«ریاضیات نظری»: تلفیق سنتهای فیزیک نظری و ریاضیات *

آرتر جفی و فرنک کویین**
ترجمهٔ سیامک کاظمی

مشخصهٔ اصلی ریاضیات جدید، استفاده از اثباتهای دقیق است. این کار که بی‌اغراق ثمرهٔ هزاران سال پالایش و پیرایش است، چنان روشنی و قابلیت اعتمادی به ریاضیات بخشیده است که هیچ علم دیگری از آن برخوردار نیست، ولی در عین حال، حرکت ریاضیات را کند و دشوار هم کرده است. می‌توان گفت که اثبات ریاضی در میان تمام فعالیتهای فکری بشر، سخت‌ترین و دقیقترین ضوابط را دارد.

گروهها و افرادی از جامعهٔ ریاضی گهگاه سعی کرده‌اند وسواس زیاد در مورد جزئیات استدلالها را کنار بگذارند. این گرایش، نتایج مختلف و گاه فاجعه‌باری داشته است. با این حال، امروز دوباره در بعضی از زمینه‌های ریاضی تمایلی پیدا شده که ریاضیات را بر استدلال شهودی، فارغ از اثبات، متکی سازند. این گرایش تا اندازه‌ای همان الگوی قدیمی تاریخ ریاضیات است که کسانی با آن آشنا نیستند، آن را تکرار می‌کنند. ولی در عین حال، ممکن است سرآغاز تغییرات بنیادی در نحوهٔ سازماندهی ریاضیات هم باشد. در هر حال، امروز ضروری است نقش اثبات در ادراک ریاضی دوباره بررسی شود و چارچوب مناسب و مفیدی برای این قبیل گرایشها ایجاد گردد.

صحبت خود را با بحثی دربارهٔ فیزیک شروع می‌کنیم زیرا اولاً گرایش و جنبش فعلی از ارتباط با فیزیک نظری ناشی می‌شود و ثانیاً با ملاحظهٔ وضعیت رشتهٔ فیزیک، مدل مفیدی از تقسیم کار در جامعهٔ علمی به دستمان می‌آید. سپس به سراغ تاریخ ریاضیات می‌رویم و مثالهایی می‌آوریم که فواید و مضرات تحقیقات نادقیق را نشان می‌دهند. و بالاخره، چارچوبی عرضه می‌کنیم که همزیستی روشها و رهیافتهای مختلف را امکان‌پذیر می‌کند.

نظریه و دقت

دانش ما از ساختارهای ریاضی معمولاً در دو مرحله کسب می‌شود. نخست بصیرتی شهودی به‌دست می‌آید، حدسی زده می‌شود، و طرحی فرضی برای توجیه آن پیشنهاد می‌شود. سپس حدس و فرضیه تصحیح می‌شود و با اثبات، از قابلیت اعتماد برخوردار می‌گردد. ما اصطلاح ریاضیات *نظری* را برای مرحلهٔ شهود و فرضیه‌پردازی به‌کار می‌بریم و اصطلاح ریاضیات دقیق را برای مرحلهٔ اثبات. دراینجا نمی‌خواهیم وارد بحث اصطلاحات شویم چون هدف اصلی ما این نیست ولی در شروع بحث، تعریف خودمان از نظریه و دقت را روشن می‌سازیم.

مراحل اولیهٔ اکتشاف ریاضی ــ یعنی کار شهودی و حدسی که مانند کار نظری در علوم تجربی است ــ شامل فرضیه‌پردازی دربارهٔ حقیقت اموری است که در خارج از حیطهٔ دانشِ تثبیت شده قرار دارند. بنابراین، صفت «نظری» را به همان معنایی که در فیزیک دارد، از فیزیک وام می‌گیریم. کلمهٔ «نظری» در ریاضیات معنایی قدیمیتری هم دارد که معادل «محض» در برابر «کاربردی» است. این کاربرد قدیمی دیگر رایج نیست و ما هم به آن کاری نداریم.

دستاورد نظری باید به وسیلهٔ آزمایش یا اثبات، تصحیح شود، پالایش یابد، و درستی آن محرز گردد. بنابراین ما ادعا می‌کنیم که نقش اثباتِ دقیق در ریاضیات عملاً شبیه نقش آزمایش در علوم طبیعی است. این ادعا ممکن است نامأنوس به‌نظر برسد ولی با قدری تأمل، دست کم برای ریاضیدانها روشن می‌شود. اثبات، دو هدف را برآورده می‌سازد. نخست اینکه راهی است برای کسب اطمینان از درستیِ یک ادعای ریاضی، و شبیه این نقش در علوم تجربی، برعهدهٔ تحقیقِ آزمایشگاهی است. دوم اینکه در جستجو برای یافتن اثبات، همانند تحقیق در آزمایشگاه، ضمناً بصیرتهای جدید و اطلاعات غیرمنتظرهٔ تازه‌ای نیز به دست می‌آوریم.

دسترسی ریاضیدان به واقعیت ریاضی از راه تجربه، حتی آسانتر از دسترسی فیزیکدان به واقعیت فیزیکی از همین راه است، و دلیل مدلسازی نیز همین است: پدیدهٔ فیزیکی را به وسیلهٔ یک مدل ریاضی تقریب می‌زنند و سپس مدل را به دقت مطالعه می‌کنند زیرا دسترسی به آن راحتتر است. این سهولت دسترسی، پیامدهایی نیز برای ریاضیات در سطح جامعهٔ علمی

داشته است. تقسیم‌بندی ریاضیات به شاخه‌های گوناگون بسیار دقیقتر از تقسیم‌بندی فیزیک است زیرا روشهای معمول در ریاضیات، بررسی و شناخت عمیقتری از موضوع را امکان‌پذیر ساخته است

گرچه کاربرد اثبات در ریاضیات عملاً شبیه آزمایش است، پیشنهاد ما این نیست که اثبات را ریاضیات «تجربی» بنامیم. این اصطلاح، کاربرد مناسب و کاملاً جاافتاده‌ای دارد و به محاسبات عددی و شبیه‌سازیهای کامپیوتری اطلاق می‌شود که در حکم آزمونهایی برای مفاهیم ریاضی هستند. در واقع، نتایج آزمایشهای کامپیوتری اغلب به شیوه‌ای عرضه می‌شوند که می‌توان آن را «نظری» نامید، یعنی براساس موارد آزمایشی و مقایسه، نتایجی کلی پیشنهاد می‌شوند. این نتیجه‌گیریها کاملاً قابل اعتماد نیستند، و در صورت کوشش برای دستیابی به اثباتهای واقعی، استثناها و محدودیتها رخ می‌نمایند.

تقسیم کار

در فیزیک، تقسیم کار بین نظریه‌پردازان و آزمایشگران [=فیزیکدانان نظری و تجربی] به‌رسمیت شناخته شده است. البته تا همین قرن اخیر چنین تفکیک واضحی وجود نداشت. جامعهٔ فیزیکدانان تا آغاز قرن بیستم اساساً یکپارچه بود. کمال مطلوب این بود که همان افرادی که نظریه‌پردازی می‌کنند، برای تأیید نظریهٔ خود دست به آزمایش هم بزنند، و در عمل نیز روی‌هم‌رفته همین‌طور بود.

در اروپا قطعاً تا سال ۱۹۰۰ معلوم شده بود که انشعابی رخ داده است: فیزیکدانانِ بسیاری بودند که توجهشان فقط معطوف به جنبهٔ نظری کارشان بود و تقسیم جامعهٔ فیزیکدانان به دو دستهٔ متمایز قابل تشخیص بود [۸]. این جریان در ایالات متحده با تأخیر همراه بود. فیزیکدانی به نام کمپل که در دانشگاه هاروارد در زمینهٔ نظریهٔ کوانتوم کار می‌کرد، اولین فرد آمریکایی به شمار می‌آید که در فیزیکِ کاملاً نظری درجهٔ دکتری گرفته است (هر چند رسالهٔ او که در ۱۹۱۷ عرضه شد شامل ضمیمه‌ای دربارهٔ آزمایش بود).

تمایز بین فیزیک نظری و تجربی را نباید به معنیِ استقلال این دو از یکدیگر دانست. نظریه برای آزمایشگران ضرورت دارد زیرا به کمک آن، آزمونهای قاطع را مشخص می‌کنند و داده‌ها را تعبیر می‌نمایند. آزمایش هم برای نظریه‌پردازان ضرورت دارد زیرا وسیلهٔ تصحیح فرضیه‌ها و هدایت فرضیه‌پردازی در مسیر مناسب است. گروههای «نظریه‌پرداز» و «آزمایشگر» نمی‌توانند پایدار و منشأ اثر باشند مگر اینکه همکاری نزدیکی با هم داشته باشند.

این تقسیم کار در فیزیک را با وضعیت موجود در ریاضیات مقایسه می‌کنیم. هنوز کمال مطلوب این است که همان ریاضیدانی که فرضیه‌ای دربارهٔ ساختارهای ریاضی می‌سازد، خودش با ارائهٔ اثبات دقیق، درستی فرضیه‌اش را محقق سازد، و در عمل هم روی‌هم‌رفته همین‌طور است. به عبارت دیگر، جامعهٔ ریاضی هنوز زیربارِ تجزیه به دو شاخهٔ نظری و دقیق نرفته است. فردِ ریاضیدان هم معمولاً پرداختن به ریاضیات نظری را کار مهم و مناسبی نمی‌داند.

تلاشهایی به عمل آمده تا فعالیت ریاضی نیز به این طریق تفکیک شود ولی بیشتر این تلاشها موفقیت‌آمیز نبوده است. چرا؟ آیا خود ریاضیات خصلتی دارد که مقایسهٔ آن را با فیزیک در این مورد نامعقول می‌سازد و از دو شاخه شدن جامعهٔ ریاضی پیشگیری می‌کند؟ آیا «ریاضیات نظری» در نهایت، چیزی تناقض‌آمیز است؟ و یا آیا اقدامات گذشته با اشتباهاتی همراه بوده که امروز می‌توان از آنها پرهیز کرد؟

روابط جدید با فیزیک

پیدایش رابطهٔ جدیدی بین ریاضیات و فیزیک، انگیزهٔ نیرومندی برای فرضیه‌پردازی در ریاضیات پدید آورده است. اخیراً جنب و جوشی در فیزیک در جهت فعالیتهای «ریاضی‌وار» زیر عناوینی چون «نظریهٔ ریسمان»، «نظریهٔ میدان همدیس»، «نظریهٔ میدان کوانتومی»، و «گرانش کوانتومی» به وجود آمده است. آغازگران این فعالیتها عمدتاً افرادی بوده‌اند که در فیزیکِ نظریِ انرژی بالا آموزش دیده‌اند. مشهورترین و تأثیر گذارترینِ آنها، ادوارد ویتن است.

از دیدگاه فیزیکی، بیشتر این تحقیقات هنوز به مرحله‌ای از پختگی نرسیده‌اند که متضمن پیش‌بینیهای قابل مشاهده‌ای دربارهٔ طبیعت باشند و به علاوه، اغلب با «مدلهای بازیچه‌ای» سر و کار دارند که فقط برای نمایش پدیده‌هایی مشابه با پدیده‌های واقعی طرح می‌شوند. بخشی از این پژوهشها هم که ممکن است به دنیای واقعی مربوط شوند، با چیزهایی سر و کار دارند که امکان آزمایش در مورد آنها وجود ندارد مانند ذراتی با انرژی باورنکردنی، حرکت در مقیاس عالم، یا خلق عالمهای جدید.

یک نتیجهٔ فقدان پیش‌بینی در این دستاوردهای نظری، قطع ارتباط این گونه فیزیکدانها با جامعهٔ آزمایشگران و دسترسی نداشتن به منبعی از داده‌های فیزیکی است که نظریه‌پردازی آنها را مقید سازد و به آنها الهام بخشد. چون پیشرفت در فیزیک از ارتباط متقابل نظریه و آزمایش حاصل می‌شود، یک گروه نظریه‌پرداز نمی‌تواند مدت زیادی در انزوا به کار خود ادامه دهد. در واقع، جریان غالب در جامعهٔ فیزیک به این دستاوردها با سوءظن می‌نگرد زیرا آنها را جدا از به اصطلاح «دنیای واقعی» می‌داند.

ولی این فیزیکدانها درواقع منزوی نیستند. آنها «آزمایشگران» جدیدی پیدا کرده‌اند که همان ریاضیدانها هستند. اکنون ریاضیدانها هستند که اطلاعات جدید و قابل اتکا را دربارهٔ ساختارهای مورد نظر آنها فراهم می‌کنند. این فیزیکدانها فرضیه‌های خود را غالباً خطاب به ریاضیدانان عرضه می‌کنند تا گروه اخیر به پژوهش «تجربی» دربارهٔ آنها بپردازند. مهمترین موفقیتهایی هم که به دست می‌آید، بصیرتها و دیدگاههای جدید در ریاضیات است نه در فیزیک. حاصل کار، کشف ذرهٔ جدیدی نیست بلکه مثلاً توصیف نمایشهای گروه منفرد «هیولا» با استفاده از عملگرهای رأسی در جبرهای کاتس–مودی است. چیزی که ایجاد می‌شود، نظریهٔ میدان فیزیکی تازه‌ای نیست بلکه نظرگاه تازه‌ای است در باب ناورداهای چندجمله‌ای گرهها و پیوندها در خمینه‌های سه‌بعدی با استفاده از انتگرالهای مسیری فاینمن یا نمایشهای گروههای کوانتومی.

اما سبک کار این فیزیکدانها هنوز همان سبک فرضیه‌ای و شهودیِ معمول در فیزیک نظری است. بسیاری از آنها نه آموزشی در زمینهٔ دقت ریاضی دیده‌اند و نه علاقه‌ای به آن دارند. کار آنها در واقع ریاضیات «نظری» است. عده‌ای از ریاضیدانان ارشد این شیوهٔ کار را تحسین کرده‌اند و پیشنهاد داده‌اند که سرمشق قرار گیرد، و برخی از دنباله‌روان آنها هم به سمتِ در پیش گرفتن این سبک حرکت کرده‌اند.

از این بحث می‌توان نتیجه گرفت که بخشهایی از ریاضیات بر اثر این نوع تقسیم کار به پیش رانده شده است. ناگهان عده‌ای نظریه‌پرداز بسیار فعال در این زمینه‌ها پیدا شده‌اند که فیزیکدان نظری هستند، و گروهی از

ریاضیدانان سنتی هم با ارائهٔ اثباتهای دقیق، برای نظریه‌های گروه اول تأیید و توجیه فراهم می‌کنند.

ولی همراه با این جریان، معیارها و ضوابط اجتماعی لازم برای پایداری این نظام جدید پدید نیامده است. بدون پیدایش و پذیرش این گونه «ارزشهای خانوادگی» رابطهٔ جدید بین ریاضیات و فیزیک ممکن است کاملاً گسیخته شود. در این صورت، فیزیکدانها به سوی همکاران سنتی خود برخواهند گشت و ریاضیدانان دقیق هم با انبوه اشکالاتی که باید رفع کنند، تنها خواهند ماند؛ و ریاضیدانانی هم که از فیزیکدانها الگو گرفته و به شیوهٔ نظری‌تری کار می‌کنند، با بی‌اعتنایی مواجه خواهند شد. برای درک بهتر موضوع، نخست نگاهی به گذشته می‌افکنیم.

روابط قدیم با فیزیک

تأثیر گسترده و پربار فیزیک و ریاضی بریکدیگر، قبل از آنکه این دو مبحث دو رشتهٔ جداگانه به حساب آیند آغاز شده است. شاخه‌ای از ریاضیات که متکی بر هر دو رشته است، معمولاً فیزیک ریاضی نامیده می‌شود ولی ارائهٔ تعریف دقیقی برای آن غیر ممکن است. به خصوص در طی حدود نود سال گذشته مکتبی در فیزیک ریاضی با رهبری و هدایت افرادی نظیر هیلبرت، کلاین، پوانکاره، بورن و بعدها وایل، فون نویمان، ویگنر، کانس، وایتمن، یوست، وهاگ، که هم در فیزیک و هم در ریاضیات آموزش دیده بودند، پدید آمده است. این افراد بسیاری از اوقات در مسائلی تحقیق می‌کردند که از فیزیک نشأت گرفته بود ولی به سنتها و ارزشهای ریاضی هم پایبند بودند.

نتایج حاصل از این مکتب در زمانهای مختلفی هم در فیزیک و هم در ریاضیات سودمند واقع شده است. تکوین این نتایج، که اهمیت دراز مدت دارند، با گامهای کند ولی مطمئن انجام شده است. اگر بخواهیم در این زمینه فقط چند مثال جدید (از میان مثالهای بسیار) بیاوریم، می‌توانیم این موارد را نام ببریم: تحقیق دربارهٔ وجود نظریهٔ میدان کوانتومی و سازگاری آن با نسبیت، کار لیب و باکستر در زمینهٔ مدلهای شبکه‌ای و ماتریسهای انتقال وابسته، کار شوئن و یائو دربارهٔ قضیهٔ انرژی مثبت در نسبیت و رابطه‌اش با هندسهٔ رویه‌های مینیمال، کار روئل و دیگران در زمینهٔ دستگاههای دینامیکی و تلاطم، رهیافت میتنی بر جبر عملگرها به نظریهٔ کوانتومی موضعی، و علاقهٔ اولیهٔ کُن به فیزیک که پژوهش ریاضی او دربارهٔ فاکتورها و سپس بنیانگذاری هندسهٔ غیر جابه‌جایی از آنجا نشأت گرفت.

ولی در اینجا نکتهٔ اصلی، چیزی است که روی *نداده* است. مشخصهٔ آثار متعلق به این مکتب رعایت موازین آکادمیک و آگاهی از دانش موجود است به شیوه‌ای سازگار با بهترین سنتهای ریاضیات. در این رشته، ابهامی در مورد تعریفها، صورت ادعاها، یا اثبات قضایا وجود ندارد. این نوع ریاضیات، ریاضیات دقیق به مفهوم سنتی آن است و علی‌رغم مجاورت آن با فیزیک، ارزشهای سنتی ریاضیات در آن حفظ شده است. متخصصان فیزیک ریاضی به گنجینهٔ غنی و پرباری از حدس و فرضیه دسترسی دارند که به وسیلهٔ فیزیکدانان نظری عرضه شده است ولی مخاطب این فرضیه‌ها، طبق سنت، فیزیکدانها بوده‌اند نه ریاضیدانان.

فرهنگ حاکم بر فیزیک نظری و فیزیک ریاضی تا اندازه‌ای متفاوت است و اغلب کشمکشی بین آنها وجود دارد. پژوهش نظری در فیزیک لازم نیست شامل «درستی آزمایی» یا اثبات باشد زیرا بررسی انطباق با واقعیت را می‌توان به آزمایش محول کرد. بنابراین، جامعهٔ فیزیکدانان اثبات را به این عنوان که جزء ضروریِ کار نظری نیست، خوار می‌شمارد. ریچارد فاینمن دوست داشت به خاطر اکراه ریاضیدانان از کاربرد روشهایی که «کارساز»ند ولی نمی‌توان آنها را به‌دقت توجیه کرد، سربه‌سر آنها بگذارد ([۴] و [۷]). به‌نظر او کاملاً قابل قبول بود که برای آزمودن احکام ریاضی، درستی آنها فقط درچند مورد که خوب انتخاب شده باشند، بررسی شود.

در جناح ریاضی، زمانی مک شین شیوهٔ «استدلال فیزیکی» را به شیوهٔ استدلال شخصی تشبیه کرد که می‌تواند سلسلهٔ انسابش را صرفنظر از دو حلقهٔ گمشده به ویلیام فاتح برساند! و غالب ریاضیدانها هم همین طور فکر می‌کردند. این نظر در میان آنها رواج داشت که آهنگ، تکامل موضوعات فیزیک ریاضی باید تابع مقتضیات درونی آنها باشد و نه تحت تأثیر وسعت دید فیزیکدانها. مک شین و بیشتر اعضای جامعهٔ فیزیک ریاضی، رهیافت نظریِ نامقید را نامناسب می‌دانستند و قبول نداشتند.

نکتهٔ شایان ذکر این است که بیشتر فیزیکدانان نظری برای همکاران آزمایشگر خود احترام زیادی قائل‌اند. روابط فیزیک و ریاضیات هم در صورتی بسیار بهتر خواهد شد که فیزیکدانان به ریاضیدانان به چشم «آزمایشگران فکری» بنگرند نه نظریه‌پردازان وسواسی. دیدگاه معمول فیزیکدانان نسبت به ریاضیدانها با ملاحظهٔ جملاتی از کتاب اندرسن [۱] روشن می‌شود: «ما در اینجا دربارهٔ فیزیک نظری صحبت می‌کنیم و بنابراین، رعایت دقت ریاضی مسلماً در اینجا نه مطرح است و نه ممکن[۱]». ولی در واقع، این دقت درست به اندازهٔ داده‌های آزمایشی مطرح و ممکن است و مانند آن داده‌ها تا جایی که می‌توان، باید از آن استفاده کرد. اما به دانشجویان فیزیک معمولاً افکار ضد ریاضی القا می‌شود و وقتی آنها با مسائل ریاضی درگیر می‌شوند نه تنها تمایل به این دارند که «نظری» کار کنند، بلکه اغلب انکار می‌کنند که کارشان ناقص است.

البته جنبهٔ ریاضی همهٔ قسمتهای فیزیک ریاضی به اندازهٔ آنهایی که در بالا برشمردیم، واضح نیست. مثلاً کار زیمانتسیک، متخصص آلمانی در فیزیک ریاضی، بیشتر جنبهٔ نظری داشت، ولی او خیلی مواظب بود که ادعاهای ناموجهی در مورد دقت ریاضی آن مطرح نکند و در واقع در سال ۱۹۶۸ تلاشی جدی به عمل آورد که بخش مهمی از برنامهٔ نظریش را با همکاری واردان به‌طور دقیق ثابت کند. این هدف سالها بعد به وسیلهٔ نلسن، اوسترووالدر، شریدر، و دیگران تحقق یافت و پیامدهای گسترده‌ای داشت که نظریهٔ کوانتومی، احتمال، و مکانیک آماری را به هم مربوط می‌ساخت.

همچنین از دو نفر دیگر یاد می‌کنیم که برای مدتی مسائلی عمدتاً ریاضی را از دیدگاه نظریِ کاملاً متفاوتی بررسی می‌کردند: مندلبروت، وفایگن‌باوم. برای ملاحظهٔ شرحی عامه‌فهم از کار آنها به [۶] و [۷] و برای مطالعهٔ شرح دردسرهای ریاضی این کار به [۱۱] مراجعه کنید.

جریان غالب در فیزیک ریاضی، کار کاملاً نظری را معمولاً قبول نداشته و آن را از لحاظ ریاضی موجه نمی‌دانسته است. ولی ملاحظه می‌کنیم ریاضیدانانی که درگیر «روابط جدید» با فیزیک هستند، با متخصصان

---

۱ . اندرسن این جمله را به نقل از لانداو می‌آورد [۱، ص ۱۳۲] و ادامه می‌دهد: «این عین گفتهٔ او نیست ولی خیلی به آن نزدیک است.» به هر حال، همان‌طور که از این توضیح پیداست، وی مطلب را به دقت نقل نکرده است؛ اصل گفتهٔ لانداو چنین است [۱۲]: در این بحث، کوششی برای دقت ریاضی به عمل نیامده زیرا در فیزیک نظری، اطمینان حاصل از چنین دقتی، توهمی بیش نیست.

سنتی فیزیک ریاضی فرق می‌کنند. عده‌ای از هندسه‌دانان، توپولوژیدانان، و کسانی که در نظریهٔ نمایش کار می‌کنند، شروع به گفتگو و همکاری با فیزیکدانان کرده‌اند. ولی این ریاضیدانها هنوز با تفاوتهای فرهنگی دو رشته زیاد برخورد نکرده و در مجموع، در تجربهٔ جمعی خود آنقدر با موارد مشابه روبه‌رو نشده‌اند که حساسیتشان نسبت به خطرهای کار نظری برانگیخته شود. بنابراین، سؤالی مطرح می‌شود: آیا وقتی اینها هم تجربهٔ بیشتری پیدا کنند، نظریه‌پردازیِ صرف را مردود خواهند دانست؟

نمونه‌های کامیابی

حال به تجربه‌هایی می‌پردازیم که در ریاضیات در زمینهٔ کار نظری شده‌است و نخست از موارد موفقیت‌آمیز یاد می‌کنیم. در پیش نهادن حدس، واضحترین نمونه از آن نوع فعالیت ریاضی است که شامل اثبات نیست. حدسها انواع مختلفی از درخشان تا کسالت‌آور و از غیرممکن تا بدیهی دارند. ماندگاری حدسها به میزان توجه و علاقه‌ای که برمی‌انگیزانند بستگی دارد نه به‌نظر ویراستاران و داوران مجله‌ها. حدسهای بهتر باعث رشد و تکامل حوزه‌هایی از ریاضیات شده‌اند. برخی از مشهورترین مثالهایی که می‌توان از این گونه حدسها آورد، فرضیهٔ ریمان، «قضیهٔ آخر» فرما، و حدس پوانکاره است. فهرست مسائل هیلبرت که از وسعت و عمق حیرت‌انگیزی برخوردار است، در رشد ریاضیات قرن بیستم بسیار مؤثر بوده است. مثالهای دیگر، حدس آدمز در توپولوژی، چند «پرسش» معروف سر، حدس نوویکوف، و اصول موضوع وایتمن برای نظریهٔ میدان کوانتومی هستند.

بعضی از حدسها با جزئیات فنی یا پیشنهادی برای اثبات همراه‌اند. مثلاً، «حدسهای ویل» شامل طرحی برای دست‌یابی به مشابه pآدیکِ فرضیهٔ ریمان بود. اجرای این برنامه به وسیلهٔ گروتندیک و دُلین، دستاورد مهمی برای هندسهٔ جبری تلقی شد. مورد مشهور دیگر، اثبات فالتینگس از حدس موردل است که بخشی از برنامهٔ دست‌یابی به «قضیهٔ» فرما قلمداد شد. «برنامهٔ لنگ‌لندز» برای درک صورتهای خودریخت، محرّک عمده‌ای برای پژوهش در آن زمینه بوده است و «برنامهٔ موری[1]» برای تحقیق در سه‌لایی‌های جبری، این مبحث را تقویت کرده است. رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی با اجرای برنامه‌ای تحقق یافت که گرونستاین تدارک دیده بود.

خصوصیت مشترک این مثالها این است که صراحتاً به صورت فرضیه بیان و عرضه شده‌اند (و یا دست کم، مانند مورد فرما، پس از مدت کوتاهی معلوم شده که جنبهٔ حدسی دارند). هر یک از این حدسها در واقع مشخص کنندهٔ هدفی بوده است که باید برای رسیدن به آن کارهایی انجام شود، و امتیاز و افتخار اصلی به کسی تعلق می‌گرفته که اثباتی برای آن بیابد.

نوع دیگری از کارِ ریاضی، بین تحقیق به روش سنتی و کار نظری قرار دارد و طبق این الگوست که «اگر A درست باشد، آنگاه X، Y، و Z نتیجه می‌شوند» یا «اگر A، آنگاه منطقی است که حدس بزنیم R، S، و T». در اینجا «A» ممکن است یک حدس برجستهٔ ریاضی، از قبیل فرضیهٔ ریمان باشد. مثال تازهٔ چشمگیری از این سبک تحقیق، در نظریهٔ موتیفها[2] مشاهده می‌شود، و اخیراً یک سمینار بورباکی تماماً به پژوهشهایی در نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری براساس حدسهای دلین[3] و بیلینسن اختصاص یافت. جالب اینجاست که بورباکی که زمانی پایگاه محافظه‌کارانه‌ترین نوع ریاضیات سنتی بود اکنون انبوهی از حدسها را مورد توجه و بررسی قرار می‌دهد.

اهمیت پژوهشهای بزرگ مقیاسی که بر اساس فرمولبندی هدف انجام می‌گیرند (وضرورتاً نظری‌اند) روبه فزونی است. ما در عصرِ «علم بزرگ مقیاس» به سر می‌بریم، و ریاضیات هم استثنا نیست. مثلاً برآورد می‌شود که دربارهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی ۱۵۰۰۰ صفحه مطلب در مجله‌ها چاپ شده است. در علوم دیگر، برای پاسخگویی به این جریان، گروههای رسمی بزرگ از پژوهشگران تشکیل می‌شود.

بنیاد ملی علوم[1] آمریکا و نهادهای دولتی سایر کشورها کوشیده‌اند ریاضیدانان را به پژوهشهای دسته جمعی در موضوعات مشترک بین چند رشته سوق دهند. ولی باید قبول کرد که پروژه‌های بزرگ در ریاضیات حول محور یک بورس تحقیقاتی، یک تکنیک، یا یک دستگاه آزمایشگاهی انجام نمی‌شوند بلکه به وسیلهٔ گروههای غیررسمی انجام می‌شوند که حول یک برنامهٔ نظری باندپروازانه فعالیت می‌کنند. مثلاً در کوشش برای رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، برنامه را دانیل گورنستاین طرح و سرپرستی کرد. وی مسأله را به اجزائی تقسیم کرد و حل هر جزء را به یک «تیم» غیررسمی واگذاشت. گسترش این گونه فعالیتهای ریاضیِ بزرگ‌مقیاس در آینده فقط در صورتی ممکن است که این گونه برنامه‌های باندپروازانه افزایش یابند.

نمونه‌های ناکامی

بیشتر کارهایی که در ریاضیات نظری انجام شده، به اندازهٔ مواردی که در بالا برشمردیم مثبت و سازنده نبوده است. این موضوع به خصوص در مواردی صادق است که مطلبی نادرست یا حدسی به صورتی عرضه می‌شده که گویا قطعی و مؤثق است، و عرضهٔ کنندهٔ آن مدعی امتیاز برای کار خود می‌شده است. این امر گاه «اشتباهی صادقانه» بوده است، و گاه نتیجهٔ برداشتهای نامتعارف از مفهوم اثبات. اشتباهات سر راست، کمتر زیان آورند. مثلاً «لم دن» در مورد قرصهای دوبعدی در خمینه‌های سه بعدی در سال ۱۹۱۰ عرضه شد. خطایی در آن پیدا شد، و زمانی که (به وسیلهٔ پاپاکیریا کوپولیس در ۱۹۵۷) اثبات شد، حدس مهمی به شمار می‌رفت.

ضعف معیارهای اثبات، اشکال بیشتری پدید می‌آورد. در قرن هیجدهم، استدلالهای نادقیق، مشکلات زیادی در آنالیز در مورد موضوعاتی از قبیل همگرایی سریها و همگرایی یکنواخت پدید آورد. دقت، به عنوان راه چاره پیشنهاد شد، و علی‌رغم اعتراضات برخی از نظریه‌پردازان سرانجام برای اجتناب از خسارات و لطمات عظیم پذیرفته شد.

در دوره‌ای متأخرتر، در همین قرن بیستم، «مکتب ایتالیایی» هندسهٔ جبری هم از آسیب جدی در امان نماند و پس از آنکه در طول یک نسل فرضیه‌های درخشانی ارائه داد، رو به اضمحلال رفت. برای ملاحظهٔ بحثهایی دربارهٔ مشکلات این مکتب و تلاشهای طولانی که برای بهبود آن انجام شد، به [۳] و [۱۰] مراجعه کنید. در سال ۱۹۴۶ هنوز با چنان سوءظنی به این مکتب می‌نگریستند که ویل لازم دید از علاقهٔ خود به آن دفاع کند؛ مقدمهٔ مرجع [۱۴] را ببینید.

تاریخ توپولوژی جبری و دیفرانسیل شاهد چند نمونه از کارهایی است، که پیش از حد، نظری بوده‌اند. دیودونه در تاریخ خود [۲]، اثر پوانکاره با عنوان *تحلیل جا*[1] را که در ۱۸۹۵ انتشار یافت، سرآغاز توپولوژی می‌داند. این «مقالهٔ

1. Mori 2. motifs 3. Deligne

1. National Science Foundation 1. *Analysis Situs*

جذاب و مستأصل کننده» فوق‌العاده شهودی بود و علی‌رغم اهمیت آشکار آن، پانزده یا بیست سال طول کشید تا این موضوع واقعاً پرداخته شود. دیودونه از این کندیِ حرکت ابراز شگفتی می‌کند[۲،ص ۳۶] ولی به نظر می‌رسد که این امر، نتیجهٔ تقریباً اجتناب‌ناپذیر نحوهٔ شروع بوده است: پوانکاره در مقالهٔ خود ادعاهای زیادی مطرح کرده و کمتر به اثبات پرداخته بود؛ و روشهای «بی‌پروا»ی او قابل تقلید نبود. حاصل کار، مبحث راکد و بیحرکتی بود که باید سروسامانی می‌گرفت تا بتواند سربرآورد.

دیودونه می‌گوید که، استدلال نادقیق و بی اسلوب، بیماری دوران کودکی مباحث ریاضی است و ادامه می‌دهد «پس از ۱۹۱۰، همگان معیارهای یکنواختی را دربارهٔ اثبات صحیح در توپولوژی پذیرفتند. ... و این معیارها از آن زمان تاکنون بی‌تغییر مانده است.» ولی واقعیت این است که موارد متعدد دیگری نیز از کارِ نادقیق در این زمینه وجود داشته است. کار اولیهٔ رنه توم دربارهٔ خمینه‌های دیفرانسیلپذیر، که به خاطر آن مدال فیلدز گرفت، درخشان و به طورکلی محکم و استوار بود. ولی کار بعدی او دربارهٔ نقاط تکین، از چنان صلابتی برخوردار نبود. ادعای او مبنی بر C^{∞}- چگال بودن نگاشتهایی که از نظر توپولوژیک پایدارند، با طرحی مشروح ولی ناقص همراه بود که بعداً به وسیلهٔ جان مَذِر اصلاح شد. سپس توم استفاده از «نظریهٔ فاجعه»، مبتنی بر نقاط تکین، را برای تبیین اشکالی از پدیده‌های فیزیکی پیشنهاد کرد. این کاربرد از لحاظ ریاضی، نظری محسوب می‌شد و شکل ساده شده و عامه فهم آن‌که به وسیلهٔ زیمان ارائه شد، از نظر فیزیکی بحث‌انگیز و قابل تردید بود.

مثال دیگر، کار اولیهٔ دنیس ساليوان است که سرآغازی محکم و استوار داشت و در دههٔ ۱۹۷۰ به تجسساتی در توپولوژی خمینه‌ها انجامید که درخشان و تحسین برانگیز بود ولی ماهیت نظری داشت. جزئیات استدلال سست و ضعیف بود و تلاشهایی جدی که برای رفع اشکالات آن به عمل آمد، نتیجه‌ای نداشت. خود ساليوان رشته‌اش را تغییر داد و رهیافت دقیقتری هم در پیش گرفت. در این زمینه هنوز اثباتهای مبهم فراوان است.

«قضیهٔ هندسی‌سازی» ویلیام ترستن دربارهٔ ساختارهایی روی خمینه‌های سه‌بعدی هاکن، مثال دیگری است که اغلب ذکر می‌شود. وی نظریه‌ای پرشکوه با اشارات و نکاتی زیبا ولی ناکافی ارائه کرد و اثبات کامل آن را هیچگاه انتشار نداد. برای بسیاری از پژوهشگران، این ادعای تحقق‌نیافته به‌جای اینکه منبع الهام باشد، مانع حرکت است.

در این مثالها، مانند مثال پوانکاره، فرضیه‌های پیشنهادشده درست به نظر می‌رسند. ولی مسلماً در مواردی دیده شده که فرضیه‌ها هم خالی از نقص نبوده‌اند. مسأله این است که حتی در بهترین حالتها هم آثار و نتایج جنبی نامطلوبی مشاهده شده که ممکن است قابل‌اجتناب بوده باشد. همچنین می‌بینیم که وقتی ویتن می‌خواست توصیفی از یک تعمیم چندجمله‌ای جونز براساس حدس و فرضیه ارائه کند [۱۵] طبق سنتی قدیمی و مشکل‌آفرین (حتی در توپولوژی) عمل می‌کرد.

کار نظری در بعضی از شاخه‌های مکتب ریاضیات روسی هم سنت قوی و رایجی است و معمولاً در اطلاعیه‌های پژوهشی شتابزده متجلی می‌شود. از میان مثالهای متعددی که در این مورد می‌توان آورد، ما دو مثال را ذکر می‌کنیم. اولی مربوط است به نظریهٔ اختلال سیستمهای همیلتنی انتگرال‌پذیر با فضای فازی که به‌وسیلهٔ چنبره‌های ناوردا برگبندی شده است. در سال ۱۹۵۴، کولموگوروف اعلام کرد که چنبره‌هایی با فرکانسهای غیرتشدیدی از اختلال جان به در می‌برند، و طرحی برای برهان نیز عرضه کرد. اگر با معلومات امروز دوباره به این طرح بنگریم، ممکن است به‌نظر برسد که در آن به مفاهیم مهم و لازم اشاره شده است، ولی در آن زمان تصور عمومی این بود که طرح مزبور برای اینکه اثباتی براساس آن ساخته شود، کافی نیست. اثبات کامل این موضوع برای حالت تحلیلی در ۱۹۵۹ به‌وسیلهٔ آرنولد و برای حالت هموار در ۱۹۶۲ به‌وسیلهٔ موزر به‌دست آمد.

مورد دوم، موردی است که یکی از نویسندگان این مقاله وقتی تلاش می‌کرد حکمی را اثبات کند، شخصاً درگیر آن شد. این حکم که خیلیها حدس می‌زدند درست باشد، این بود که در نظریهٔ میدان کوانتومی (نسبیتی)، گذار فاز روی می‌دهد. در سال ۱۹۷۳ دو ریاضیدان معروف، دوبروشین و میلنوس، اثبات این حکم را اعلام کردند. پس از دو سال که هیچ نشانه‌ای دایر بر اثبات آن از جانب روسها ارائه نشد، گلیم، جفی و اسینسر کار خود را بر روی این مسأله از سر گرفتند و سرانجام دو اثبات متفاوت برای آن عرضه کردند. دو سال بعد، دوبروشین و میلنوس، اطلاعیهٔ اول خود را پس گرفتند.

مشکلات

در مشکلاتی که در این نمونه‌ها ملاحظه کردید، الگوهایی دیده می‌شود که نخست بعضی از آنها را ذکر می‌کنیم و سپس به تفصیل دربارهٔ آنها بحث می‌کنیم.

(۱) کار نظری اگر [از محدودهٔ مطالب اثبات شده] خیلی دور شود، به بیراهه می‌رود زیرا از واکنش لازم و تصحیحاتی که به‌وسیلهٔ اثبات دقیق اعمال می‌گردد، محروم می‌شود.

(۲) ادامهٔ تحقیقات [در زمینهٔ یک دستاورد نظری] با تشویش و سردرگمی همراه است چون قطعی نیست که کدام قسمتهای آن قابل‌اعتماد است.

(۳) وقتی نظریه‌پرداز پرحرارتی مدعی کسب امتیاز کامل در یک زمینه است، آن زمینه تبدیل به مبحثی راکد می‌شود چون هیچ‌کس چندان انگیزه‌ای ندارد که اشکالات به‌جا مانده را رفع کند و راه را برای پیشروی هموار سازد.

(۴) دانشجویان و پژوهشگران جوان گمراه می‌شوند.

مشکل اول اغلب گریبانگیر جوانانی می‌شود که می‌خواهند نظریه‌پرداز ریاضی بشوند، به‌خصوص اگر این افراد علاقه‌ای به درک این موضوع نداشته باشند که کار آنها غیرقطعی و ناقص است. حتی در فیزیک نظری که آگاهی نسبت به این موضوع وجود دارد، تشخیص اینکه کجا باید توقف کرد، کار دشوار و ظریفی است که نیاز به مهارت بسیار دارد. نظریه‌بافی غلط به اعتبار نظریه‌پرداز آسیب می‌رساند و ممکن است به خود رشته هم از طریق مکانیسمی که در تشریح مشکل دوم مشخص می‌شود زیان وارد کند.

مشکل دوم به عدم‌قطعیت مطالب انتشاریافته مربوط می‌شود. در مقایسه با علوم دیگر، متون اصلی ریاضی فوق‌العاده مؤثق و قابل‌اعتمادند. مقالات داوری شده که در مجلات عمدهٔ ریاضی چاپ می‌شوند، تقریباً همگی درست و دقیق‌اند و این امر، پیشرفت مستمر و مؤثر را امکان‌پذیر می‌سازد. حتی اگر اندکی خطای جدی در متون منتشرشده وجود می‌داشت، ریاضیدانها وادار می‌شدند بسیار بیشتر از آنچه امروز معمول است، برای بررسی متنها وقت و انرژی صرف کنند. فواید متون مؤثق آنقدر جدی و اساسی است که به گمان ما نیروی محرک اصلی در کشاندن ریاضیات به سمت دقت است.

وقتی با متنهایی سروکار داریم که درستی آنها قطعی نیست، این

قطعی‌نبودن مسأله‌ای است که باید به آن توجه کرد. در این مورد اغلب بنا به تجربه و عادت عمل می‌کنند. مثلاً ریاضیدانها همهٔ مقالاتی را که در مجلات فیزیک چاپ می‌شوند، نظری می‌پندارند. دامنهٔ این سوءظن به مجلات فیزیک ریاضی نیز که مقالات آنها عموماً قابل‌اعتمادند کشیده شده است. ضابطهٔ بسیار رایج دیگر این است که هر مطلبی که در آن از انتگرالهای تابعی استفاده شده باشد حتماً جنبهٔ فرضیه دارد. یکی از نویسندگان این مقاله در جایی [۹] به مشکلاتی اشاره کرده است که این ضابطه برای ریاضیدانانی که می‌خواهند از این تکنیک در موارد موجه استفاده کنند، به‌وجود آورده است. این‌گونه ضابطه‌ها رضایت‌بخش نیستند، همچنانکه استفاده از اصل هشدار به خریدار[۱] و اینکه دربارهٔ هر مقاله جداگانه قضاوت شود، کارساز نیست. طرفداران این دیدگاه از مقالات ویتن به‌عنوان نمونه‌های موفق یاد می‌کنند؛ البته اگر با معدودی مقاله سروکار داشته باشیم، می‌توان آنها را بررسی کرد اما اگر تعداد این‌گونه مقالات زیاد باشد، فاجعه به‌بار می‌آید. این قاعده هم معمول شده است که هر مقالهٔ ویتن را نظری به‌حساب می‌آورند. چنین دیدگاهی از قدر و منزلت آثار او می‌کاهد ولی نشان می‌دهد که جریان غالب در جامعهٔ ریاضی مایل است در مواردی که تردیدهایی وجود دارد، اصل «کار از محکم‌کاری عیب نمی‌کند» را به‌کار بندد.

این عدم‌قطعیت، مشکلی در فیزیک نظری به‌شمار می‌رود؛ متون اصلی این رشته اغلب پس از مدتی چنان بی‌اعتبار به‌نظر می‌رسند که باید به‌کلی کنار گذاشته شوند. سینگر، متون فیزیک را به تخته سیاهی تشبیه کرده که باید متناوباً پاک شود. فیزیکدانها [نسبت به ریاضیدانها] معمولاً فایدهٔ بسیار کمتری از بررسی زمینهٔ تاریخی یک مسأله به‌دست می‌آورند و علاقهٔ کمتری به جستجو در متون دارند. نیم‌عمر ارجاع به مقاله‌های فیزیک خیلی کوتاهتر از مقاله‌های ریاضی است.

مشکل «مبحث راکد» از مسألهٔ امتیاز و پاداش کار ناشی می‌شود. طبق سنت، پژوهشگران ریاضی برای یک نتیجهٔ واحد، دوبار امتیاز نمی‌دهند. در نتیجه، وقتی یک نظریه‌پرداز مدعی امتیاز است، برای شخص اثبات‌کننده توجیه زحمتی که باید بکشد تا آن فرضیه به‌صورت مطمئن و قابل‌اعتماد درآید، دشوار است. فرق زیادی بین «رفع نواقص قضیهٔ فلان کس» و «اثبات حدس فلان کس» وجود دارد. ریاضیدانان اثبات‌کننده دوست دارند روی مطلبی کار کنند که کسی مدعی امتیاز آن نباشد. معمولاً نواقص فرضیه مدتها بعد و بااستفاده از تکنیکها و نتایجی رفع می‌شود که بر اثر تحقیق در مباحث جداگانه‌ای به‌دست می‌آیند، مباحثی که در آنها کسی مدعی امتیاز نشده است.

و نکتهٔ آخر اینکه، نظریه‌پردازان موفق (دست‌کم در ریاضیات) سوابقی در کار دقیق و منظم دارند که منبع شم و شهود آنهاست. بیشتر دانشجویانی که سعی می‌کنند بدون داشتن چنین سوابقی خود را مستقیماً به دنیای پرهیجان نظریه‌پردازی بیفکنند، ناموفق‌اند. اگر دانشجو تفاوت این دو نوع فعالیت را تشخیص ندهد ممکن است کارش به تقلید از تحقیقات پرهیجانتر و بی‌قیدانه‌تر کشانده شود و حاصل آن چیزی جز لفاظی نباشد.

ریاضیدانها بیشتر به محتوای علمی [رشتهٔ خود] توجه دارند و اهمیت مسائل اجتماعی و جامعهٔ ریاضیدانان را نادیده می‌گیرند. ولی مسلماً ما اعضای یک جامعه [و تحت تأثیر آن] هستیم و حتی نظریات ما دربارهٔ موضوعات فنی مستقیماً از متون نشأت نمی‌گیرد بلکه از ارتباطات اجتماعی ناشی می‌شود. قراردادهایی که در جامعهٔ ریاضیدانان پذیرفته شده، در استنباط ما از مطالبی که می‌خوانیم نقش حیاتی دارد. رفتار اجتماعی مهم است و جامعهٔ ما از رفتار نامناسب آسیب می‌بیند.

رهنمودها

جامعهٔ ریاضی معیارهای دقیقی برای اثبات و ضابطه‌هایی پدید آورده است که مانعی در برابر فرضیه‌پردازی است. این معیارها، مکانیسمهای ایمنی در برابر پیامدهای تخریبی فرضیه‌پردازی و بازتاب این تجربهٔ جامعهٔ ریاضی هستند که زیانهای این کار بیشتر از فواید آن است. ولی دیده‌ایم که فرضیه‌پردازی اگر درست انجام شود ممکن است خیلی مفید باشد. شاید بتوان روش آگاهانه‌تر و هدایت‌شده‌تری در پیش‌گرفت که به ما امکان دهد از فواید این کار بهره‌مند شویم ولی از خطراتش در امان باشیم. تأثیرات جدید فیزیک نظری بر ریاضیات و نیاز به واکنشی مناسب و مفید در برابر آن، فرصت مغتنمی برای آزمایش این نوع کار فراهم کرده است.

ریاضیدانان باید مطالب نظری را بیشتر پذیرا باشند، ولی با رعایت تدابیر ایمنی و صداقت کامل. تدابیری که ما پیشنهاد می‌کنیم تازگی ندارد و اساساً همان شیوه‌های سنتی است که در مورد حدسها به‌کارگرفته می‌شود. ولی لازم است عملکرد و اهمیت آنها را بهتر درک کنیم و آنها را وسیعتر و یکنواخت‌تر به‌کار ببریم. روی‌هم رفته، پیشنهادهای ما را می‌توان شاخصهایی برای حصول اطمینان از «صداقت در تبلیغ» دانست.

> دستاورد نظری باید صریحاً نظری و ناقص قلمداد شود، و به‌خصوص، سهم عمده‌ای از امتیاز باید برای نتیجهٔ نهایی و اثبات دقیق محفوظ بماند.

چنین تصریحی از راکد ماندن موضوع جلوگیری می‌کند و آن را به موضوعی برای پژوهشهای دیگران بدل می‌سازد. نظریه‌پردازان باید بپذیرند که در درازمدت، موفقیت دستاورد آنها بستگی به کار همکارانی دارد که اثبات دقیق ارائه می‌کنند، و برای این نوع کار احترام قائل شوند و در صورت امکان به رشد آن کمک کنند. در جامعهٔ فیزیکدانان، مسلماً امتیاز اصلی اکتشاف را به کسی می‌دهند که تحقیق تجربی موفقیت‌آمیزی انجام داده است، و چنین فردی را به‌عنوان کسی که صرفاً جزئیاتی کوچک، از زنجیرهٔ مطالب یک نظریه را به ثبوت رسانده، نمی‌نگرند. هر ریاضیدان باید یکی از این دو شق را انتخاب کند: یا اثبات کامل ارائه کند، و یا اینکه قبول کند کارش کامل نیست و در امتیاز اصلی باید شریک بپذیرد. این تمایز را داوران و ویراستاران باید اِعمال کنند، و در آموزش دانشجویان هم باید منظور شود.

سایر پیشنهادهای ما به رعایت صداقت در متون ریاضی مربوط می‌شود. بیان یک حدس در یک مقالهٔ ریاضی همواره قابل قبول بوده و گاه مقاله‌هایی چاپ شده‌اند که تماماً نظری بوده‌اند. موضوع اصلی این است که مطالب نظری باید به‌روشنی مشخص شوند.

> در هر مقاله باید اصطلاحات استانداردی به‌کار رود: در مطالب نظری، باید کلمه‌ای نظیر «حدس» جانشین «قضیه»، کلمه‌ای نظیر «پیش‌بینی» جانشین «نشان‌دادن» یا «ساختن»، و عباراتی نظیر «بحث اقناعی» یا «شواهدی در تأیید ادعا» جانشین «اثبات»

---

۱. caveat emptor ، اصلی حقوقی در خرید و فروش، مبنی بر اینکه خریدار باید این ریسک را بپذیرد که ممکن است کیفیت کالا خوب نباشد. ـم.

شوند. ایده‌آل آن است که عنوان و چکیدهٔ مقاله شامل واژه‌ای مانند «نظری»، «فرضیه‌ای»، یا «حدسی» باشد.

منظور این است که نشانه‌هایی در مقاله وجود داشته باشد که ماهیت کار را برای خواننده روشن سازد. چنین نشانه‌ای که در عنوان یک مقالهٔ نظری بیاید، در ارجاعاتی هم که در نوشته‌های دیگر به آن مقاله می‌شود، ظاهر می‌گردد و مشکلات نوشته‌های اخیر را هم برای خواننده کم می‌کند. از یک اثر نظری، باید به‌عنوان منبع الهام یا برای توجیه اهمیت موضوع و یا در بحث اقناعی در آثار نظری دیگر استفاده شود. نقل‌مطلبی از یک مقالهٔ نظری به‌عنوان جزئی از ساختار اثباتی که می‌خواهیم دقیق باشد، باید با احتیاط صورت گیرد، و نشانه‌ای در عنوان مقالهٔ نظری، نشان می‌دهد که این احتیاط چه موقعی لازم است.

اطلاعیه‌های پژوهشی مشکلاتی به‌همراه دارند. بعضی از این اطلاعیه‌ها فقط شرح خلاصه‌ای از کاری هستند که نویسنده به‌انجام رسانده و روی کاغذ آورده است. در این گونه اطلاعیه‌ها، استفاده از زبان قضیه و اثبات مناسب است. ولی در برخی از اطلاعیه‌ها، نتایج استدلالهایی شرح داده می‌شود که روی جزئیات آنها کار نشده است و گاه شامل پرشها و اشکالاتی هستند که برطرف‌کردن آنها مستلزم سالها تلاش است. در این موارد، استفاده از زبان سنتی، تصویر غلطی از کار به‌دست می‌دهد و نامناسب است. چنین اطلاعیه‌هایی را واقعاً باید نظری قلمداد کرد. از تحلیل بالا نتیجه می‌گیریم که به این دلیل، انتشار اطلاعیه ممکن است فایده‌ای برای ساختار ریاضیات نداشته باشد یا حتی به آن آسیب برساند. البته اطلاعیه از جهاتی نقش موجهی دارد، ازجمله برای تثبیت حق تقدم و برای آگاه‌ساختن دیگران از نتایج جدید و تکنیکهای مفید. پس به‌جستجوی رهنمودهایی می‌پردازیم که مانند رهنمودهای مربوط به کار نظری در حالت کلی، در این این مورد هم از فواید کار بهره ببریم و از زیان بالقوه‌اش بکاهیم. مسألهٔ اصلی این است که این رهنمودها در مقالات رعایت شوند. یک راه‌حل این است

> اطلاعیهٔ پژوهشی نباید منتشر شود مگر اینکه خلاصهٔ اثر کاملی باشد که برای انتشار پذیرفته شده است. در ارجاع دادن به مقالات انتشار نیافته، باید بین اطلاعیه‌ها و پیش‌چاپهای کامل به‌وضوح فرق گذاشته شود.

در عصر ماشینهای تکثیر و خبرنامه‌های الکترونیک، پخش اطلاعات در مقیاس وسیع بدون انتشار رسمی آن امکان‌پذیر است. آن‌دسته از نتایج مقدماتی را که موردتوجه عدهٔ زیادی هستند، می‌توان به‌طور غیررسمی و به‌شکل «ستون اخبار» در نشریاتی مانند *متمتیکال اینتلیجنسر* و *نوتیسز آو د امریکن متمتیکال سوسایتی*، ارائه کرد. بنابراین، عدم انتشار رسمی چندان ضایعه‌ای به‌شمار نمی‌رود. ولی اهمیت تمایزگذاشتن بین انتشار رسمی (پس از داوری) و این‌گونه انتشار در خبرنامهٔ الکترونیک نباید دست‌کم گرفته شود. رعایت این تمایز یکی از بزرگترین مسائلی است که در برابر رشد مجلات الکترونیک جدی قرار دارد.

اگر این تدابیر به‌دقت به‌کار بسته شود، منطقی است که دست‌اندرکاران مجله‌های ریاضی، مقالات نظری را هم برای انتشار بررسی کنند. در آن صورت، مقالاتی را که مطالب مهیج و فکربرانگیز ولی اثباتهای ناقص دارند، می‌توان به این مجلات عرضه کرد تا (پس از اصطلاحات نگارشی مقتضی) به‌عنوان مقالهٔ نظری انتشار یابند. ممکن است انتشار مجله‌های ریاضی نظری هم مناسب باشد. ولی باید احتیاط را رعایت کرد. اگر مؤلفان، ویراستاران، و داوران، صداقت و دقت به خرج ندهند، ممکن است مسائلی که در طی سالیان دراز بارها و با تحمل رنج و زحمت از صحنه بیرون رانده شده‌اند، دوباره وارد گود شوند.

از این تحلیل برمی‌آید که تقسیم جامعهٔ ریاضی به دو شاخهٔ نظری و دقیق تااندازه‌ای آغاز شده است ولی پیامدهایی که فرضیه‌بافیهای نادرست داشته، مانعی در راه پیشرفت آن بوده است. آیا این جریان ادامه خواهد یافت؟ احتمالاً به هرحال ادامه می‌یابد، ولی اگر تدابیر ایمنی پذیرفته و به‌کار بسته شود، رشد آن سریعتر و همراه با زحمت و دردسرکمتری، خواهد بود. در مباحث جاافتاده و تثبیت‌شده، این رشد کندتر خواهد بود زیرا فرضیه‌پردازی هوشمندانه در این مباحث مستلزم تسلط بر جزئیات فنی اثباتهای قبلی است. در این زمینه‌ها، فرضیه‌پردازی راه مناسبی است برای بروز اندیشه‌های افرادی که رسماً در زمرهٔ اثبات‌کنندگان دقیق‌اند ولی قوهٔ تخیل آنها بیشتر از استعدادشان در اثبات دقیق است. در سایر زمینه‌ها، به‌خصوص در مباحثی که با شبیه‌سازیهای کامپیوتری سروکار دارند، تولید و تحلیل داده‌ها کاملاً متمایز از کار اثبات است. در بعضی از این مباحث، نظریه‌پردازان متخصص را هم‌اکنون می‌توان دید و احتمالاً تعداد آنها بیشتر هم خواهد شد.

در هر حال، چارچوب پیشنهادی ما زمینه‌ای برای روابط بین ریاضیدانان و فیزیکدانان نظری ایجاد می‌کند. فیزیکدانان خواه به‌صورت اعضای ثابت جامعهٔ ریاضی درآیند یا درنیایند، ریاضیدانان مقدم آنها را به‌عنوان «ریاضیدانان نظری» گرامی خواهند داشت و دیگر به آنها به چشم ریاضیدانانی که از دید سنتی بی‌صلاحیت‌اند نخواهند نگریست.

خلاصه

فرضیه‌پردازی گاه به رشد و تکامل ریاضیات یاری رسانده و گاه در برابر آن مانع ایجاد کرده است. دلیلش این است که تفاوت بین نظریه و اثبات، تفاوتی بی‌اهمیت و بی‌اثر نیست و اگر تمایز دقیقی بین این دو گذاشته نشود هم به جامعهٔ ریاضی و هم به آثار و متون ریاضی آسیب می‌رسد. می‌توان گفت که در ریاضیات، تمایز قائل نشدن بین استدلال نادقیق و اثبات اخلاقاً درست نیست. ولی ما در این مقاله روشها و رهنمودهایی عرضه کرده‌ایم که اگر به‌دقت اجرا شوند، چارچوب مفید و مناسبی برای فرضیه‌پردازی در ریاضیات پدید می‌آید.

مراجع

1. P. W. Anderson, *Concepts in solids*, W. A. Benjamin, Inc, New York, 1964.
2. J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology* 1900-1960, Birkhäuser, Basel, 1988.
3. D. Eisenbud and J. Harris, *Progress in the theory of complex algebraic curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **21** (1989), 205.
4. R. P. Feynman, *Surely you're joking Mr. Feynman: adventures of a curious character*, W. W. Norton, New York, 1985.
5. J.-M. Fontaine, *Valeurs spéciales des fonctions L des motifs*, Séminaire Bourbaki, Exposé 751, Février 1992, pp. 1-45.

6. J. Gleick, *Chaos: making a new science*, Viking Penguin Inc., New York, 1987.
7. ———, *Genius: the life and science of Richard Feynman*, Pantheon, New York, 1992.
8. G. Holton, private communication.
9. A. Jaffe, *Mathematics motivated by physics*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 137-150.
10. J. Kollar, *The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 211.
11. S. G. Krantz, *Fractal geometry*, Math. Intelligencer **11** (1989), 12-16.
12. L. Landau and E. Lifshitz, *Statistical physics*, Oxford Univ. Press, London, 1938.
13. R. McCormmach, ed., *Historical studies in the physical sciences*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
14. A. Weil, *Foundations of alegebraic geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1946.
15. E. H. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989). 351-399.

******

• Arthur Jaffe and Frank Quinn, " 'Theoretical mathematics': toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, (1) **29** (1993) 1-13.

* آرتر جفی، دانشگاه هاروارد؛ فرنک کوین، مؤسسهٔ پلی‌تکنیک ویرجینیا