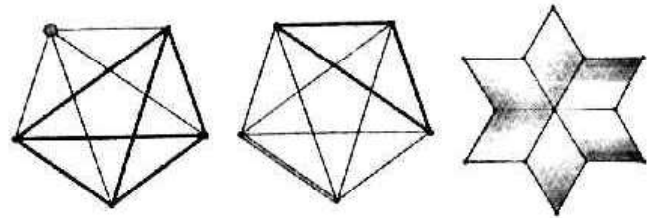
فضای $D^2(K_5)$ با رویه جهت‌پذیر بسته و همبندی از گونای ۱۶ همسانریخت است.

مثال ۷.

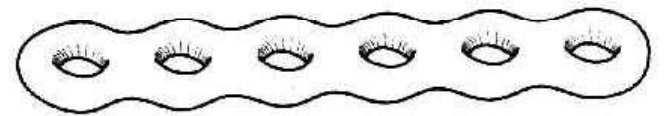
همچنین فضای $D^1(K_{3,2})$ با رویه جهت‌پذیر بسته و همبندی با گونای ۳۷ همسانریخت است.

۶. ساده‌سازی با استفاده از دگرژیسی. به‌طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که فضاهای حاصل از گسسته‌سازی فضاهای پیکربندی تا چه حد تقریب خوبی از فضاهای پیکربندی اصلی هستند. فضاهای C^N و D^N مشابه به نظر می‌رسند، زیرا D^N زیرمجموعه‌ای از C^N است که از خواباندن آن حجره‌هایی که با قطر همجوار هستند در کالبد اساسی‌تری از فضای پیکربندی به‌دست می‌آید. اما فضای حاصل از گسسته‌سازی ممکن است از لحاظ توپولوژیک مطابق با اصل نباشد؛ به‌عنوان مثال، $C^2(\bullet\bullet)$ همبند است در حالی که $D^2(\bullet\bullet)$ همبند نیست. در واقع، بنابر تعریف، $D^N(\Gamma)$ وقتی N بزرگ‌تر از تعداد رأسهای Γ است، یعنی وقتی که گسسته‌سازی Γ خیلی «زمخت»^۱ است، مجموعه‌ای تهی است.

مفهوم مناسب برای «همسانی» در اینجا، مفهوم درون‌برد دگرژیسی است. می‌گوییم زیرفضای A از فضای X درون‌برد دگرژیسی (قوی) X است اگر یک خانوادهٔ بی‌نهایت از نگاشتهای پیوسته $f_i: X \rightarrow X$ وجود داشته باشد، به‌طوری که f_i نگاشت همانی روی X باشد و f_i نگاشتی باشد که X را به



شکل ۶ [چپ] به‌ازای هر رأس از فضای K_5 ، شش یال جدا از آن رأس وجود دارد. همچنین [وسط] به‌ازای هر یال، سه یال کاملاً جدا از آن یال وجود دارد. در $D^1(K_5)$ ، این حجره‌ها در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و یک مجتمع دوبعدی موضعیاً اقلیدسی را می‌سازد [راست].



شکل ۷ فضای $D^1(K_5)$ با رویه جهت‌پذیر بسته‌ای با گونای شش همسانریخت است.

رأس مذکور نیست. با استفاده از نمودار K_5 می‌توان دریافت که تعداد این ۱-حجره‌ها برابر است با $6 \times 5 \times 2 = 60$ ، چنانکه شکل ۶ [چپ] حاکی از آن است. حضور عامل ۲ در حاصلضرب اخیر به این دلیل است که دو روبان را روی K_5 برچسبگذاری کرده‌ایم. ۲-حجره‌ها: هر ۲-حجره با پیکربندی‌ای متناظر است که در آن دو روبان بر یالهایی قرار دارند که یستار آنها جدا از هم هستند. دو باره از روی نمودار (و شکل ۶ [وسط]) می‌توان دریافت که تعداد این ۲-حجره‌ها برابر است با $3 \times 10 = 30$.

سپس می‌توان نشان داد که هر یال، مرز یک زوج ۲-حجره است و جهت آن در هر دو حجره یکی است، و هر رأس محل تلاقی شش یال است، همان‌طور که در شکل ۶ [راست] نشان داده شده است. به‌علاوه فضای $D^2(K_5)$ همبند است، یعنی می‌توان از هر پیکربندی به پیکربندی دیگری رفت. بنابراین $D^1(K_5)$ یک رویه جهت‌پذیر همبند است، و بنابه قضیهٔ زده‌بندی رویه‌ها، این فضا، در صورت یکی گرفتن فضاهای همسانریخت، به‌طور یکتایی توسط مشخصهٔ اویلر تعیین می‌شود:

$$\chi(D^2(K_5)) = (\text{تعداد یالها}) - (\text{تعداد رأسها}) = 30 - 60 + 20 = -10. \quad (1.5)$$

بنابراین، $D^1(K_5)$ رویه جهت‌پذیر بسته‌ای با گونای $g = 1 - 1/2\chi = 6$ است (شکل ۷). اینکه تمام حرکتهای ممکن دو روبان روی این گراف رویه‌ای با گونای شش به‌دست می‌دهد به هیچ‌وجه بدیهی نیست. حصول خیمه کمابیش تعجب‌آور است، اما حصول خیمه‌ای با گونای بزرگ‌تر از یک با این تصور شهودی که کل توپولوژی فضا «به‌طور موضعی» در پیکربندیهای حول هر رأس دیده می‌شود، در تضاد است.

روی A بنگارد و به ازای همه t ها، $0 \leq t \leq 1$ ، f_t هر نقطه A را ثابت نگاه دارد. تصویرهای f_t را می توان به عنوان تک تصویرهای یک فیلم در نظر گرفت که انقباض پیوسته X و تبدیل نهایی آن به A را نشان می دهد. استفاده از درون بریهای دگرذیسی راهی عالی برای ساده سازی فضا، بدون تغییر هیچ یک از خواص توپولوژیک اساسی فضا است (شاید به استثنای بعد، اما برای کاربرد فعلی، کاهش بعد فضای پیکربندی موهبت است). مهم ترین مفهوم اساسی در هم ارزی توپولوژیک، یعنی نوع هوموتوپیک، را می توان برحسب درون برد دگرذیسی تعریف کرد: می گوئیم دو فضای X و Y یک نوع هوموتوپیک دارند اگر و تنها اگر هر دو فضا درون برد دگرذیسی یک فضای «بزرگتر» Z باشند. نکته اساسی این است که $D^N(\Gamma)$ تا زمانی که گسسته سازی گراف Γ خیلی «زخمه» نباشد درون برد دگرذیسی $C^N(\Gamma)$ است. به عبارت دقیق تر

$$P = 1 + (Nk - 2N - k + 1) \frac{(N + k - 2)!}{(k - 1)!} \quad (1.6)$$

برقرار است. برای مثال توجه داشته باشید که $C^2(\Gamma_2)$ دقیقاً از یک طوقه تشکیل شده است، چنانکه شکلهای ۲ و ۴ [چپ] نیز مؤید آن است. شکل ۴ [راست] شاهد دیگری است بر صحت این رابطه، که درستی آن را در این حالت خواننده باید نشان دهد. با برجسب گذاری مجدد روبانها تقارنی از C^N (یعنی فضایی متقارن با C^N) به دست می آید. وجود این تقارنها علت رشد فاکتوریلی P برحسب N است. اگر فضاهای پیکربندی بدون برجسب گذاری در نظر گرفته شوند، آنگاه جمله دوم سمت راست رابطه (۱.۶) بر $N!$ تقسیم می شود.

شایان توجه است که مسأله کنترل روبانها روی گراف برای ۲ روبان نسبتاً شهودی است اما با افزایش تعداد روبانها، مسأله بیش از پیش پیچیده می شود، زیرا افزایش بعد به تنهایی سبب می شود تجسم بیشتر فضاهای پیکربندی تقریباً ناممکن شود. قضیه ۲، که طبق آن بعد ذاتی فضای پیکربندی مستقل از تعداد روبانهای روی گراف است، قضیه سودمندی است. در مورد گراف Γ_2 ، از قضیه ۲ نتیجه گرفته می شود که نقشه ای از مسیرهای یک بعدی وجود دارد که نمایش کاملی از فضای پیکربندی را به دست می دهد، یعنی تمام اطلاعات توپولوژیک را دربر دارد. چون اثبات قضیه ۲ اثباتی ساختنی است، می توان از الگوریتمهای متعارف تعیین کوتاه ترین مسیرها روی گراف استفاده کرد و برنامه ای کارا برای تعیین مسیر چند روبان روی Γ_k از طریق نقشه مذکور طرح کرد.

۷. نتیجه. کاربردهای فضاهای پیکربندی در مورد روبانها به هیچ وجه جدید نیستند. ایده های مربوط به این کاربردها را دانشمندان علوم رایانه، مهندسان و ریاضیدانان از دهه ۱۹۶۰ به بعد مطرح کرده اند. در مرجع [۵] شرح مقدماتی این موضوع آمده است. به علاوه، انواع گوناگونی از فضاهای پیکربندی به کرات در توپولوژی و فیزیک مطرح می شوند، مثلاً در مطالعه گروههای تافته [۳] یا پیوندهای مجرد [۱۳]، [۱۰] یا ناورداهای خمینه ها [۴].

در کاربردهایی که در آنها با چند روبان مستقل مواجهیم، جنبه سراسری (یا غیرموضعی) مسأله کنترل روبانهای که مقید به حرکت روی یک شبکه اند مشکل اصلی است. این طبیعت سراسری است که ما را به سودمندی نگاه از منظر توپولوژیک رهنمون می شود. در واقع تعیین فضاهای پیکربندی گرافها و

قضیه ۱ [۱]. به ازای هر $N > 1$ و هر گراف Γ با حداقل N رأس، $D^N(\Gamma)$ درون برد دگرذیسی $C^N(\Gamma)$ است اگر و تنها اگر

۱. هر مسیر واصل بین رأسهای متفاوت با درجه هایی مخالف دو از حداقل $N - 1$ یال بگذرد؛ و
 ۲. هر مسیر از یک رأس به خودش که ممکن نباشد با انقباض پیوسته در Γ به یک نقطه تبدیل شود از حداقل $N + 1$ یال عبور کند.
- (درجه هر رأس برابر است با تعداد یالهایی که به آن رأس متصل اند.)

به این ترتیب نتیجه می شود فضاهای $C^2(K_5)$ و $C^2(K_{3,3})$ با درون بری، دگرذیسی می یابند و به فضاهای پیکربندی گسسته مثالهای ۴ و ۵ تبدیل می شوند. این اطلاعات بی اندازه مفید است زیرا به دست آوردن فضای پیکربندی $C^2(K_5)$ به طور مستقیم آن قدر پیچیده است که تلاش برای آن بیهوده به نظر می آید. توجه داشته باشید که شرط دوم قضیه ۱ برای گسسته سازی $C^2(\odot)$ برقرار نیست. اما با اضافه کردن یک رأس، فضای پیکربندی گسسته ای که از لحاظ توپولوژیک مانند فضای اصلی است به دست می آید. گسسته سازی در مثالهای ۶ و ۷ آن قدر ظریف نیست که فضای حاصل از آن با فضای اصلی هم ارز باشد.

در عمل، بعد کوچک ترین زیرمجموعه ای که درون برد دگرذیسی فضای پیکربندی است کمیتی مهم است، زیرا ابعاد بزرگ، پیچیدگی کار محاسباتی لازم برای کنترل سیستم را بسیار افزایش می دهد. قضیه زیر نشان می دهد که بعد ذاتی فضای پیکربندی مستقل از تعداد روبانهای روی گراف است، و فقط به خواص گراف بستگی دارد.

قضیه ۲ [۷]. فرض کنیم Γ گرافنی است با V رأس که درجه هر رأس آن بزرگتر از ۲ است. درون برد دگرذیسی فضای $C^N(\Gamma)$ زیرمجموعه ای از $C^N(\Gamma)$ با بعد حداکثر V است.

مثال ۸. $C^N(\Gamma_k)$

درخت شعاعی k شاخه Γ_k را که k یال، $k > 2$ ، و $k + 1$ رأس دارد، و همه یالهای آن به یک رأس مرکزی وصل شده اند در نظر بگیرید. برای مثال

مراجع

1. A. Abrams, *Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs*, Ph. D. thesis, UC Berkeley, 2000.
2. A. Abrams, H. Landau, Z. Landau, J. Pommersheim, and E. Zaslow, Evasive random walks and the clairvoyant demon, to appear in *Random Structures & Algorithms*.
3. J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
4. R. Bott and C. Taubes, On the self-linking of knots: topology and physics, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 5247-5287.
5. J. Canny, *The Complexity of Robot Motion Planning*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
6. G. Castleberry, *The AGV Handbook*, Braun-Brumfield, Ann Arbor, MI, 1991.
7. R. Ghrist, Configuration spaces of graphs in robotics, in *Braids, Links, and Mapping Class Groups: the Proceedings of Joan Birman's 70th Birthday*, AMS/IP Studies in Mathematics, vol. 19, 2000, pp. 31-41; ArXiv preprint math.GT/9905023.
8. R. Christ and D. Koditschek, Safe cooperative robot dynamics via dynamics on graphs, in *Proceedings of the Eighth International Symposium on Robotics Research*, Y. Nakayama, ed., Springer-Verlag, New York, 1998, pp. 81-92.
9. R. Ghrist and D. Koditschek, Safe, cooperative robot dynamics on graphs, ArXiv preprint cs.RO/0002014.
10. M. Kapovich and J. J. Millson, The symplectic geometry of polygons in Euclidean space, *J. Differential Geom.* **44** (1996) 479-513.
11. D. Koditschek and E. Rimon, Robot navigation functions on manifolds with boundary, *Adv. in Appl. Math.* **11** (1990) 412-442.
12. J. C. Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Press, Boston, 1991.
13. K. Walker, *Configuration Spaces of Linkages*, Undergraduate thesis, Princeton University, 1985.

- Aaron Abrams and Robert Ghrist, "Finding topology in a factory: Configuration spaces", *Amer. Math. Monthly*, (2) **109** (2002) 140-150.

* آرون آبرامز، دانشگاه جورجیا، آمریکا

abrams@math.uga.edu

** رابرت گریست، مؤسسه فناوری جورجیا، آمریکا

ghrist@math.gatech.edu

ساده‌سازی آنها می‌تواند برای ارائه طرح‌های کنترلی عملی مورد استفاده قرار گیرد. برای ملاحظه چند مثال ساده مراجع [۸] و [۹] را ببینید.

از طرف دیگر، قابل توجه است که رده غنی فضاهای توپولوژیکی که در این مقاله معرفی کردیم عملاً مورد توجه واقع نشده بود تا اینکه مسائلی از دیگر حوزه‌ها باعث طرح این فضاها شد. این فضاها خواص عمیق‌تر زیادی دارند:

۱. به ازای هر گراف Γ ، فضای $C^N(\Gamma)$ فضای ایلنبرگ-مک‌لین از نوع $K(\pi, 1)$ است. یعنی تصویر هر نگاشت بی‌بسته‌ای را که نگاشتی از یک کره k به S^k ، $k > 1$ ، به فضای $C^N(\Gamma)$ باشد می‌توان در $C^N(\Gamma)$ به‌طور بی‌بسته منعقب کرد تا به یک نقطه تبدیل شود. چنین فضایی را گاه «ناگروی»^۱ می‌نامند.

۲. فضای پیکربندی گسسته ساختاری طبیعی دارد که ساختار مجتمع حجره‌مکعبی است (مجتمعی مرکب از حجره‌های مکعب‌گون). زیرا تمام حجره‌های آن حاصلضرب بازها هستند. در نتیجه می‌توان از الگوریتم‌های سریعی که اخیراً در مباحث مانستگي محاسباتی پیدا شده‌اند برای تعیین گروه‌های مانستگي و مولدهای آنها، در مسائل عملی استفاده کرد.

۳. با استفاده از اینکه ساختار $D^N(\Gamma)$ ساختار مجتمع حجره‌مکعبی است، می‌توان نشان داد $C^N(\Gamma)$ فضایی با خمیدگی نامشبه است، به این معنا که یک تابع متریک وجود دارد (با تعریف مناسب در نقاط غیرخمینه‌ای) که خمیدگی آن در هیچ نقطه‌ای مثبت نیست.

۴. گروه بنیادی $C^N(\Gamma)$ همواره بدون عنصر تاب است. به عبارت دیگر، اگر ممکن نباشد که طوقه مفروضی در $C^N(\Gamma)$ با انقباض به یک نقطه تبدیل شود، آنگاه هیچ مضربی از آن طوقه نیز ممکن نیست با انقباض به یک نقطه تبدیل شود. این خاصیت برای فضاهای پیکربندی $\mathbb{R}^2$ نیز درست است، اما برای $C^N(S^2)$ ، یعنی فضای حرکات روبات‌ها روی یک کره دوبعدی، درست نیست.

۵. «مسئله واژه» در گروه بنیادی $C^N(\Gamma)$ همیشه حل‌پذیر است، به این معنا که الگوریتمی وجود دارد که با استفاده از آن می‌توان تعیین کرد که آیا ممکن است طوقه مفروضی در $C^N(\Gamma)$ با انقباض به یک نقطه از $C^N(\Gamma)$ تبدیل شود یا نه.

۶. گروه بنیادی $C^N(\Gamma)$ مجهز به ساختار جبری گراف گروه‌ها روی گراف Γ است. این ساختار را می‌توان با «درهم آمیختن» (یا به‌طور جبری به هم چسباندن) اعضای یک خانواده از گروه‌های ساده‌تر، طبق الگویی که توسط Γ معین می‌شود، به‌دست آورد.

مثالهای ارائه‌شده در اینجا بسیاری از ویژگیهای نامشهود فضاهای توپولوژیک و گروه‌های بنیادی آنها را به روشنی نشان می‌دهند. حتی با استفاده از آنها می‌توان برای دانش‌آموزان دبیرستانی به آسانی توضیح داد که فضای پیکربندی روبات‌ها چیست (هر دو نویسنده این مقاله این کار را چندین بار با موفقیت انجام داده‌اند). با کمی اطلاعات مقدماتی، می‌توان اثبات این موضوع را که فضای پیکربندی دو روبات روی K_5 رویه‌ای با گونای شش است، به آسانی دریافت. این مثال نمونه بسیار خوبی است از توپولوژی نابدهی نهفته در دل بسیاری از محیط‌های جهان واقعی.

1. aspherical