قضیهٔ کرکیارتو دربارهٔ همسانریختیهای دوره‌ایِ قرص و کره*

آدرین کنستانتین و بوریس کولف*

ترجمهٔ شهرام محسنی‌پور

۱. مقدمه

در سال ۱۹۱۹، کرکیارتو اولین برهان هم‌ارزیِ توپولوژیک بین همسانریختیها[1]ی دوره‌ایِ [تناوبی] قرص و کره و ایزومتریهای اقلیدسی را در مجلهٔ *ماتماتیشه آنالن* به‌چاپ رساند [۳]. در همان مجله، درست بعد از مقالهٔ کرکیارتو، براوئر [۱] ضمن ارائهٔ برهان خودش برای این قضایا، توضیح داد که این احکام را از مدتها قبل می‌دانسته است چون نتیجهٔ چند قضیهٔ قدیمیتر وی دربارهٔ همسانریختیهای دوره‌ای رویه‌های فشرده هستند و فقط کمی با آنها تفاوت دارند. ولی برهان براوئر را نمی‌شود به آسانی فهمید و برهان کرکیارتو هم خلاصه‌وار است و در یک‌جا نقصی نیز دارد.

اثبات کامل این قضیهٔ مهم را سالها بعد، در ۱۹۳۴، ایلنبرگ [۶] عرضه کرد. در این اواخر، اپستاین [۷] مجدداً موضوع را در مورد همسانریختیهای دوره‌ایِ نقطه‌ای بررسی کرده است (مفهوم این نوع همسانریختی این است که هر نقطهٔ x تحت f دوره‌ای است ولی دورهٔ تناوب $n(x)$ به x بستگی دارد و کراندار هم فرض نمی‌شود). به دلیل اهمیت این نتایج و چون به نظر نمی‌آید که در نوشته‌های ریاضیِ موجود، شرحی به زبان امروزی دربارهٔ آنها پیدا شود، نویسندگان این مقاله فکر کرده‌اند که عرضهٔ اثباتی نو و مقدماتی سودمند خواهد بود. ولی استدلالهای اصلی متعلق به مراجع [۱، ۳، ۶] است.

۲. پیش‌زمینه و تعاریف

فرض کنید X فضایی توپولوژیک و f یک همسانریختی X باشد. می‌گوییم f دوره‌ای [تناوبی] است اگر عدد صحیحی چون $n > 0$ وجود داشته باشد که $f^n = Id$. دورهٔ تناوب f کوچکترین عدد صحیح مثبت n با این خاصیت است.

ابتدا چند خاصیت ابتداییِ نگاشتهایِ یک بعدی را، که بعداً بدون اثبات به‌کار می‌بریم، به اختصار یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید $f : I \to I$ یک همسانریختیِ دوره‌ایِ بازهٔ واحد باشد. اگر f نقاط انتهایی را حفظ کند، آنگاه نگاشت همانی است. اگر f نقاط انتهایی را با هم تعویض کند، آنگاه $f^2 = Id$، و f مزدوج با نگاشتِ بازتابِ $x \mapsto 1 - x$ است. به‌طور مشابه، همسانریختی دوره‌ای خط حقیقی $\mathbf{R}$ بسته به اینکه صعودی یا نزولی باشد، نگاشت همانی یا مزدوج نگاشت قرینهٔ $x \mapsto -x$ است.

فرض کنید $f : S^1 \to S^1$ یک همسانریختیِ دوره‌ایِ دایرهٔ واحد با دورهٔ تناوب n باشد. اگر f جهت‌نگهدار و $\rho(f)$ عدد دورانی[1] f باشد، آنگاه $\rho(f) = k/n$ که در آن k و n متباین‌اند (در [۵] شرح بسیار خوبی دربارهٔ عددهای دورانی آمده است) و f مزدوجِ دورانی با زاویهٔ $2\pi k/n$ است. اگر f جهت برگردان باشد، آنگاه دقیقاً دو نقطهٔ ثابت دارد، f^2 نگاشت همانی است، و f دو کمانی را که نقاط ثابت f روی S^1 تعیین می‌کنند، تعویض می‌کند.

فضای متریک X مسیری-همبند[2] است اگر برای هر دو نقطهٔ مفروض، نگاشتی پیوسته از بازهٔ واحد $[0, 1]$ به توی X وجود داشته باشد که آنها را به هم وصل کند. X کمانی-همبند[3] است اگر برای هر دو نقطهٔ متمایز مفروض، نشانندهٔ توپولوژیک از $[0, 1]$ به توی X وجود داشته باشد که آنها را به‌هم وصل کند. در واقع می‌توان نشان داد که این دو مفهوم، هم‌ارزند ([۱۴، قضیهٔ ۱.۴] یا [۱۱، لم ۳.۱۶]) را ببینید.

لم ۱.۲. *فضای متریک X، مسیری-همبند است اگر و تنها اگر کمانی-همبند باشد.*

با استفاده از مفهوم همبندی موضعی، توصیف سودمندی از فضاهای مسیری-همبند میسر می‌شود. فضای متریک X موضعاً همبند است اگر هر نقطهٔ X دارای همسایگیهای همبندِ به‌دلخواه کوچک باشد. می‌توان نشان داد که لم زیر برقرار است ([۸، قضیهٔ ۱۵.۳] یا [۱۱، لم ۴.۱۶]):

لم ۲.۲. *هر فضای متریک فشرده، همبند، و موضعاً همبند، مسیری-همبند است.*

1. homeomorphisms

1. rotation number 2. path connected 3. arcwise connected

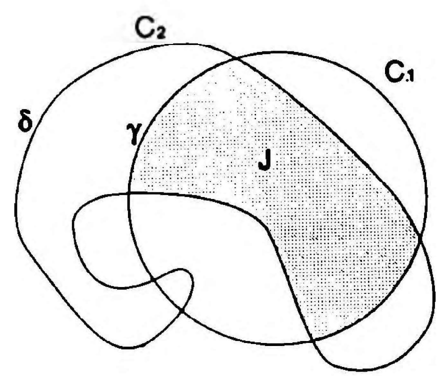
قضیهٔ مشهور ژوردان-شونفلیس دربارهٔ خمهای بستهٔ ساده در صفحه، مطلب مهم دیگری است که در این مقاله به‌کار گرفته می‌شود و در حقیقت آخرین نتیجه‌ای است که به آن احتیاج خواهیم داشت ([۲، ۹] یا [۱۲ قضیهٔ ۱.۱۷] را ببینید).

قضیهٔ ۳.۲. *(ژوردان-شونفلیس). هر خم بستهٔ سادهٔ J صفحه را دقیقاً به دو مؤلفه تقسیم می‌کند که خود مرز کامل هر دو مؤلفه است. و بستار مؤلفهٔ کراندار را می‌توان به‌صورت توپولوژیک به‌روی قرص بستهٔ واحد نگاشت.*

از این به‌بعد، تصویر نشانندهٔ توپولوژیکِ قرص بستهٔ واحد را قرص بستهٔ توپولوژیک (یا فقط قرص توپولوژیک) D می‌نامیم و درون آن را با D° و مرز آن را با ∂D نشان می‌دهیم. بااین‌حال، بستار مجموعهٔ کراندار بازی که با قرص باز واحد همسانریخت است، لزوماً قرص توپولوژیک بسته نیست [۱۱، فصل ۱۵].

گزارهٔ ۴.۲. *فرض کنید D_1، D_2، $\cdots$ و D_n تعدادی متناهی قرص توپولوژیک بسته در صفحه و J° یکی از مؤلفه‌های همبندی $\cap_{i=1}^{n} D_i^\circ$ باشد. آنگاه ∂J یک خم بستهٔ ساده و J، بستار J°، قرصی توپولوژیک است*

برهان ۴.۲. از استقرا روی n یعنی تعداد قرصها استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$ قضیهٔ ژوردان-شونفلیس به‌دست می‌آید. پس فرض می‌کنیم که حکم برای n ای $(n \geqslant 1)$ درست باشد و نیز J° یکی از مؤلفه‌های همبندی اشتراک $n+1$ قرص توپولوژیک D_1، D_2، $\cdots$ و D_{n+1} باشد. فرض کنید K° مؤلفه‌ای از $\cap_{i=1}^{n} D_i^\circ$ باشد که شامل J° است. بنا به استقرا، بستار آن (K) قرص توپولوژیک است. چون J° مؤلفهٔ $K^\circ \cap D_{n+1}^\circ$ است کافی است نشان دهیم که گزاره برای دو قرص D_1 و D_2 درست است (شکل ۱ را ببینید). به‌ازای $i = 1, 2$ قرار می‌دهیم $C_i = \partial D_i$ و فرض می‌کنیم J بستار مؤلفه‌ای از $D_1^\circ \cap D_2^\circ$ باشد. داریم $\partial J \neq \emptyset$ و $\partial J \subset C_1 \cup C_2$. اگر ∂J تماماً در یکی از دو خم، مثلاً در C_1 قرار گیرد آنگاه $J = D_1$، و لم ثابت شده است. پس فرض می‌کنیم که $\partial J \not\subset C_1$ و $\partial J \not\subset C_2$.



شکل ۱

فرض کنید $x \in \partial J$ و $x \notin C_2$. در این‌صورت $x \in C_1 \cap D_2^\circ$، و می‌توان کمانی چون γ در C_1 پیدا کرد که

$$x \in \gamma, \gamma \subset \partial J, \gamma \backslash \partial\gamma \subset D_2^\circ, \partial\gamma \cap C_2$$

نقاط انتهایی γ روی C_2 کمانی چون δ را مشخص می‌کنند که با J° اشتراک ندارد و $\delta \cap J = \partial\delta$. ملاحظه می‌کنیم که حداکثر تعداد شمارایی کمان مانند γ وجود دارد که آنها را با $(\gamma_i)_{i \in N}$ نشان می‌دهیم و اگر $i \to \infty$ آنگاه $diam(\gamma_i) \to 0$. در این استدلال می‌توان جای C_1 و C_2 را عوض کرد و به‌این‌ترتیب مرز بستهٔ ساده‌ای برای J به‌دست می‌آید و طبق قضیهٔ ژوردان-شونفلیس، J قرص توپولوژیک است. □

خاصیت جالب توجه زیر در مورد همسانریختیهای دوره‌ای، نتیجهٔ مستقیم ۴.۲ است و برای فضاهایی کلیتر از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ یعنی خمینه‌های توپولوژیک دوبعدی نیز درست است و این به سبب ماهیت موضعی آن است. این خاصیت را در چارچوب مبحث خمینه‌ها بیان می‌کنیم چون در این مقاله مکرراً آن را برای قرص و کره به‌کار خواهیم برد.

لم ۵.۲. *فرض کنید $f : S \to S$ یک همسانریختی دوره‌ای خمینهٔ توپولوژیک دوبعدی دلخواه S باشد و فرض کنید $x \in Fix(f)$ نقطهٔ ثابتی از f باشد. دراین‌صورت برای هر همسایگی N از x، قرص توپولوژیک Δ_x وجود دارد که*

۱. $\Delta_x \subset N$

۲. Δ_x همسایگی x است

۳. $f(\Delta_x) = \Delta_x$

برهان ۵.۲. می‌توانیم فرض کنیم N و $f(N)$ تصویر N تحت f، زیرمجموعهٔ نقشه‌ای موضعی چون U هستند که همسانریخت با $\mathbb{R}^2$ است و نقطه و مجموعهٔ متناظرشان در $\mathbb{R}^2$ را نیز با همان x و N نمایش می‌دهیم. فرض کنید D_x قرصی اقلیدسی به مرکز x و به شعاع η $(\eta > 0)$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای $k = 0, 1, \cdots, n-1$ داشته باشیم $f^k(D_x) \subset N$، و C_x را مرز آن بگیرید. فرض کنید Δ_x بستار مؤلفه‌ای از مجموعهٔ ناوردای $\cap_{k=0}^{n-1} f^k(D_x^\circ)$ باشد که شامل x است. طبق ۴.۲، Δ_x قرص توپولوژیکی است که تحت f ناورداست (هر همسانریختی، مؤلفه‌ها را به مؤلفه‌ها می‌فرستد) و در سه حکم لم صدق می‌کند. □

نکته. γ_x مرز Δ_x، که خمی بسته و ساده و ناورداست، در $\cup_{k=0}^{n-1} f^k(C_x)$ قرار دارد.

۳. همسانریختیهای دوره‌ای قرص

قضیهٔ ۱.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد. دراین‌صورت، $r \in O(2)$ و همسانریختی $h : D^2 \to D^2$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = hrh^{-1}$.*

قبل از پرداختن به اثبات حکم بالا بد نیست به حالت خاصی از قضیهٔ ۱.۳ نظری بیفکنیم.

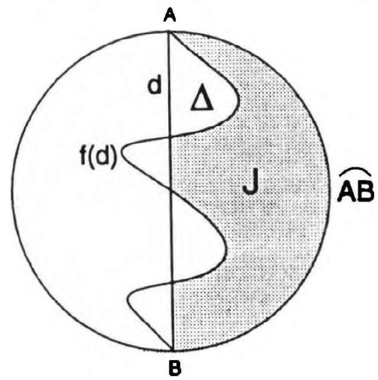
گزارهٔ ۲.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد که $f/_{\partial D^2} = Id$. دراین‌صورت $f = Id$.*

برهان ۲.۳. فرض کنید d قطر دلخواهی از D^2 با نقاط انتهایی A و

B باشد و Δ یکی از دو مؤلفهٔ همبند $D^2 - d$. مجموعهٔ

$$E = \bigcap_{i=1}^{n} f^i(\Delta^\circ)$$

تحت f ناورداست و بستار هر یک از مؤلفه‌هایش یک قرص توپولوژیک است.



شکل ۲

فرض کنید $\widehat{AB}$ کمانی از دایره باشد که در مرز Δ قرار دارد و A را به B وصل می‌کند. چون برای هر i داریم $f^i(\widehat{AB}) = \widehat{AB}$، پس مؤلفه‌ای از E، مثلاً J^c، وجود دارد که بستارش، J، شامل $\widehat{AB}$ است (شکل ۲ را ببینید). طبق ۲.۴.۲، J قرصی توپولوژیک است و تحت f ناورداست.

می‌توانیم بنویسیم $\partial J = \widehat{AB} \cup \delta$ که δ کمانی ساده، ناوردا تحت f، و دارای نقاط انتهایی A و B است به‌طوری‌که

$$\delta \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^i(d)$$

چون $f(A) = A$ و $f(B) = B$، $f/_\delta = Id$. فرض کنید x نقطه‌ای از کمان δ باشد. حال $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in f^i(d)$ و $x = f^{n-i}(x) \in d$، و در نتیجه $\delta = d$ و $f/_d = Id$. چون قطر d دلخواه بود، نشان داده‌ایم که روی D^2، $f = Id$. □

از این پس، f نمایشگر همسانریختی دوره‌ای قرص با دوره تناوب n ($n > 1$) خواهد بود. در دنبالهٔ این بخش، ابتدا ساختار مجموعهٔ نقاط ثابت f را بررسی کرده سپس قضیهٔ ۱.۳ را ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۳.۳. *فرض کنید $f : D^2 \to D^2$ یک همسانریختی دوره‌ای با دورهٔ تناوب n ($n > 1$) باشد. آنگاه*

۱. اگر f جهت‌نگهدار باشد، $Fix(f)$ به یک نقطه که روی مرز D^2 نیست تقلیل می‌یابد و به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant n-1$، $Fix(f^i) = Fix(f)$.

۲. اگر f جهت‌برگردان باشد، $f^2 = Id$ و $Fix(f)$ خم ساده‌ای است که D^2 را به دو قرص توپولوژیک تقسیم می‌کند که به‌وسیلهٔ f تعویض می‌شوند.

برهان ۳.۳. ابتدا فرض کنید که f جهت‌نگهدار باشد. طبق قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر، f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد. چون $f/_{\partial D^2}$ جهت‌نگهدار و دوره‌ای است، f روی ∂D^2 هیچ نقطهٔ ثابتی ندارد. در غیراین‌صورت، f روی ∂D^2 نگاشت همانی خواهد بود و با به‌کاربستن ۲.۳، f روی همهٔ قرص، نگاشت همانی می‌شود که طبق فرض، این حالتِ f مستثنی شده است. بنابراین f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت در $D^2 \backslash \partial D^2$ دارد که می‌توانیم ـپس از مزدوج‌کردن‌ـ فرض کنیم همان نقطهٔ O یعنی مرکز قرص است.

فرض کنید $A = D^2 \backslash \{O\}$. A حلقهٔ نیم‌بازی است که تحت f ناورداست. حال فرض کنید f^i، تکراری از f، دارای نقطهٔ ثابت $x_\circ \in A$ باشد. فرض کنید $\bar{x}_\circ$ یک ترفیع[1] $x_\circ$ به $\tilde{A}$، «فضای پوششی کامل»[2] A، باشد و G ترفیعی از f^i باشد به‌طوری‌که $G(\bar{x}_\circ) = \bar{x}_\circ$. G^n ترفیعی از Id است که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارد پس $G^n = Id$. به‌ویژه، $G/_{\partial\tilde{A}}$ یک همسانریختی دوره‌ای و جهت‌نگهدار خط است، لذا روی $\partial\tilde{A}$ داریم $G = Id$. بنابراین روی ∂D^2 داریم $f^i = Id$، و طبق ۲.۳، روی همهٔ قرص داریم $f^i = Id$ و در نتیجه طبق تعریف n، i مضربی از n است.

حال فرض کنید که f جهت‌برگردان باشد. در این حالت f دقیقاً دو نقطهٔ ثابت روی ∂D^2 دارد که آنها را با A و B نشان می‌دهیم و f^2 روی ∂D^2 نگاشت همانی است. بنابراین، طبق ۲.۳، روی D^2، $f^2 = Id$.

نشان می‌دهیم که $Fix(f)$ همبند است. اگر نباشد، می‌توانیم دو مجموعهٔ فشرده ناتهی K_1 و K_2 پیدا کنیم که

$$Fix(f) = K_1 \cup K_2, \qquad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

اگر $A \in K_1$ و $B \in K_2$، آنگاه می‌توان کمان سادهٔ γ را در $D^2\backslash(K_1 \cup K_2)$ ساخت که با ∂D^2 تنها در نقاط انتهایی‌اش مشترک باشد و A را از B جدا کند. با به‌کارگیری استدلالی نظیر آنچه در برهان ۲.۳ به‌کار رفت می‌توانیم نشان بدهیم کمان سادهٔ

$$\delta \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(\gamma) \subset D^2 \backslash Fix(f)$$

که تحت f ناورداست، وجود دارد که A را از B جدا می‌کند. اما دراین‌صورت، f باید نقطهٔ ثابتی روی δ داشته باشد که این تناقض است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که یکی از دو مجموعهٔ فشرده، مثلاً K_1، در درون $D^2\backslash\partial D^2$ است. در این حالت می‌توان خم بستهٔ ساده‌ای چون $c \subset D^2\backslash\partial D^2$ ساخت که $K_1 \cup K_2$ را قطع نکند و قرص توپولوژیکی که به‌وسیلهٔ c محدود می‌شود دست‌کم شامل یک نقطه از K_1 باشد. با به‌کارگیری استدلالهایی شبیه برهان ۵.۲ می‌توانیم قرص توپولوژیکی در $D^2\backslash\partial D^2$ بیابیم که تحت f ناوردا، و مرزش شامل هیچ نقطهٔ ثابتی نباشد. دراین‌صورت، مجدداً به تناقض می‌رسیم، چون هر خم بستهٔ ساده که قرص ناوردایی را محدود می‌کند شامل دقیقاً دو نقطهٔ ثابت f است.

کاربرد استدلالهای بالا در مورد قرص توپولوژیکِ ناوردایِ به‌دلخواه کوچکی حول یک نقطهٔ ثابت، مذکور در ۵.۲، نشان می‌دهد که $Fix(f)$ موضعاً همبند نیز هست و بنابراین طبق ۲.۲، $Fix(f)$ مسیری‌ـهمبند است. بنابه ۱.۲، کمان ساده‌ای چون γ در $Fix(f)$ وجود دارد که A و B را به‌هم وصل می‌کند. این کمان، طبق قضیهٔ ژوردان‌ـشونفلیس، D^2 را به دو قرص توپولوژیک Δ_1 و Δ_2 تقسیم می‌کند. $D^2\backslash\gamma$ تحت f به‌وضوح ناورداست و f دوکمانی را که A و B روی ∂D^2 تعیین می‌کنند، تعویض می‌کند. بنابراین $f(\Delta_1) = \Delta_2$ و $f(\Delta_2) = \Delta_1$ و $Fix(f)$ به γ تقلیل می‌یابد. □

1. lift 2. universal covering space

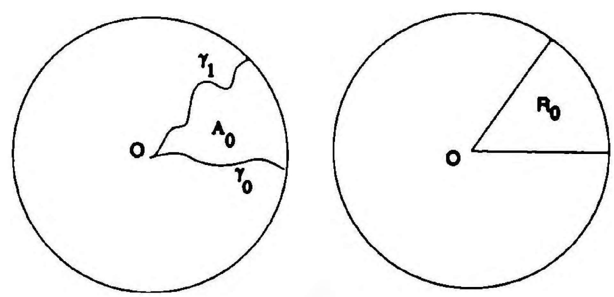
برهان ۱.۳. ابتدا فرض کنید که f جهت‌نگهدار باشد. طبق ۳.۳ می‌توانیم فرض کنیم $Fix(f)=\{O\}$ که O مرکز قرص است. چون $f/_{\partial D^2}$ یک همسانریختی دوره‌ای با دورهٔ تناوب n است، عدد دورانی $f/_{\partial D^2}$ یعنی $\rho(f/_{\partial D^2})$ برابر با k/n است که k و n متباین‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که f مزدوج دوران حول مبدأ با زاویهٔ $2\pi/n$ است. بدون از دست دادن کلیت موضوع، می‌توانیم تصور کنیم که $k=1$. در واقع فرض می‌کنیم که اگر $\rho(f/_{\partial D^2}) = 1/n$، آنگاه حکم برقرار باشد. اگر $k>1$، f را با f^j تعویض می‌کنیم که در آن $j\in\mathbb{N}$ و $jk\equiv 1 \pmod{n}$. پس $\rho(f^j/_{\partial D^2}) = 1/n$ و بنابراین، f^j مزدوج دورانی به زاویهٔ $2\pi k/n$ حول مبدأ است و چون $f=(f^j)^k$، نتیجه می‌شود که f مزدوج دورانی به زاویهٔ $2\pi k/n$ است.

حال فضای خارج‌قسمت D^2/f را در نظر می‌گیریم که در آن دو نقطه یکی گرفته می‌شوند اگر به یک مدار تحت f تعلق داشته باشند. $D^2/_f$ به توپولوژی خارج‌قسمت مجهز است و فضایی فشرده و مسیری-همبند و متریک است که متریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\pi(x),\pi(y)) = \inf_{0\leqslant h,k\leqslant n-1} \{d(f^k(x), f^h(y))\}$$

که $\pi: D^2\to D^2/_f$ افکنش متعارف است.

طبق ۱.۲، می‌توانیم کمان ساده‌ای چون γ از $\pi(O)$ تا نقطهٔ دلخواهی بر $\pi(\partial D^2)$ پیدا کنیم. چون گروه همسانریختیهای تولید شده توسط f، روی D^2 بجز در نقطهٔ O به‌طور آزاد عمل می‌کند، در نتیجه $\pi: D^2\to D^2/_f$ پوشش شاخه‌دار عادی است (صفحهٔ ۴۹ از [۱۰] را ببینید). بنابراین $\pi^{-1}(\gamma)$ اجتماع n کمان ساده و مجزای $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ است (باستثنای نقطهٔ انتهایی مشترکشان O) که D^2 را به n قطاع مجزای $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ تقسیم می‌کنند. فرض $\rho(f/_{\partial D^2}) = 1/n$ ایجاب می‌کند که $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$.



شکل ۳

فرض کنید h یک همسانریختی بین A_0 و R_0 (ناحیهٔ لازم در D^2 برای دوران با زاویهٔ $2\pi/n$ حول مبدأ) باشد به‌طوری‌که $h/_{\gamma_1} = rh/_{\gamma_0}$. با تعریف $h/_{A_i}$ به‌صورت $r^i h f^{-i}$ که r دوران حول مبدأ با زاویهٔ $2\pi/n$ است، می‌توانیم h را به همسانریختی D^2 توسعه دهیم. به آسانی می‌شود تحقیق کرد که h همسانریختی D^2 است و $f=h^{-1}rh$.

حال فرض کنید که f جهت‌برگردان باشد. طبق ۳.۳، $Fix(f)$ کمان ساده‌ای چون γ است که D^2 را به دو قرص توپولوژیک Δ_1 و Δ_2 تقسیم می‌کند که به‌وسیلهٔ f تعویض می‌شوند. فرض کنید h یک همسانریختی بین Δ_1 و نیمهٔ بالای قرص D_1 باشد. روی Δ_2، h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(y) = Sh/_{\Delta_1}f(y), y\in\Delta_2$$

که S بازتاب نسبت به‌محور xهاست. به‌آسانی می‌شود تحقیق کرد که h یک همسانریختی D^2 است و این، f و S را مزدوج هم می‌کند. □

نکته. با به‌کارگیری ۱.۳ همچنین می‌توان نشان داد که هر همسانریختی دوره‌ای طوق، هم‌ارز توپولوژیک یک ایزومتری اقلیدسی است (به پیمانهٔ تعویض دو لبه، اگر مرز نگهدار نباشد).

۴.همسانریختیهای دوره‌ای کره

قضیهٔ اصلی این بخش، قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱.۴. *فرض کنید $f: S^2\to S^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد. دراین‌صورت، rای متعلق به $O(3)$ و همسانریختی $h: S^2\to S^2$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = hrh^{-1}$.*

برهان ۱.۴. بسته به اینکه f دارای دست‌کم یک نقطهٔ ثابت باشد یا نباشد، برهان قضیهٔ ۱.۴ را به دو حالت تفکیک می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید f نقطهٔ ثابت داشته باشد. با استفاده از ۵.۲ نتیجه می‌گیریم که خم بستهٔ سادهٔ ناوردای c وجود دارد که S^2 را به دو قرص ناوردای D_1 و D_2 تقسیم می‌کند.

اگر f جهت‌نگهدار باشد و $f\neq Id$، آنگاه f نقطهٔ ثابتی روی c ندارد (طبق ۳.۳). بنابراین با توجه به قضیهٔ نقطه ثابت براوئر پی می‌بریم که f دست‌کم دو نقطهٔ ثابت دارد. پس از مزدوج‌کردن، می‌توانیم فرض کنیم که f دو قطب S^2 یعنی S و N را ثابت نگه می‌دارد. با به‌کارگیری نتایج بخش قبل می‌توانیم n کمان پیدا کنیم که N و S را هم وصل می‌کنند و اجتماعشان تحت f مجموعه‌ای ناورداست. همانند بخش ۳ می‌توانیم f و دوران با زاویهٔ $2k\pi/n$ حول محور شمال-جنوب را مزدوج کنیم.

اگر f جهت‌برگردان باشد، آنگاه دو نقطهٔ ثابت روی c دارد. در هر یک از قرصهای ناوردای D_1 و D_2 مجموعهٔ نقاط ثابت f کمان ساده‌ای است که روی c دو نقطهٔ ثابت f را به‌هم وصل می‌کند. اجتماع این دو کمان، خم بستهٔ ساده‌ای است که بر مجموعهٔ نقاط ثابت f روی S^2 منطبق است. بنابراین به‌سادگی می‌شود f و بازتاب نسبت به خط استوا را مزدوج کرد.

حال فرض کنید f هیچ نقطهٔ ثابتی روی S^2 ندارد. پس از مزدوج‌کردن، می‌توانیم تکرر دوم f یعنی f^2 را با دوران تناوبی حول محور شمال-جنوب بینگاریم. به‌خصوص f نقاط N و S را تعویض می‌کند. به‌ازای $t\in(-1,1)$ فرض کنید C_t دایره‌ای باشد که از قطع‌کردن کره با صفحهٔ $z=t$ به‌دست می‌آید. D_t قرص محصور شده به‌توسط C_t روی S^2 است که شامل N است و

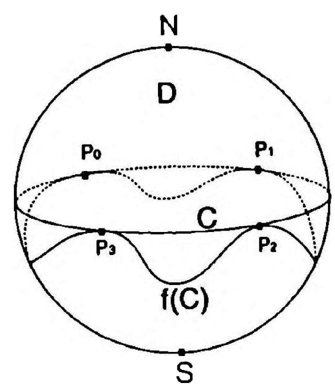
$$t_0 = \inf\{t\in(-1,1);\qquad D_t\cap f(D_t)=\emptyset\}$$

برای سهولت می‌نویسیم $D=D_{t_0}$ و $C=C_{t_0}$. پس D، $f(D)$ را در مرزش و تنها در مرزش قطع می‌کند (شکل ۴ را ببینید). فرض کنید $P_0\in C\cap f(C)$ و $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ مدار P_0 تحت f باشد. نقاط

$P_0, P_2, \dots, P_n$ و $P_1, P_3, \dots, P_{n-1}$ متمایز هستند چون f^2 دورانی با دورهٔ تناوب $n/2$ است.

فرض کنید که $i \in \{1, 3, \dots, n-1\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که P_0 و $P_i = f^i(P_0)$ بر هم منطبق باشند. پس f^{2i} نقاط P_0 و S و N را ثابت نگه می‌دارد. در نتیجه $f^{2i} = Id$ و بنابراین $n = 2i$. فرض کنید b_0 کمان دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که N را در D به P_0 وصل می‌کند و $b_{n/2}$ تصویر آن تحت $f^{n/2}$ است. دراین‌صورت $b = b_0 \cup b_{n/2}$ کمان ساده‌ای است که N و S را به‌هم وصل می‌کند و نقطهٔ مشترکی با $(n/2) - 1$ تکرر اولش تحت f، به‌غیر از S و N، ندارد. این کمانها کره را به $n/2$ **قسمت** تقسیم می‌کنند و می‌توانیم ترکیب دوران با دورهٔ تناوب $n/2$ **حول محور** شمال-جنوب و بازتاب نسبت به خط استوا را با f مزدوج کنیم.

حال فرض کنید که نقاط $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ متمایزند و نیز فرض کنید b_0 کمانی از دایرهٔ عظیمه‌ای است که در D، N و P_0 را به‌هم وصل می‌کند و b'_0 کمانی است که در $f(D)$، S را به P_0 وصل می‌کند و جدا از $f(b_0)$ و از $n-1$ تکرر اول آن است (این امر امکان‌پذیر است چون f^2 دوران است). اجتماع این دو کمان مجدداً کمان ساده‌ای است که N و S را به‌هم وصل می‌کند و با $n-1$ تکرر اولش تحت f نقطهٔ مشترکی به غیر از S و N ندارد. اجتماع این کمان و تکررهایش S^2 را به n قسمت مجزا تقسیم می‌کنند. در این حالت، ترکیب دوران با دورهٔ تناوب n حول محور شمال-جنوب و بازتاب نسبت به خط استوا، با f به‌طور توپولوژیک هم‌ارز است. □



شکل ۴

فرع ۲.۴. *اگر $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک همسانریختی دوره‌ای باشد، آنگاه f با مزدوجِ توپولوژیکِ دورانی از مرتبهٔ متناهی حول مبدأ است یا مزدوج توپولوژیکی بازتاب نسبت به محور xها است.*

برهان ۲.۴. با استفاده از افکنش گنجنگاری می‌توانیم صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را با متمم قطب شمال در S^2 یکی بگیریم و f را به یک همسانریختی کرهٔ S^2 توسعه بدهیم. طبق برهان ۱.۴، f یا هم‌ارز دورانی حول محور شمال-جنوب است یا هم‌ارز بازتاب نسبت به دایرهٔ عظیمه‌ای است که می‌توانیم فرض کنیم از قطب شمال N می‌گذرد. نشان‌دادن اینکه می‌توان مزدوج را طوری انتخاب کرد که قطب شمال N را ثابت نگه دارد، دشوار نیست. لذا این هم‌ارزی، هم‌ارزیِ توپولوژیکی بین f و دوران یا بین f و بازتاب نسبت به محور xها القا می‌کند. □

یادداشت. در مورد همسانریختیهای دوره‌ایِ رویه‌های با گونهٔ مثبت مطالعات مفصلی انجام شده است. در اینجا نمی‌توانیم کتابشناسی کاملی در این زمینه ارائه کنیم و فقط آثار اولیهٔ کرکیارتو [۴] و نیلسن [۱۳] را ذکر می‌کنیم که هر دو به این نتیجه منجر می‌شوند که هر همسانریختیِ دوره‌ایِ یک رویهٔ ریمانی با گونهٔ مثبت، مزدوجِ یک ایزومتریِ همدیس است.

سپاسگزاری. نویسندگان این مقاله سپاس خود را از ژروم فرنباخ، لوسین گی‌یو، و توبی‌هال، که بحث با آنها به بهترشدن این مقاله کمک کرد، ابراز می‌دارند.

مراجع

1. Brouwer, L. E. J. Über die periodischen Transformationen der Kugel. *Math. Ann. 80* (1919), 39-41.
2. Cairns, S. S. An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. AMS 2* (1951), 860-867.
3. Kerékjártó de, B. Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. *Math. Ann. 80* (1919-1920), 36-38.
4. ———, Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich. *Acta scient. math. Szeged 7* (1934), 65-75.
5. Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Benjamin-Commings 1986.
6. Eilenberg, S. Sur les transformations périodiques de la surface de la sphère. *Fund. Math. 22* (1934), 28-44.
7. Epstein, D. B. A. Pointwise periodic homeomorphisms. *Proc. London Math. Soc. 42 (3)* (1981), 415-460.
8. Hocking, J. G. and G. S. Young. *Topology.* Dover, 1988.
9. Maehara, R. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. *Amer. Math. Monthly 91* (1984), 641-643.
10. Maskit, B. *Kleinian Groups.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer Verlag 1988.
11. Milnor, J. *Dynamics in one complex variable.* Preprint, Stony Brook, New York 1990.
12. Newmann, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points.* Cambridge Univ. Press (2nd edition) 1951.
13. Nielsen, J. Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1)* 1937. See also: *Collected Papers of J. Nielsen.* Vagn Lundsgaard Hansen 1986.
14. Whyburn, G. T. *Topological Analysis.* Volume 23 of Princeton Math. Series. Princeton Univ. Press 1958.

******

• Adrian Constantin and Boris Kolev, "The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disk and the sphere", *L'Enseignement Mathématique*, **40** (1994) 193-204.

* آدرین کنستانتین، مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در آمریکا؛ بوریس کولف، بخش تحقیقات غیرخطی نیس در مرکز ملی تحقیقات علمی فرانسه.