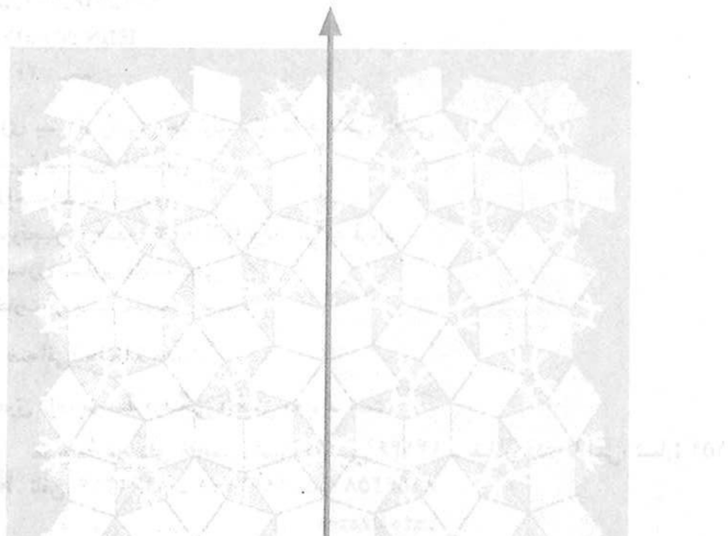
مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی

کارگاه هندسه

دکتر آرش رستگار



انتشارات فاطمی

مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی

کارگاه هندسه

مؤلف: آرش رستگار

ویراستار: ارشک حمیدی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

چاپ دوم، ۱۳۸۱

شابک ۵_۲_۳۰۲_۳۱۸_۹۶۴

ISBN 964-318-302-5

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: نینا وحیدی
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): فرشته فرنزاد
- بازسازی تصاویر: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ حدیث

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸

info@fatemi.ir

رستگار، آرش

کارگاه هندسه/ آرش رستگار. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۹.

نه، ۱۰۱ ص.: مصور. ــ (مجموعه کارگاه علوم ریاضی).

ISBN 964-318-302-5

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

کتابنامه: ص. ۱۰۱.

چاپ دوم: ۱۳۸۱.

۱. هندسه ــ راهنمای آموزشی. الف. عنوان.

QA۴۶۱/۴۶ر۴م ۵۱۶/۰۰۷

کتابخانهٔ ملی ایران م۷۹_۷۴۲۶

تقدیم به پدر، مادر و همسرم

فهرست

هوالعالم

کلام نخست

«مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی» منابعی برای آموزشهای جانبی و فوق برنامه برای دانش‌آموزان علاقه‌مند است و به مطالبی می‌پردازد که شوق و ذوقِ تفکر ریاضی را در دانش‌آموز برمی‌انگیزد و خلاقیت او را به‌بار می‌نشاند.

مطالبی که در این مجموعه می‌آید بیشتر از شهود ریاضی سرچشمه می‌گیرد و از موضوعاتی ساده سخن می‌گوید که منابع آموزشهای رسمی از کنار آن می‌گذرند، ولی این مباحث ذهن علاقه‌مند را به سفری به اعماق می‌کشاند که «زیبایی ریاضی» را درک کند و از پسِ آن شکوفایی تفکرِ ریاضی دستاوردی ارزشمند است.

«مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی» برای دانش‌آموزان علاقه‌مند سالهای اول و دوم دبیرستان پهنهٔ چالشهای فکری و دست یافتن به مطالبی نو و تازه است، ولی مطالب به‌گونه‌ای گرد آمده است که حتی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی نیز می‌توانند از آن بهره گیرند. پس این گوی و این میدان.

پیشگفتار

حواس بینایی و شنوایی نقش مهمی در ارتباط ذهن ما با محیط اطرافمان دارند. این دو وسیلهٔ ارتباطی کاملاً متفاوت، عمیقاً بر شیوه‌های ادراک بشر تأثیر گذاشته‌اند. در آموزش ریاضیات به تواناییهای ذهنی دانش‌آموزان از نظر شهودی و کلامی توجه می‌شود. گروهی از دانش‌آموزان استدلالهای هندسی را بهتر می‌پذیرند و گروهی دیگر شیوه‌ای را که مبتنی بر یک منطق کلامی گزاره‌ای است. ادراک شهودی یا منطق تصویری یا استدلال هندسی به‌دلیل ویژگیهای قوهٔ بینایی بین حواس پنجگانه قابلیت رشد بیشتری دارد. در این کتاب سعی شده است که ادراک هندسی ذهن خوانندگان تقویت شود و خوانندگان را در جهت رشد قوهٔ تخیل و توانایی تمرکز حواس هندسی خود یاری دهد. برای این منظور اَشکال هندسی دوبعدی و سه‌بعدی بسیاری معرفی شده‌اند تا خواننده بتواند با دست‌ورزی، بسیاری از ادراکهای هندسی اولیه را در ذهن خود نهادینه کند. مسلّماً این تمرینها بر سیستم شهودیِ ادراک ایشان تأثیر خواهد گذاشت. امید است که این تلاش، در جهت تحریک قوهٔ خلاقیت هندسی خوانندگان توفیق حاصل نماید. قبلاً از یاری همهٔ دوستان در بهبود این کتاب و در رفع نقایص آن کمال تشکر را دارم.

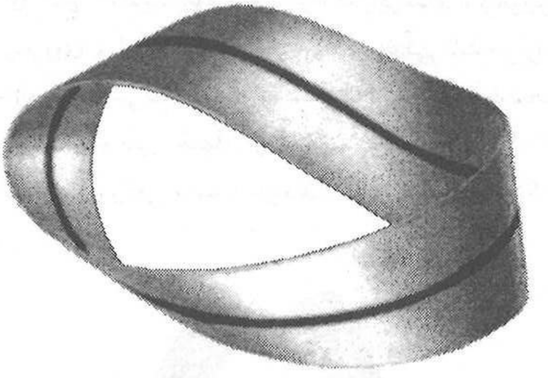
آرش رستگار

پاییز ۱۳۷۹

۱

نوار موبیوس

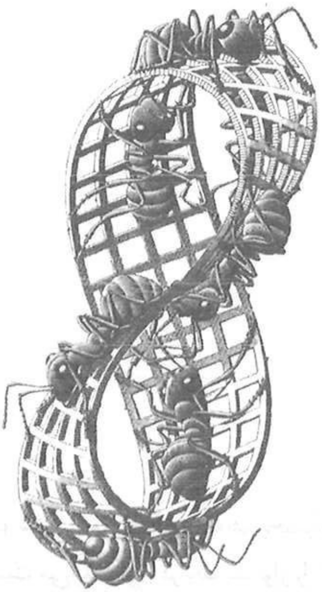
نواری کاغذی درنظر بگیرید. اگر دو سر این نوار را طوری به هم بچسبانید که هر نقطه به نقطهٔ مقابل خود وصل شود، لوله‌ای استوانه‌ای به‌دست می‌آید. ولی اگر یک سر نوار را 180° بپیچانیم و سپس به سر دیگر بچسبانیم، نواری به‌دست می‌آید که پشت و رو ندارد و آن را نوار موبیوس می‌نامند (شکل ۱ را ببینید).



شکل۱

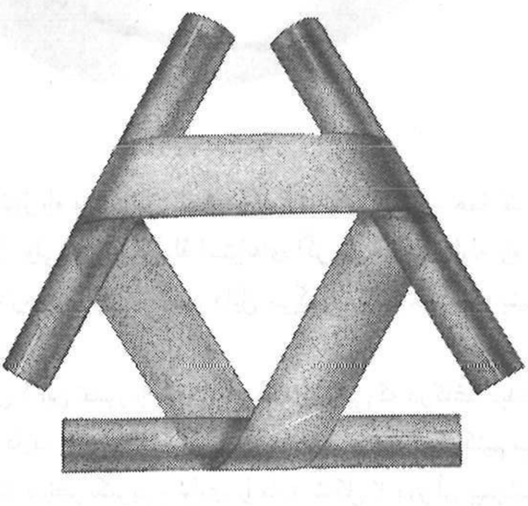
اگر مورچه‌ای روی این نوار راه برود، بدون اینکه به مرز نزدیک شود، به همهٔ قسمتهای نوار دسترسی دارد (شکل ۲ را ببینید). ولی در مورد لولهٔ استوانه‌ای اگر مورچه روی لوله راه برود و به مرز نزدیک نشود، به پشت لوله دسترسی ندارد. به‌همین دلیل می‌گوییم لولهٔ استوانه‌ای پشت و رو دارد اما نوار موبیوس پشت و رو ندارد.

ممکن است شکل ۱ این تصور را به‌وجود آورد که پیچشی که در کاغذ دیده می‌شود سهم مهمی در طبیعت نوار موبیوس دارد. برای اینکه طبیعت نوار موبیوس را بهتر درک کنیم می‌توانیم سه استوانه که با هم زاویهٔ 60° می‌سازند درنظر بگیریم و نواری را مانند شکل ۳ دور آن بپیچانیم. نوار کاغذ می‌تواند

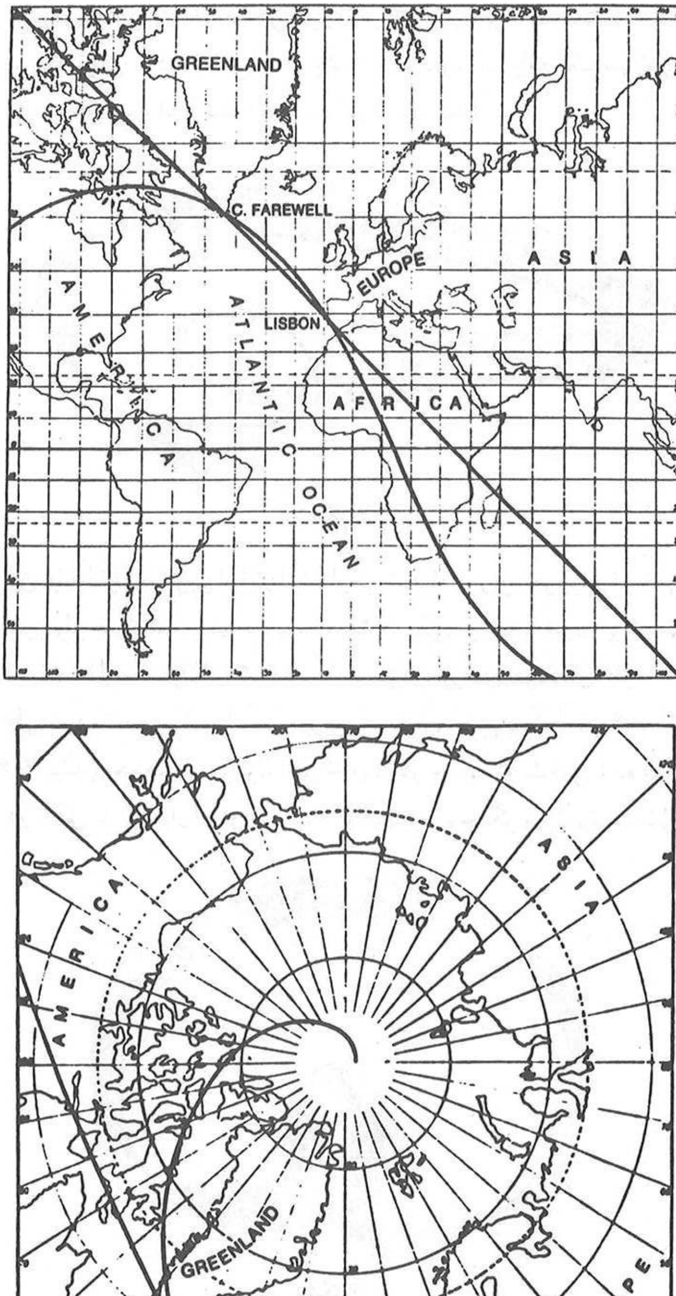


شکل۲

بدون اینکه بخشی از آن جمع یا کشیده شود دور استوانه‌ها بچرخد و نوار موبیوس درست کند. این نشان می‌دهد که اگر مردم روی سیاره‌ای به‌شکل نوار موبیوس زندگی کنند می‌توانند یک سیستم خط موازی و عمودهایی که زاویهٔ ۹۰° می‌سازند به‌کار ببرند. نقشه‌کشهای آنها خوشحال خواهند بود چون نقشه‌های آنها تخت و صاف‌اند و طول خمهای روی نقشه متناسب با طول واقعی آنها خواهد بود. همین‌طور مساحتها با مساحتهای واقعی تناسب خواهند داشت. همه می‌دانیم که نقشه‌های کرهٔ زمین چنین خاصیتی ندارند.

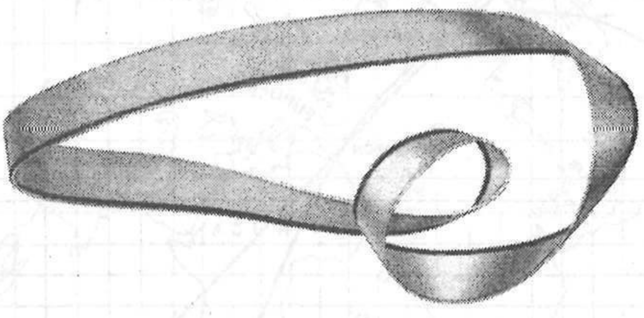


شکل۳


GREENLAND
C. FAREWELL
EUROPE
ASIA
AMERICA
ATLANTIC OCEAN
LISBON
AFRICA
AMERICA
ASIA
GREENLAND
C. FAREWELL
EUROPE

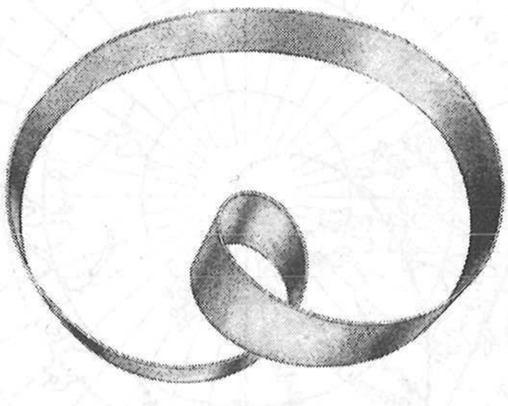
شکل۴

اگر نوار موبیوس را از روی خط مشکی موازی مرزش ببریم، برخلاف استوانه به دو تکهٔ جدا ازهم تبدیل نمی‌شود. بلکه نواری به‌دست می‌آید که پشت و رو دارد. در واقع یک سر نوار $360°$ پیچانده شده و سپس به سر دیگر چسبانده شده است (شکل ۵ را ببینید).



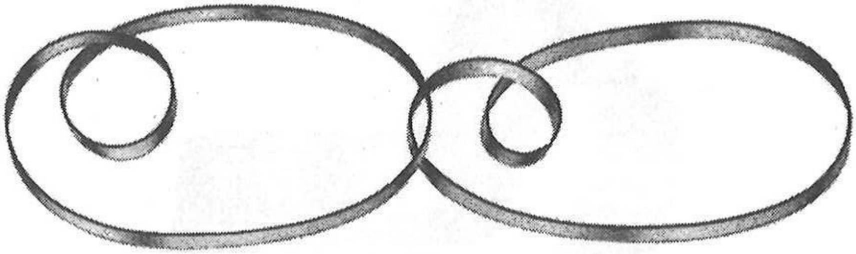
شکل۵

تفاوت اساسی این نوار با نوار موبیوس از اینجا آشکار می‌شود که مرز نوار موبیوس از خمی بسته تشکیل شده است، اما مرز نوار جدید شامل دو خم بسته است که یکی از آنها با قیچی بریده شده است. پس این نوار از این جهت به لولهٔ استوانه‌ای شبیه است که هردو مرزهای دوتکه‌ای دارند. در شکل ۵ مرز بریده‌شده با خطی تیره مشخص شده است. مرز نوار موبیوس خمی بسته است که به خود گره نخورده است (شکل ۶ را ببینید). همچنین مرز لولهٔ استوانه‌ای از دو خم بسته تشکیل شده است که به‌هم گره نخورده‌اند. اما در شکل ۵ مرز نوار از دو خم بسته که از درون همدیگر می‌گذرند تشکیل شده است.



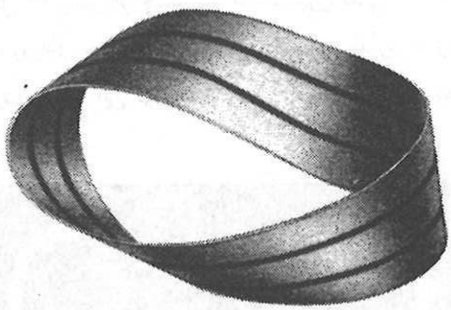
شکل۶

رویه‌ای دیگر وجود دارد که دقیقاً خواص شکل ۶ را دارد ولی با آن متفاوت است و آن تصویر شکل ۶ درون آینه است. اگر مانند قبل دوباره شکل ۶ را از روی خطی موازی با مرزهای آن قیچی کنیم، دو نوار تابدار به‌دست می‌آید که از درون هم رد شده‌اند (شکل ۷ را ببینید).



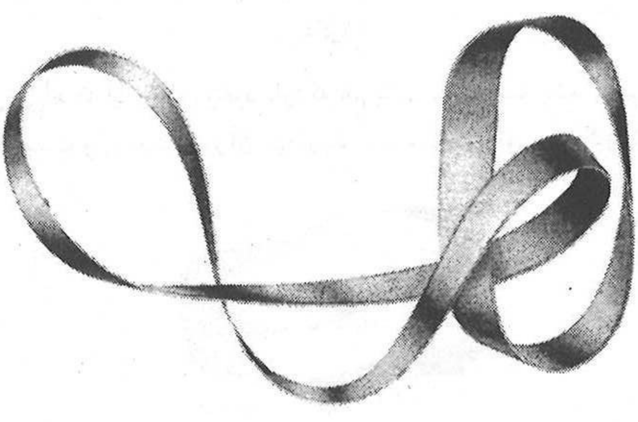
شکل۷

هر دو نوار تابدار از نوع نوار شکل ۶ هستند. اگر نواری موبیوس درنظر بگیریم و از فاصلهٔ یک‌سوم باریکی با قیچی ببریم حاصل این کار از دو نوار تشکیل خواهد شد (شکل ۸ را ببینید).

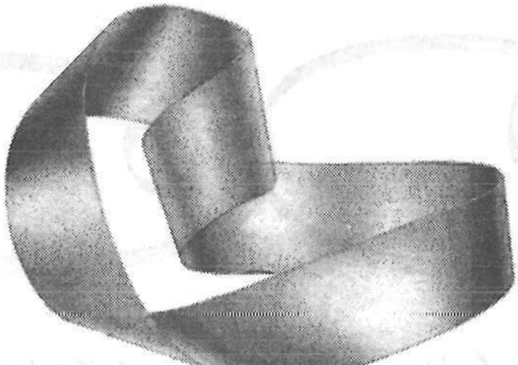


شکل۸

یکی از آنها نوار کوتاهی است که در میانهٔ نوار موبیوس قرار گرفته و خود نوار موبیوس است. دیگری همان نواری است که در شکل ۶ دیدیم. این دو نوار در هم گره خورده‌اند (شکل ۹ را ببینید).

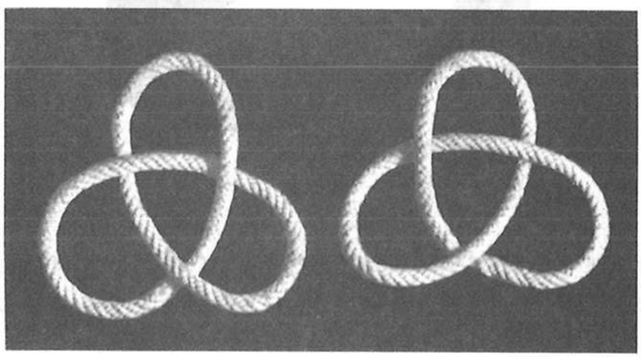


شکل۹



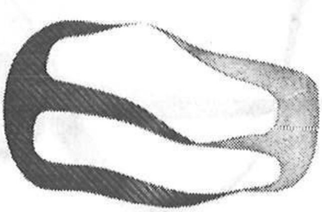
شکل۱۰

اگر نوار را مانند شکل ۱۰ پیش از چسباندن سه نیمدور، یعنی 540°، بچرخانیم و سپس دو سر آن را به‌هم بچسبانیم دوباره رویه‌ای به‌دست می‌آید که پشت و رو ندارد. مرز این رویه خمی بسته است، اما این‌بار این خم گره خورده است. این گره یکی از دو گره زیر است که تصویر آینه‌ای یکدیگرند ولی با هم یکی نیستند:



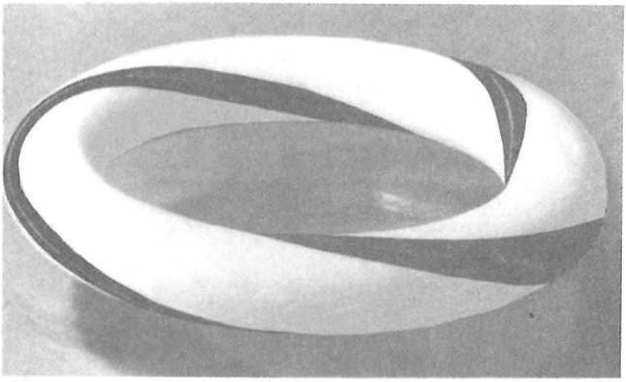
شکل۱۱

این سؤال پیش می‌آید که آیا رویه‌ای وجود دارد که هم پشت و رو داشته باشد و هم مرز آن گره‌خورده باشد؟ شکل زیر پشت و رو دارد و مرز آن تنها از یک خم بستهٔ گره‌خورده تشکیل شده است:



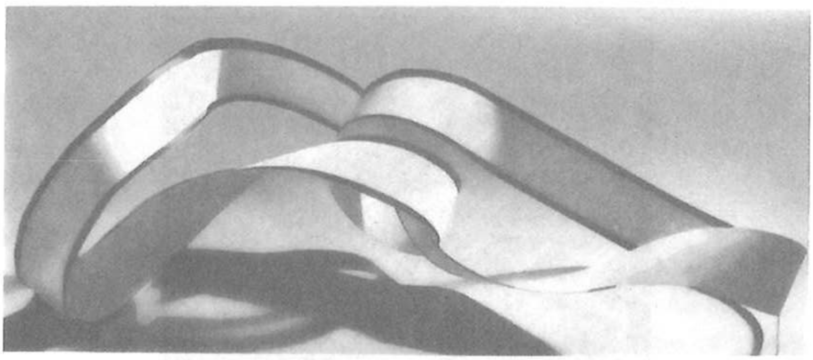
شکل۱۲

روی یک چنبره خط سیاهی می‌کشیم که گره‌ای مانند یکی از گرههای شکل ۱۱ به‌دست دهد:



شکل۱۳

با بریدن از روی این خط، چنبره به دو نوار مانند شکل ۱۰ که درون هم گره خورده‌اند افراز می‌شود. هریک از این دو نوار مرزی به‌صورت یکی از گرههای شکل ۱۱ دارد که این دو نیز در هم گره خورده‌اند:



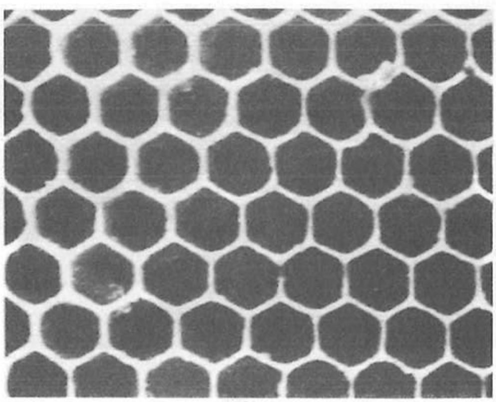
شکل۱۴

گرههای شکل ۱۱ را درنظر بگیرید. آیا می‌توانید ثابت کنید این دو گره را نمی‌توان به‌هم تبدیل کرد؟ آیا می‌توان نوارهایی را که این گرهها مرز آنها هستند به‌هم تبدیل کرد؟ آیا می‌توان هریک از این نوارها را به نوار موبیوس تبدیل کرد؟ آیا می‌توانید رویه‌ای بسازید که پشت و رو نداشته باشد، ولی مرزش نه‌تنها خمی بسته، بلکه دایرهٔ کامل هم باشد؟ آیا هر گره‌ای می‌تواند مرز رویه‌ای دوبعدی باشد؟

۲

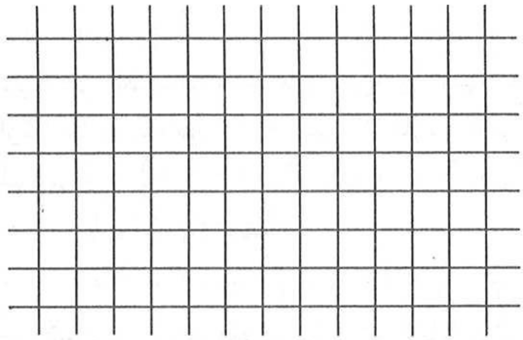
کاشیکاری

یک شانهٔ عسل به ما نشان می‌دهد که چگونه می‌توان صفحه را با کاشیهای شش‌ضلعی کاشیکاری کرد (شکل ۱ را ببینید). حداکثر سه کاشی شش‌ضلعی یکدیگر را در یک نقطهٔ مشترک قطع می‌کنند. این تنها کاشیکاری صفحه است که در هر گوشه تنها سه کاشی به‌هم می‌رسند.

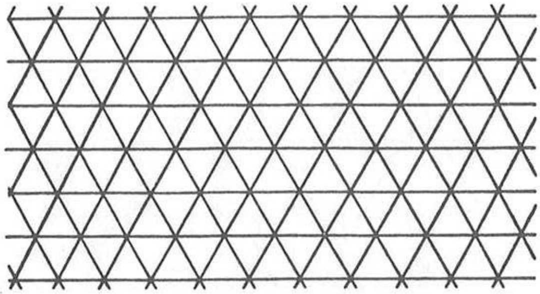


شکل۱

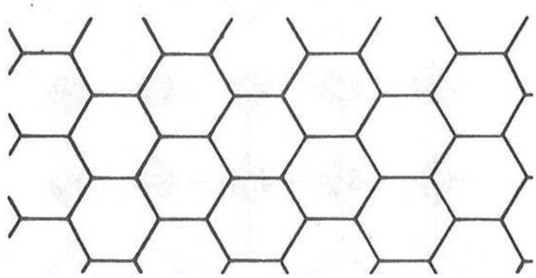
اگر بخواهیم از کاشیهای یکشکل و منتظم استفاده کنیم، کاشیکاریهای شکلهای ۲، ۳ و ۴ تنها کاشیکاریهای ممکن‌اند. با اندکی تمرین می‌توانید به‌شکل ۳ طوری نگاه کنید که آن‌را اندکی بالاتر از صفحه ببینید. این پدیده نتیجهٔ طبیعت سه‌بعدی کردن دو چشم ماست. تصویر دو مثلث متفاوت در شبکیهٔ چشمهای چپ و راست ما در مغز به‌عنوان تصویر یک مثلث که اندکی بالاتر از صفحه قرار دارد انگاشته می‌شود. از شکل ۲ می‌توان کاشیکاری شکل ۵ را که از چهارضلعیهای برابر تشکیل شده است به‌دست آورد.



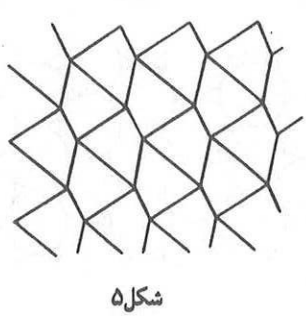
شکل۲



شکل۳



شکل۴

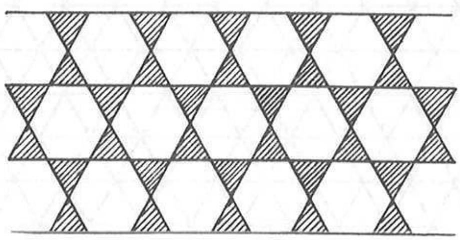


شکل۵

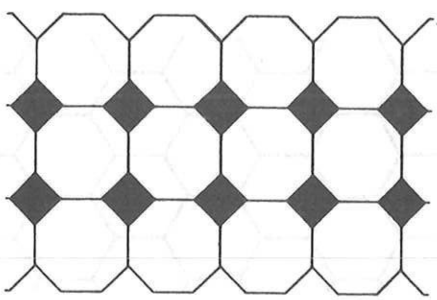
همچنین می‌توان چندین کاشیکاری با کاشیهای متفاوت ولی منتظم ساخت، به‌طوری که هر گوشه از به هم رسیدن تعداد ثابتی کاشی شکل گرفته باشد. علاوه براین، این کاشیها باید به همان شکل باشند که در هر گوشهٔ دیگری از کاشیکاری دیده می‌شود. به چنین کاشیکاریی، کاشیکاری همگن می‌گوییم. هر زاویهٔ n ضلعی منتظم کسر $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{n}$ از ۳۶۰° است. برای به‌دست آوردن کاشیکاری همگن باید اعداد صحیح n، p، q، r و ... را پیدا کنیم به‌طوری‌که

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{n} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{p} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{q} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{r} + \cdots = ۱$$

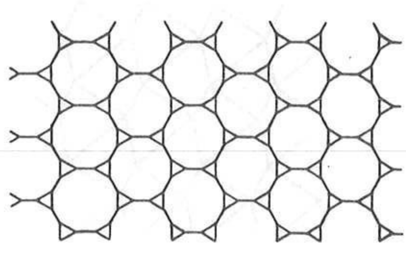
این محاسبات، ۱۷ الگوی متفاوت به‌دست می‌دهد که تنها ۱۱ تا از آنها را می‌توان به یک کاشیکاری از تمام صفحه تبدیل کرد بدون اینکه کاشیها همدیگر را بپوشانند. سه‌تا از آنها قبلاً نمایش داده شده‌اند و هشت‌تای دیگر در اینجا آمده‌اند:



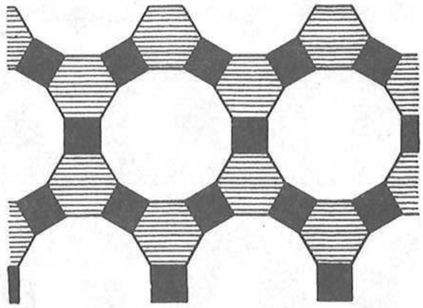
شکل۶



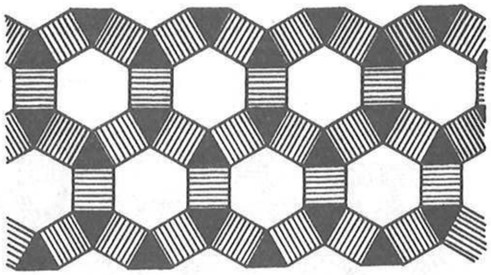
شکل۷



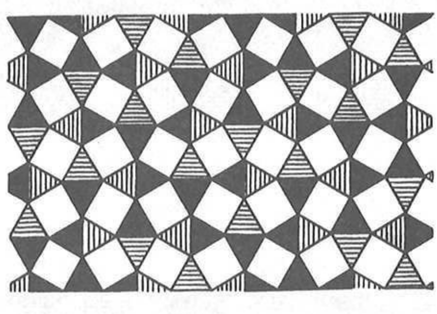
شکل۸



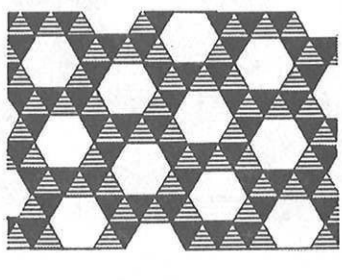
شکل۹



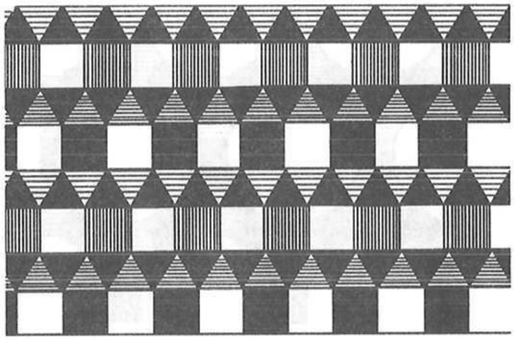
شکل۱۰



شکل۱۱

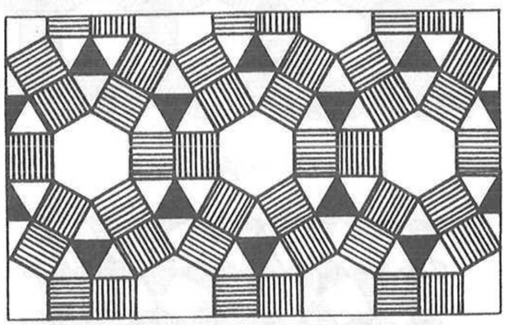


شکل۱۲

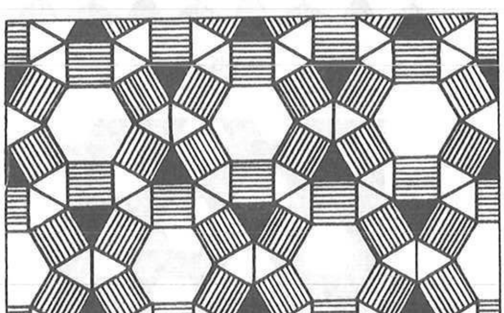


شکل۱۳

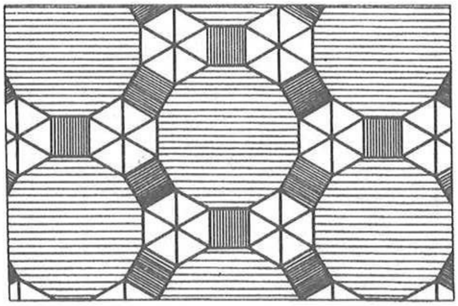
کاشیکاریهای ناهمگنی هم وجود دارند که زیباترند (شکلهای ۱۴ تا ۱۸ را ببینید). البته تعداد کاشیکاریهای ناهمگن نامتناهی است.



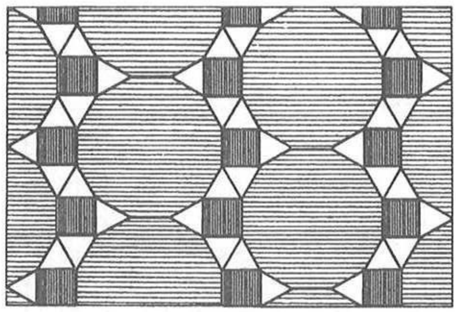
شکل۱۴



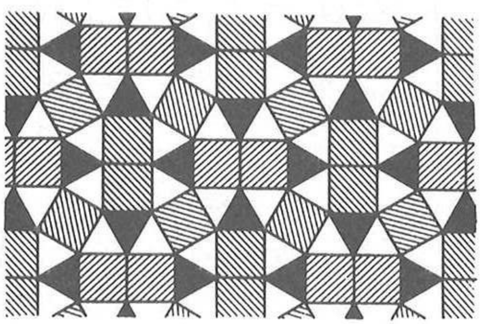
شکل۱۵



شکل۱۶

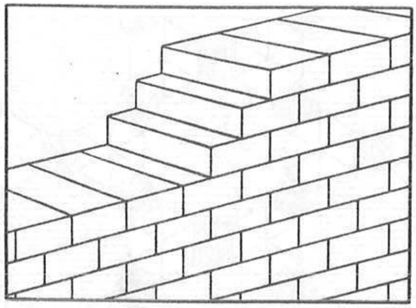


شکل۱۷



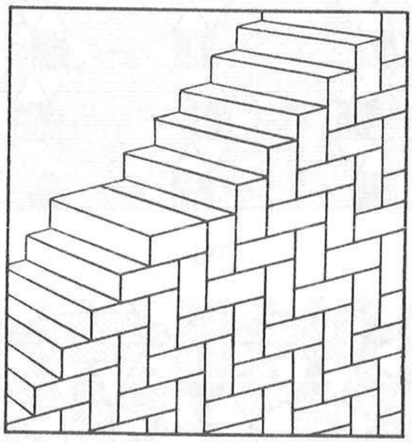
شکل۱۸

از این کاشیکاریها کدام از همه بهتر است؟ بدون شک آن‌که در طبیعت ظاهر می‌شود. کاشیکاری شش‌ضلعی که در کندوی عسل دیده می‌شود بهترین کاشیکاریهاست. اگر بخواهیم ناحیهٔ بزرگی را به‌صورت شکلهای ۲، ۳ یا ۴ مرزبندی کنیم به‌طوری‌که هر سلول یک سانتیمترمربع مساحت داشته باشد، مرزبندی کندوی عسل که با شش‌ضلعی‌ها صورت می‌گیرد بهترین کاشیکاری است، زیرا طول مرزها در این مرزبندی کمترین مقدار ممکن است. در مورد کاشیکاریهای ناهمگن نکات بسیار جالبی می‌توان مطرح کرد. مثلاً به کاشیکاری معمولی که با آجرچینی ردیفی تولید می‌شود توجه کنید:



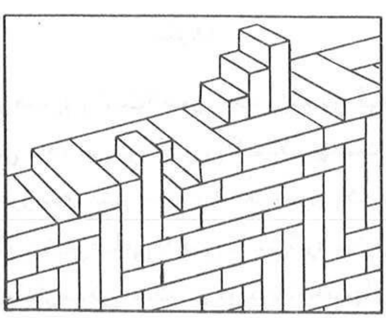
شکل۱۹

یک زمین‌لرزهٔ خفیف ممکن است لایه‌ها را به‌طور موازی از هم جدا سازد. اما الگوهای دیگری هم برای آجرچینی وجود دارد. مانند شکل زیر که به بهترین شکل در برابر حرکتهای موازی مقاومت می‌کند:



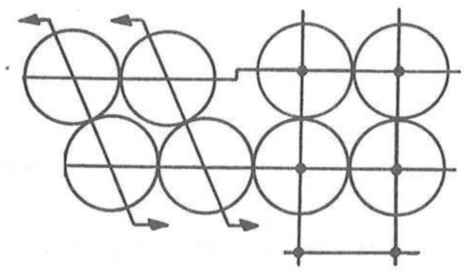
شکل۲۰

الگوهای دیگری نیز وجود دارند که در برابر حرکتهای موازی مقاومت می‌کنند ولی هیچ‌کدام به‌خوبی نمونهٔ بالا نیست:



شکل۲۱

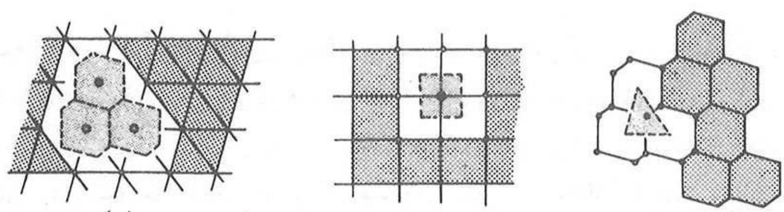
الگوهای کاشیکاری منتظم به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند. مثلاً الگوهای متفاوتی برای چیدن پرتقال در جعبه وجود دارد. یک الگو، همان الگوی سطری و ستونی است که آشناترین الگوی منظم در ذهن ماست، چرا که در دوران دبستان برای آموزش ضرب از این الگو استفاده می‌شود (شکل ۲۲ (الف) را ببینید). الگوی دیگر همان الگوی کندوی عسل است. پرتقالها را چنان قرار دهید که هر پرتقال به درون یک سلول کندو مماس شود (شکل ۲۲ (ب) را ببینید). در این‌صورت الگویی برای چیدن پرتقال به‌دست می‌آید که بهترین الگوی ممکن برای چیدن پرتقال است.



(ب) (الف)

شکل۲۲

حال اگر به الگوی لانه‌زنبوری توجه کنیم، می‌بینیم که مرکز پرتقالها الگوی کاشیکاری مثلثی را به‌دست می‌دهند (شکل ۲۳ (الف) را ببینید). این امر ایدهٔ دوگانی کاشیکاریهای منتظم است. اگر مرکز هر کاشی را به مراکز کاشیهای همسایه که در یک ضلع با کاشی ما مشترک‌اند، وصل کنیم، کاشیکاری جدیدی به‌دست می‌آید که دوگان کاشیکاری اولیه است. کاشیکاری مربعی دوگان خودش است و کاشیکاری لانه‌زنبوری دوگان کاشیکاری مثلثی است (شکلهای ۲۳ (ب) و (ج) را ببینید). می‌توان به‌راحتی دید که اگر از کاشیکاری دوگان، دوباره دوگان بگیریم همان کاشیکاری اولیه به‌دست می‌آید. به‌عنوان تمرین دوگان کاشیکاریهای همگن را به‌دست آورید و بگویید کدامها همگن می‌مانند.



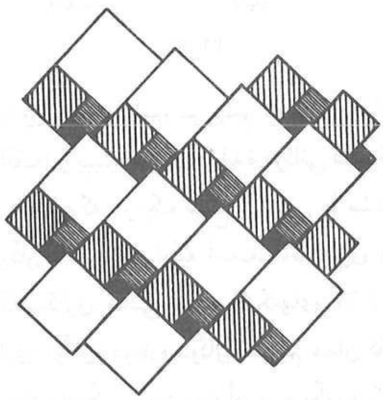
(ج) (ب) (الف)

شکل۲۳

۳

رنگ‌آمیزی نقشه

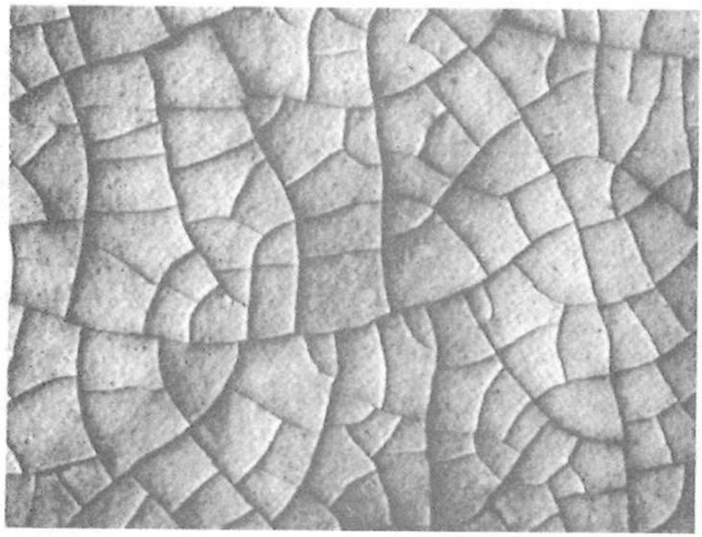
به کاشیکاری زیر که از چهار نوع کاشی مربع‌شکل با اندازه‌های مختلف تشکیل شده است توجه کنید:



شکل۱

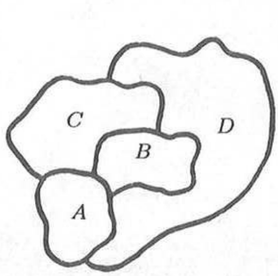
این کاشیها با چهار رنگ رنگ‌آمیزی شده‌اند و هیچ دو مربع همرنگی همسایه نیستند. دو کاشی را همسایه می‌نامیم هرگاه در تمام یا در قسمتی از یک ضلعشان مشترک باشند. آیا می‌توان تنها از سه رنگ برای رنگ‌آمیزی این کاشیکاری استفاده کرد به‌طوری‌که هیچ دو کاشی همسایه‌ای همرنگ نباشند؟ اگر اندکی سعی کنید خواهید دید که این کار ممکن نیست. حال به کاشیکاریهای منتظم توجه کنید. کاشیکاریهای منتظم مربعی و مثلثی را می‌توان با دو رنگ رنگ‌آمیزی کرد و به رنگ‌آمیزی همگن رسید. به کاشیکاریهای فصل گذشته نگاه کنید و به این سؤال بیندیشید که آیا می‌توان با چهار رنگ هریک از این کاشیکاریها را رنگ‌آمیزی کرد؟ همچنین برای هر شکل حداقل تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی مناسب را مشخص کنید. سؤال جالب دیگر این است که آیا می‌توان برای کاشیکاریهای همگن رنگ‌آمیزی همگن به‌دست آورد؟

در طبیعت با کاشیکاریهای نامنتظم بسیاری مواجه می‌شویم. مثلاً الگویی که در ساحل رودخانه پس از خشک‌شدن گلها می‌بینیم بسیار نامنظم است:



شکل۲

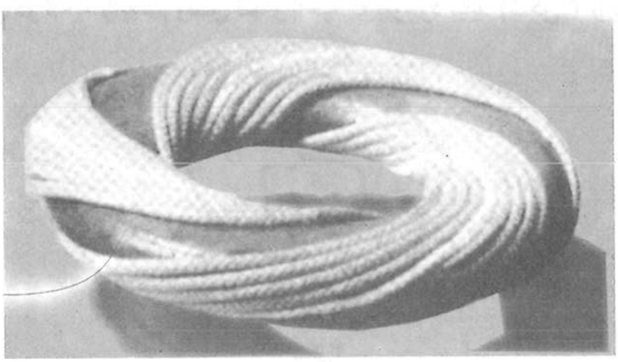
جالب است که در بالا همیشه زاویه‌های هر ناحیه قائمه‌اند. این حقیقت به‌نوعی از طبیعت انقباضی خشک‌شدن گلها نتیجه می‌شود. در هر حال ما به رنگ‌آمیزی چنین مرزبندیهای نامنظمی علاقه‌مندیم. برای اینکه مسأله را بهتر بفهمیم فرض کنید الگوی ما ابتدا تنها از دو ناحیهٔ A و B تشکیل شده باشد و خط جدیدی این دو ناحیه را به هم وصل کند و ناحیهٔ C به‌وجود بیاید (شکل ۳ را ببینید).



شکل۳

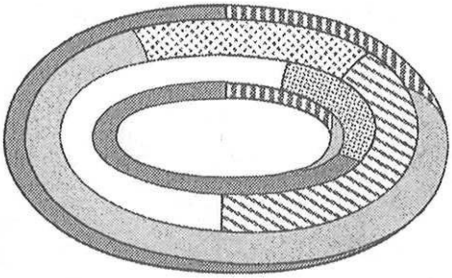
هر خط جدید که اضافه می‌کنیم اگر از وسط مرزها شروع شود یک ناحیه و سه کمان مرزی به تعداد کمانها اضافه می‌کند. یک کمان از خود این خط تشکیل شده است و دو کمان از تقسیم کمانهای قدیمی به دو قسمت اضافه شده‌اند. پس از n مرحله، n ناحیه و $3n$ کمان به تعداد ناحیه‌ها و کمانها اضافه

می‌شود. پس هنگام پایان مرحلهٔ nام $n+۲$ ناحیه و $۳n+۳$ کمان داریم. بیایید این ایده را برای نقشه‌ها به‌کار ببریم. اگر ما قسمت خارجی را که همان اقیانوس است به‌عنوان یک ناحیه حساب کنیم، $n+۳$ ناحیه و $۳n+۳$ کمان داریم. هرکمان تنها دو ناحیه را قطع می‌کند و با رسم آن تعداد روابط همسایگی دو تا زیاد می‌شود. ناحیهٔ X همسایهٔ Y و ناحیهٔ Y همسایهٔ X است. پس در مرحله nام $۶n+۶$ رابطهٔ همسایگی داریم و میانگین همسایگان یک کشور $\frac{۶n+۶}{n+۳} = ۶ - \frac{۱۲}{n+۳}$ است. اگر کشوری به k استان تقسیم شده باشد، میانگین همسایگان هر استان $۶ - \frac{۱۲}{k+۱}$ است. این عدد کمتر از ۶ است ولی به ۶ میل می‌کند. حال می‌خواهیم اقیانوس و خط ساحلی را فراموش کنیم و به‌عنوان مرز حساب نکنیم. در این صورت یک کشور و حداقل ۶ همسایگی از تعداد قبلی کم شده است. چون میانگین همسایگان یک کشور اکیداً کمتر از $۶ - \frac{۱۲}{k+۱}$ خواهد بود، این میانگین لزوماً عددی کوچکتر از ۶ است. برای کشوری که ۵ همسایه دارد چهار رنگ متفاوت برای یک رنگ‌آمیزی مناسب احتیاج است. با توجه به آنچه گفتیم انتظار می‌رود چهار رنگ تعداد مناسبی رنگ برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ها باشد. اگر به نقشه‌های ایران و یا کشورهای جهان یا به کرهٔ جغرافیا نگاه کنید، می‌بینید که در هریک از آنها تنها چهار رنگ به‌کار رفته است. اثبات اینکه تنها چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی مناسب هر نقشه‌ای کافی است بسیار مشکل است و برای بعضی از مراحل آن از کامپیوتر استفاده شده است. این مسأله سالها مسأله‌ای حل‌نشده بوده است. حال مسألهٔ جدیدی را درنظر بگیرید. اگر سیارهٔ ما کروی یا مسطح نبود، چند رنگ برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ها احتیاج داشتیم؟ مثلاً فرض کنید ما موجوداتی بودیم که روی سیاره‌ای به‌شکل تیوپ لاستیک ماشین زندگی می‌کردیم. چنین شکلی را چنبره می‌نامند. مثلاً هر حلقهٔ لاستیکی به‌شکل زیر چنبره است:



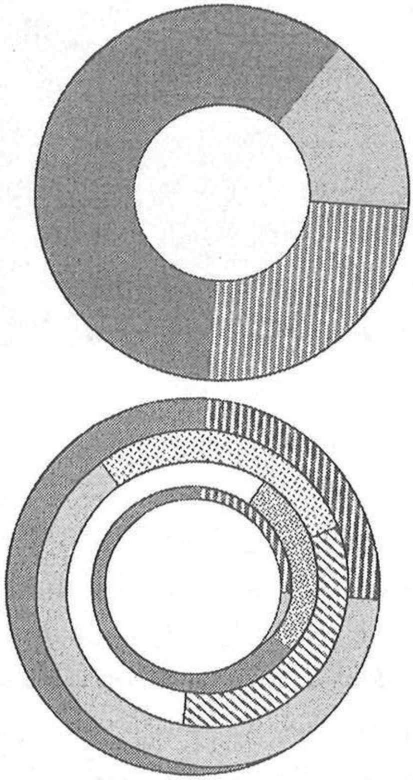
شکل۴

اگر مرزهایی روی سیاره‌ای چنبره‌ای درنظر بگیریم، برای رنگ‌آمیزی نقشهٔ کشورها به چند رنگ نیاز داریم؟ رنگ‌آمیزی صفحه بعد از چنبره را درنظر بگیرید:



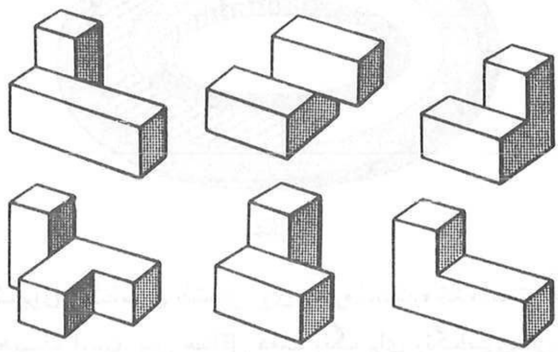
شکل۵

در اینجا از هفت رنگ برای رنگ‌آمیزی نقشه‌ای روی چنبره استفاده شده است. هر کدام از این کشورها با شش کشور دیگر همسایه است. پس حداقل هفت رنگ برای رنگ‌آمیزی این نقشه احتیاج داریم. اگر یک نقشه دلخواه دیگر روی چنبره درنظر بگیریم، با همین هفت رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی مناسبی برای آن به‌دست آورد به‌طوری‌که هیچ دو کشور همسایه‌ای همرنگ نباشند. در شکل زیر رنگ‌آمیزی ارائه‌شده برای چنبره از بالا و پایین نمایش داده شده است:



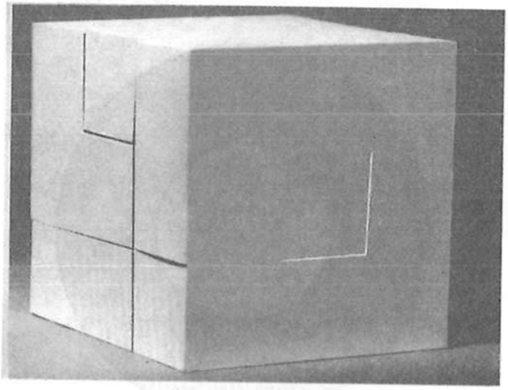
شکل۶

همین سؤال را در مورد اشکال سه‌بعدی نیز می‌توان مطرح کرد. بازی زیر را که از شش قطعهٔ چوبی تشکیل شده است درنظر بگیرید:



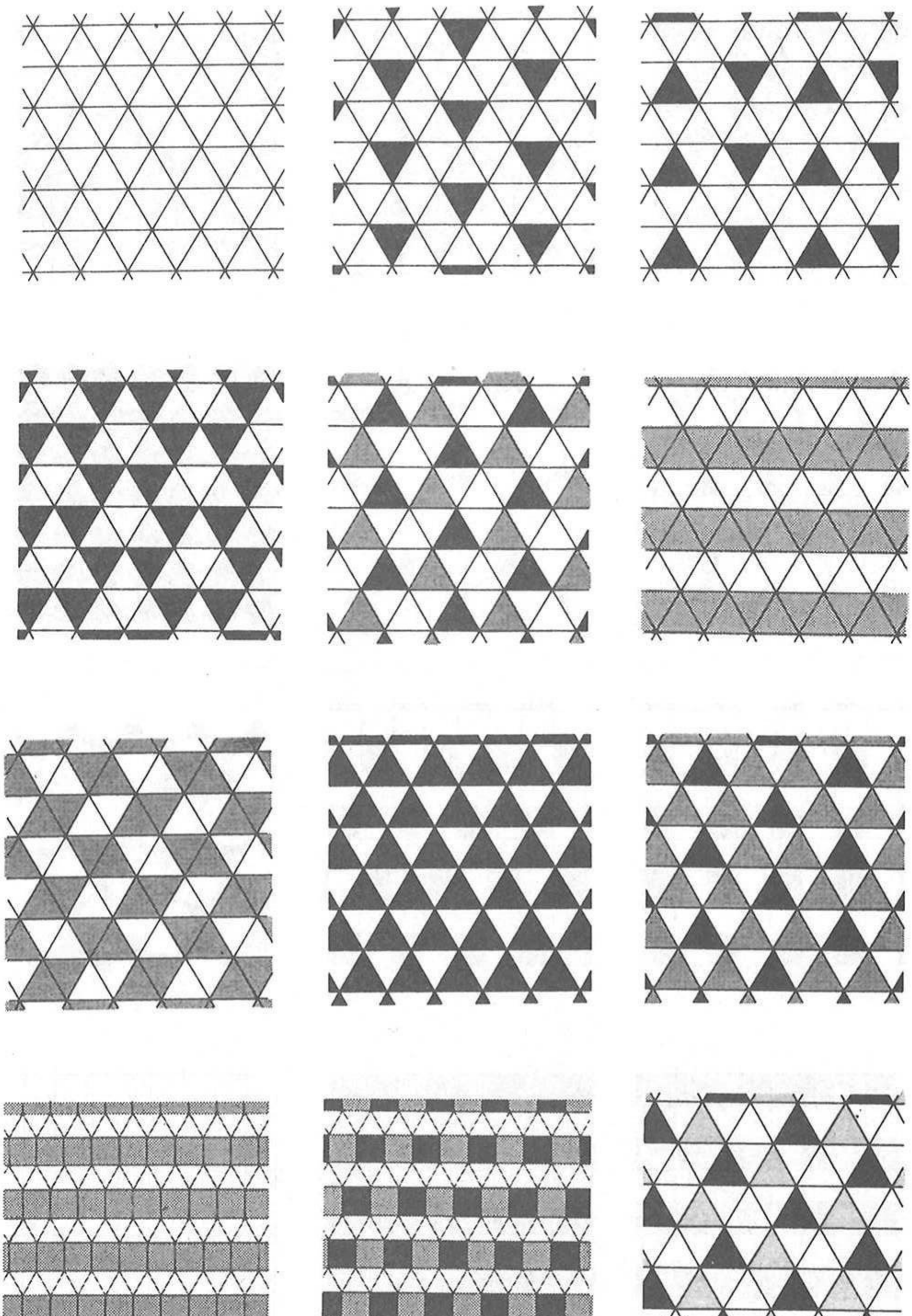
شکل۷

می‌توان این قطعات را کنار هم چید تا مکعب درست شود (شکل ۸ را ببینید).

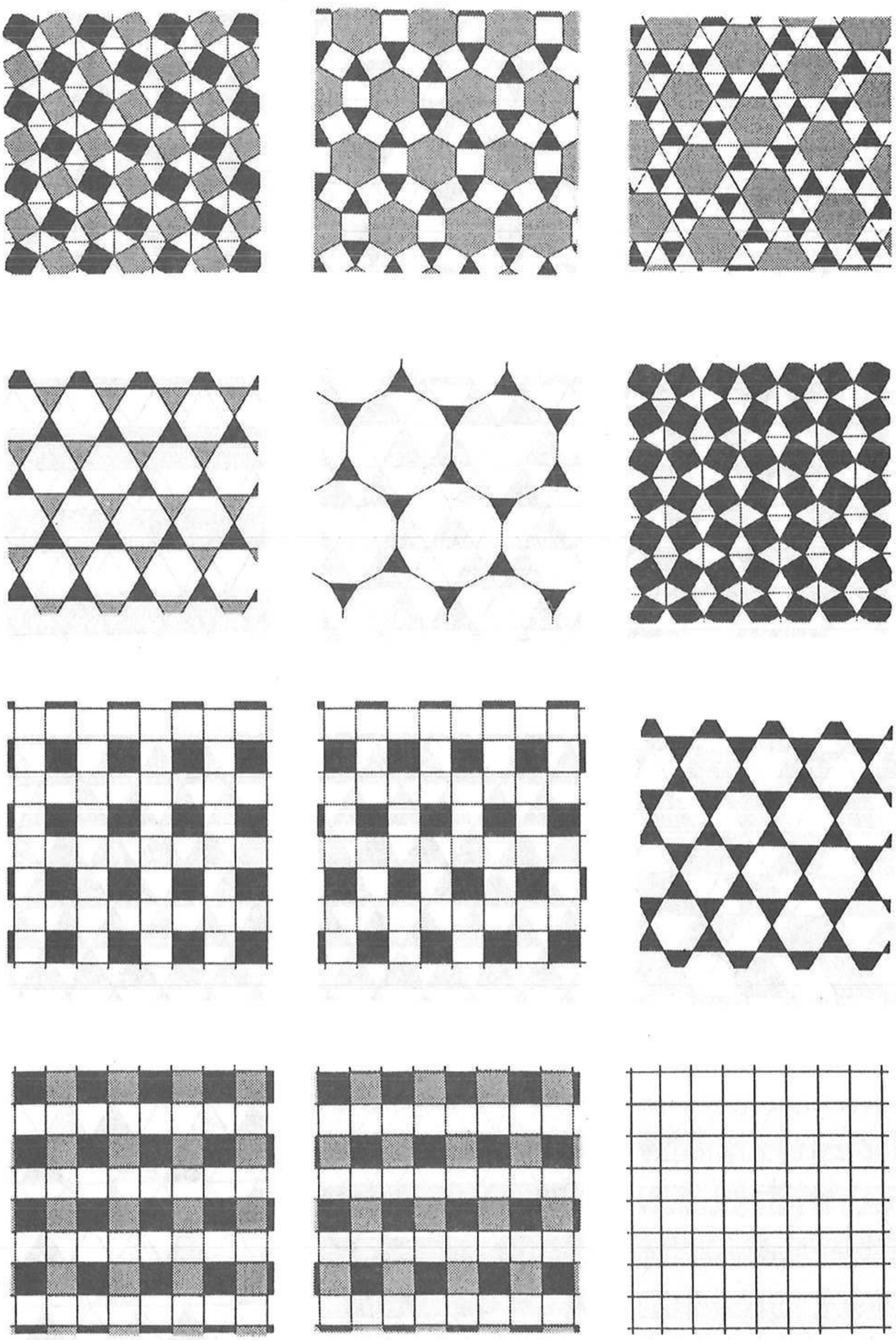


شکل۸

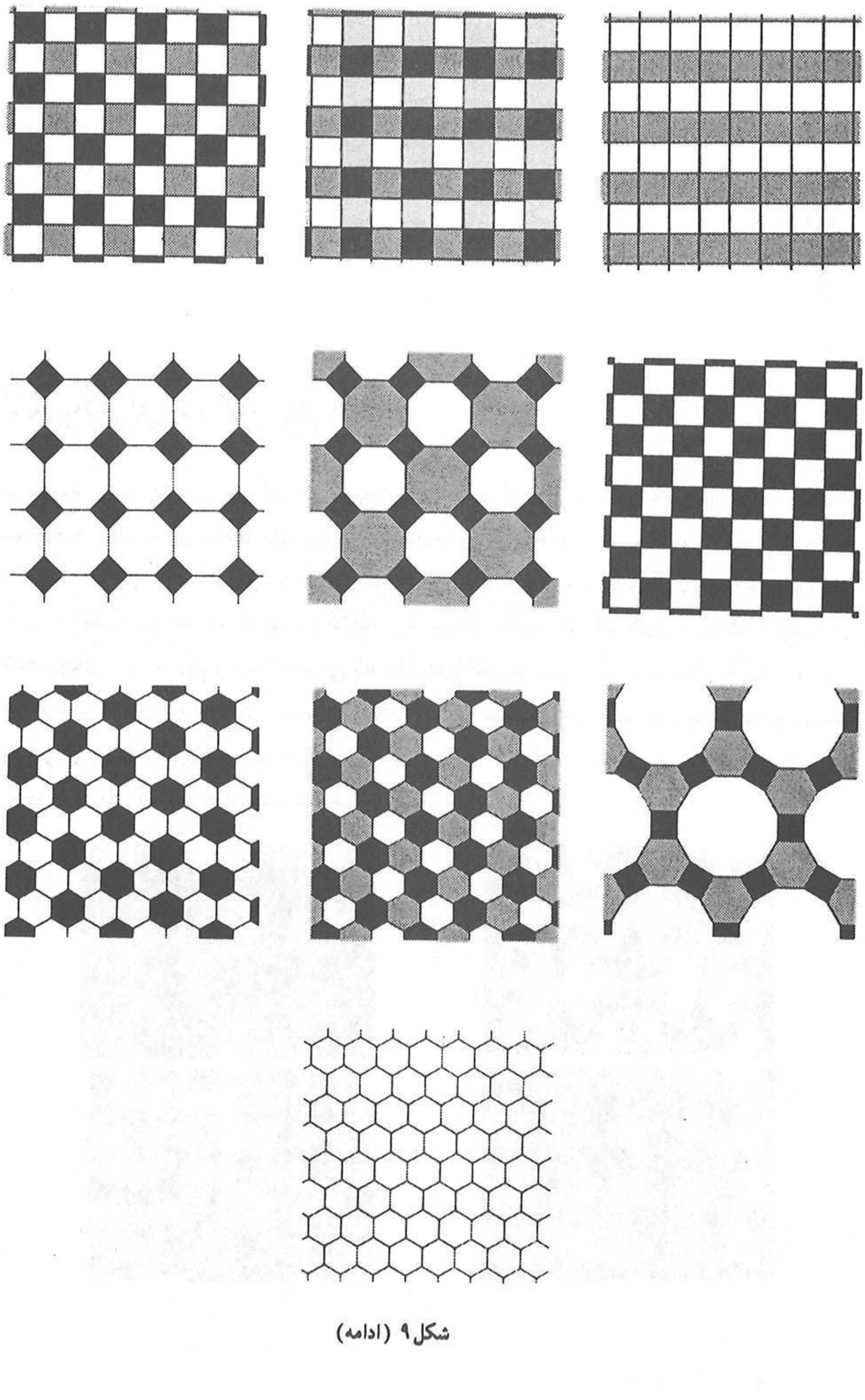
آیا می‌توانید بگویید که حداقل چند رنگ لازم است تا رنگ‌آمیزی مناسبی برای این قطعات به‌دست آورد؟ کوچکترین عددی که برای هر نقشهٔ سه‌بعدی می‌توان رنگ‌آمیزی مناسبی پیدا کرد چه عددی است؟ آیا چنین عددی وجود دارد؟ اگر قوهٔ تخیل قوی دارید سعی کنید از قطعات بالا در ذهنتان یک مکعب درست کنید. خواهید دید که یافتن رنگ‌آمیزی مناسب در سه بعد بسیار پیچیده‌تر از یافتن رنگ‌آمیزی در دو بعد است. آیا می‌توانید الگوهایی بیابید که فضا را از قطعات هم‌شکل پر کنیم؟ در هریک از این الگوها حداقل چند رنگ برای رنگ‌آمیزی مناسب آن الگو احتیاج دارید؟ آیا می‌توانید با چند شکل منتظم همهٔ فضا را پر کنید؟ آیا می‌توانید الگویی همگن برای پوشاندن فضا بیابید؟ در مورد رنگ‌آمیزی این الگوها چه می‌توانید بگویید؟ در هر الگو حداقل چند رنگ برای رنگ‌آمیزی مناسب احتیاج دارید؟ به مثالهای شکل ۹ توجه کنید:



شکل۹



شکل ۹ (ادامه)

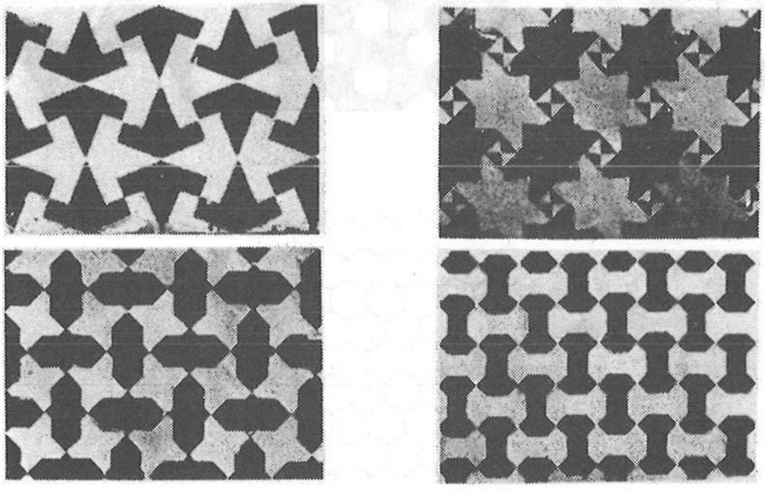


شکل ۹ (ادامه)

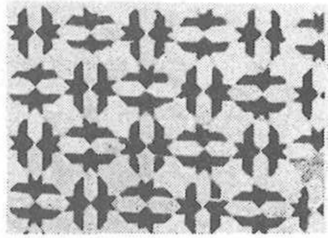
۴

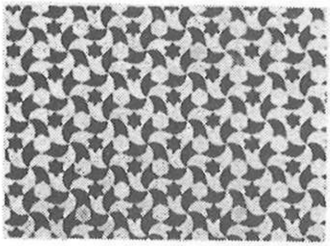
کاشیکاری در تاریخ هنر

هنر کاشیکاری از هنرهای باستانی در تاریخ تمدن است. از زمانی‌که بشر به تزیین بناهای ساختهٔ دست خود پرداخت از سنگها برای پوشانیدن دیوارها و زمین خانه‌اش استفاده کرد. وقتی شروع به انتخاب شکل و رنگ سنگها کرد به طراحی الگوها پرداخت و با گذشت زمان این امر موجب به‌وجود آمدن هنر کاشیکاری شد. در تمدنهای مختلف بر جنبه‌های متفاوتی از کاشیکاری تأکید شده است. در کاشیکاریهای مردمان روم و مدیترانه سعی شده است با کاشیها صورت و صحنه‌های طبیعی به‌وجود بیاید. برعکس، در کاشیکاریهای مسلمانان شکل و رنگ سنگهای استفاده شده بسیار محدود است ولی در عوض الگوهای هندسی بسیار پیچیده‌ای در این کاشیها به‌چشم می‌خورد. کاشیهای زیر در معماری شهرهای اسپانیا به‌کار برده شده‌اند:



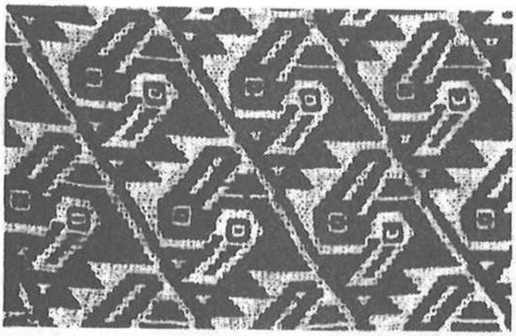
شکل۱





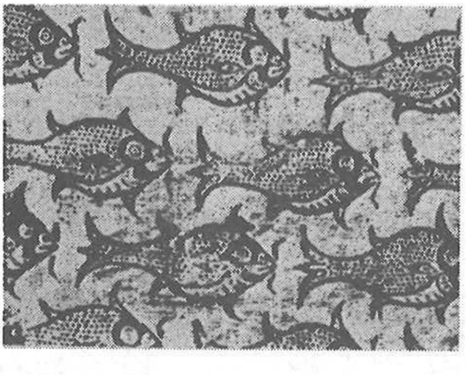
شکل ۱ (ادامه)

البته الگوهایی هم وجود دارند که هم به هندسهٔ کاشیکاریهای مسلمانان نزدیک‌اند و هم مانند کاشیکاریهای مدیترانه‌ای ترسیم موجودات زنده در آنها دیده می‌شود. این الگوها در تمدنهای متفاوتی دیده می‌شوند. الگوی زیر مربوط به دورهٔ پیش از اینکا در پرو می‌باشد که در طرحی روی پارچه ترسیم شده است:



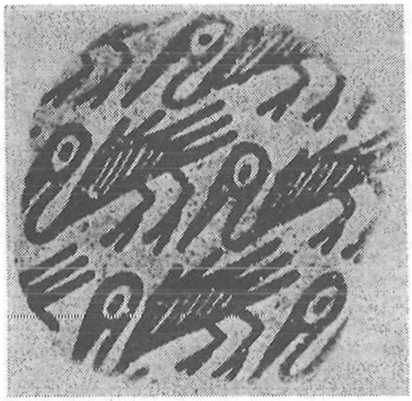
شکل۲

در تمدن هند نیز الگوهای منظمی از موجودات زنده در طرحهای پارچه‌های قدیمی دیده شده است:



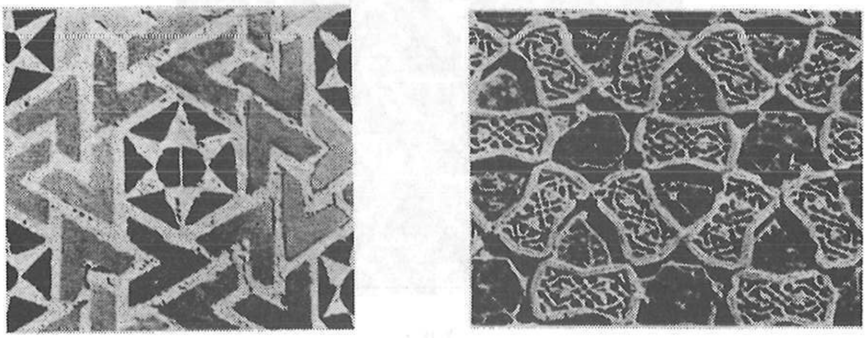
شکل۳

الگوی بعد از طرحهای روی کوزه‌های کشف شده در آریزونا به‌دست آمده است:



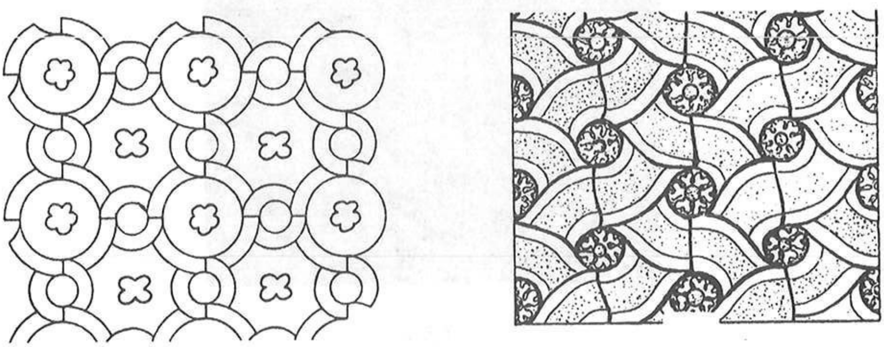
شکل۴

الگوهای زیر از آسیای میانه پیش از حملهٔ مغول در ۱۲۵۹ میلادی به یادگار مانده‌اند:

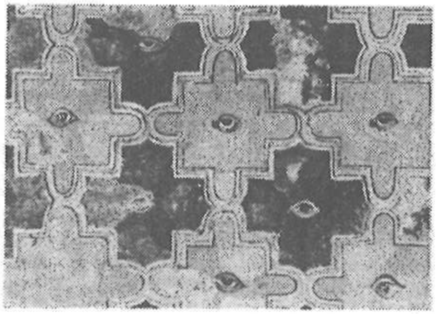


شکل۵

طرحهای زیر در انگلستان و هلند به‌کار برده شده‌اند، و هریک بیش از پانصد سال قدمت دارد:

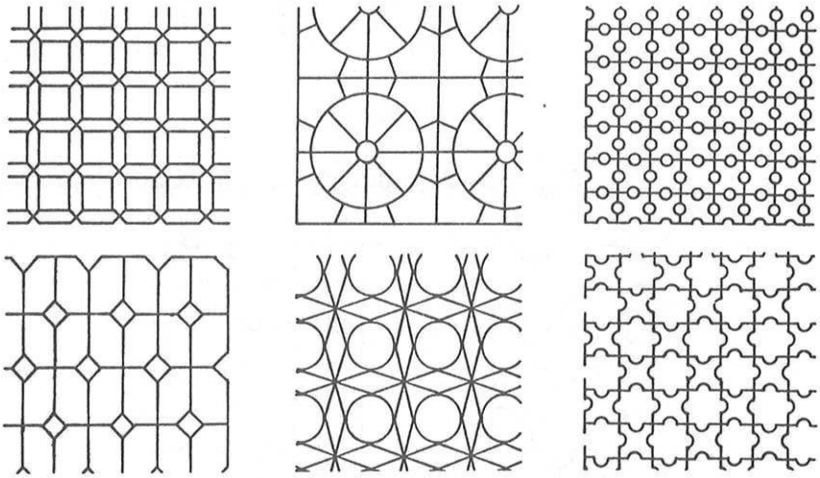


شکل۶



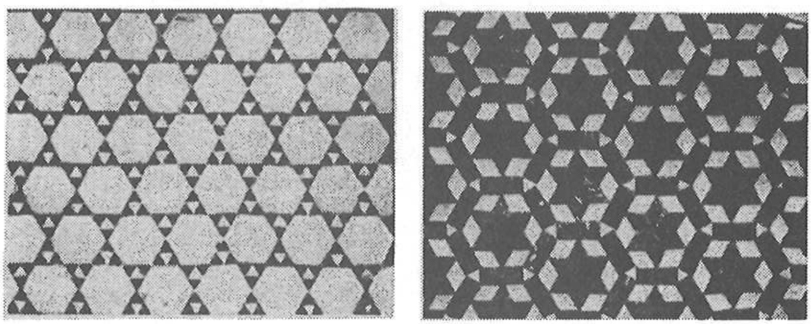
شکل ۶ (ادامه)

درکاشیکاریهای قرن پانزدهم میلادی که در پرتغال پیدا شده الگوهای زیر به‌کار برده شده است:



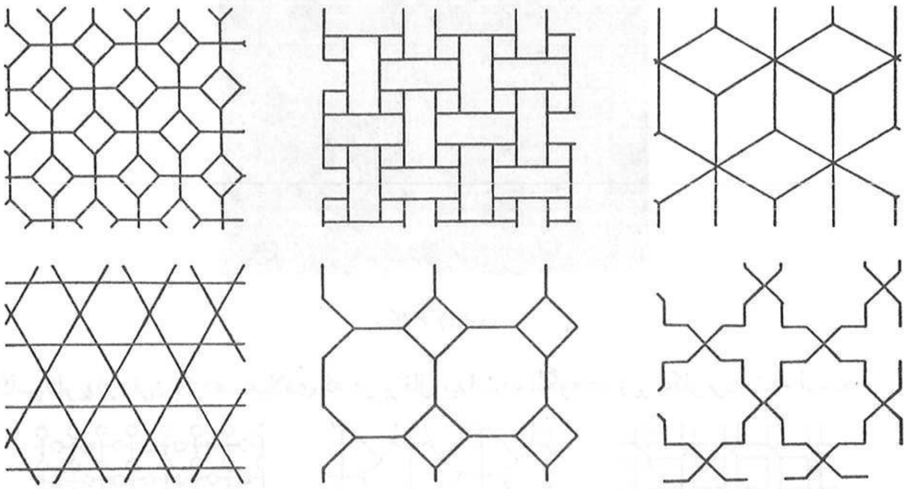
شکل۷

کاشیکاریهای زیر که با سنگهای مرمر انجام شده در کلیساهای قرن سیزدهم به‌کار برده شده است:



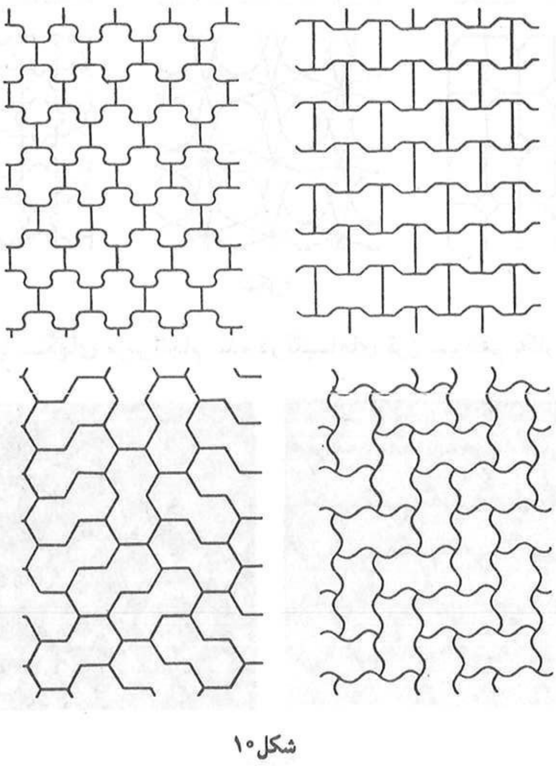
شکل۸

کاشیکاریهای زیر در اروپا و خاورمیانه بسیار دیده می‌شوند:



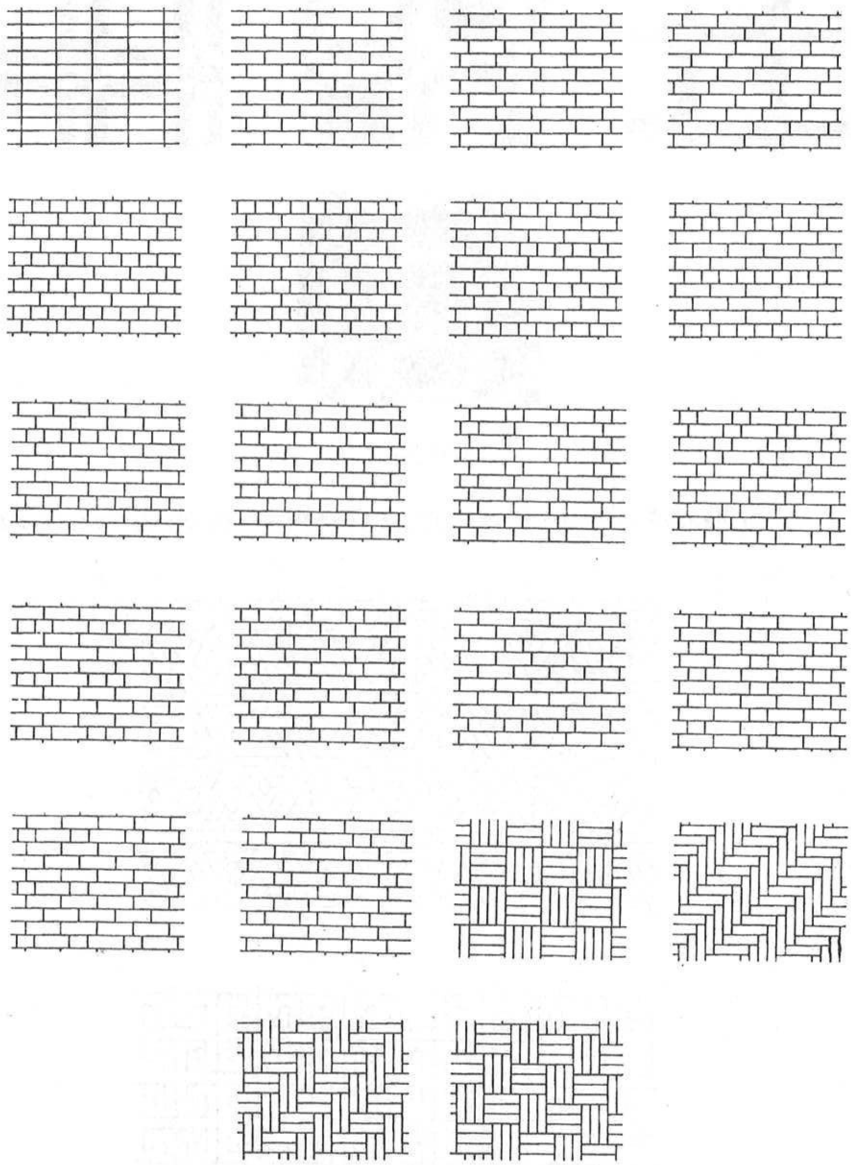
شکل۹

این‌هم چند نمونه از کاشیکاریهایی که در کف خیابانها به‌چشم می‌خورد:



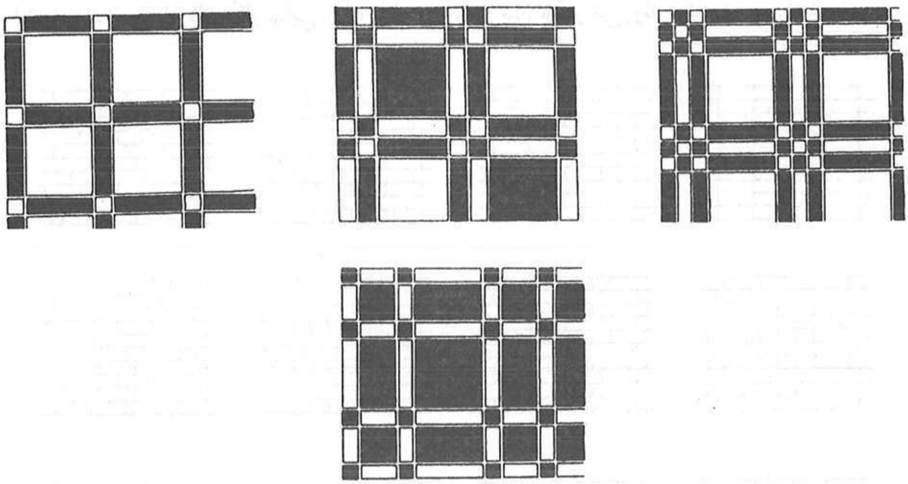
شکل۱۰

در اینجا چند نمونه از کاشیکاریهایی را که با آجر برای تزیین به‌کار می‌روند مشاهده می‌کنید:



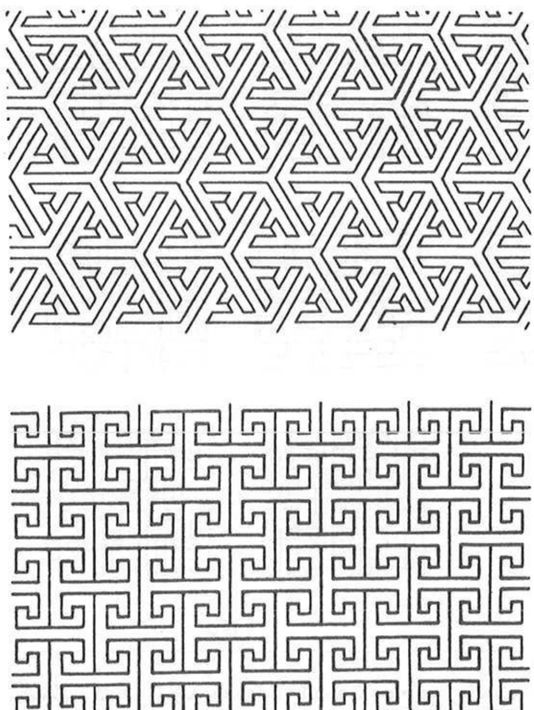
شکل۱۱

توجه کنید که بسیاری از الگوهایی که در اینجا آمده‌اند از اهمیت خاص ریاضی نیز برخوردارند. مثلاً مثالهای شکل ۱۲ از رنگ‌آمیزی کاشیکاریها از پرتغال به‌دست آمده‌اند و مربوط به قرون پانزدهم و شانزدهم میلادی‌اند. بعضی از این رنگ‌آمیزیها الگوی همگنی به‌دست می‌دهند.



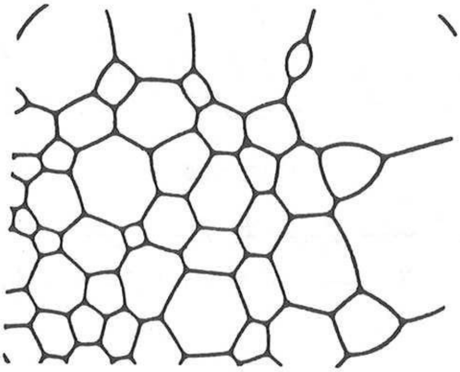
شکل۱۲

طرحهای زیر در مغولستان به‌دست آمده‌اند، و می‌توان از آنها به‌عنوان کاشیکاری یاد کرد:



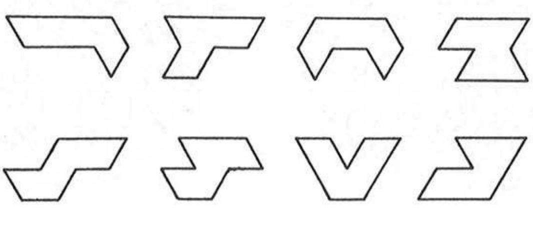
شکل۱۳

بعد از این مثالها می‌توان سعی کرد تعریفی ریاضی از کاشیکاری بیان کرد. افرازی از صفحه به نواحی مختلف را کاشیکاری می‌نامیم، خواه بتوان آن را با اشیای فیزیکی به‌وجود آورد و خواه این‌کار غیرممکن باشد. کاشیکاریهای بسیاری در طبیعت اطراف ما وجود دارند، مانند سلولهای روی پوست پیاز و طرح لانهٔ عنکبوت و شانهٔ درون کندوی زنبور عسل و الگوهای تشکیل‌شده روی گل خشک‌شده و حبابهای صابونی که بین دو صفحهٔ شیشه‌ای موازی تشکیل شده‌اند (شکل ۱۴ را ببینید).

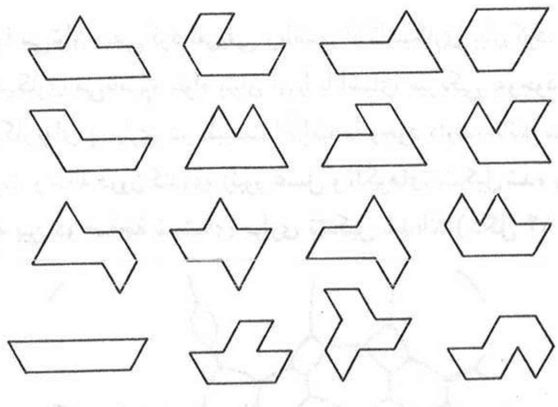


شکل۱۴

کاشیکاریها در شاخه‌های مختلف علمی نیز ظاهر می‌شوند، مثلاً در زمین‌شناسی (ساختار کریستالها)، زیست‌شناسی (الگوهای سلولی در پوست حیوانات و گیاهان) و نظریهٔ مخابرات (مخابرهٔ تصویرها و کدها). همچنین کاشیکاریهای تصادفی را می‌توان با چندین روش انجام داد که ساده‌ترین و معمولترین آن توزیع تصادفی تعدادی نقطه در صفحه است. به این ترتیب کاشی وابسته به یک نقطه را مجموعهٔ نقاطی از صفحه تعریف می‌کنیم که از بین همهٔ نقاط توزیع‌شده در صفحه به این نقطه نزدیکتر باشند. این روش را کاشیکاری دیریشله می‌نامند. هنر کاشیکاری از هنرهای قدیمی و تکامل‌یافته است، اما نظریهٔ کاشیکاری شاخه‌ای جدید در ریاضیات است که هنوز چندان به آن پرداخته نشده است. برای مثال هنوز الگوریتمی وجود ندارد که بتوان با آن فهمید که آیا از شکل داده شده می‌توان یک کاشیکاری از تمام صفحه به‌دست داد؟ هریک از ۲۴ شکلی که در شکل ۱۵ آمده‌اند اجتماع هفت مثلث متساوی‌الاضلاع است. از کدام‌یک از اینها می‌توان به تنهایی برای کاشیکاری صفحه استفاده کرد؟

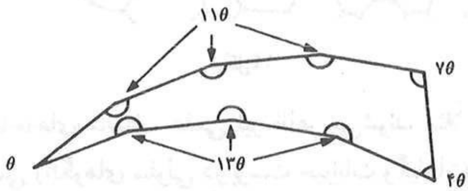


شکل۱۵



شکل۱۵ (ادامه)

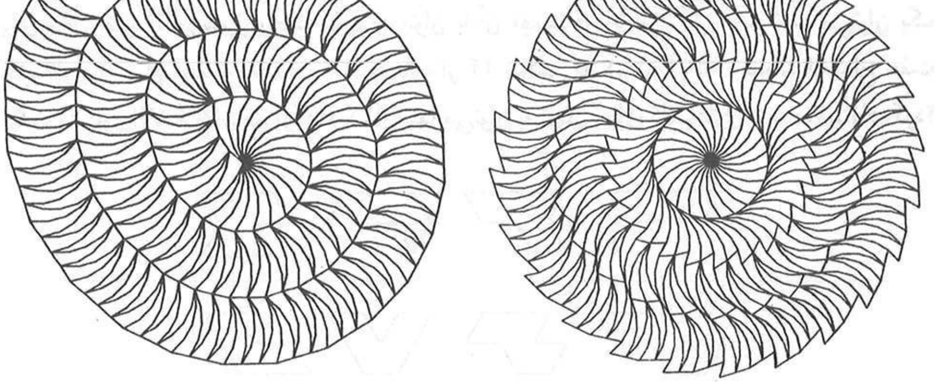
ثابت شده است که تنها با یکی از اشکال بالا نمی‌توان صفحه را کاشیکاری کرد! کاشیکاری حلزونی نیز مبحث جالبی است که کمتر به آن توجه شده است. مثلاً یک کاشی به‌شکل زیر درنظر بگیرید:



$$\theta = \pi/۱۲ = ۱۵^\circ$$

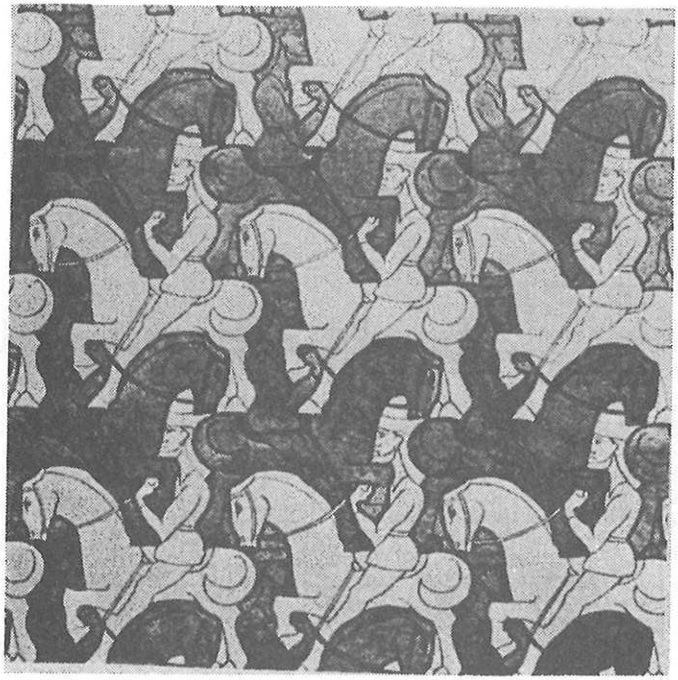
شکل۱۶

از این کاشی می‌توان کاشیکاریهای حلزونی بسیاری به‌دست آورد:



شکل۱۷

نمونه‌هایی از کاشیکاری در هنر مدرن نیز به‌چشم می‌خورد. برای مثال اِشر نقاش آلمانی در طرحهای خود از ایدهٔ کاشیکاری بسیار استفاده کرده است:

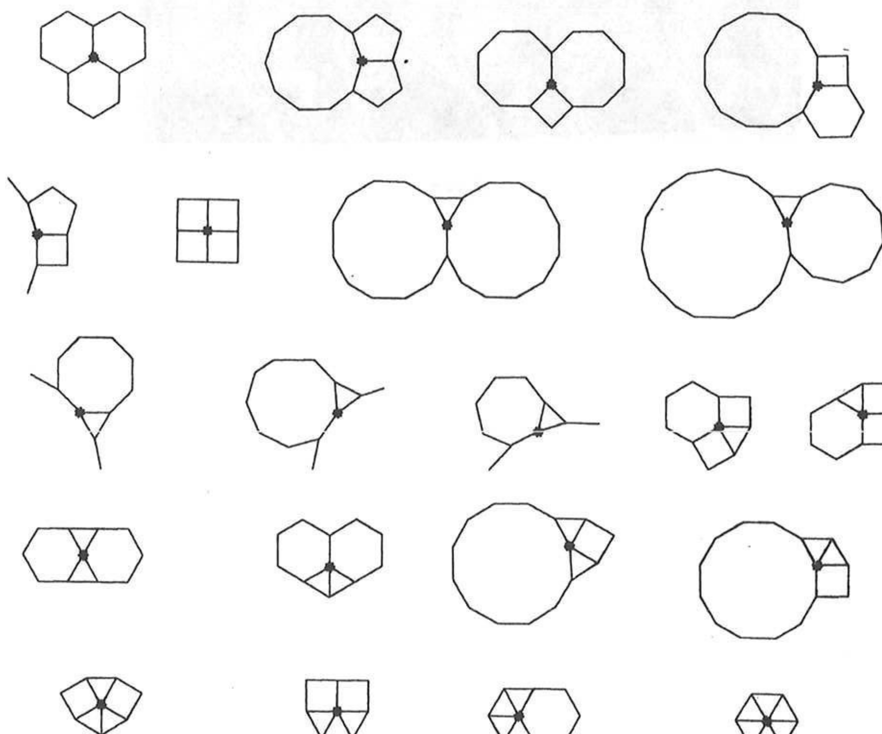


شکل۱۸

۵

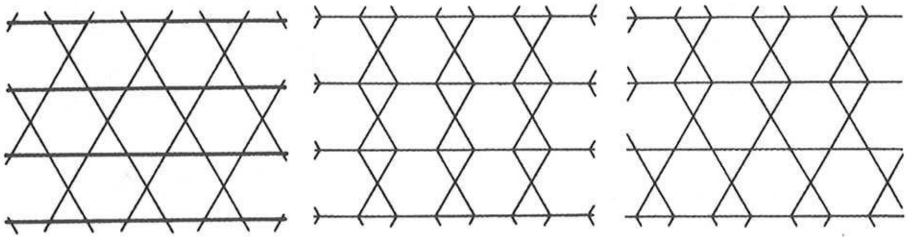
کاشیکاری و الگوهای منتظم

پیش از این با کاشیکاریهایی که با چندضلعیهای منتظم به‌دست آمده‌اند سروکار داشته‌ایم. حالتهایی که ممکن است در یک گوشه از کاشیکاری چندضلعیهای منتظم کنار هم بیایند بسیار محدودند:



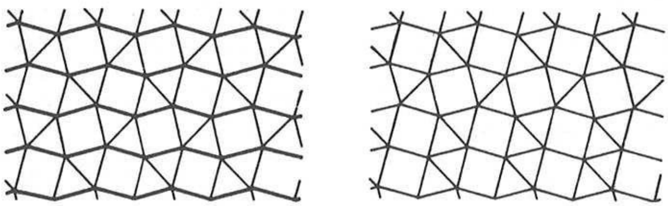
شکل۱

اینها الگوهایی موضعی هستند که در کاشیکاریهای با کاشیهای منتظم ظاهر می‌شوند. اگر بخواهیم فرض همگن بودن کاشیکاریها را در نظر نگیریم، تعداد کاشیکاریها با کاشیهای منتظم بسیار زیاد خواهد بود. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

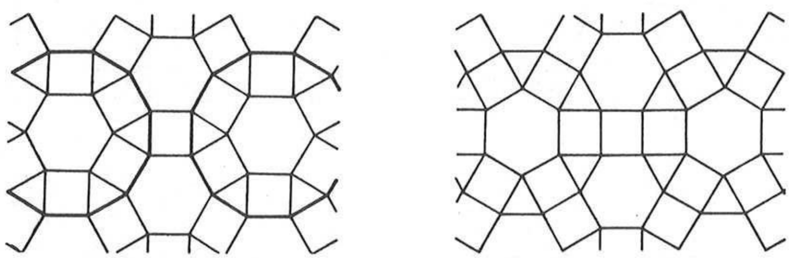


شکل۲

همچنین کاشیکاریهایی که در عین تفاوت بسیار، از یک ایده به‌دست آمده‌اند:

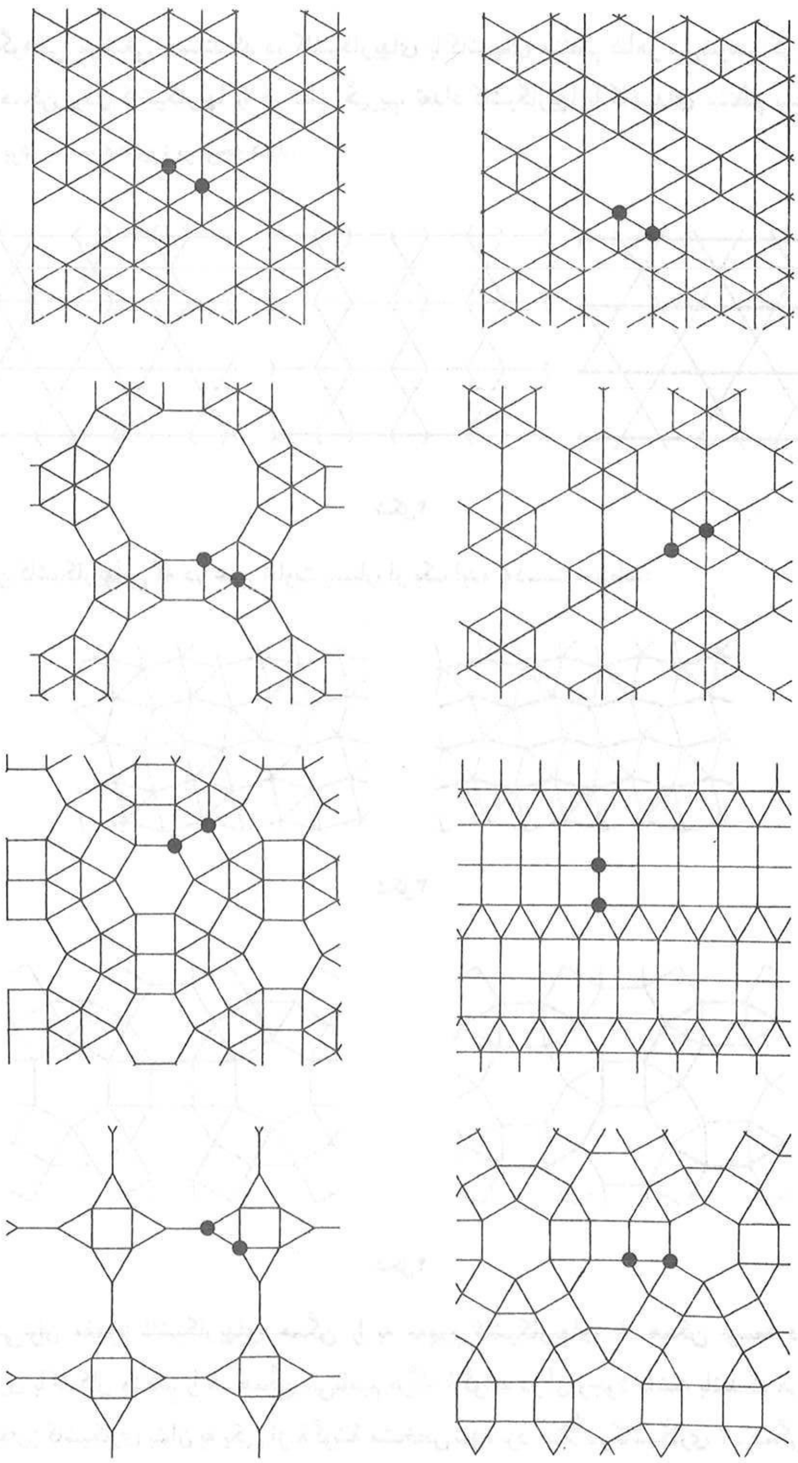


شکل۳

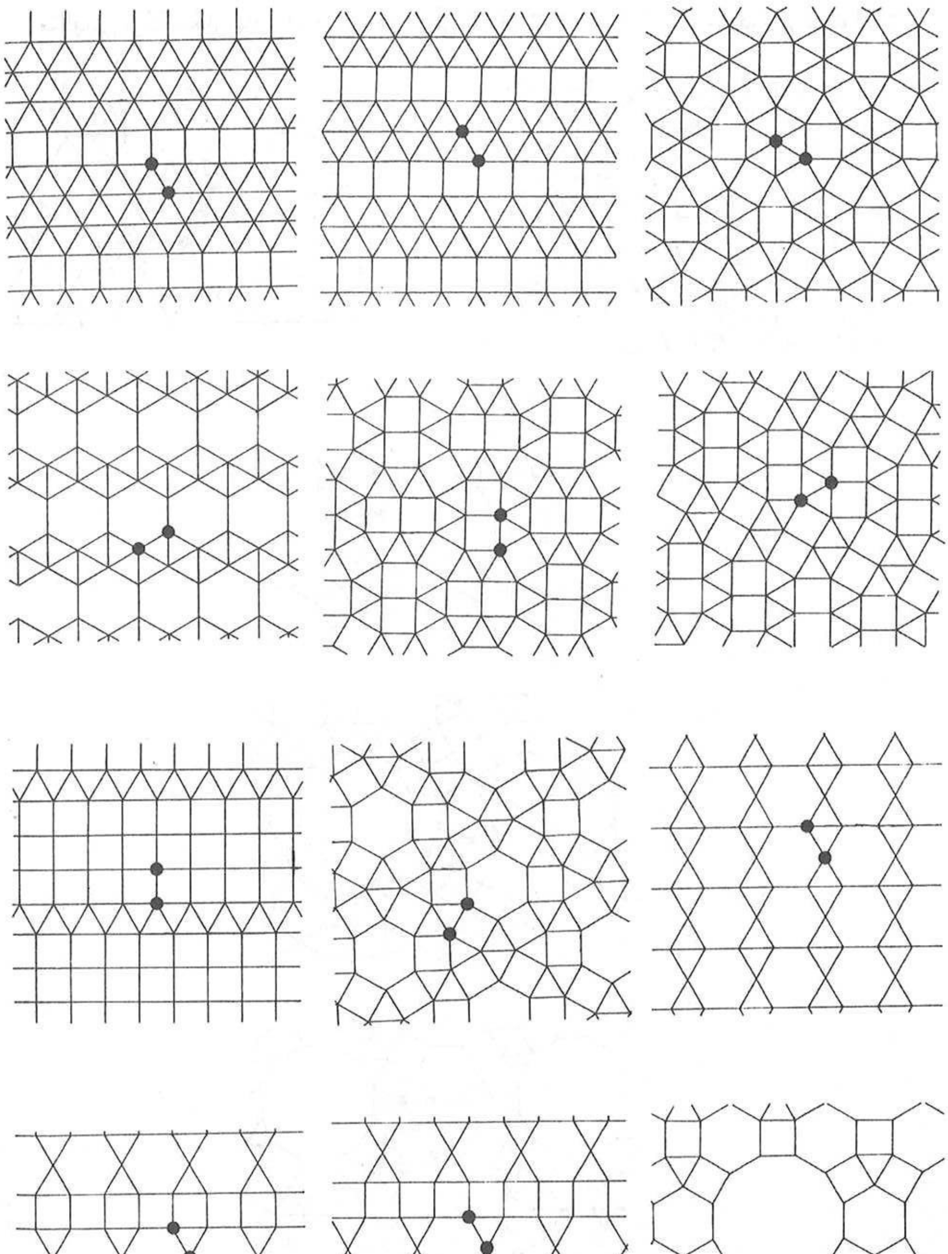


شکل۴

می‌توان مفهوم کاشیکاریهای همگن را به مفهوم کاشیکاریهای kـ همگن توسعه داد. یک کاشیکاری با اشکال منتظم را kـ همگن می‌نامیم هرگاه k گوشه در آن وجود داشته باشد که هر گوشه را با یک تقارن کاشیکاری بتوان به یکی از k گوشهٔ مشخص شده برد. مثلاً در کاشیکاری ۲ ـ همگن دو نوع گوشه بیشتر وجود ندارد. در شکل ۵ تمام انواع کاشیکاریهای ۲ ـ همگن که بالغ بر ۲۰ گونه‌اند آمده است:

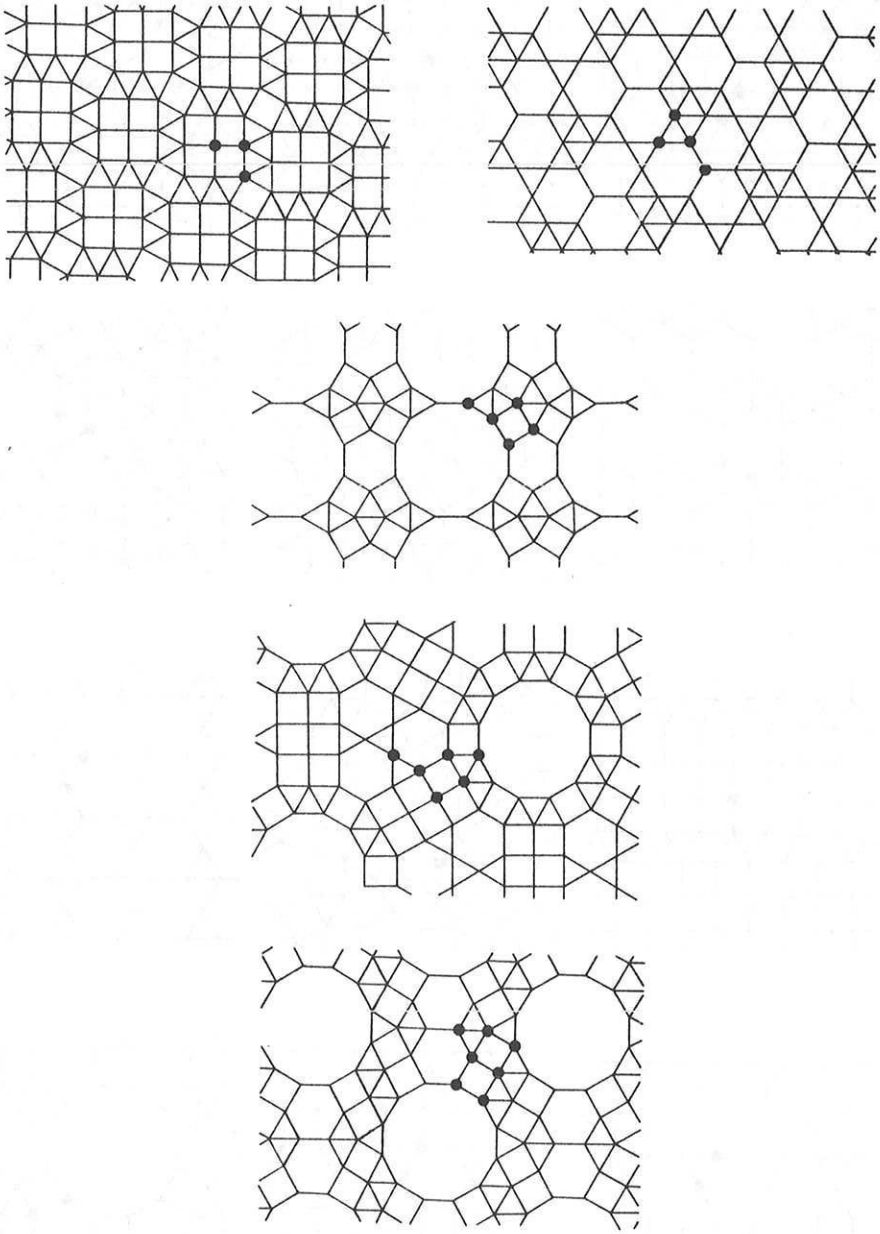


شکل۵



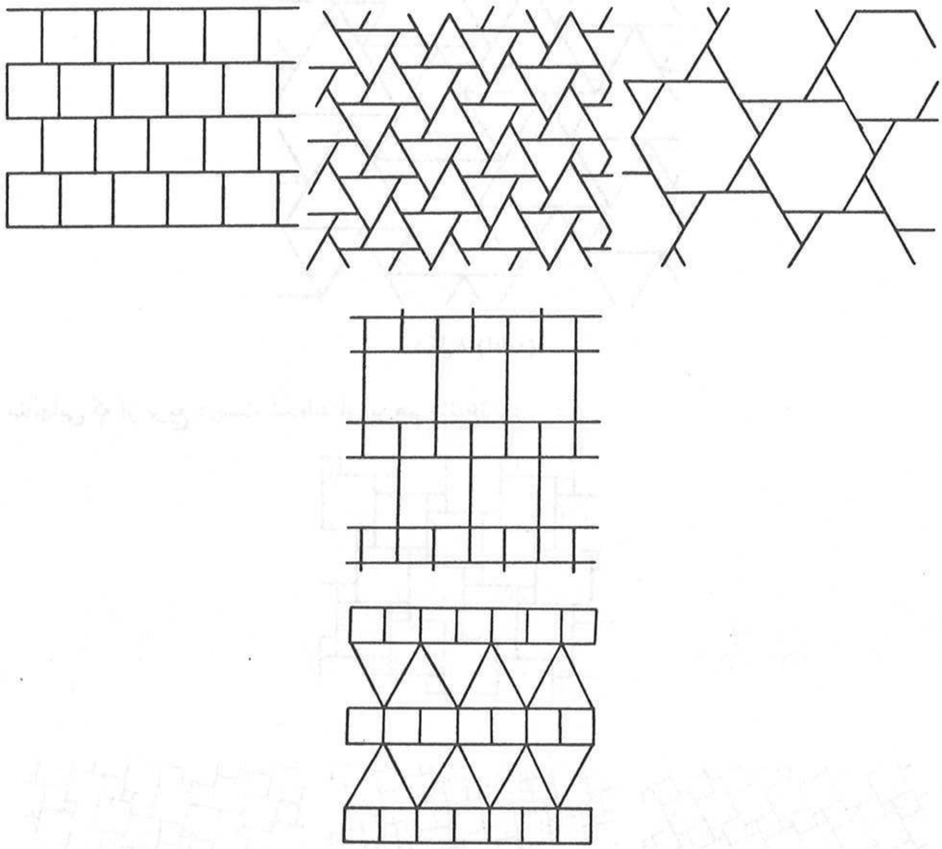
شکل۵ (ادامه)

مثالهایی از کاشیکاریهای kـهمگن که در آن k برابر ۳، ۴، ۵، ۶ یا ۷ است در زیر آمده است:



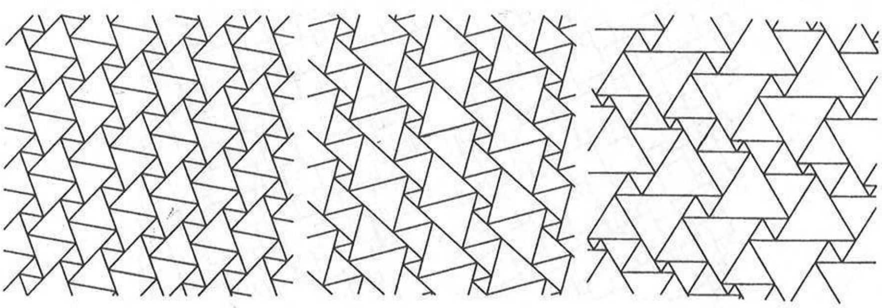
شکل۶

در زیر مثالهایی از کاشیکاریهای منتظم آمده است که در آنها هرگوشه یا برخی گوشه‌ها در وسط یک ضلع کاشی دیگری قرارگرفته است:

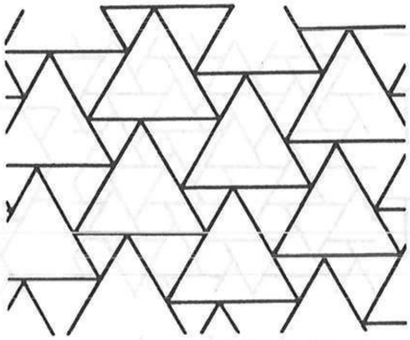


شکل۷

مثالهایی از این‌گونه که تنها از یک نوع شکل منتظم ولی با اندازه‌های مختلف درست شده است از زیبایی خاصی برخوردارند. به چند مثال که از مثلث درست شده است توجه کنید:

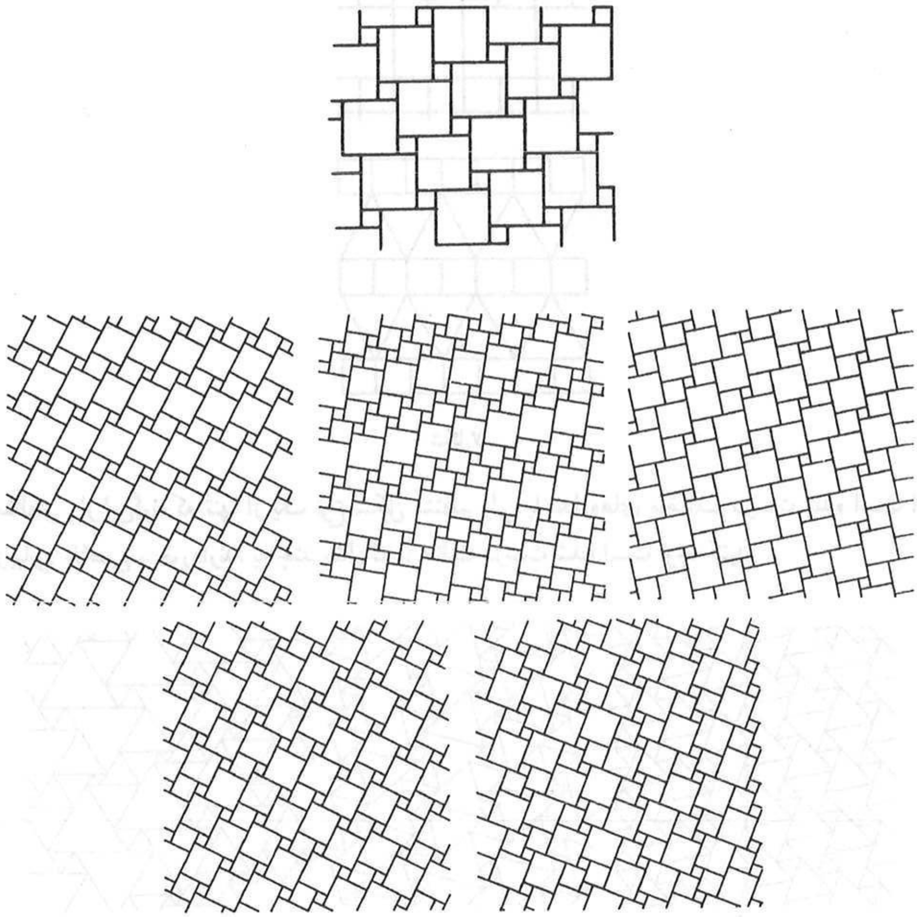


شکل۸

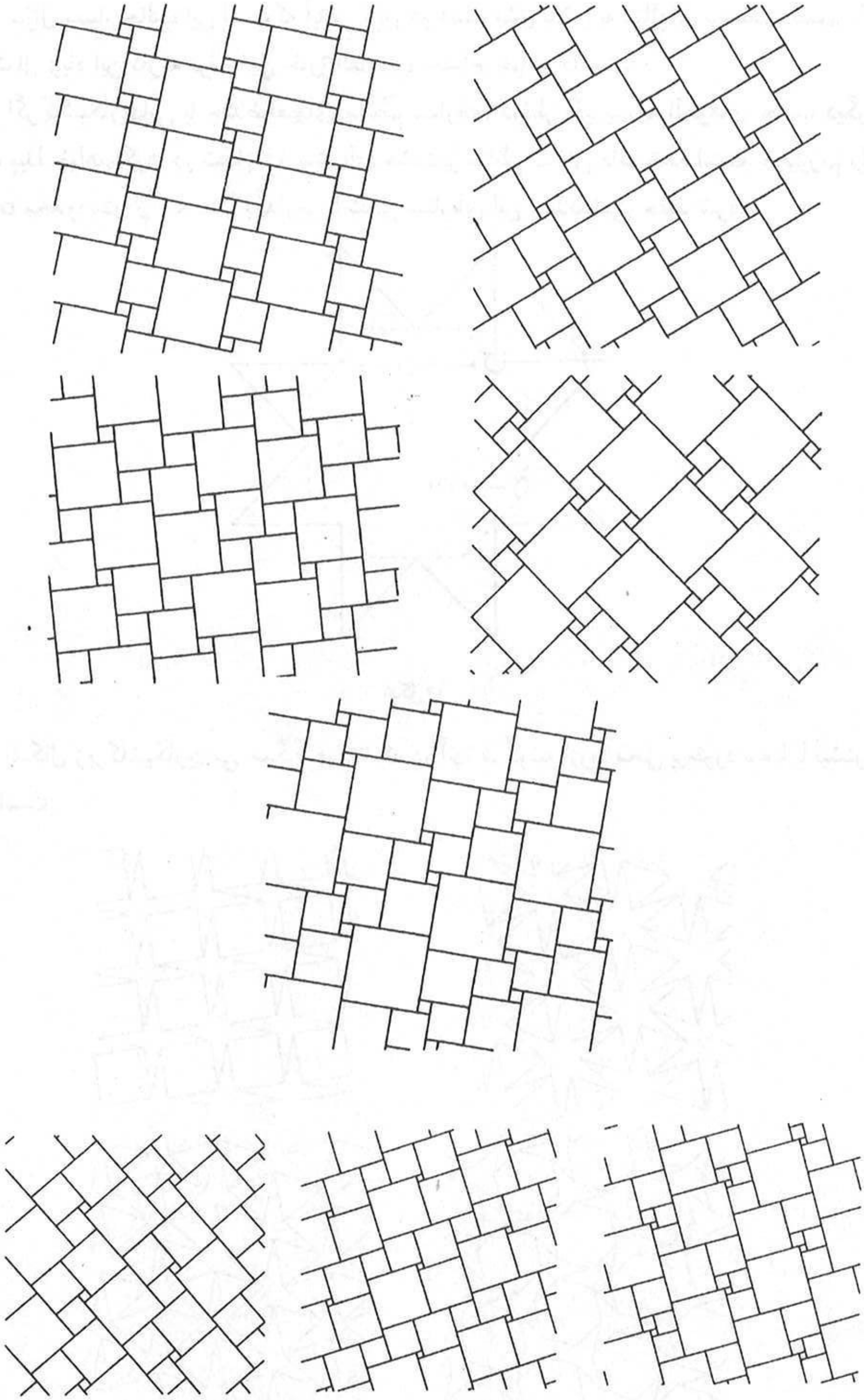


شکل۸ (ادامه)

مثالهایی که از مربع درست شده‌اند از این‌هم متنوع‌ترند:



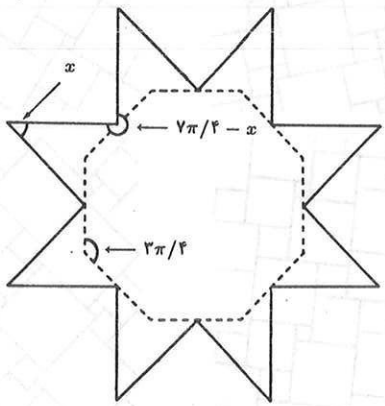
شکل۹



شکل۹ (ادامه)

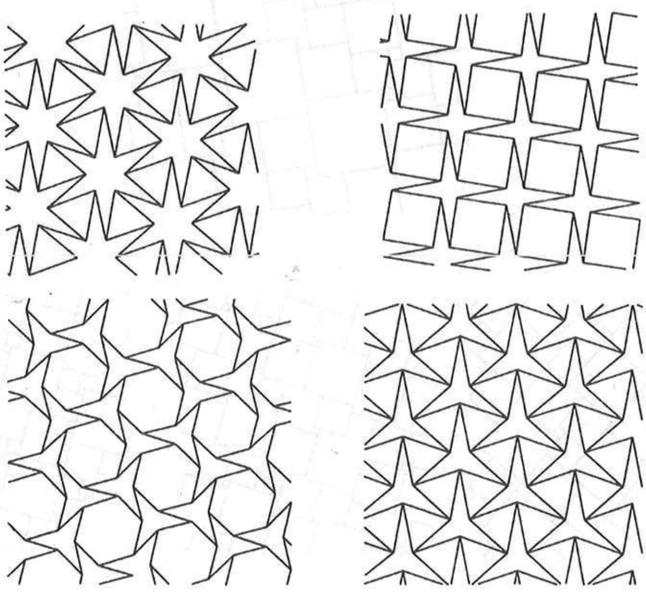
سؤال بسیار جالب این است که آیا می‌توان دو دسته مثال بالا را به مثالهای سه‌بعدی تعمیم داد؟ به احتمال زیاد این کار به قوهٔ تخیل خارق‌العاده‌ای احتیاج خواهد داشت.

اگر کاشیکاریهایی با چندضلعیهای منتظم ستاره‌ای درنظر بگیریم، به الگوهای جالب دیگری دست پیدا خواهیم کرد. در شکل ۱۰ ستاره‌ای هشت‌پر منتظم نمایش داده شده است. مجبوریم برای زاویهٔ α محدودیت $\alpha < \frac{۳\pi}{۴}$ را بگذاریم تا شکل ستاره‌ای این چندضلعی حفظ شود.



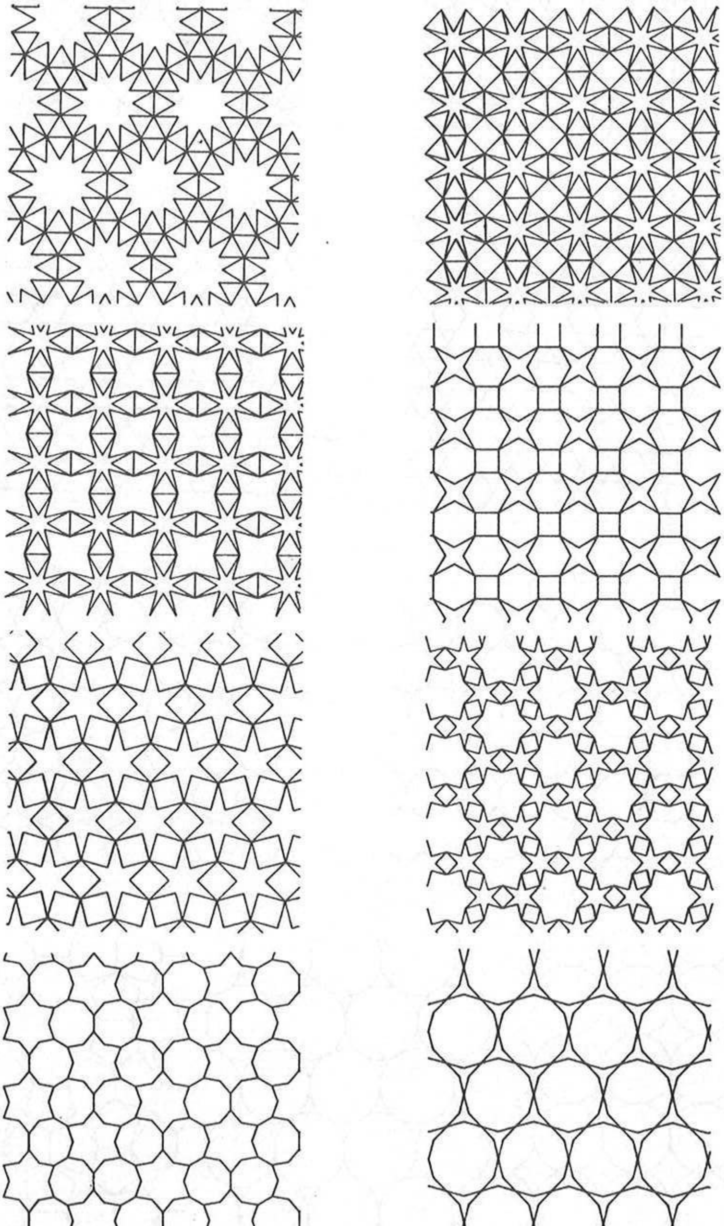
شکل۱۰

اشکال زیر کاشیکاریهایی همگن هستند که در آنها هرگوشه لزوماً محل برخورد سه‌تا یا بیشتر از کاشیهاست:

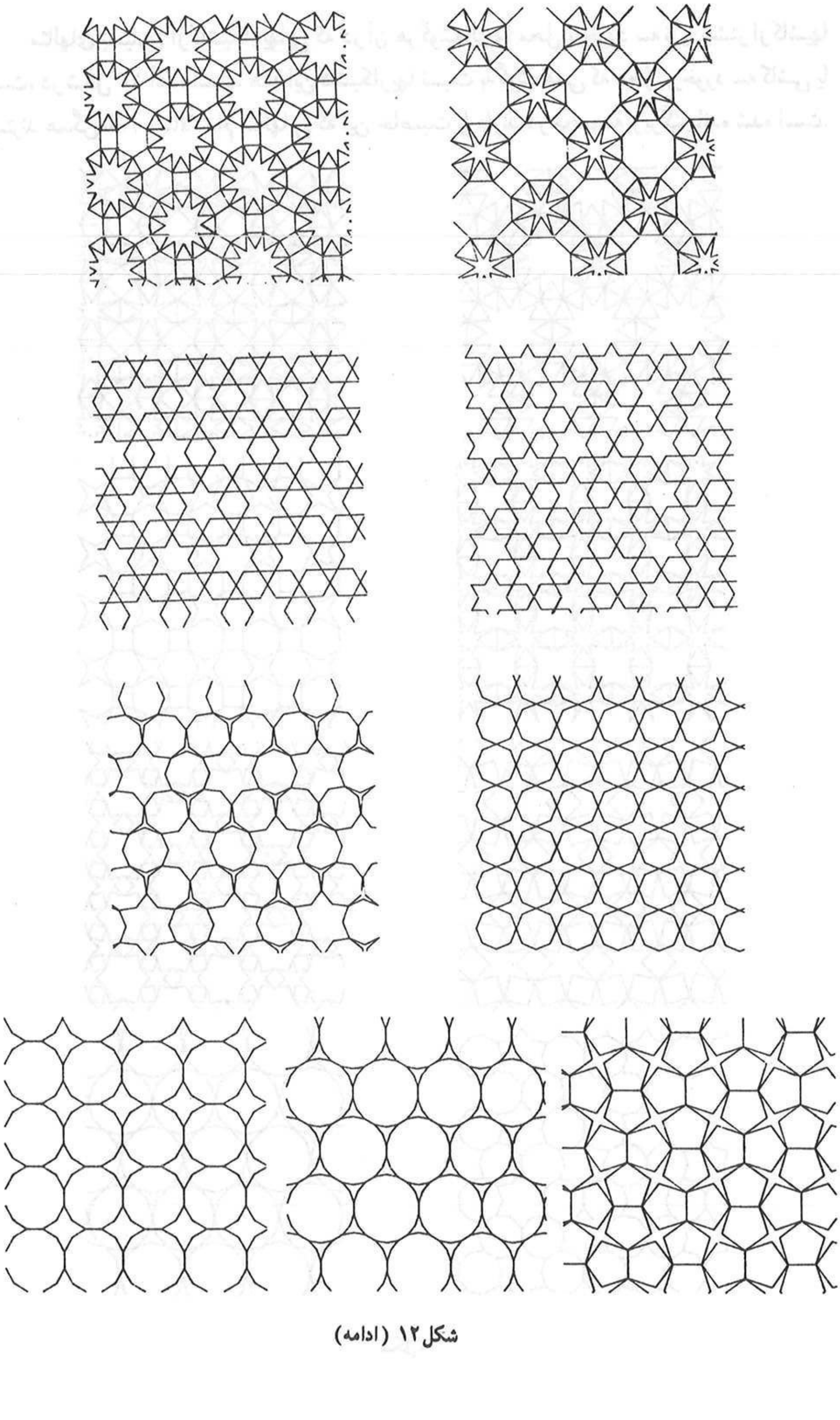


شکل۱۱

مثالهای بسیاری از کاشیکاریهایی که در آن هرگوشه لزوماً محل برخورد سه تا یا بیشتر از کاشیها نیست، در شکل ۱۲ آمده است. همهٔ این کاشیکاریها نسبت به گوشه‌هایی که محل برخورد سه کاشی یا بیشترند همگن‌اند. احتمالاً تمام مثالهایی که این خاصیت را دارند در مجموعهٔ زیر گنجانده شده است.

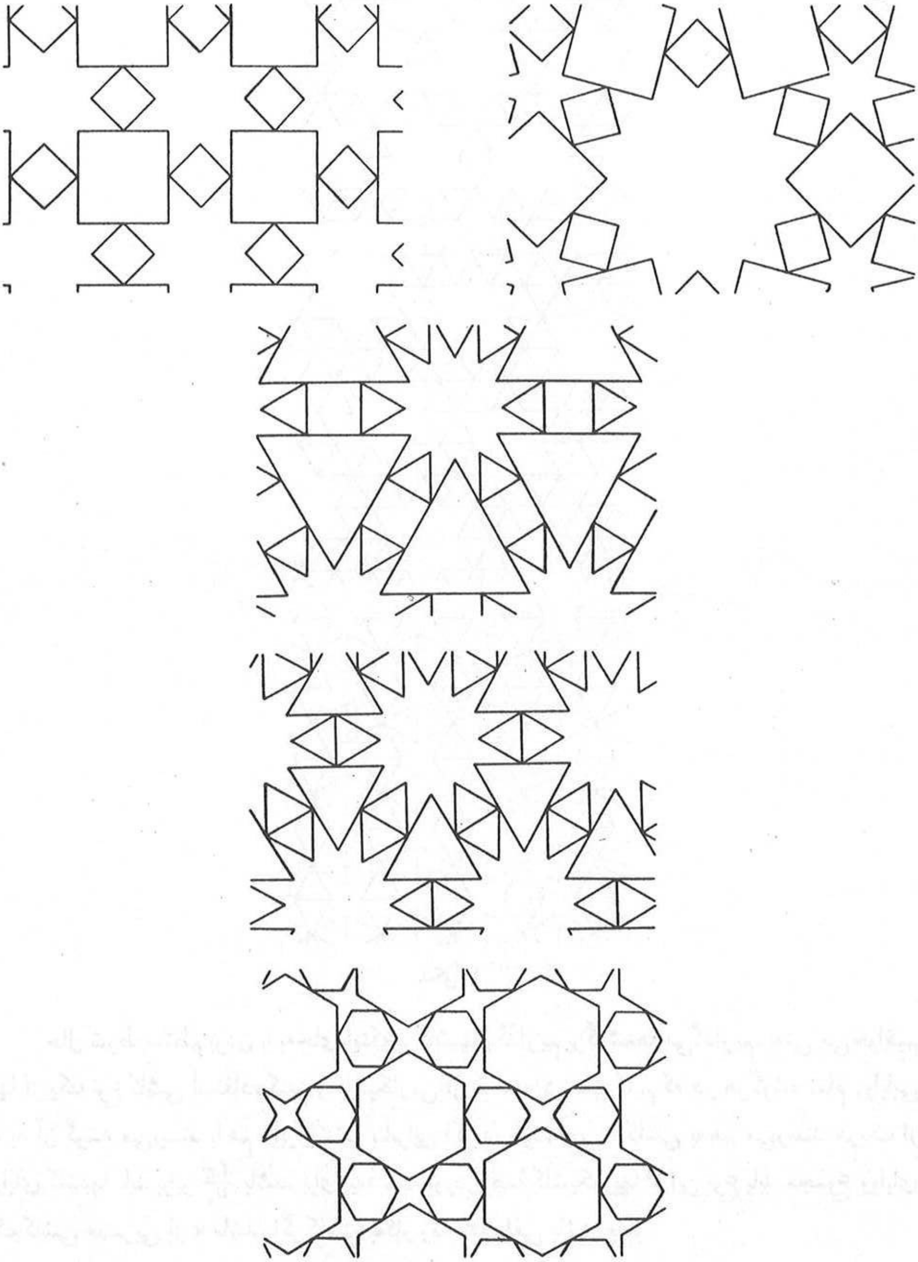


شکل۱۲



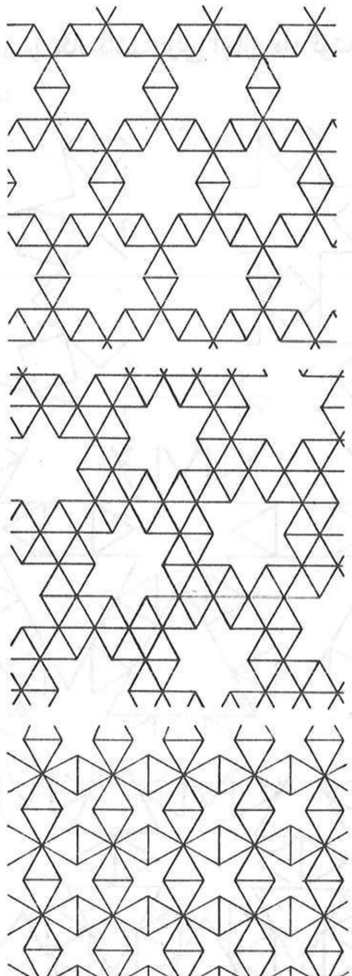
شکل ۱۲ (ادامه)

می‌توان شرط همگن بودن را نگاه داشت ولی اجازه داد گوشهٔ بعضی کاشیها در نقاط میانی اضلاع کاشیهای دیگر قرار گیرند:



شکل۱۳

چند مثال ۲ـ همگن از نوع قبل در شکل ۱۴ آمده است:

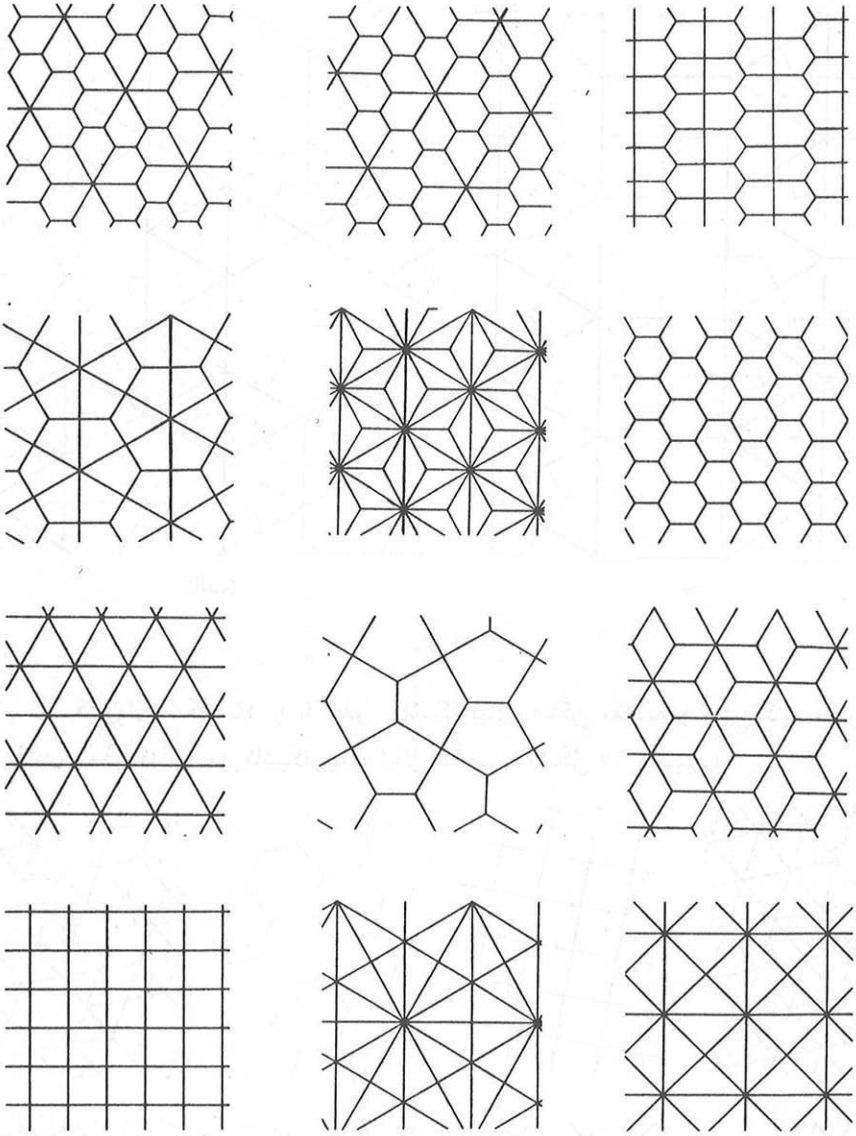


شکل۱۴

حال شرط منتظم بودن را به‌جای اینکه بر کاشیها بگذاریم برگوشه‌ها می‌گذاریم. یعنی می‌خواهیم تنها از یک نوع کاشی استفاده کنیم و کاشیکاریی از صفحه درست کنیم که در هرگوشه تمام زوایایی که به آن گوشه می‌رسند باهم برابر باشند. بنابراین اگر در گوشه‌ای $v_۱$ کاشی به‌هم می‌رسند هریک از زوایای کاشیها باید برابر $\frac{۲\pi}{v_۱}$ باشد. برای به‌دست آوردن همهٔ کاشیکاریها از این نوع باید مجموع زوایای یک کاشی مضربی از π باشد. اگر کاشی به‌کار رفته r ضلعی باشد، باید

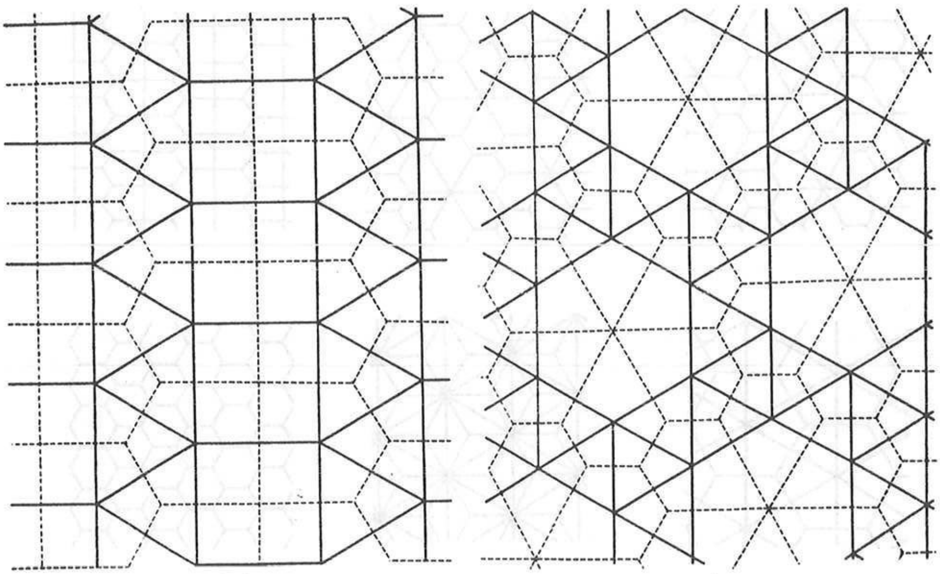
$$\frac{۲\pi}{v_۱} + \frac{۲\pi}{v_۲} + \cdots + \frac{۲\pi}{v_r} = (r - ۲)\pi$$

این معادله دقیقاً ۱۱ جواب دارد و ۱۱ نوع کاشیکاری با خواص بالا وجود دارد:



شکل۱۵

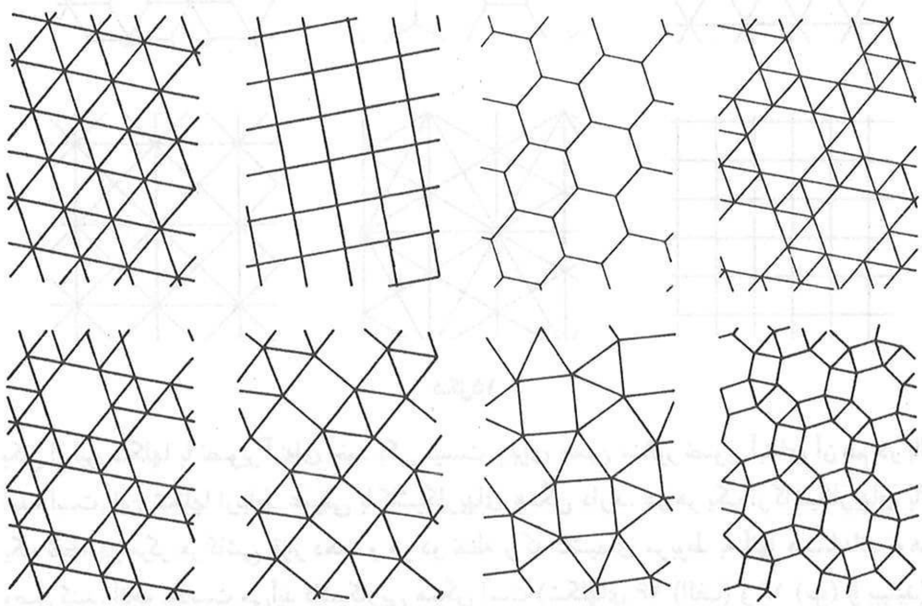
یکی از این شکلها با تصویر آینه‌ای خود یکی نیست و برای همین منظور تصویر آینه‌ای آن هم در بالا آمده است. این شکلها ارتباط عمیقی با کاشیکاریهای همگن دارند. در هر یک از کاشیکاریهای بالا یک نقطه در مرکز هر کاشی قرار دهید و هر دو نقطه را که کاشیهای مربوط به آنها همسایه‌اند به‌هم وصل کنید. آنچه به‌دست می‌آید کاشیکاریی همگن است (شکلهای ۱۶ (الف) و ۱۶ (ب) را ببینید). این کاشیکاری همگن را مزدوج کاشیکاری اولیه می‌نامند.



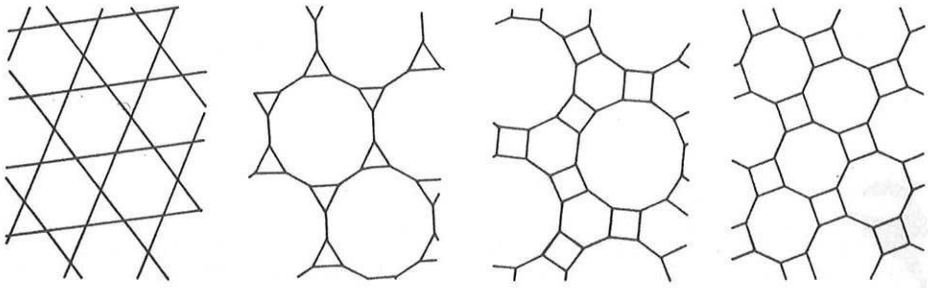
(ب) (الف)

شکل۱۶

کاشیکاریهای شکل ۱۵ را با جدول کاشیکاریهای همگن مقایسه و تعیین کنید مزدوج هر کاشیکاری همگن کدام‌یک از کاشیکاریهای شکل ۱۵ است (شکل ۱۷ را ببینید).



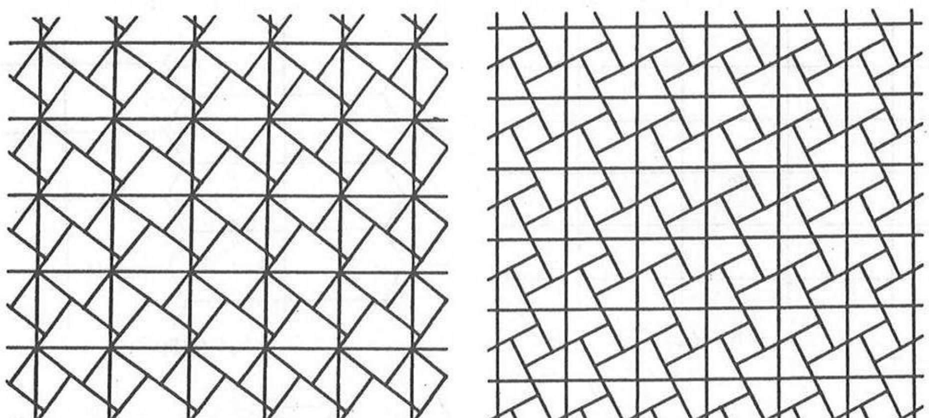
شکل۱۷



شکل ۱۷ (ادامه)

حال به‌شکل ۵ بازگردید و توجه کنید که کاشیکاری مزدوج هر کاشیکاری ۲ـ‌همگن نیز کاشیکاری با گوشه‌های منتظم است که از دو نوع کاشی در آن استفاده شده است. مزدوج هریک از کاشیکاریهای شکل ۵ را رسم کنید. این مطلب به کاشیکاریهای kـ‌همگن نیز تعمیم می‌یابد. مزدوج کاشیکاری kـ‌همگن، کاشیکاریی با گوشه‌های منتظم است که در آن از k نوع کاشی استفاده شده است.

از ترکیب کاشیکاریها شکلهای هندسی جالبی به‌دست می‌آید. مثلاً با هریک از کاشیکاریهای زیر می‌توان قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کرد.

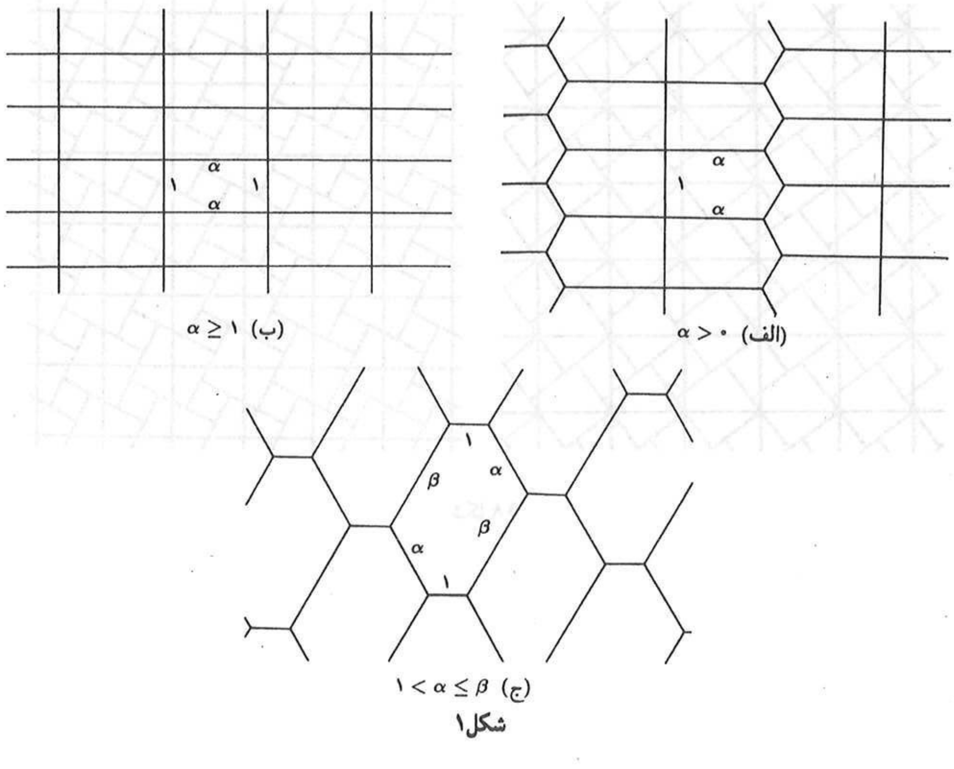


شکل ۱۸

۶

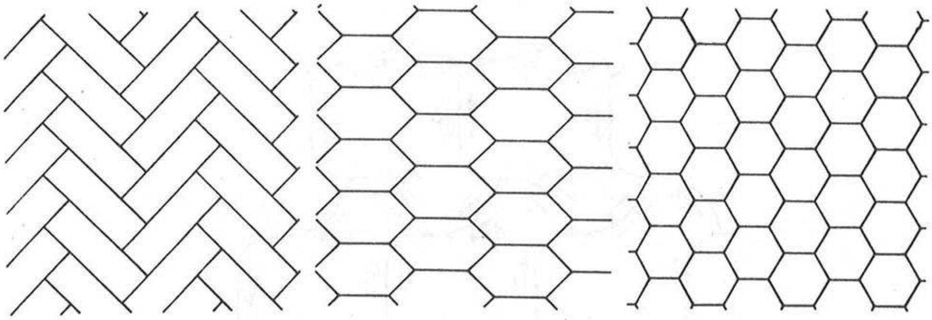
رده‌بندی کاشیکاریهای متقارن

هرگاه بتوان یک کاشیکاری را با تغییری پیوسته به کاشیکاری دیگری تبدیل کرد به‌طوری‌که تعداد گوشه‌ها و ضلعهای کاشیها در این تغییرات ثابت بماند و تنها محل گوشه‌ها و طول ضلعها و شکل آنها به‌طور پیوسته تغییر کند، می‌گوییم این دو کاشیکاری دارای یک هندسه‌اند. مثلاً در هریک از کاشیکاریهای شکل ۱ با تغییر پارامترهای α و β کاشیکاریی با همان هندسه به‌دست می‌آید.



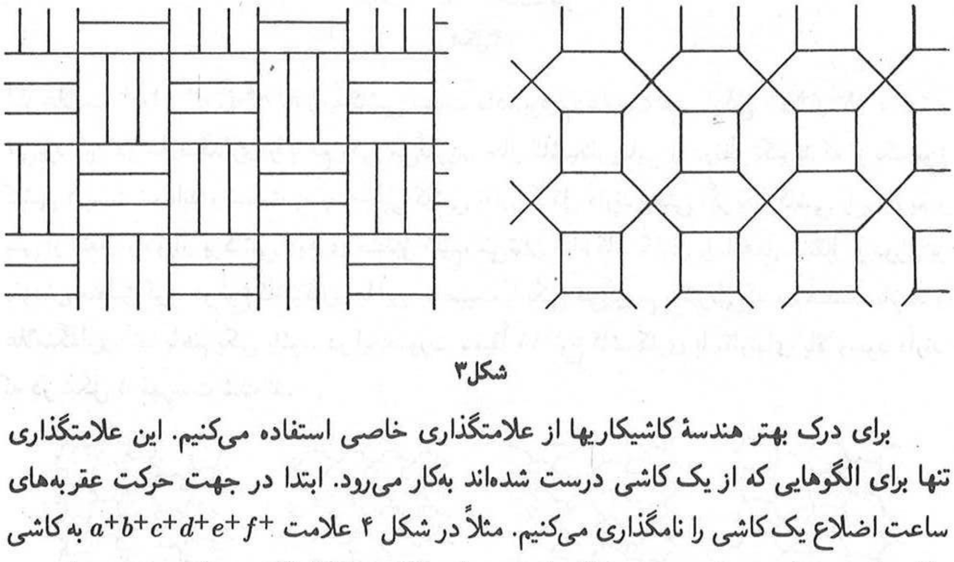
شکل۱

کاشیکاریهای بالا و کاشیکاریهای زیر، با اینکه کاشیها کاملاً تغییر شکل داده‌اند، هر سه دارای یک هندسه‌اند.



شکل۲

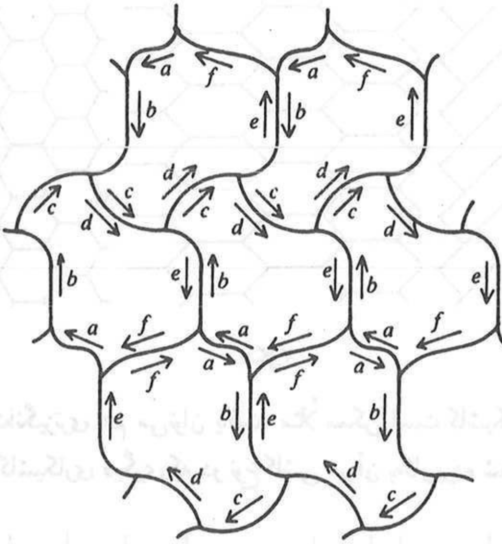
مثالهای شگفت‌انگیزتری هم می‌توان یافت. مثلاً ممکن است کاشیکاریی که تنها از یک نوع کاشی درست شده با کاشیکاری دیگری که دو نوع کاشی در آن به‌کار برده شده است هم‌هندسه باشد:



شکل۳

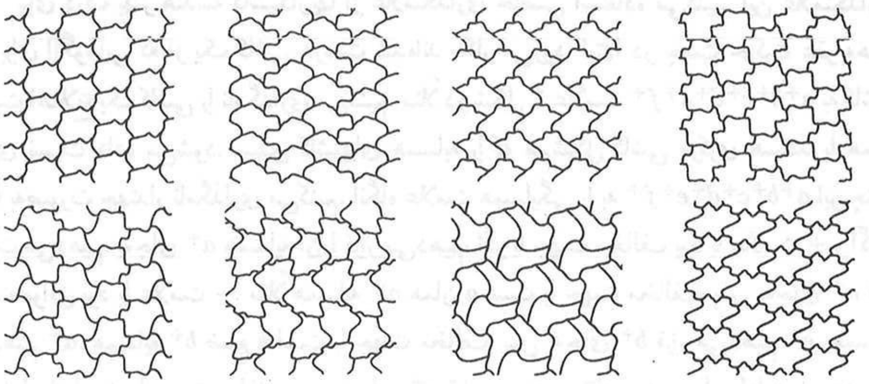
برای درک بهتر هندسهٔ کاشیکاریها از علامتگذاری خاصی استفاده می‌کنیم. این علامتگذاری تنها برای الگوهایی که از یک کاشی درست شده‌اند به‌کار می‌رود. ابتدا در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اضلاع یک کاشی را نامگذاری می‌کنیم. مثلاً در شکل ۴ علامت $a^+b^+c^+d^+e^+f^+$ به کاشی مرکزی نسبت داده می‌شود. سپس کاشیهای همسایه را که هم‌شکل کاشی مرکزی هستند با همین نامها به‌صورت جهتدار نامگذاری می‌کنیم. آنگاه علامت همسایگی را به $a^+b^+c^+d^+e^+f^+$ این‌چنین نسبت می‌دهیم: به‌جای a^+ همسایه آن را قرار می‌دهیم، اگر با جهت مخالف بود با علامت + و اگر با جهت موافق بود با علامت −. مثلاً همسایه a^+ همان a است با جهت مخالف، پس به‌جای a^+ قرار می‌دهیم a^+. همسایه b^+ ضلع e است با جهت مخالف، پس به‌جای b^+ قرار می‌دهیم e^+. همسایه c^+ ضلع d است با جهت موافق، پس به‌جای c^+ قرار می‌دهیم d^- و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا

سرانجام به‌جای f^+ خود f^+ را قرار می‌دهیم. با این وصف اگر علامت کاشی $a^+b^+c^+d^+e^+f^+$ باشد، علامت همسایگی $a^+e^+d^-c^-b^+f^+$ خواهد بود (شکل ۴ را ببینید).

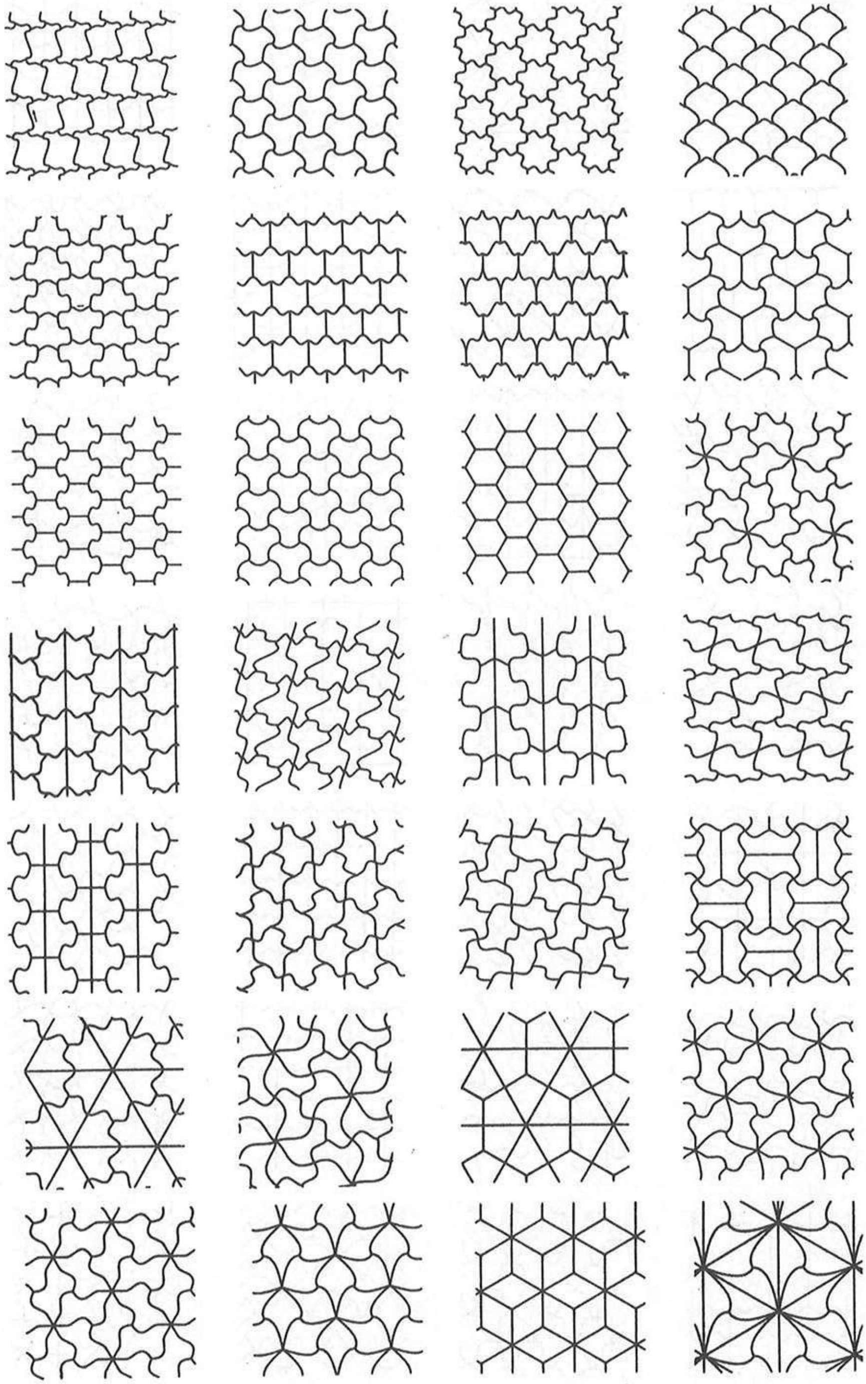


شکل۴

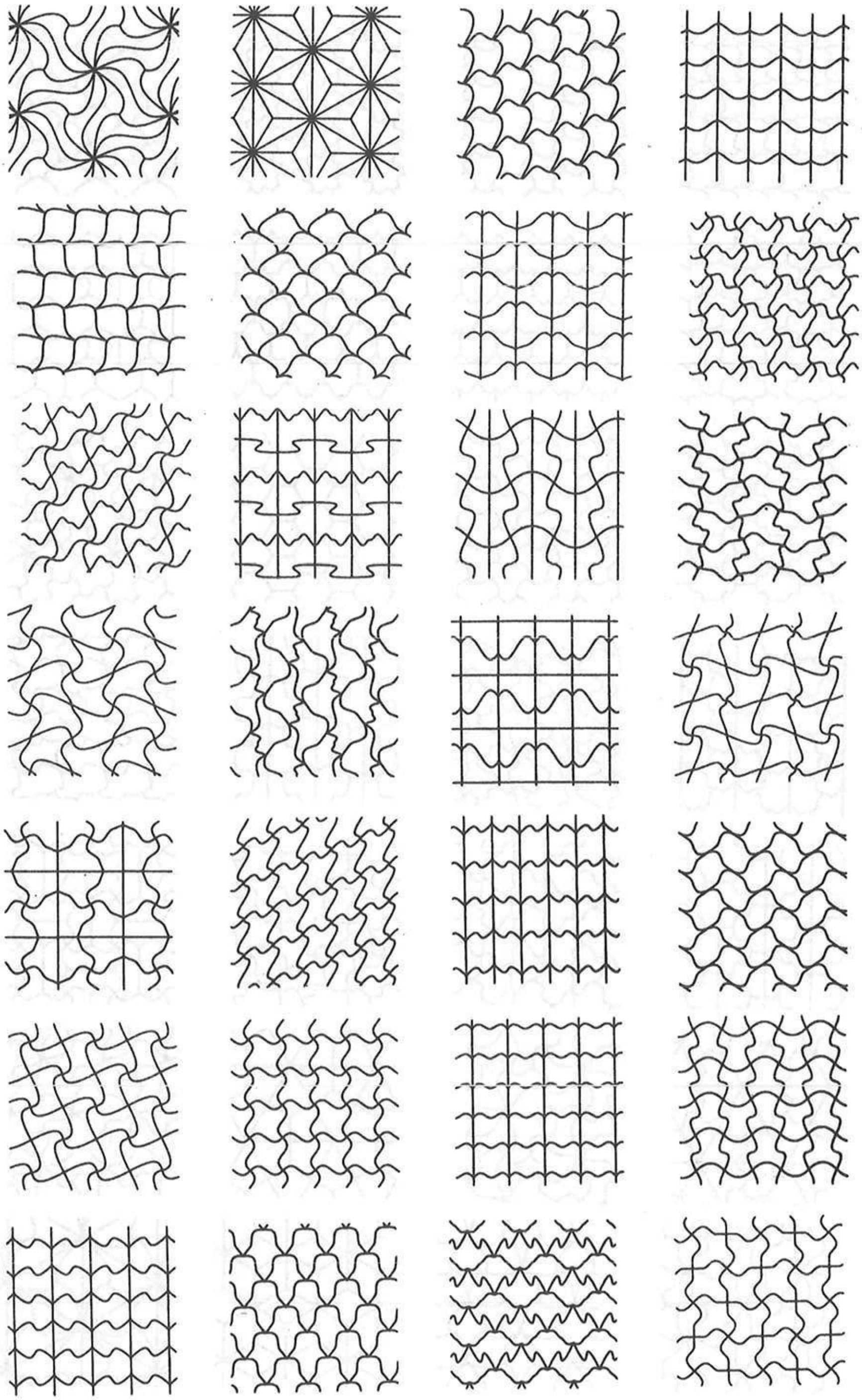
اگر علامت $b^+c^+d^+e^+f^+a^+$ را به کاشی نسبت داده بودیم، علامت همسایگی $e^+d^-c^-b^+f^+a^+$ می‌بود. این دو علامتگذاری را با هم یکی می‌گیریم. حال کاشیکاریهایی را درنظر بگیرید که از یک نوع کاشی درست شده‌اند و نسبت به جابه‌جایی کاشی تقارن کامل دارند. یعنی اگر یک کاشی را برداریم و پس از انتقال و دوران بر کاشی دیگری منطبق کنیم، می‌توان تمام کاشیکاری را با همان انتقال و دوران بر خودش منطبق کرد. دو نوع کاشیکاری با این خاصیت را یکی می‌گیریم به‌شرطی‌که هم‌هندسه باشند و علامتگذاری آنها با هم یکی باشد. در این‌صورت دقیقاً ۸۱ نوع کاشیکاری با تقارنهای بالا وجود دارند که در شکل ۵ فهرست شده‌اند.



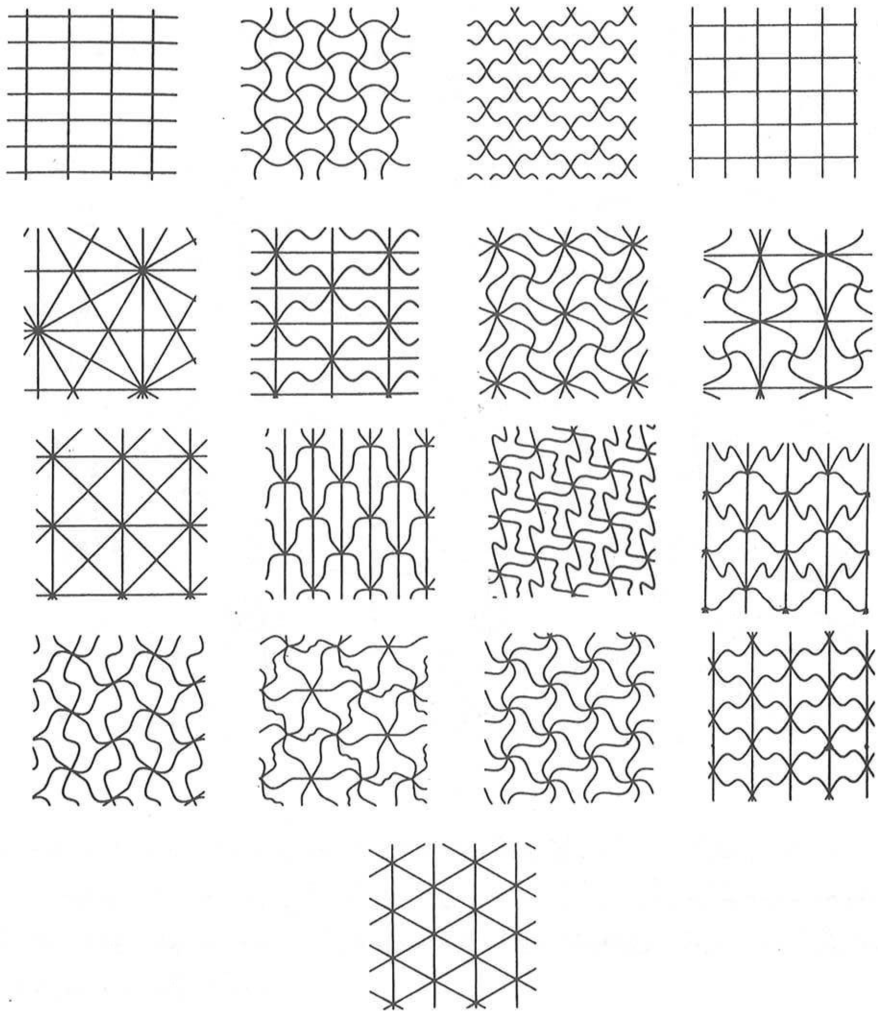
شکل۵



شکل ۵ (ادامه)

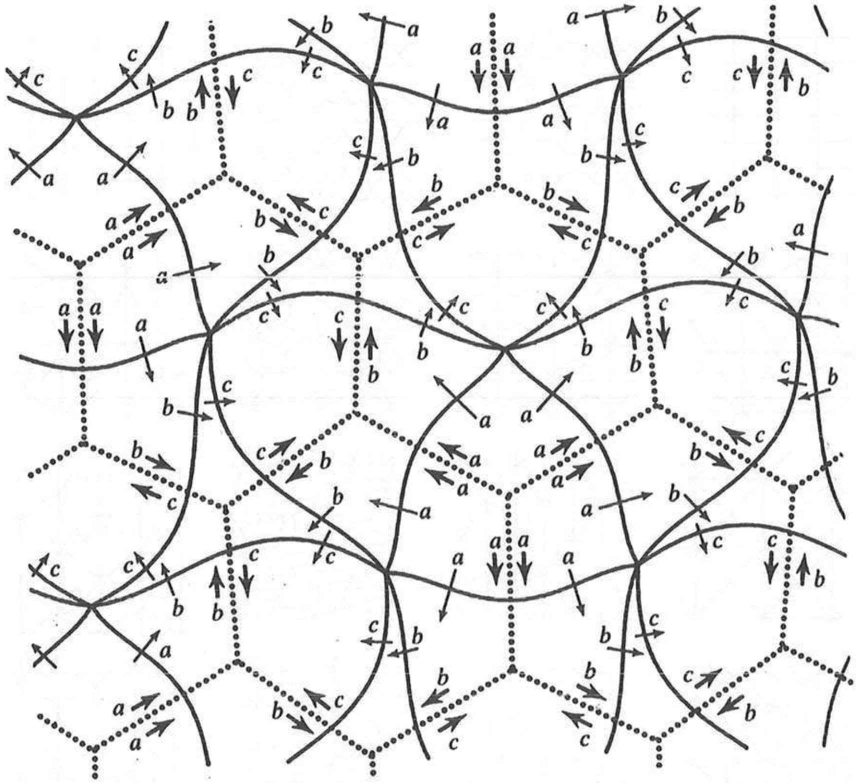


شکل ۵ (ادامه)



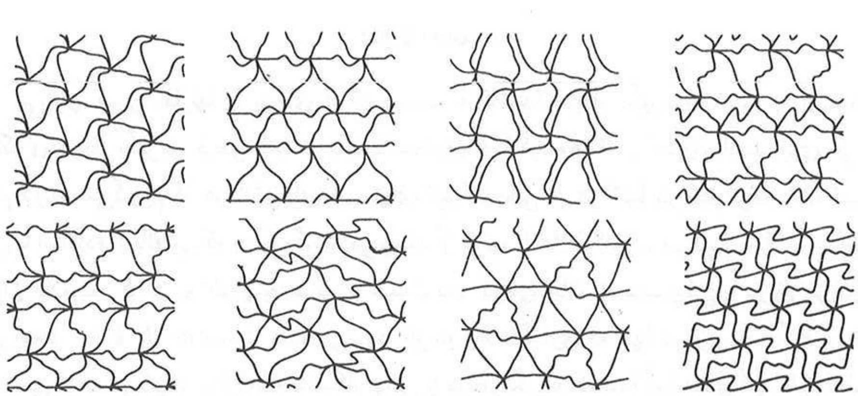
شکل ۵ (ادامه)

می‌توان همین تقارنها را به‌جای اینکه نسبت به کاشیها درنظر بگیریم، نسبت به گوشه‌های کاشیکاری درنظر بگیریم. فرض کنید در یک کاشیکاری همهٔ گوشه‌ها قابل انطباق باشند. برای هر یال دو نام درنظر می‌گیریم که هر کدام برای قسمتهای نزدیک یکی از دو انتها در نظر گرفته شده است. سپس با استفاده از یالهایی که به یک گوشه می‌رسند آن گوشه را علامتگذاری می‌کنیم. مثلاً در شکل ۶ می‌توان علامت $ab^+c^+c^-b^-$ را به هر گوشه نسبت داد. دوباره علامت همسایگی را درنظر می‌گیریم که در اینجا $ac^+b^+b^-c^-$ نسبت داده می‌شود. باز دو علامتگذاری که تنها در ترتیب نامگذاری فرق دارند یکی گرفته می‌شوند. حال همهٔ کاشیکاریهایی را درنظر بگیرید که همهٔ گوشه‌های آنها قابل انطباق باشند و علاوه بر این نسبت به جابه‌جایی گوشه‌ها تقارن کامل داشته باشند. یعنی اگر یک گوشه را

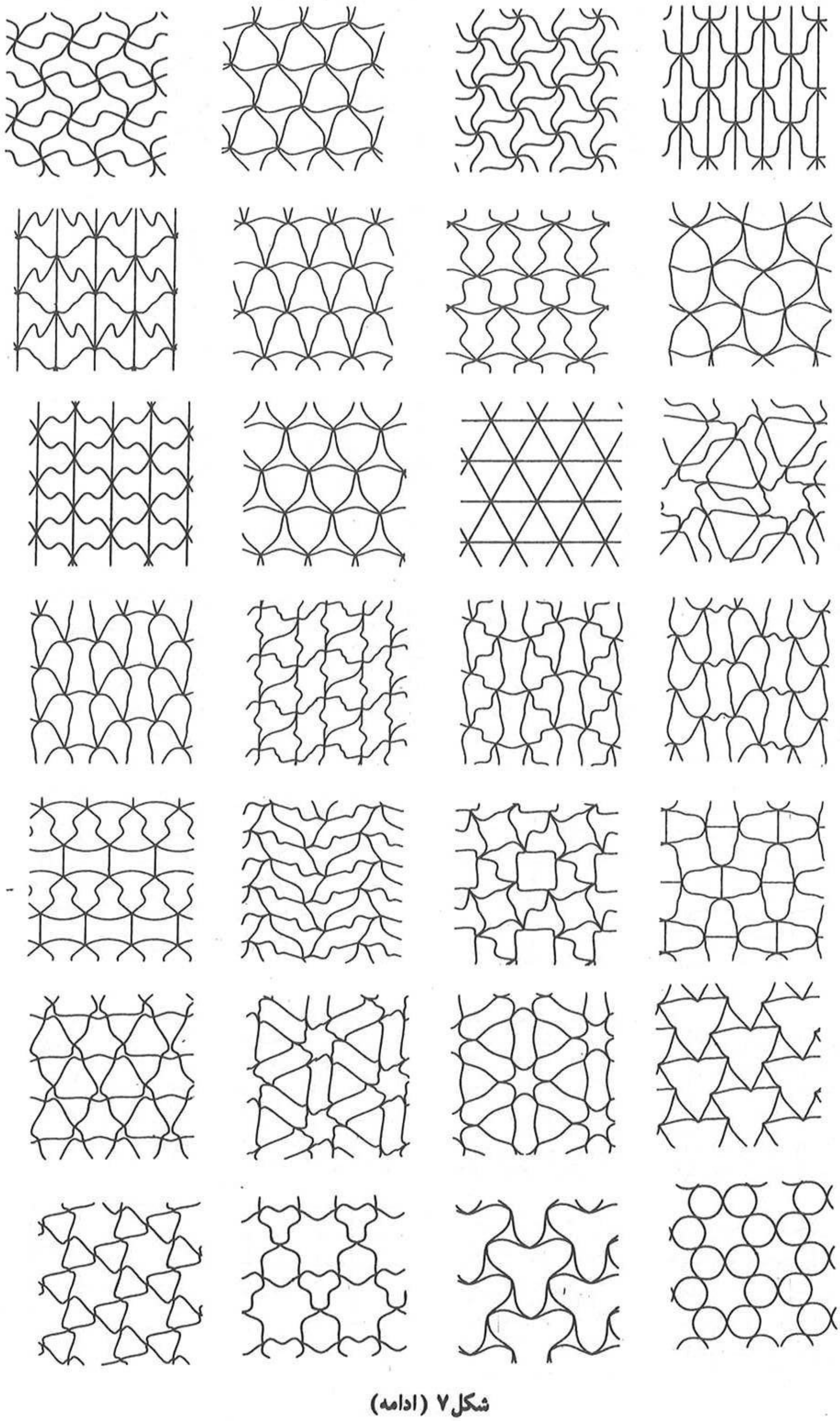


شکل۶

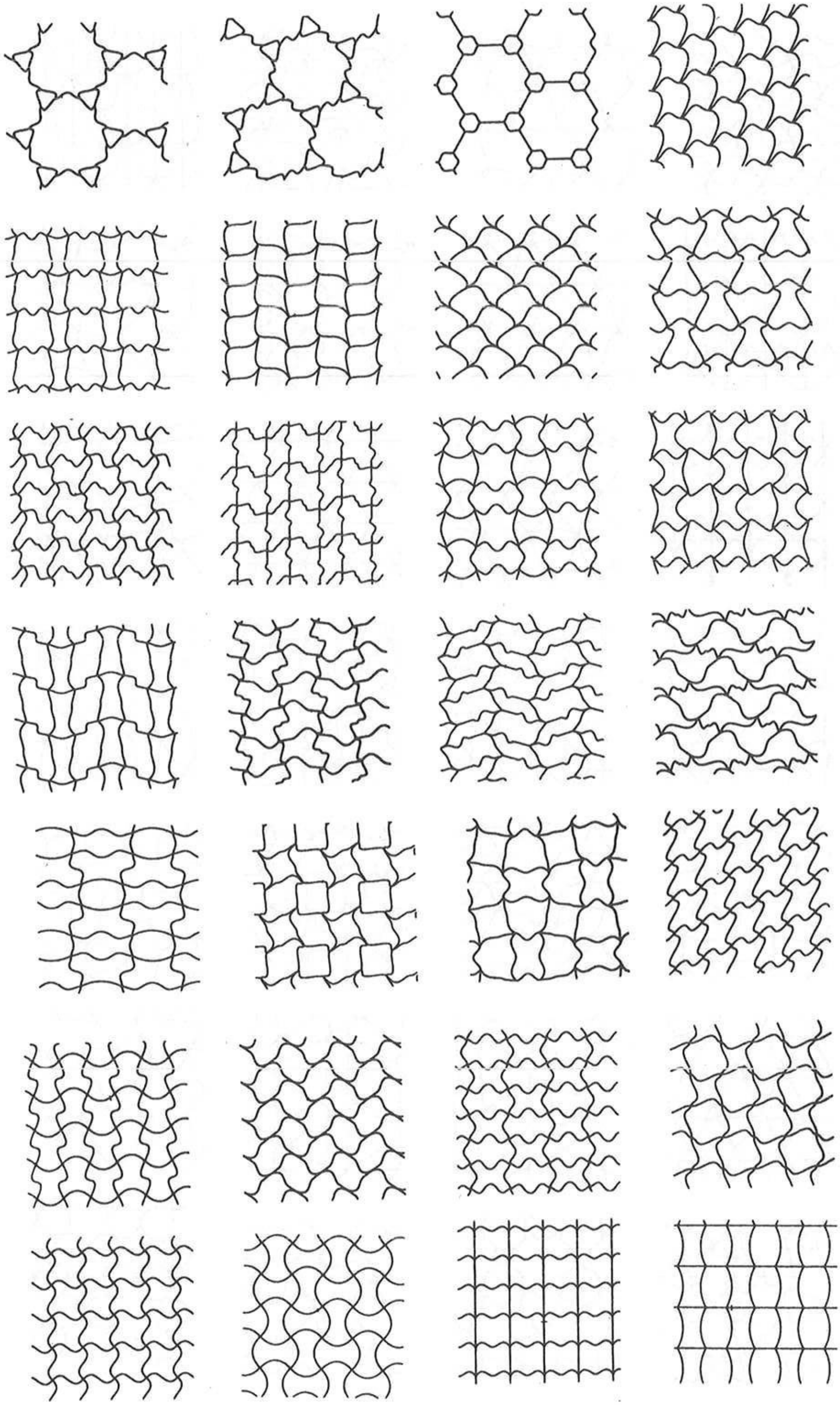
برداریم و پس از انتقال و دوران بر گوشه دیگری منطبق کنیم بتوان تمام کاشیکاری را با همان انتقال و دوران بر خودش منطبق کرد. دو نوع کاشیکاری با این خاصیت را یکی می‌گیریم اگر هم‌هندسه باشند و علامتگذاری آنها باهم یکی باشد. در این‌صورت دقیقاً ۹۱ نوع کاشیکاری با تقارنهای درنظر گرفته‌شده وجود دارند که در شکل ۷ آمده‌اند.



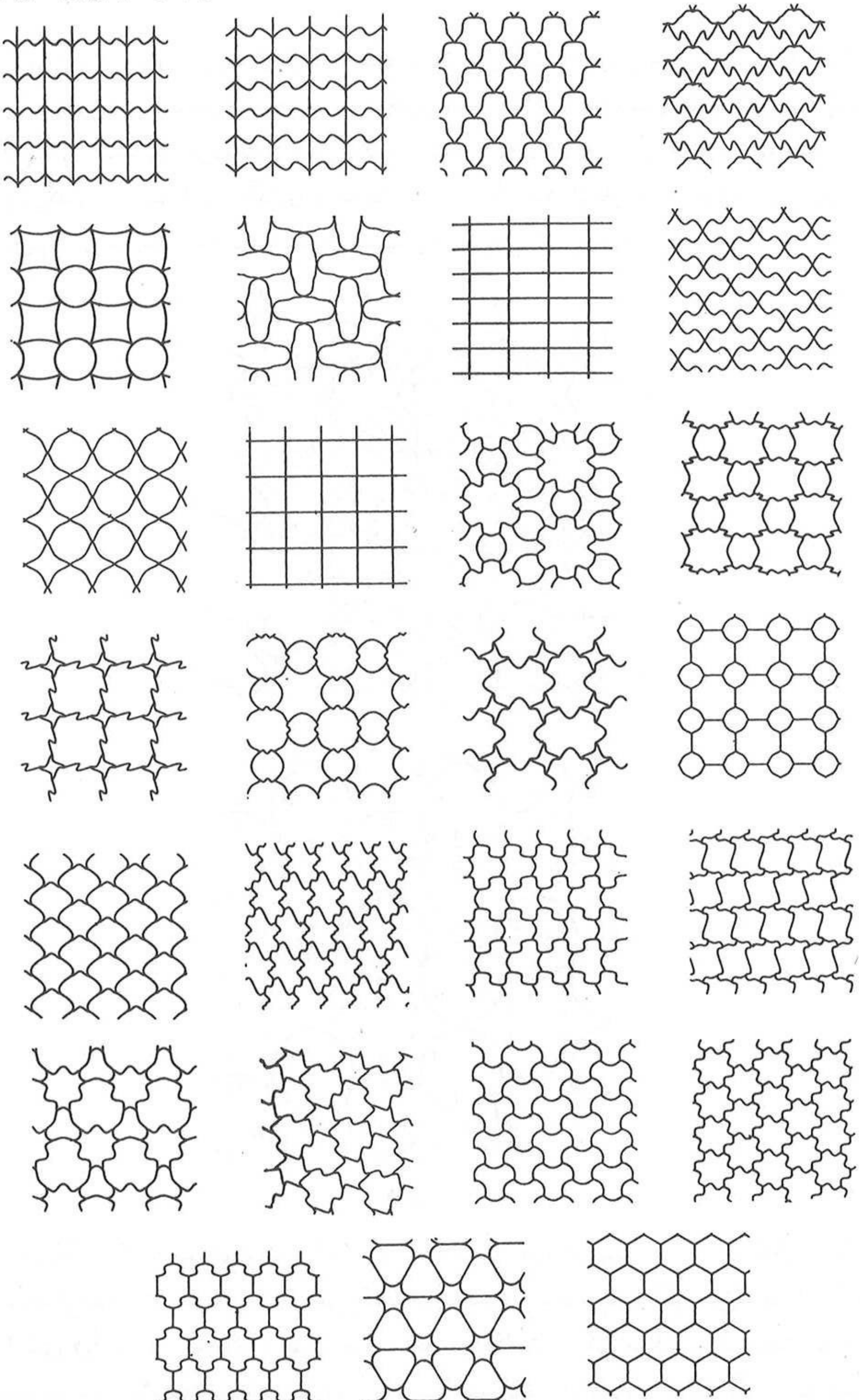
شکل۷



شکل ۷ (ادامه)

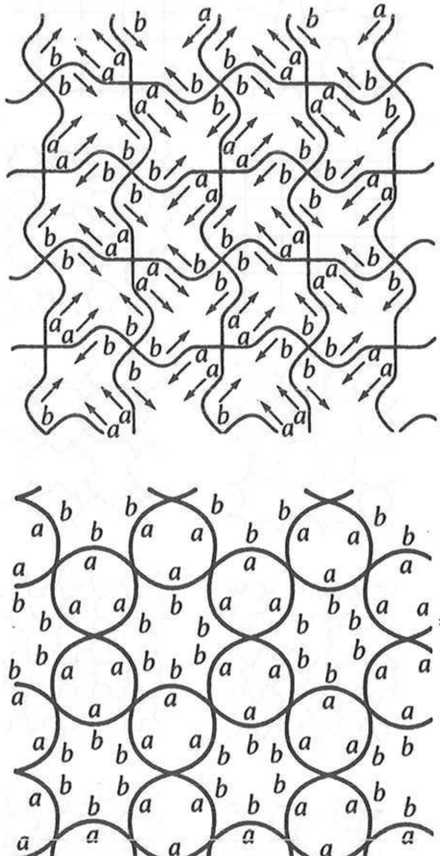


شکل۷ (ادامه)



شکل۷ (ادامه)

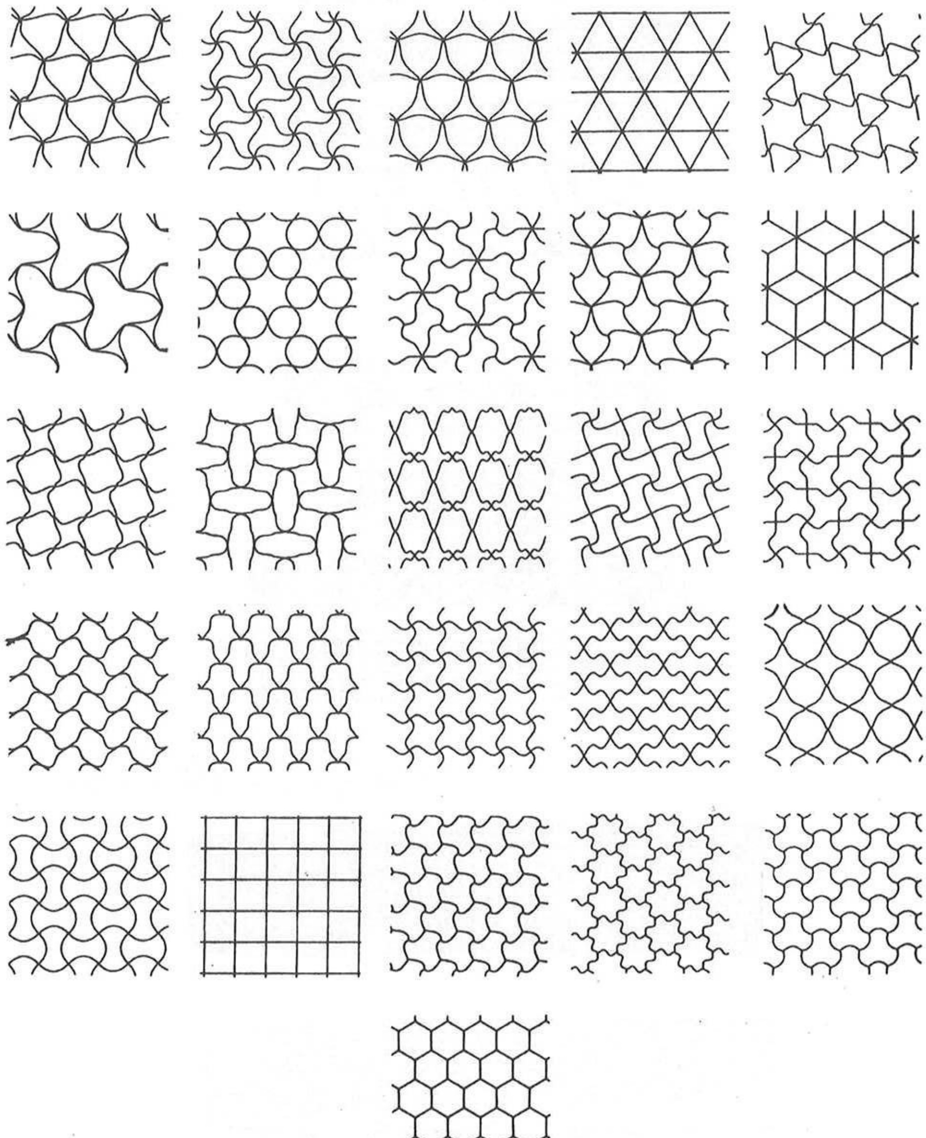
می‌توان این تقارنها را به‌جای اینکه نسبت به کاشیها یا گوشه‌ها درنظر بگیریم، نسبت به اضلاع کاشیها درنظر بگیریم. فرض کنید در یک کاشیکاری همه اضلاع قابل انطباق باشند. اگر بالا و پایین اضلاع یکی باشند برای هردو نام a و اگر متفاوت باشند نامهای b و a را برای هریک از دو طرف این ضلع می‌گذاریم. سپس این نامگذاری را جهتدار می‌کنیم. اگر اینکه از طرف کدام گوشه به یال نزدیک می‌شویم فرقی نداشته باشد، در نامگذاری جهتها را درنظر نمی‌گیریم، مانند اشکال زیر:



شکل۸

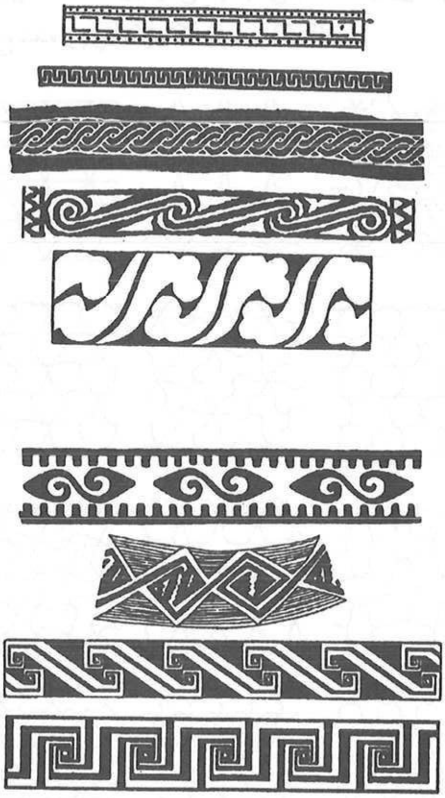
در الگویی که به‌صورت جهتدار نامگذاری شده است، علامت ضلع a^+b^+ و در الگوی دیگر علامت ضلع ab است. حال اگر اضلاع دور یک کاشی را به‌ترتیب بخوانیم، در الگوی اول $a^+b^+b^-a^-$ و در الگوی دیگر aaa و $bbbbbb$ به‌دست خواهد آمد. دو علامت را یکی می‌گیریم اگر تفاوت آنها از ترتیبهای متفاوت علامتگذاری ناشی نشده باشد. حال همهٔ کاشیکاریهایی را درنظر بگیرید که همهٔ اضلاع آنها قابل انطباق باشند و علاوه بر این نسبت به جابه‌جایی اضلاع تقارن کامل داشته باشند.

یعنی اگر یک ضلع را برداریم و پس از انتقال و دوران بر ضلع دیگری منطبق کنیم، تمام کاشیکاری با همان انتقال و دوران بر خودش منطبق می‌شود. دو کاشیکاری از این نوع را یکی می‌گیریم اگر دارای یک هندسه باشند و همچنین علامتگذاری یالی آنها یکی باشد. در این‌صورت دقیقاً ۲۶ نوع مختلف کاشیکاری با تقارنهای مطرح‌شده وجود دارند که در زیر آمده‌اند.

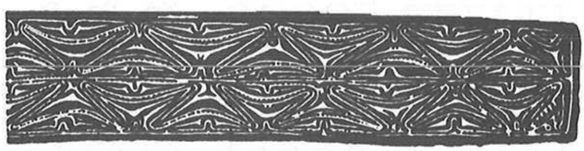


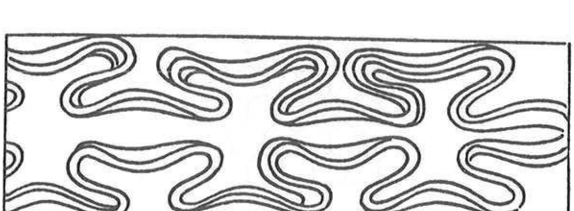
شکل۹

در تاریخ هنر الگوهایی نواری از کاشیکاریها نیز دیده می‌شود. مثالهای زیر در یونان، تونس، مصر، گینهٔ‌نو، ژاپن، مکزیک و آریزونا یافت شده‌اند.



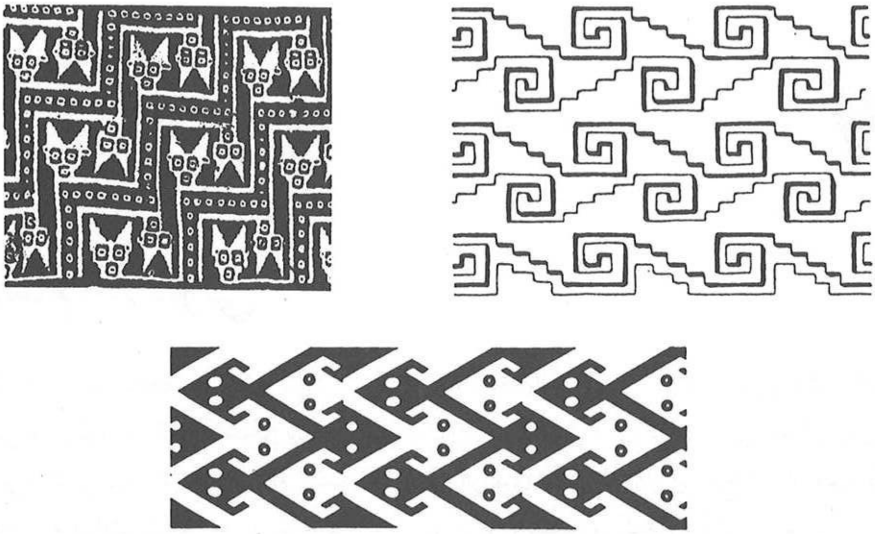
همچنین دو الگوی مدرن در زیر آمده است:





شکل ۱۰

در میان این الگوها، می‌توان کاشیکاریهایی را جست که تنها از یک نوع کاشی درست شده‌اند و اگر یک کاشی را با یک دوران و انتقال بر کاشی دیگری منطبق کنیم، تمام کاشیکاری با همان دوران و انتقال بر خودش منتقل می‌شود. به مثالهای زیر توجه کنید:



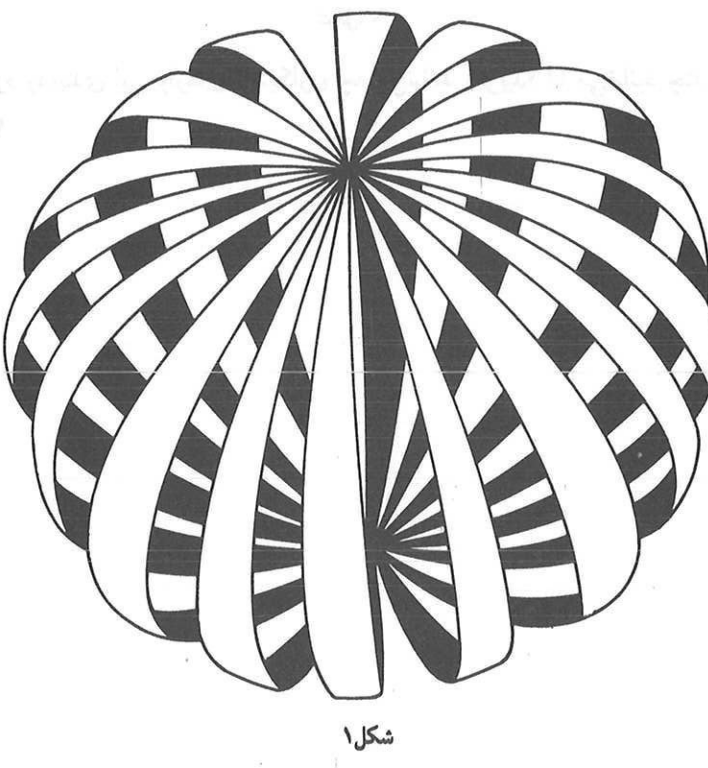
شکل۱۱

در مورد رده‌بندی این نوارهای کاشیکاری چه می‌توانید بگویید؟ آیا می‌توانید چند مثال جالب طراحی کنید؟

۷

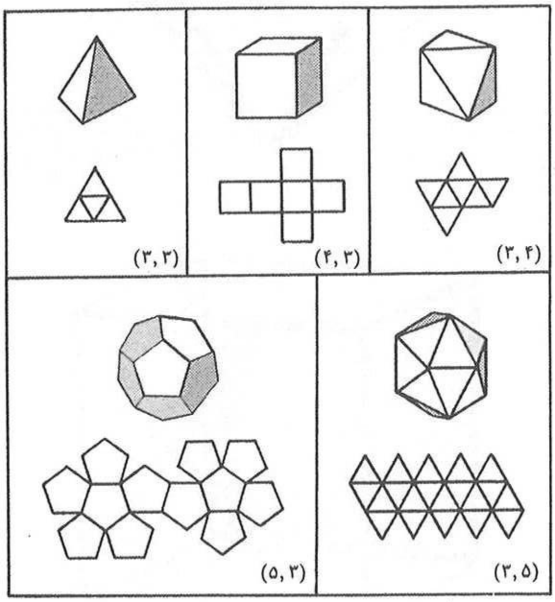
اجسام افلاطونی

با کاشیکاریهای صفحه و نوار آشنا شدیم. سؤالی زیبا و هیجان‌انگیز این است که آیا می‌توان کاشیکاری زیبایی برای کره پیدا کرد؟ کاشیکاریهای بدیهی بسیاری می‌توان پیدا کرد که در عین همگن بودن از یک نوع کاشی درست شده‌اند. مثلاً تقسیم کره به نیمکره‌های بالا و پایین از این نوع است، همین‌طور قاچهای نصف‌النهاری که خط استوا را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند (شکل ۱ را ببینید).



شکل۱

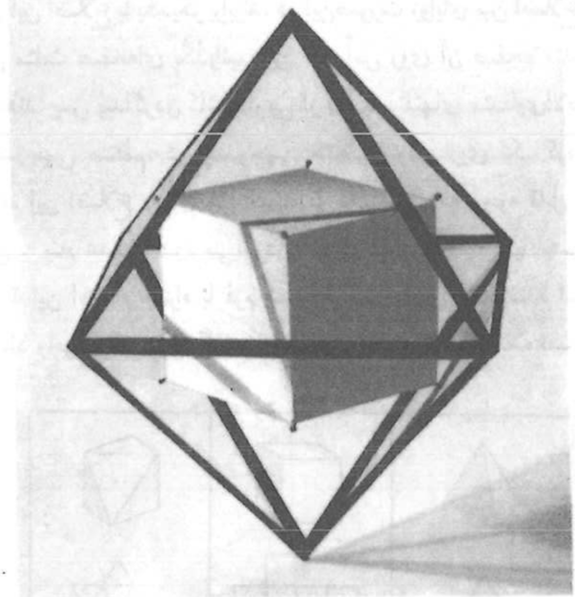
اگر بخواهیم یک کاشیکاری با کاشیهای منتظم به‌دست دهیم، باید اشکال منتظم روی کره را بشناسیم. مثلث متساوی‌الاضلاع روی کره یک سه‌ضلعی است که اضلاع آن قسمتی از دایره‌های عظیمهٔ کره‌اند و طول این اضلاع با یکدیگر برابرند. در این‌صورت زوایای بین اضلاع نیز برابر خواهد بود. حال اگر از سه رأس مثلث صفحه‌ای بگذرانیم، این سه رأس روی آن صفحه مثلث متساوی‌الاضلاع تختی به‌دست می‌دهند. پس پیداکردن کاشیکاریی از کره با مثلثهای متساوی‌الاضلاع معادل خواهد بود با ارائهٔ یک چندوجهی منتظم. در چندوجهی منتظم رئوس روی یک کره قرار دارند و وجوه چندضلعی منتظم‌اند. این اضلاع را یال می‌نامیم. اگر بخواهیم همهٔ وجوه قابل انطباق باشند تعداد چنین چندوجهیهایی به پنج عدد محدود می‌شود که چندوجهیهای منتظم یا اجسام افلاطونی خوانده می‌شوند. در شکل ۲ این اجسام همراه با فرم گستردهٔ آنها نمایش داده شده است. همچنین تعداد یالهای هر وجه و تعداد وجوهی که در هر گوشه به‌هم می‌رسند مشخص شده است.

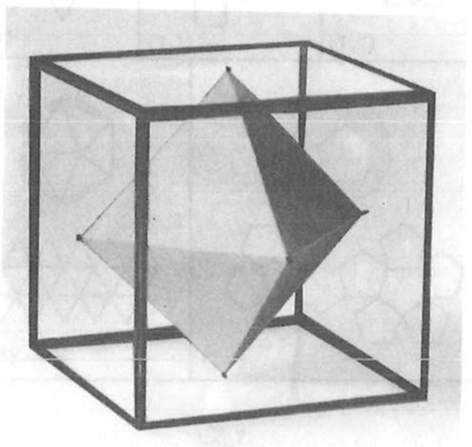


شکل۲

زوج (۴, ۳) که به مکعب نسبت داده شده است و زوج (۳, ۴) که به هشت‌وجهی نسبت داده شده است از جابه‌جاشدن مؤلفه‌های اول و دوم به‌هم تبدیل می‌شوند. همچنین زوج (۵, ۳) که به دوازده‌وجهی منتظم نسبت داده شده است و زوج (۳, ۵) که به بیست‌وجهی منتظم نسبت داده شده است با جابه‌جاشدن مؤلفه‌های اول و دوم به‌هم تبدیل می‌شوند. زوج (۳, ۳) هم که به چهاروجهی نسبت داده شده است به خودش تبدیل می‌شود. این امر نشان می‌دهد که به‌نوعی مکعب و هشت‌وجهی مزدوج یکدیگرند. همچنین بیست‌وجهی و دوازده‌وجهی مزدوج یکدیگرند و چهاروجهی

نیز مزدوج خودش است. در واقع دلیل هندسی محکمی برای ارتباط بین چندوجهیهای مزدوج بالا وجود دارد. به اشکال زیر توجه کنید:

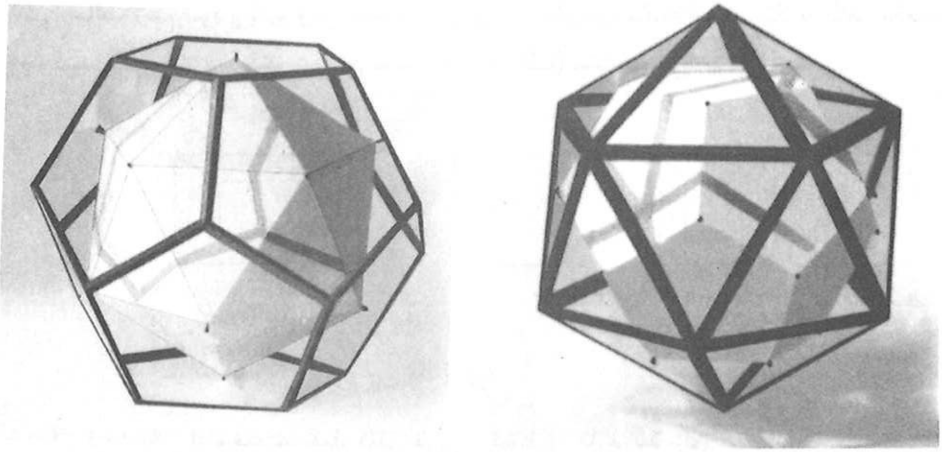




شکل۳

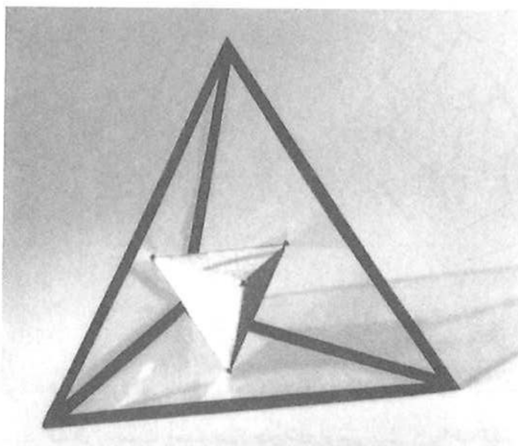
اگر مرکز هر وجهی را یک گوشه قرار دهید و مراکز وجوه همسایه را به هم وصل کنید، چندوجهی منتظم دیگری به‌دست می‌آید. به این روش می‌توان مکعبی داخل هشت‌وجهی محاط و یا خارج آن محیط کرد. در اینجا می‌بینیم که چرا تعداد گوشه‌های مکعب برابر تعداد وجوه هشت‌وجهی و همچنین تعداد گوشه‌های هشت‌وجهی برابر تعداد وجوه یک مکعب است. همچنین تعداد یالهای یک وجه

مکعب با تعداد وجوه هشت‌وجهی که در یک گوشه به‌هم می‌رسند برابر می‌شود، و تعداد یالهای یک وجه هشت‌وجهی که یک مثلث است با تعداد وجوه مکعب که در یک گوشه آن به‌هم می‌رسند برابر می‌شود. برای درک ارتباط بین دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی به اشکال زیر توجه کنید:



شکل۴

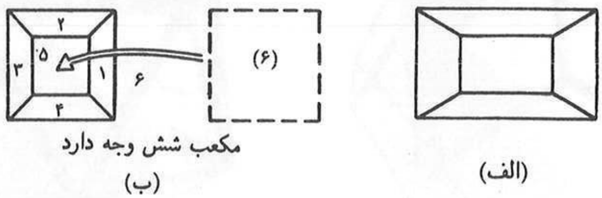
با توجه به اشکال بالا می‌توان بیست‌وجهی را داخل دوازده‌وجهی محاط یا خارج آن محیط کرد. در این حالت هم بین وجوه بیست‌وجهی و گوشه‌های دوازده‌وجهی و همچنین بین وجوه دوازده‌وجهی و گوشه‌های بیست‌وجهی تناظر یک به‌یک برقرار می‌شود. مراکز وجوه چهاروجهی نیز گوشه‌های چهاروجهی دیگری هستند. به همین دلیل تعداد گوشه‌های چهاروجهی و تعداد وجوه آن با هم برابر است، چون بین آنها تناظر یک به‌یک وجود دارد (شکل ۵ را ببینید).



شکل۵

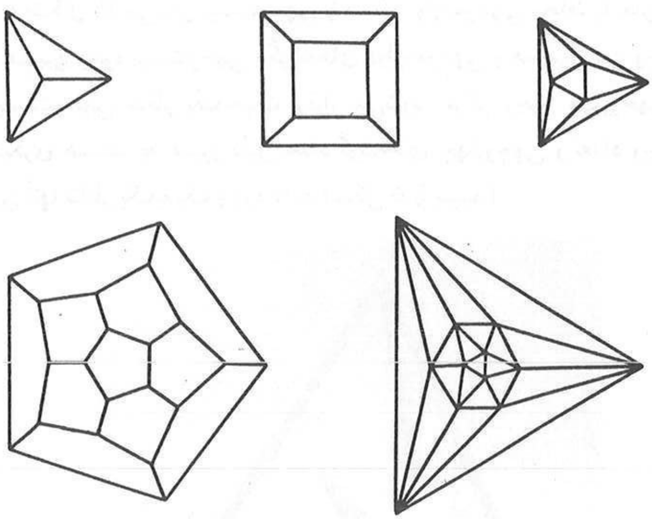
بین یالهای هر چندوجهی منتظم و یالهای چندوجهی منتظم مزدوج آن تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. به همین دلیل مکعب و هشت‌وجهی هردو دوازده یال و دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم هردو سی یال دارند.

برای شمردن تعداد گوشه‌ها، وجوه و یالهای چندوجهی منتظم روشهای ساده‌کننده‌ای وجود دارد. روشی جالب رسم نمودار یالها و گوشه‌های چندوجهی منتظم در صفحه است. مثلاً به ظاهر مکعب توجه کنید. با توجه به پرسپکتیو عکسی مانند شکل ۶ (الف) مشاهده می‌کنید:



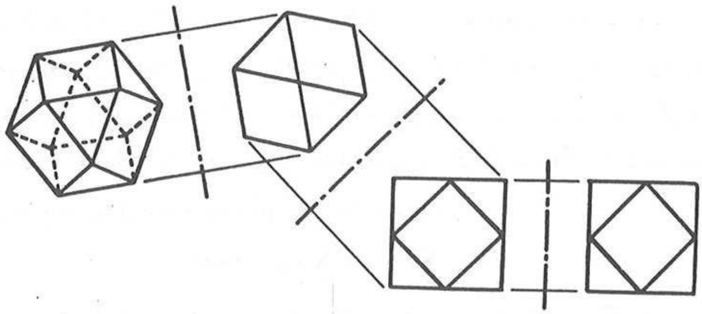
شکل۶

با بزرگتر کردن یکی از وجوه به مقدار کافی می‌توان نموداری مانند بالا برای هریک از چندوجهیهای منتظم رسم کرد:



شکل۷

شمردن تعداد گوشه‌ها، وجوه و یالهای چندضلعی کار ساده‌ای است، ولی اگر اندکی شکل چندوجهی پیچیده‌تر شود ممکن است اشتباهی در شمارش پیش بیاید. بهترین راه‌حلی که برای این مشکل پیشنهاد شده است استفاده از نموداری مانند نمودار صفحه بعد است:



شکل۸

در اینجا هر شکل از شکل قبل با دورانی محوری حول محوری مناسب به‌دست آمده است. می‌دانیم گوشه‌های هر چندوجهی منتظم روی یک کره قرار دارند و کاشیکاریی برای کره با کاشیهای منتظم کروی به‌دست می‌دهند. اضلاع این کاشیها قسمتهایی از دایره‌های عظیمهٔ کره‌اند. حال سعی می‌کنیم مساحت محدود شده بین دایره‌های عظیمه را که زاویهٔ θ تشکیل می‌دهند حساب کنیم:

$$\text{مساحت قاچ} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2r^2\theta$$

در اینجا r شعاع کره است که می‌توان فرض کرد کره به شعاع واحد است. فرمول بالا این‌طور به‌دست آمده است که نسبت مساحت قاچ به مساحت کره برابر نسبت زاویهٔ θ به زاویهٔ 2π است. فرض کنید سه دایرهٔ عظیمه در اقطار AA'، BB' و CC' همدیگر را قطع کنند (شکل ۹ را ببینید). فرض کنید A، B و C زوایای کروی مثلث ABC باشند. در این‌صورت

$$ABA'CA \text{ مساحت قاچ} = \triangle ABC + \triangle A'BC = 2r^2 A$$

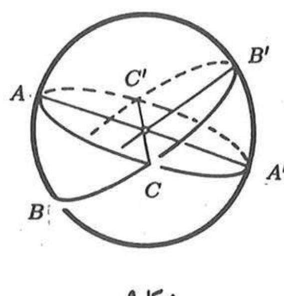
$$BCB'AB \text{ مساحت قاچ} = \triangle ABC + \triangle B'CA = 2r^2 B$$

$$+ \quad CAC'BC \text{ مساحت قاچ} = \triangle ABC + \triangle C'AB = 2r^2 C$$

$$2\triangle ABC + (\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle B'CA + \triangle C'AB) = 2r^2(A+B+C)$$

$$2\triangle ABC + 2\pi r^2 = 2r^2(A+B+C)$$

$$\triangle ABC = r^2(A+B+C-\pi)$$



شکل۹

هر چندضلعی کروی را می‌توان به مثلثهایی تجزیه کرد. با توجه به فرمول به‌دست آمده در بالا مساحت یک چندضلعی کروی برابر خواهد بود با $r^۲(s-(p-r)\pi)$ که در آن s مجموع زوایای کروی چندضلعی و p تعداد اضلاع چندضلعی است. اگر سطح کرهٔ به شعاع واحد را به چندضلعیهای کروی تقسیم کنیم، مجموع مساحتهای آنها برابر $۴\pi r^۲$ می‌شود که همان مساحت کره است. اگر تعداد چندضلعیها را با F نمایش دهیم، با جمع کردن مساحتهای آنها به‌دست می‌آوریم

$$۴\pi = \sum s - \pi \sum p + ۲\pi F$$

مجموع زوایای چندضلعیها در هر گوشه برابر ۲π است. پس $\sum s = ۲\pi V$ که در آن V تعداد گوشه‌هاست. همچنین هر یال دو بار در $\sum p$ شمرده شده است. پس $\sum p = ۲E$ که در آن E تعداد یالهای چندوجهی است. بنابراین $۴\pi = ۲\pi V - ۲\pi E + ۲\pi F$ و از آنجا

$$۲ = V - E + F$$

این فرمول را فرمول اویلر می‌نامند. حال اگر یک چندوجهی منتظم داشته باشیم و q تعداد وجوهی باشد که در هر گوشه به‌هم می‌رسند و p تعداد یالهای هر وجه باشد، آنگاه

$$pF = ۲E = qV$$

از رابطهٔ بالا و فرمول اویلر به‌دست می‌آوریم

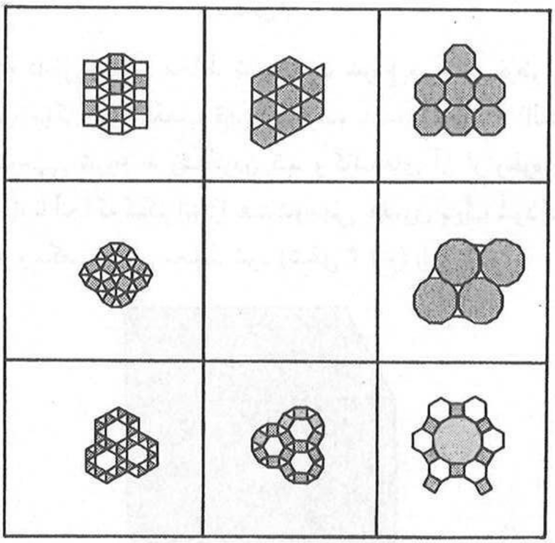
$$V = \frac{۴p}{۲(p+q)-pq}, \quad E = \frac{۲pq}{۲(p+q)-pq}, \quad F = \frac{۴q}{۲(p+q)-pq}$$

طرفهای راست این سه برابری باید مثبت باشند. بنابراین $pq < ۲(p+q)$ و از آنجا $\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{q} + \frac{۱}{p}$. با توجه به اینکه q حداقل ۳ است، به‌سادگی می‌توان دید تنها چندوجهیهای منتظم اجسام افلاطونی‌اند.

۸

چندوجهیهای همگن

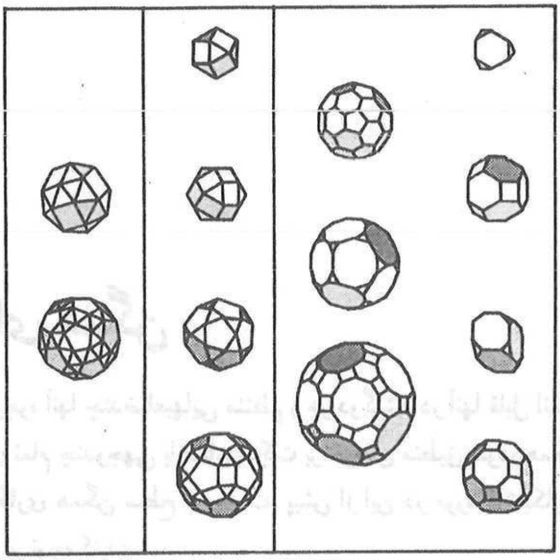
چندوجهیهایی را که وجوه آنها چندضلعیهایی منتظم و هر دو گوشه در آنها قابل انطباق‌اند به‌طوری‌که با انطباق یکی بر دیگری تمام چندوجهی با همان حرکت بر خودش منطبق شود، همگن می‌نامند. درواقع این کاشیکاری، کاشیکاری همگن سطح کره است. پیش از این در مورد کاشیکاریهای همگن سخن گفته‌ایم. به الگوهای زیر توجه کنید:



شکل۱

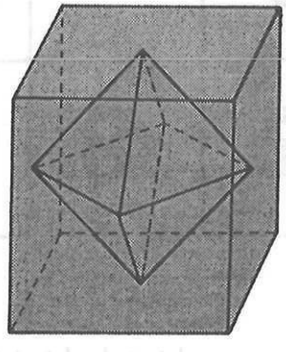
در هریک از این الگوها اگر به‌جای شش‌ضلعیها، پنج‌ضلعی، مربع یا مثلث قرار دهیم به کاشیکاری کره می‌رسیم. در این مورد بیشتر بررسی خواهیم کرد. اما این اشاره توجه شما را به زیبایی کاشیکاریهای

همگن کره بیشتر جلب خواهد کرد. بجز اجسام افلاطونی که چندوجهیهای همگنی هستند، مجموعهٔ زیر تمام چندوجهیهای همگن را دربردارد. به شباهت الگوهای کروی و مسطح توجه کنید:



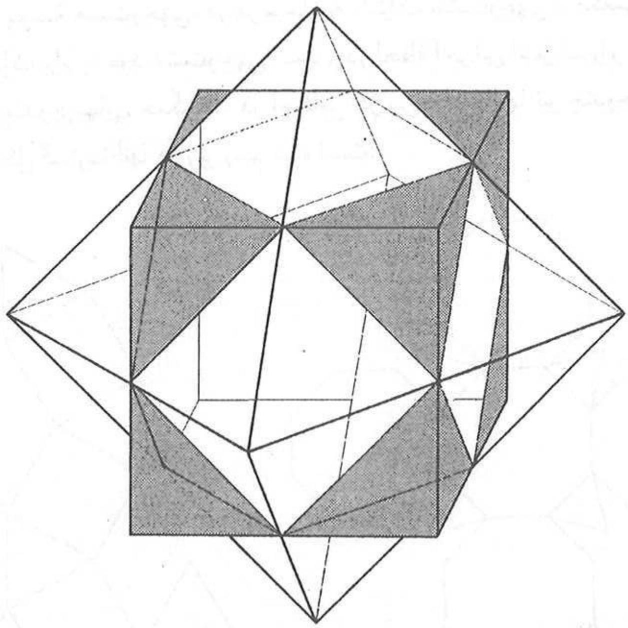
شکل۲

از یک هشت‌وجهی که داخل مکعب محاط شده است شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم گوشه‌های هشت‌وجهی دقیقاً روی مراکز وجوه مکعب قرار داده شده باشند (شکل ۳ (الف) را ببینید). حال فرض کنید این هشت‌وجهی شروع به رشدکردن کند و گوشه‌های آن از وجوه مکعب بیرون بزنند (شکل ۳ (ب) را ببینید)، تا آنجا که کم‌کم اندازهٔ هشت‌وجهی به‌قدری بزرگ شود که گوشه‌های مکعب روی وجوه آن قرار گیرند و مکعب در آن محاط شود (شکل ۳ (ج) را ببینید).

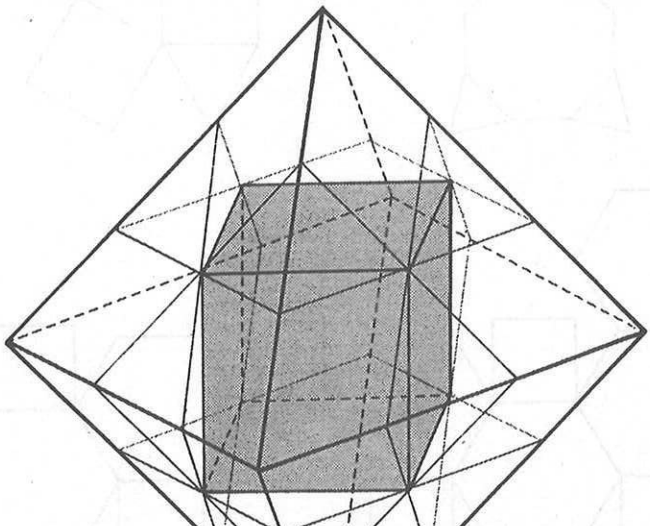


(الف)

شکل۳



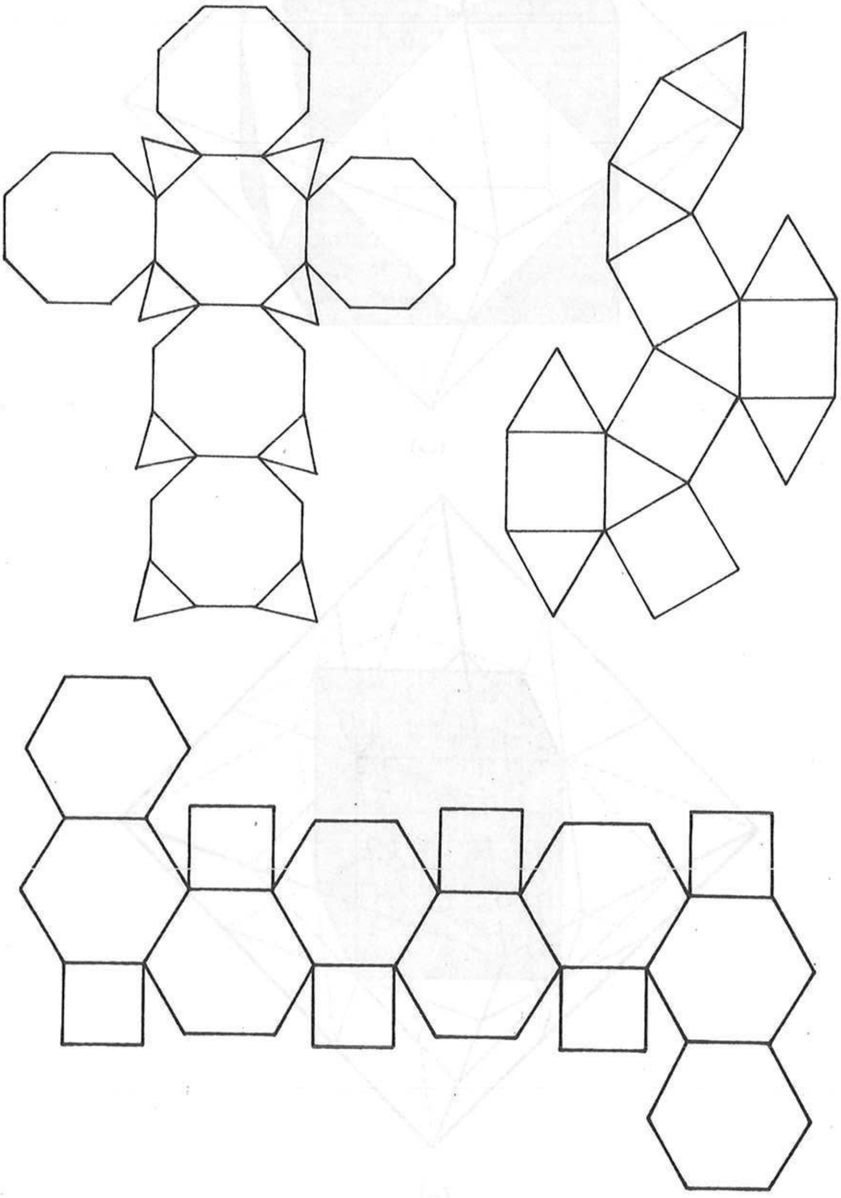
(ب)



(ج)

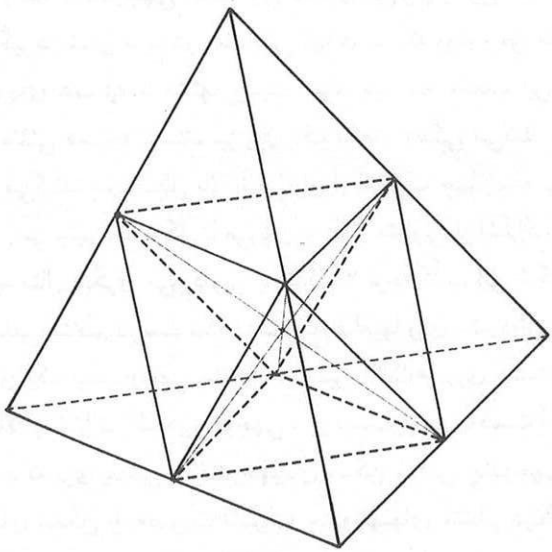
شکل۳ (ادامه)

در این رشد پیوستهٔ هشت‌وجهی، در هر مرحله به اشتراک هشت‌وجهی با مکعب توجه کنید. در لحظهٔ اول این اشتراک برابر با خود هشت‌وجهی است و در لحظهٔ آخر این اشتراک برابر با مکعب است. هردو این اشکال چندوجهیهایی همگن‌اند. در لحظاتی در بین این حالتها نیز چندوجهیهای همگنی یافت می‌شوند. شکل گستردهٔ آنها در زیر رسم شده است:



شکل۴

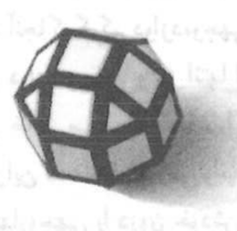
به‌همین صورت می‌توان دوازده‌وجهی را در بیست‌وجهی محاط کرد. اگر این دوازده‌وجهی شروع به رشد کند و گوشه‌های آن از وجوه بیست‌وجهی بیرون بزند، تا آنجا که کم‌کم دوازده‌وجهی آنقدر بزرگ بشود که بر بیست‌وجهی محیط شود، در ابتدا اشتراک این دو دوازده‌وجهی و در انتها اشتراک آنها بیست‌وجهی خواهد بود. در این میان چندوجهیهای همگنی ظاهر می‌شوند که اشتراک یک دوازده‌وجهی و یک بیست‌وجهی‌اند. سه مثال از مثالهای شکل ۲ از این دست‌اند. آیا می‌توانید آنها را بیابید؟ با توجه به اینکه چهاروجهی مزدوج خودش است، اگر یک چهاروجهی را درون خودش محاط کنیم و سپس این چهاروجهی شروع به رشد کند، تا گوشه‌های آن از وجوه چهاروجهی محیط بیرون بزند و کم‌کم آنقدر بزرگ شود که خود بر چهاروجهی دیگر محیط شود، در لحظه اول و آخر اشتراک دو چهاروجهی خود چهاروجهی است. اما در لحظه‌ای که اوساط یالهای دو چهاروجهی برهم منطبق می‌شوند اشتراک دو چهاروجهی هشت‌وجهی است. پس هشت‌وجهی در مکعب می‌نشیند.



شکل۵

چندوجهی همگن دیگری نیز وجود دارد که اشتراک دو چهاروجهی است. آیا می‌توانید آن‌را در شکل ۲ پیدا کنید؟ کاشیکاریهای همگنی که از اشتراک دو چندوجهی منتظم به‌دست می‌آیند شناسایی کردیم. آیا می‌توان با اشتراک گرفتن از سه یا چند چندوجهی منتظم چندوجهی همگنی به‌دست آورد؟ مثلاً به شکل ۶ توجه کنید. هردو مربع روبه‌روی هم را که همسایهٔ مثلثی نیستند اگر در بالا و پایین شکل قرار دهیم همراه با چهار مربع از مربعهای غیرهمسایهٔ آنها که یکی در میان انتخاب شده‌اند، شش صفحه را مشخص می‌کنند که از امتداد دادن آنها یک مکعب به‌دست می‌آید. پس این مکعب را باید با اشکال دیگری اشتراک دهیم. مربعهای همسایه این دو مربع در هشت صفحه زندگی می‌کنند که اگر

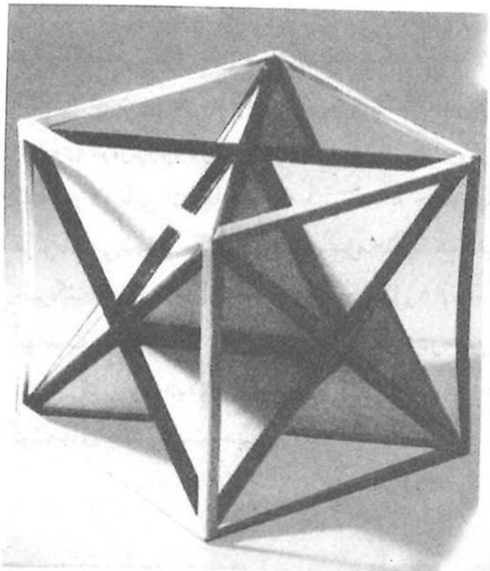
شکل ۷



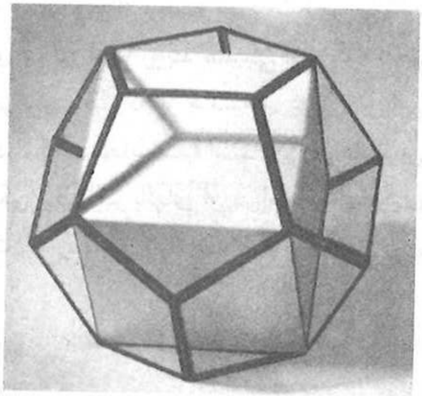
شکل ۶

آنها را امتداد دهیم یک هشت‌وجهی به‌دست می‌آید. برای اینکه همهٔ مربعهایی که با مثلثی همسایه هستند پوشیده شوند مجبوریم دو هشت‌وجهی مانند بالا درنظر بگیریم. از طرف دیگر مثلثهای شکل، هشت صفحه را مشخص می‌کنند که روی یک هشت‌وجهی دیگر زندگی می‌کنند. پس شکل بالا اشتراک یک مکعب و سه هشت‌وجهی است. جور دیگری می‌توان به این مطلب نگاه کرد. دو مثلث روبه‌روی هم درنظر بگیرید. شش مربع در همسایگی آنها هستند که روی وجوه مکعبی زندگی می‌کنند. برای اینکه همهٔ مربعهای همسایه با مثلثها پوشیده شوند باید سه مکعب این‌چنین درنظر بگیریم. مربعهایی که با هیچ مثلثی همسایه نیستند نیز روی یک مکعب زندگی می‌کنند و مثلثها هم روی یک هشت‌وجهی زندگی می‌کنند. پس شکل بالا را می‌توان از اشتراک چهار مکعب و یک هشت‌وجهی هم به‌دست آورد. پس می‌بینیم یک شکل را می‌توان به طرق متفاوتی از اشتراک چندوجهیهای منتظم به‌دست آورد. حال به مثال دیگری می‌پردازیم؛ به شکل ۷ توجه کنید. این شکل از وجوهی به‌شکل مربع، مثلث یا پنج‌ضلعی منتظم درست شده است. پنج‌ضلعیها روی یک دوازده‌وجهی منتظم زندگی می‌کنند و مربعها روی یک بیست‌وجهی منتظم. همچنین مثلث‌ها روی بیست‌وجهی منتظم زندگی می‌کنند. پس شکل بالا از اشتراک یک دوازده‌وجهی و دو بیست‌وجهی به‌دست آمده است. اگر به‌شکل ۲ مراجعه کنید می‌بینید که برای بعضی از چندوجهیهای همگن چندین چندوجهی منتظم لازم است تا بتوان این چندوجهیهای همگن را به‌صورت اشتراک چندوجهیهای منتظم درنظر گرفت. در شکل ۲ برای هر شکل حداقل تعداد چندوجهیهای منتظم لازم را به‌دست آورید.

بجز شکل ۵ نشاندنهای غیرقابل‌انتظار دیگری نیز بین اجسام افلاطونی وجود دارد. به دو مثال که در شکل ۸ آمده توجه کنید. مکعبی که در بالا درون دوازده‌وجهی نشسته اندکی از شکل دیگر پیچیده‌تر است. می‌دانیم که چهاروجهی و هشت‌وجهی را می‌توان بنابر شکل ۵ از روی همدیگر ساخت. بنابر شکل ۵ مکعب و چهاروجهی را می‌توان از روی‌هم به‌دست آورد و همچنین از روی دوازده‌وجهی می‌توان مکعب به‌دست آورد. اگر بتوانیم از روی مکعب دوازده‌وجهی درست کنیم، آنگاه تمام اجسام افلاطونی به‌طریق هندسی به‌هم مربوط می‌شوند. توجه کنید که پانزده مکعب مانند بالا در یک دوازده‌وجهی می‌نشینند. اگر همهٔ آنها را به‌دست آوریم همهٔ رئوس دوازده‌وجهی را به‌دست آورده‌ایم. توجه کنید که اگر یک گوشهٔ دوازده‌وجهی روی مکعبی مانند بالا باشد، گوشهٔ مقابل هم روی



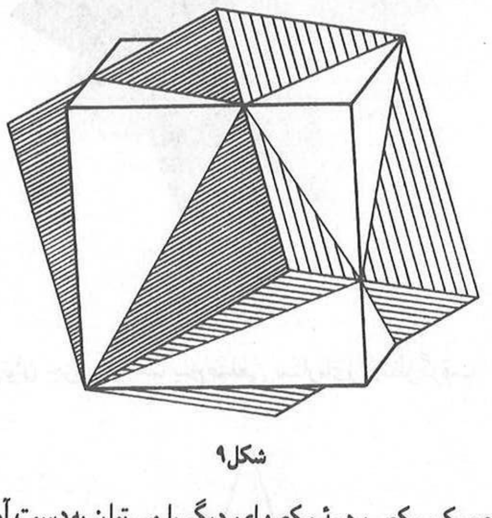
(ب)



(الف)

شکل۸

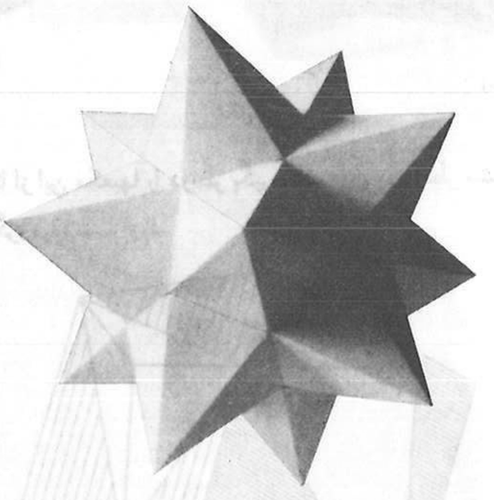
همان مکعب است. دو تا از این مکعبها را درنظر بگیرید که روی یک قطر مشترک‌اند. می‌توان با یک دوران یکی را از روی دیگری به‌دست آورد.



شکل۹

به این ترتیب از روی یک مکعب همهٔ مکعبهای دیگر را می‌توان به‌دست آورد و از آنجا دوازده‌وجهی منتظم به‌دست می‌آید. همچنین با توجه به نشاندن بالا از یک مکعب درون دوازده‌وجهی می‌توان نشاندنی از یک هشت‌وجهی درون دوازده‌وجهی به‌دست آورد که گوشه‌های آن روی اوساط یالهای دوازده‌وجهی قرار دارند. ولی این نشاندن ارتباط هندسی جالبی به‌دست نمی‌دهد. روی بیست‌وجهی هم می‌توان هشت‌وجهی بنا کرد. می‌توان شش یال از بیست‌وجهی را متمایز کرد، که به جفتهای عمود

برهم افراز می‌شود. پس می‌توان یک هشت‌وجهی روی اوساط این یالها بنا کرد. همچنین با توجه به مکعبی که درون دوازده‌وجهی می‌توان نشاند، می‌توان مکعبی درون بیست‌وجهی نشاند که گوشه‌های آن روی مرکز وجوه دوازده‌وجهی قرار گیرند. به این ترتیب هشت وجه از بیست‌وجهی مشخص می‌شود که هیچ دو تایی از آنها همسایه نیستند. آیا چندوجهیهای همگن نیز با روابط هندسی از این‌گونه به‌هم مربوط می‌شوند؟ چندوجهیهای غیرمحدب همگنی می‌توان یافت که از هندسه‌ای غنی و زیبایی خیره‌کننده‌ای برخوردارند. چندوجهی شکل ۸ (ب) که در مکعب محاط شده است یکی از ساده‌ترین آنهاست. زیبایی این شکل در این است که در عین همگن بودن اکثر یالهای آن در امتداد یال دیگری قرار دارند. نمونهٔ دیگری که به‌شکل جالبتری این خاصیت را دارد شکل زیر است که گوشه‌های آن روی گوشه‌های یک بیست‌وجهی منتظم قرار دارند:

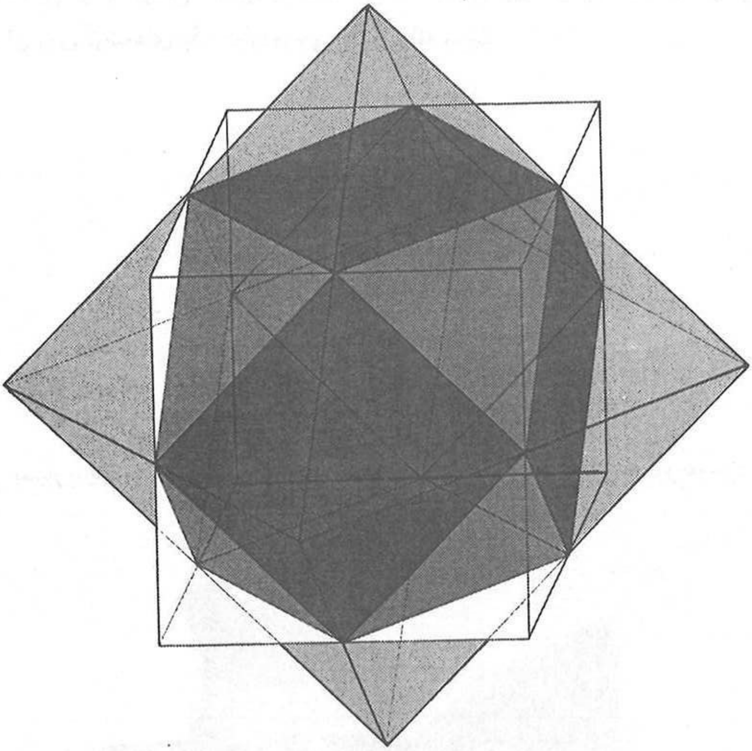


شکل ۱۰

هر وجه این شکل را می‌توان جزئی از یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای درنظر گرفت.

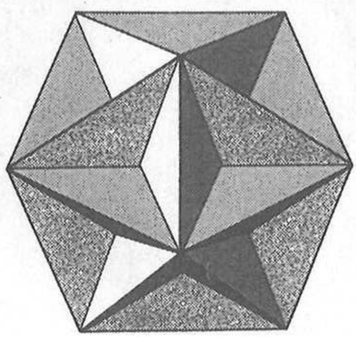
شکل ۱۱

یک مکعب و یک چهاروجهی که اوساط یالهای آنها روی هم قرار گرفته است از این قبیل است. اما این شکل همگن نیست:



شکل۱۲

همچنین، یک بیست‌وجهی و یک دوازده‌وجهی که اوساط یالهای آنها روی هم قرار گرفته است چندوجهی همگن نیست.

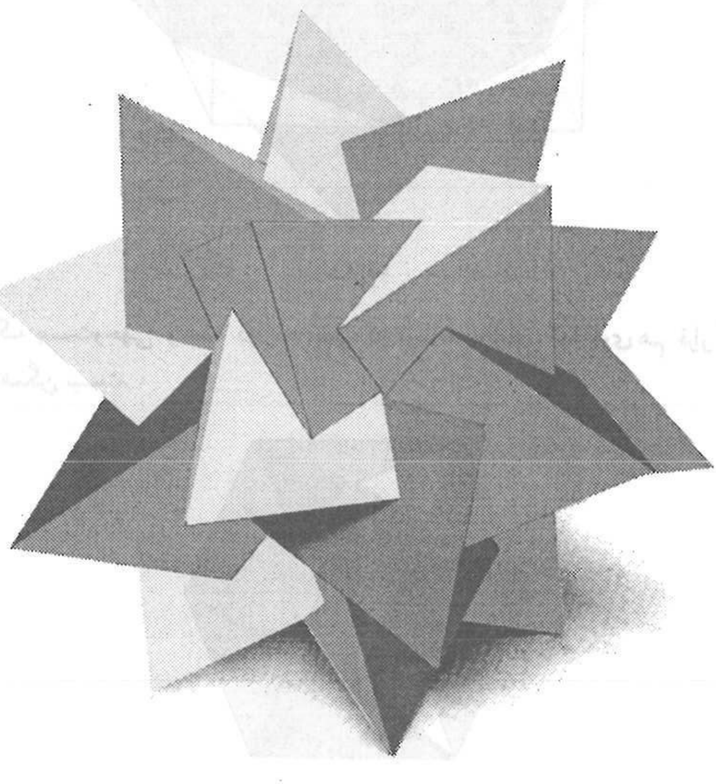


شکل۱۳

چندوجهی همگن شکل ۱۳ در یک بیست‌وجهی محاط می‌شود و از پوشاندن شکل ۱۰ با مثلثهایی به‌دست آمده است. شکلهای ۱۰ و ۱۳ از وصل‌کردن هر گوشه بیست‌وجهی به بعضی از گوشه‌های مقابل آن به روشی متقارن به‌دست می‌آیند. شکل زیر سومین مثال از این نوع است که گوشه‌های آن روی گوشه‌های یک دوازده‌وجهی قرار گرفته است.

شکل۱۴

نمونه‌هایی بسیار پیچیده‌تر از این نیز وجود دارد. حدس بزنید شکل همگن زیر چطور به‌وجود آمده است:



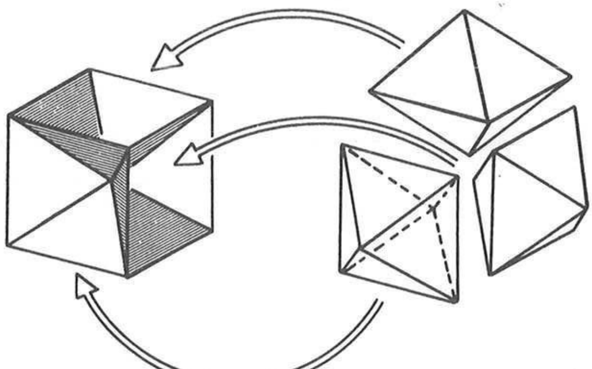
شکل۱۵

می‌بینید که گوشه‌های یک دوازده‌وجهی با گوشه‌های شکل ۱۵ مشخص می‌شوند. بنابراین این شکل به ما می‌گوید که می‌توان چهاروجهی را در دوازده‌وجهی محاط کرد. سپس اگر همهٔ این چهاروجهیهای محاط شده را درنظر بگیریم شکل ۱۵ به‌دست می‌آید. در فصل قبل مکعبهای محاط در یک دوازده‌وجهی را درنظر گرفتیم. آیا می‌توانید شکلی را که از اجتماع آنها به‌دست می‌آید رسم کنید؟ مثالهایی که تاکنون آورده‌ایم مثالهای ساده‌ای هستند که از چندوجهیهای منتظم به‌دست می‌آیند. مثالهای جالبتری از چندوجهیهای همگن غیرمنتظم به‌دست می‌آیند.

۹

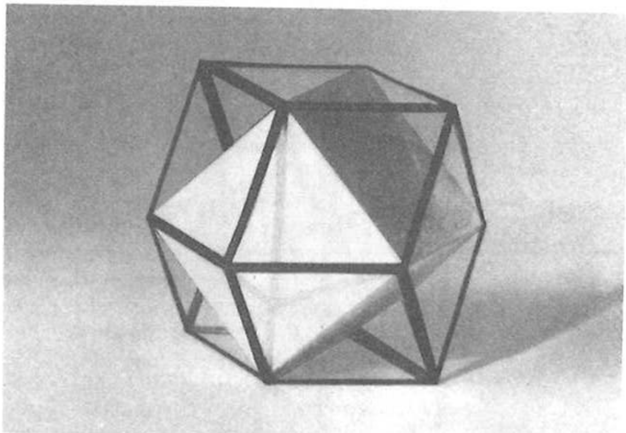
کاشیکاری در سه‌بعد

ساده‌ترین راه برای کاشیکاری سه‌بعدی پرکردن فضا با مکعبهاست. توجه کنید که مکعب را می‌توان چنان مچاله کرد که به‌شکل اجتماع چند منشور به‌نظر برسد. با این وصف می‌بینیم که می‌توان فضا را با هشت‌وجهیهایی غیرمنتظم مانند زیر کاشیکاری کرد:

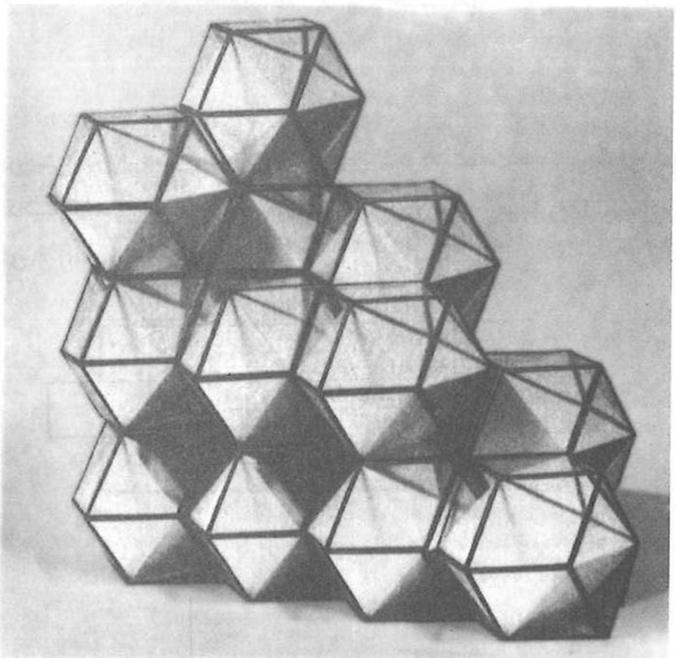


شکل۱

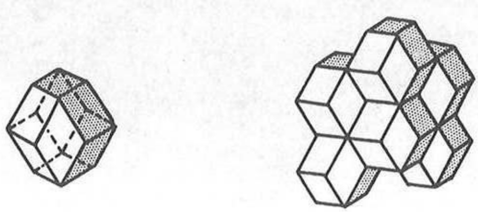
با اینکه هشت‌وجهیهای بالا منتظم نیستند می‌توان از اجتماعی از آنها شکلی منتظم به‌دست آورد. اگر اجتماع همهٔ هشت‌وجهیهایی را که مکعب را قطع می‌کنند تشکیل دهیم شکلی منتظم به‌دست می‌آید (شکل ۲ را ببینید). اگر کاشیکاری فضا با مکعبها را یکی در میان خالی کنیم و نواحی خالی‌شده را به شش منشور مانند شکل ۱ تقسیم کنیم، خواهیم دید که می‌توان فضا را با کاشیهایی مانند شکل ۲ کاشیکاری کرد (شکل ۳ را ببینید). بدون مکعبها این کاشیکاری مانند شکل ۴ به‌نظر می‌رسد. این کاشیکاری فضا در طبیعت ظاهر می‌شود. در واقع هر سلول کندوی عسل با سلولهای زیرین ارتباطی مانند کاشیکاری شکل ۴ دارد.



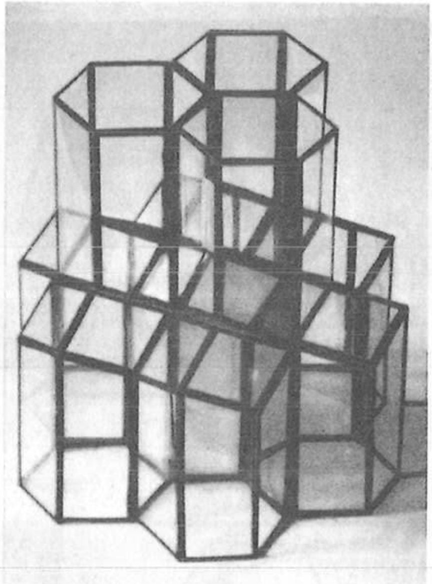
شکل۲



شکل۳

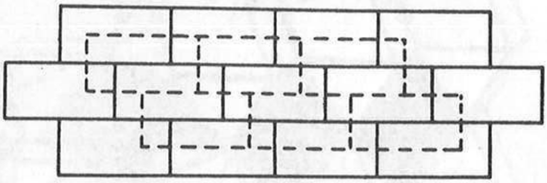


شکل۴

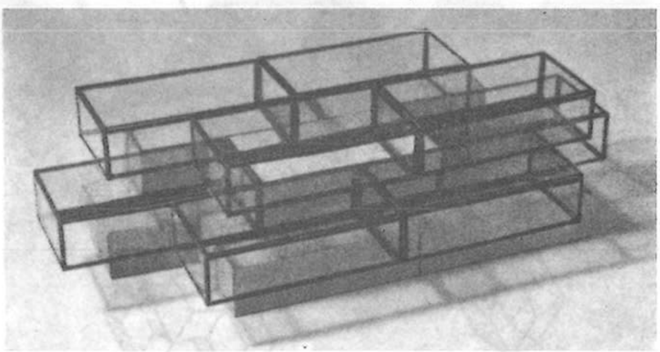


شکل۵

می‌توان آجرچینی درون دیوار را چنان طرح‌ریزی کرد که نسبت به ضربه‌های عمود بر دیوار مقاومت بیشتری داشته باشد. برای این‌منظور سعی می‌شود درزهای آجرها روی آجرهای ردیف قبلی قرارگیرند (شکلهای ۶ (الف) تا ۶ (د) را ببینید).

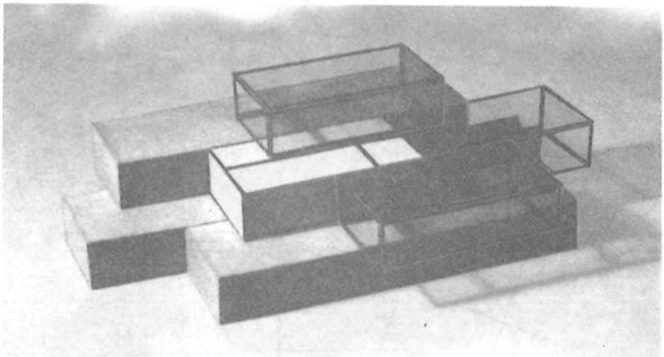


(الف)

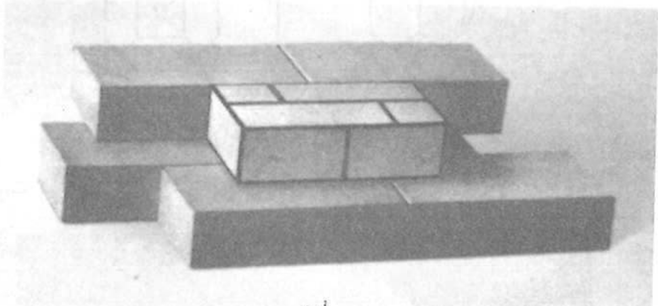


(ب)

شکل۶



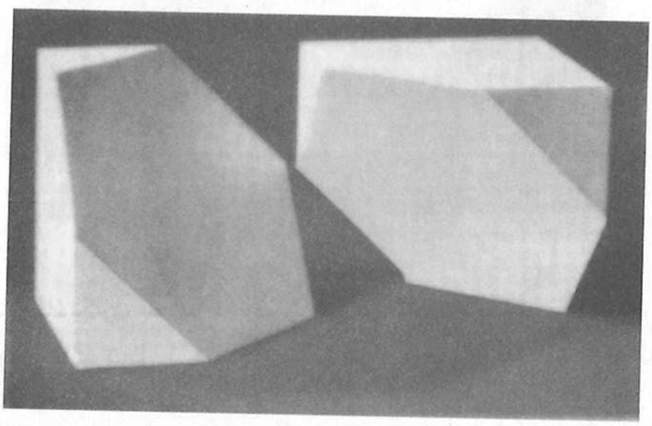
(ج)



(د)

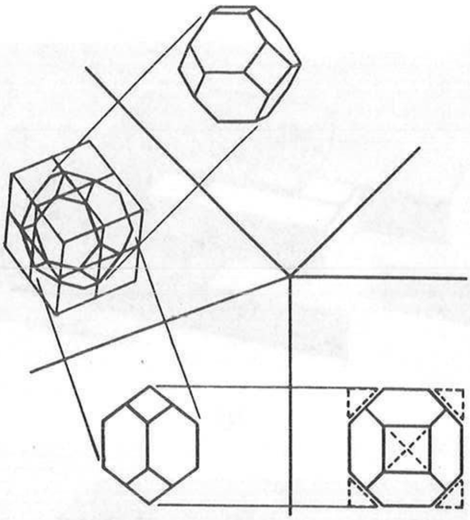
شکل ۶ (ادامه)

اگر مکعب را از وسط نصف کنیم شش‌ضلعی منتظمی به‌دست می‌آید که رئوس آن روی یالهای مکعب قرار دارند:



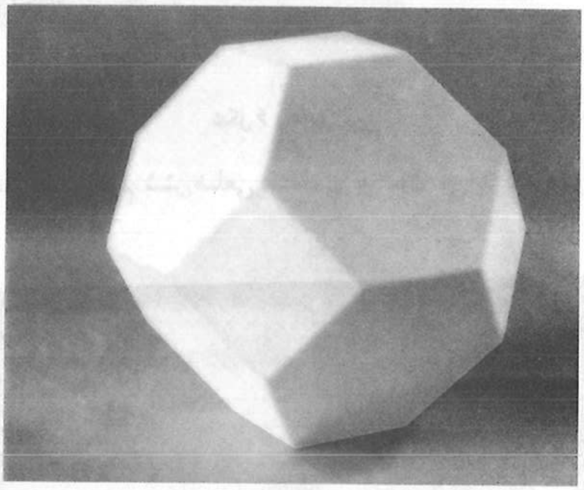
شکل ۷

حال اگر مکعب را به هشت مکعب مساوی تقسیم کنیم و روی هریک از آنها یک شش‌ضلعی مانند بالا ببریم، هشت نیمهٔ مکعب به‌دست می‌آید که همسایهٔ مرکز مکعب اولیه هستند:



شکل۸

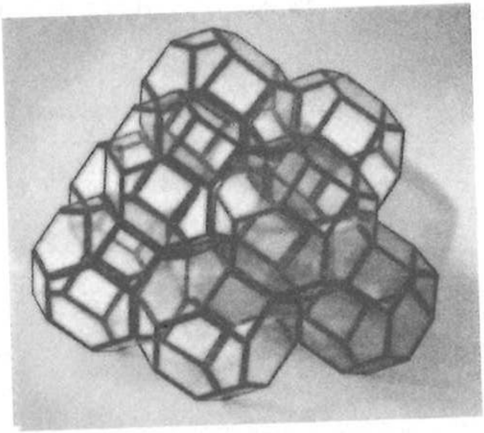
و شکل زیر به‌دست می‌آید:



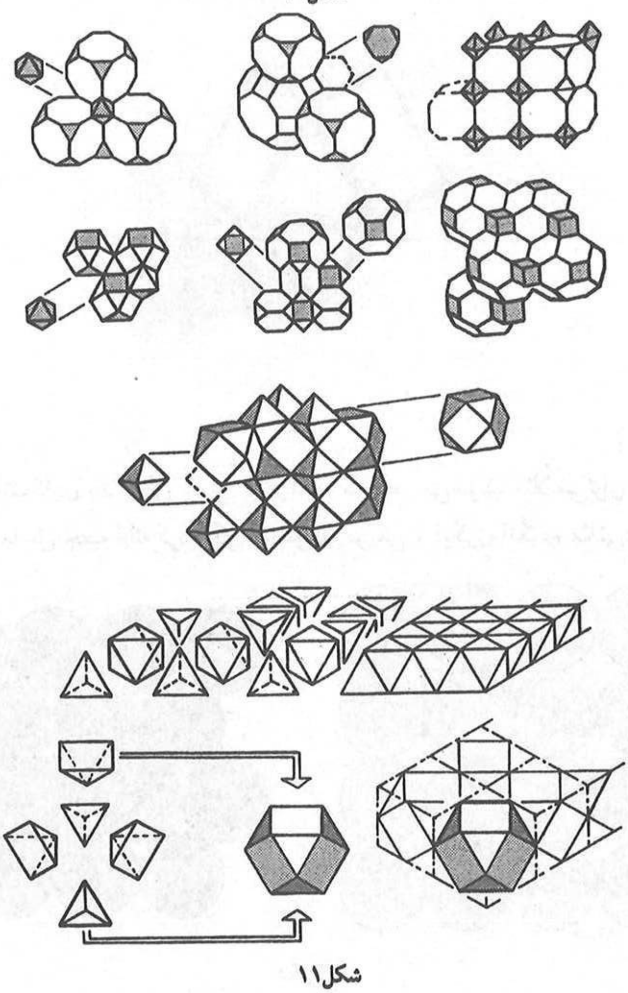
شکل۹

حال اگر گوشه‌های کاشیکاری فضا با مکعبها را یکی در میان رنگ کنیم خواهیم دید که این گوشه‌ها مراکز چندوجهیهایی مانند شکل ۹ هستند و یک کاشیکاری فضا را به‌دست می‌دهند (شکل ۱۰ را ببینید).

اگر بخواهیم از چند نوع چندوجهی برای پرکردن فضا استفاده کنیم الگوهای متنوعتری به‌دست می‌آید. معمولترین چندوجهی کمکی هشت‌وجهی منتظم است. به مثالهایی که در شکل ۱۱ آمده است توجه کنید.

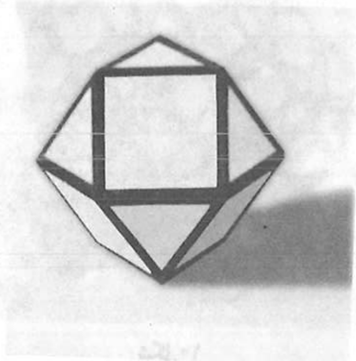


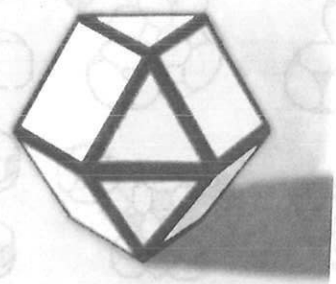
شکل ۱۰



شکل ۱۱

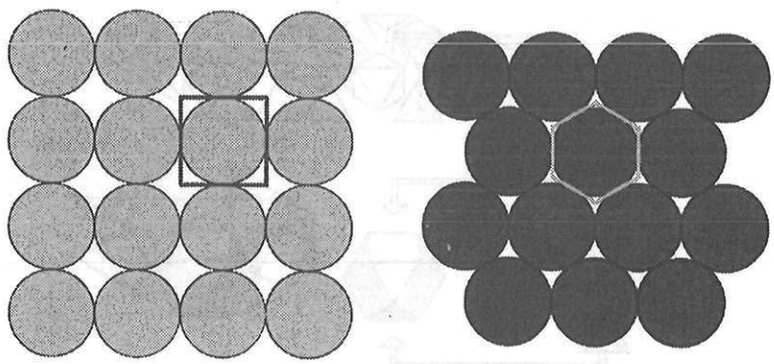
می‌بینید که می‌توان از هریک از شکلهای زیر به همراه هشت‌وجهی یا چهاروجهی کاشیکاریی از فضا به‌دست آورد.





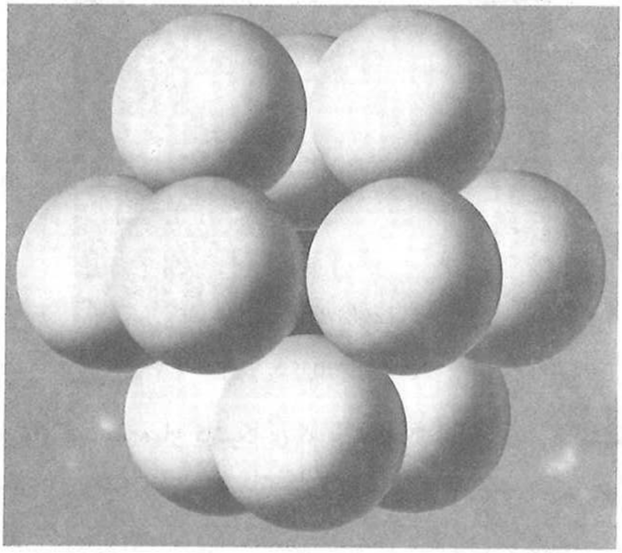
شکل۱۲

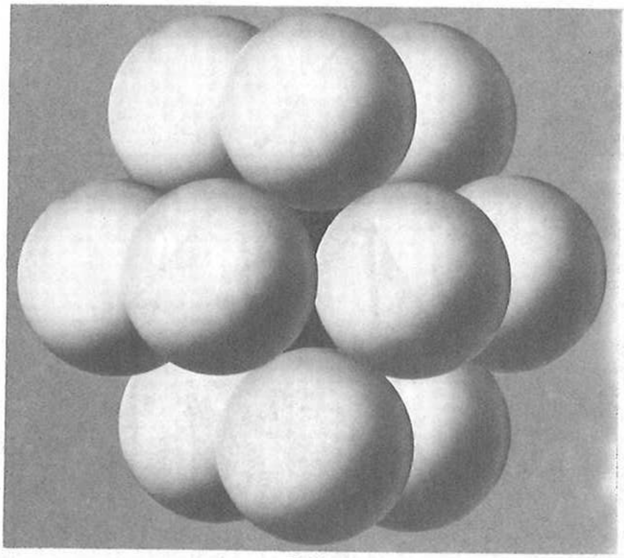
الگوهای کاشیکاری بالا به‌طور عملی در زندگی ما ظاهر می‌شوند. مثلاً می‌توان دو الگوی منظم برای چیدن توپها داخل جعبه ارائه کرد، یکی به‌صورت مربعی و دیگری الگوی مثلثی:



شکل۱۳

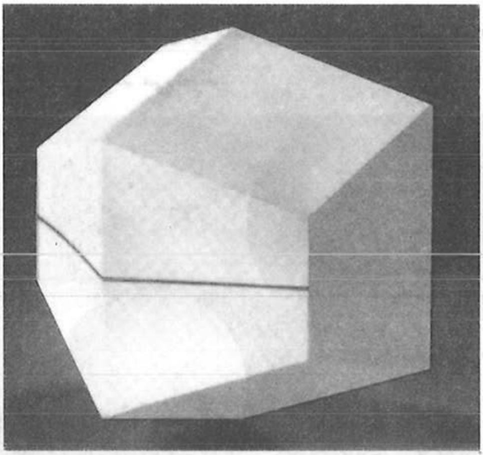
اما لایه‌های مختلف را می‌توان با ترتیبهای متفاوتی روی‌هم قرار داد. دو مثال زیر به کاشیکاریهای فضا با چندوجهیهای شکل ۱۲ مربوط می‌شوند:





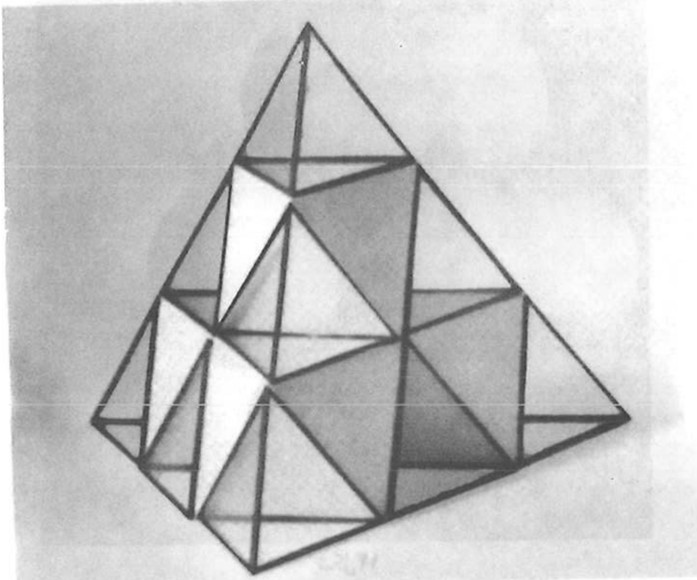
شکل۱۴

چندوجهیهای شکل ۱۲ حجم و سطحی مساوی دارند. همچنین از تعدادی مساوی مثلث و مربع پوشیده شده‌اند. این دو چندوجهی را می‌توان از یکدیگر به‌دست آورد. یکی از آنها را از روی کمر به دو نیم کنید و سپس ۶۰° بچرخانید. می‌بینید که به دیگری تبدیل می‌شود. همین کار را می‌توان با چندوجهی شکل ۲ انجام داد. با قطع کردن آن از کمر و با دوران ۶۰° شکل ۱۵ به‌دست می‌آید:



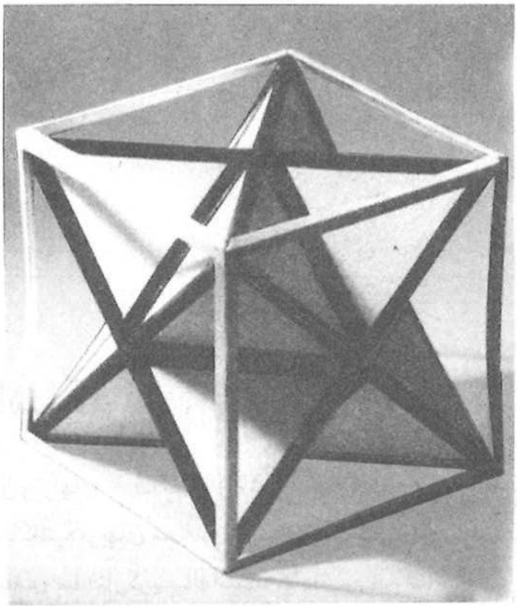
شکل ۱۵

به‌راحتی می‌توان دید که همان کاشیکاری که با شکل ۲ ارائه شده بود کاشیکاریی از فضا با کاشیهایی مانند شکل ۱۵ به‌دست می‌دهد. کاشیکاریی بدیهی از هشت‌وجهی و چهاروجهی نیز مانند زیر وجود دارد:



شکل ۱۶

همچنین می‌توان کاشیکاریهایی با استفاده از چندوجهیهای غیرمحدب به‌دست داد. مثلاً چندوجهی شکل ۱۷ که در مکعب محاط شده است، همراه با هشت‌وجهی منتظم کاشیکاریی از فضا به‌دست می‌دهد که از کاشیکاری استاندارد با مکعبها به‌دست آمده است:



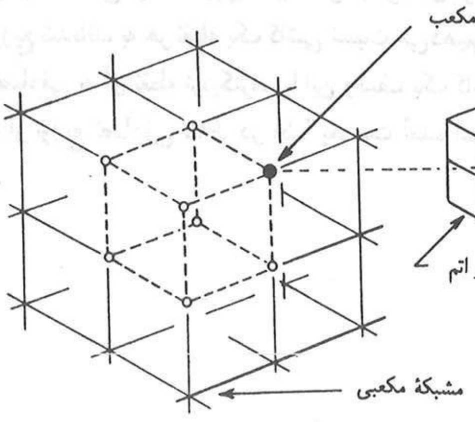
شکل۱۷

می‌توان کاشیکاریهای تصادفی از فضا نیز پیدا کرد. اگر مجموعه‌ای از نقاط را در فضا درنظر بگیرید که به‌طور تصادفی توزیع شده‌اند، به هر نقطه یک کاشی نسبت می‌دهیم که از نقاطی تشکیل شده است که از میان نقاط تصادفی به آن نقطه نزدیکترند. با این وصف یک کاشیکاری از فضا به‌دست داده‌ایم که به‌طور یگانه‌ای از توزیع تصادفی نقاط در فضا به‌دست آمده است. این نوع کاشیها را کاشیهای دیریشله می‌نامند.

۱۰

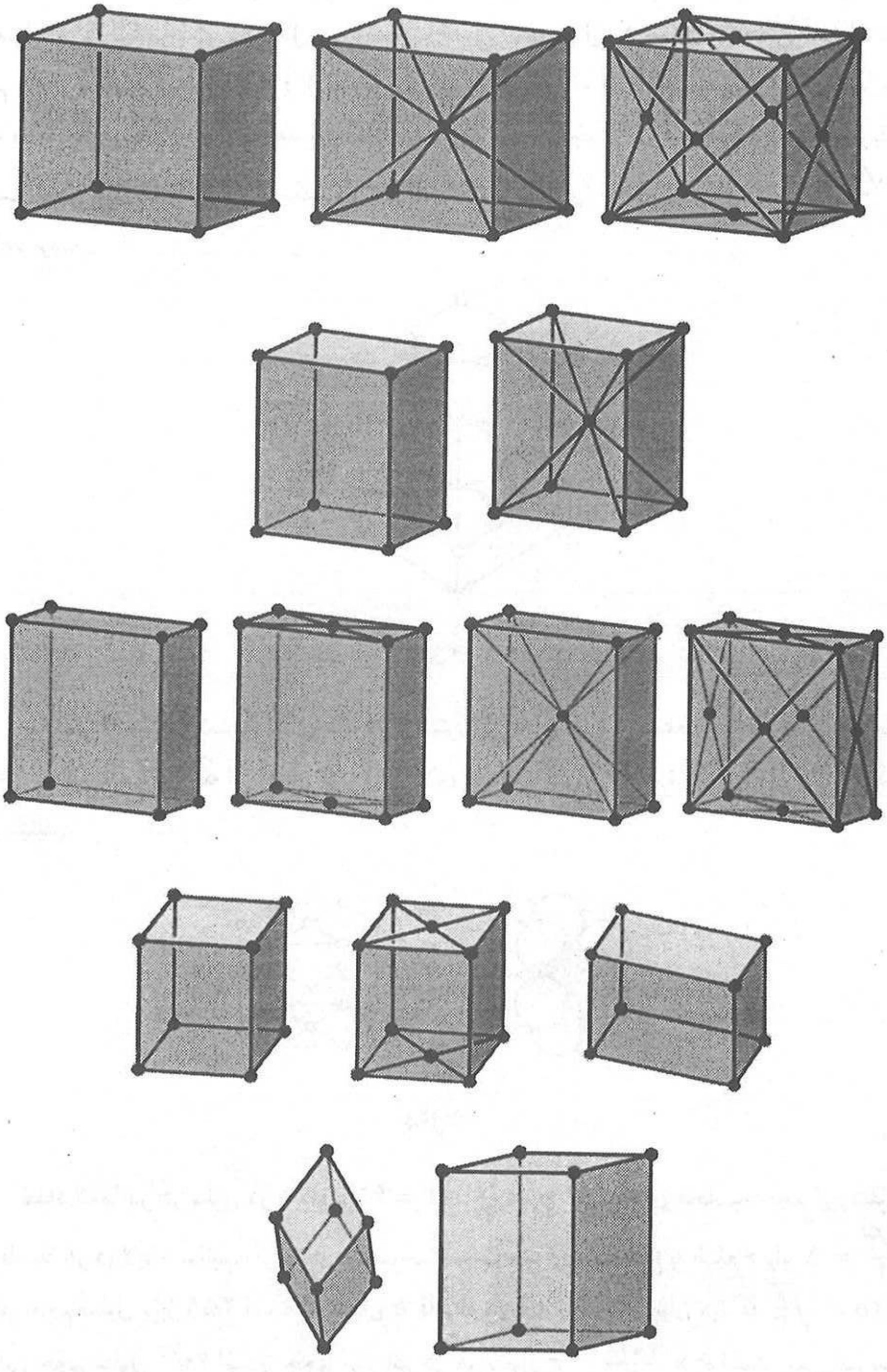
طبیعت و کاشیکاری

با مثالهای حباب صابون و ترکهای خاک تشنه از کاشیکاریهای صفحه که در طبیعت ظاهر می‌شوند آشنا شده‌اید. در این قسمت با کاشیکاریهای سه‌بعدی که در طبیعت یافت می‌شوند سروکار داریم. مثالی ساده از این ساختارهای سه‌بعدی ساختار کریستالهاست. ساده‌ترین این ساختارهای کریستالی مدلی است که شبیه کاشیکاری مکعبی استاندارد است. هر اتم یا یون در گوشه‌ای از مکعب واحد قرار می‌گیرد اما وزن آن بین هشت مکعب همسایه تقسیم می‌شود. بنابراین جرم مؤثر مکعب، همان جرم اتم خواهد بود.



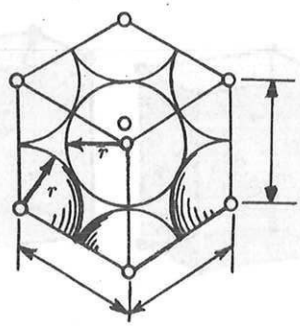
شکل۱

این جرم در هر مکعب دلیل خوبی برای این حقیقت است که فلزات به این شکل کریستالیزه نمی‌شوند. بجز منگنز و مس اکثر الگوهای کریستالی فلزات به یکی از سه شکل مکعبی مرکزپر، شش‌گوشه‌ای فشرده و مکعبی با وجوه مرکزپر هستند. این سه نوع، متداولترین انواعی هستند که با عکسبرداری اشعهٔ X تشخیص داده شده‌اند. به‌طور نظری چهارده نوع شبکه برای ساختارهای کریستالی متصور است (شکل ۲ را ببینید).



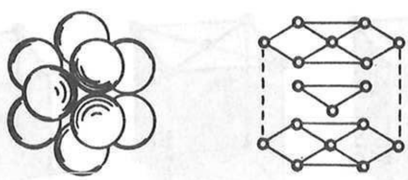
شکل۲

ساختار کریستالی مکعبی مرکزپر از یک اتم در هر گوشهٔ مکعبها و یک اتم مرکزی در هریک از مکعبها تشکیل شده است. در شکل زیر وضعیت نسبی اتمها در این کریستال مشخص شده است. جرم در هر مکعب $۲ = \frac{۱}{۸} \times ۸ + ۱$ است. اگر شعاع مؤثر هر اتم را r بگیریم، حجم مؤثر اتمها در یک مکعب برابر $\frac{۴\pi r^۳}{۳} \times ۲$ خواهد بود. در این‌صورت ضریب چیدن در این شبکه، که بنابر تعریف نسبت حجم مؤثر اتمها به حجم مکعب واحد است، با فرض $r = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$، برابر $۰٫۶۸۰۱۷ = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۸}$ خواهد بود.



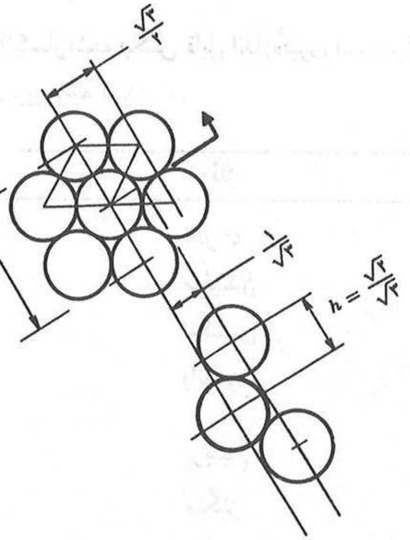
شکل۳

ساختار کریستالی شش‌گوشه‌ای فشرده از شش اتم که رئوس شش‌ضلعی منتظم هستند و یک اتم مرکزی، در یک لایه و سه اتم که در حوزه‌های بالای این لایه جای گرفته‌اند تشکیل شده است (شکل ۴ را ببینید).



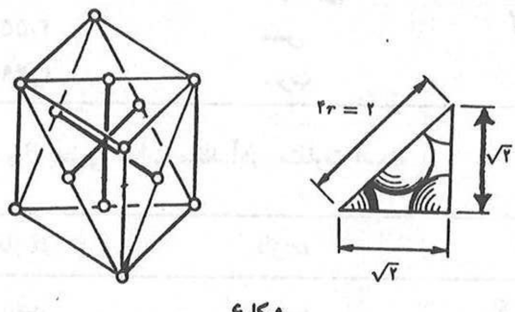
شکل۴

تعداد اتمها در هر سلول در شکل بالا $۶ = ۳ + \frac{۱۲}{۶} + \frac{۲}{۲}$ است. برای محاسبهٔ حجم این سلول باید فاصلهٔ هر دو لایه را بدانیم. اگر $r = \frac{۱}{۲}$، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع r برابر $\Delta = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است. حجم سلول برابر $۲\Delta h$ است که در آن h فاصلهٔ دو لایه است. می‌توان دید که $۲h = \sqrt{\frac{۸}{۳}}$ و بنابراین حجم سلول $۳\sqrt{۲}$ است. حجم مؤثر اتم در هر سلول $\pi = \frac{۴\pi r^۳}{۳} \times ۶$ است. پس ضریب چیدن در این شبکه $۰٫۷۴۰۴۸ = \frac{\pi}{۳\sqrt{۲}}$ است.



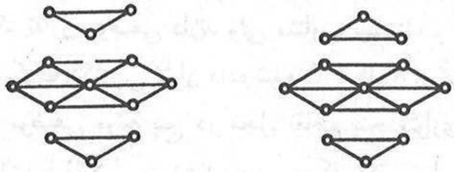
شکل۵

ساختار کریستالی مکعبی با وجوه مرکزپر از شبکه‌ای مکعبی تشکیل شده است که یک اتم در هر رأس و یک اتم در مرکز هر وجه مکعبها قرار دارد (شکل ۶ را ببینید). تعداد اتمها در هر سلول برابر $۴ = \frac{۶}{۲} + \frac{۸}{۸}$ است.



شکل۶

در اینجا اگر شعاع مؤثر اتم را r بگیریم، $r = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$. حجم مؤثر اتمها در هر سلول برابر $۴ \times \frac{۴\pi r^۳}{۳}$ است. بنابراین ضریب چیدن در این شبکه $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۶} = ۰{,}۷۴۰۴۸$ خواهد بود. همان‌طور که می‌دانید و در شکل زیر هم نمایش داده شده است، دو نوع شبکهٔ شش‌وجهی‌گون می‌توان درنظر گرفت:



شکل۷

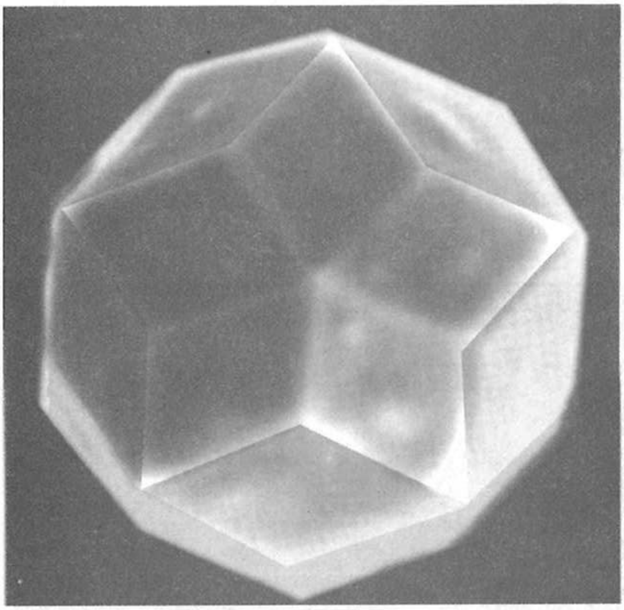
فاصلهٔ بین اتمها از روی انکسار اشعهٔ ایکس قابل اندازه‌گیری است و از روی آن شعاع مؤثر اتمها را اندازه‌گیری می‌کنند. به جدول زیر توجه کنید:

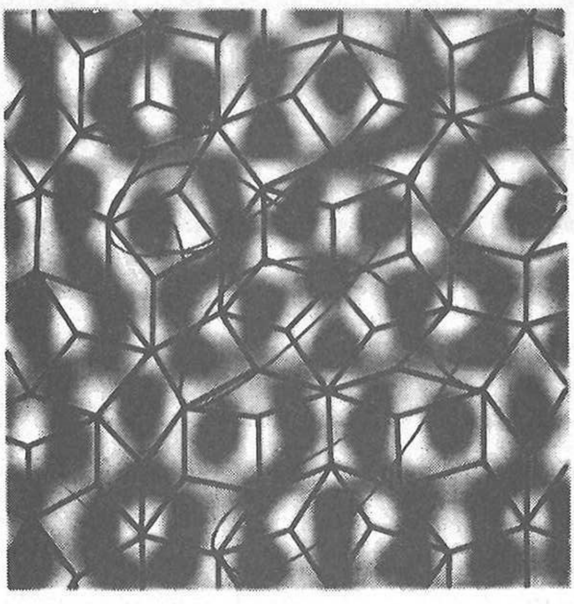
نوع شبکه	فلز	قطر اتمی
م.م.پ.	آهن α	۲٫۴۸
	مولیبدن	۲٫۷۲
	تنگستن	۲٫۷۴
	وانادیوم	۲٫۶۳
ش.ف.	بریلیوم	۲٫۲۵
	منگنز	۳٫۲۰
	تیتانیوم	۲٫۹۳
	روی	۲٫۷۵
م.و.م.پ.	آهن γ	۲٫۵۲
	آلومینیوم	۲٫۸۶
	مس	۲٫۵۵
	سرب	۳٫۴۹

شکل کریستالی فاز α و β بعضی فلزات مانند آهن متفاوت است.

فلز	فاز α	فاز β
کروم	م.م.پ.	ش.ف.
کبالت	ش.ف.	م.و.م.پ.
نیکل	ش.ف.	م.و.م.پ.

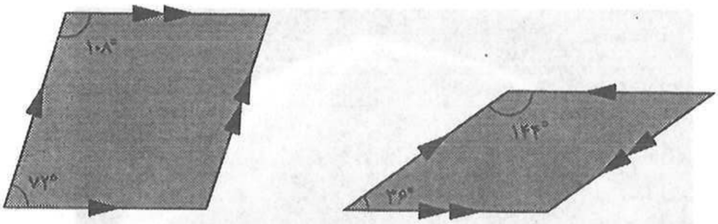
کاشیکاریهایی که تاکنون از آنها بحث کردیم همه به نوعی متناوب‌اند. الگوهایی از کاشیکاری در طبیعت یافت می‌شود که تقارن موضعی دارند ولی متناوب نیستند، و یا حتی قویتر، فاقد تقارن سرتاسری‌اند. تصویر میکروسکوپ الکترونی نشان داده شده در شکل ۸ از شبکه کریستال Al_5Li_3Cu به‌دست آمده است. تقارن موضعی مرتبهٔ پنج در محل تقاطع پنج متوازی‌الاضلاع در شکل دیده می‌شود که شکل ستاره‌مانندی را تشکیل می‌دهند. تصویری که به‌دست آمده با کاشیکاری نامتناوب قدیمیتر که پنروز به‌دست آورده است مطابقت دارد.



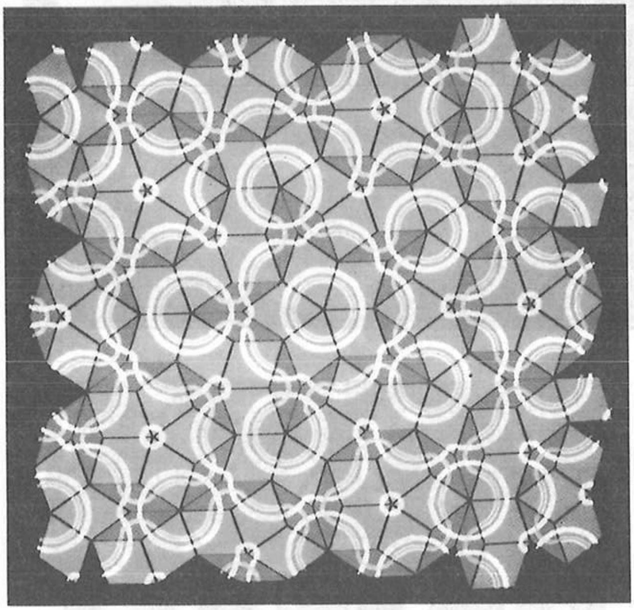


شکل۸

کاشیکاری پنروز با کاشیهایی به‌شکل کاشیهای شکل ۹ (الف) تولید می‌شود. این کاشیها را باید چنان درکنار هم قرار دهیم که اضلاع و جهتهای متناظر روی‌هم قرار گیرند. با این روش می‌توان کاشیکاری نامتناوبی از تمام صفحه به‌دست آورد که تقارن موضعی مرتبهٔ پنج دارد (شکل ۹ (ب) را ببینید).



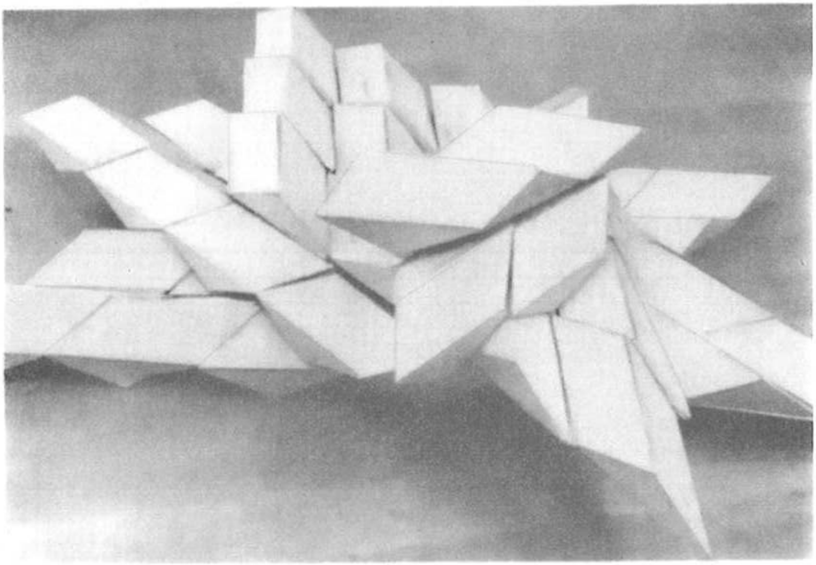
(الف)



(ب)

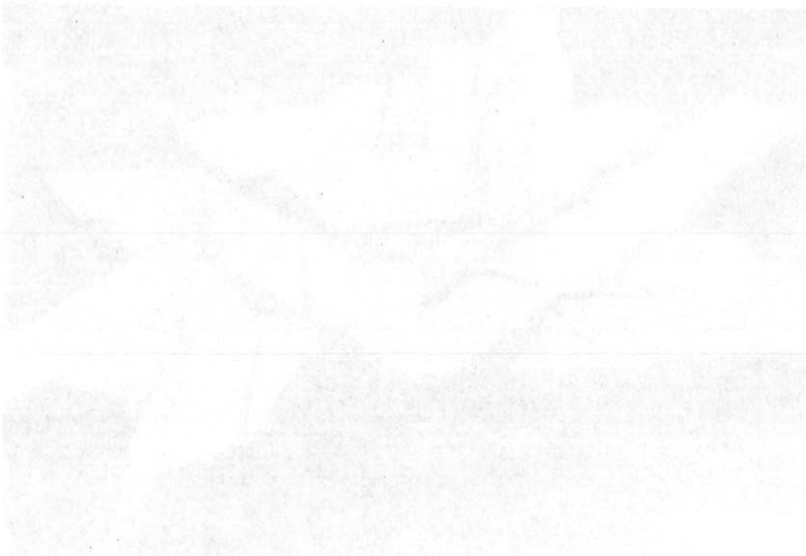
شکل۹

کاشیکاری به‌دست آمده، بر روی شکل ۸ که عکسی از شبکه‌ای کریستالی است، تطبیق داده شده است. هنوز کسی موفق نشده است با یک نوع کاشی کاشیکاری نامتناوبی از صفحه پیدا کند. در سال ۱۹۹۳ ریاضیدان انگلیسی کانوی موفق شد کاشیکاری نامتناوبی از فضای سه‌بعدی پیدا کند که در آن تنها یک نوع کاشی به‌کار برده شده است. این کاشی یک چندوجهی است که از به‌هم چسباندن دو شیروانی روبه‌روی هم به‌دست آمده است. هر لایه از این کاشیکاری از چندین کاشی به‌دست آمده است که متوازی‌الاضلاعهای میان دو شیروانی در آن لایه همسطح‌اند و یک کاشیکاری از صفحه به‌دست می‌دهند. هر لایه با لایهٔ بعدی به اندازهٔ دورانی با مضربی با ضریبی گنگ از π به‌دست می‌آید و روی لایه دیگر قرار می‌گیرد. به این ترتیب هر لایه با لایهٔ دیگر یکی است بجز اینکه دوران پیدا کرده است. چون زاویهٔ دوران مضربی با ضریب گنگ از عدد π است، این کاشیکاری از فضای سه‌بعدی نامتناوب است.



شکل ۱۰

می‌توان ایدهٔ این کاشیکاری را با استفاده از خمیر ترش که باعث تخمیر و انبساط خمیر می‌شود نیز توضیح داد. مثلاً اگر گلوله‌های کوچکی از خمیر را در شبکه‌ای مکعبی قرار دهیم، پس از تخمیر کاشیکاری فضا با مکعبها به‌دست می‌آید. اگر آنها را به شکل شبکه‌ای مکعبی قرار دهیم و تعدادی گلولهٔ خمیر ترش را در مراکز این مکعبها قرار دهیم، به یکی از کاشیکاریهای فصلهای قبل که از هشت‌وجهی و یک چندوجهی مربع مثلثی تشکیل شده بود می‌رسیم. بسیاری از کاشیکاریها را می‌توان این‌گونه به‌دست آورد. می‌گوییم این کاشیکاریها از نواحی دیریشله درست شده‌اند. حال به کاشیکاری شکل ۱۰ برمی‌گردیم. دیدیم در هر لایه شبکه‌ای متوازی‌الاضلاعی از صفحه به‌دست می‌آید. اگر در مراکز این متوازی‌الاضلاعها یک خمیر ترش قرار دهیم، معلوم می‌شود که کاشیکاری کانوی نیز نوعی کاشیکاری با نواحی دیریشله است.



منابع

1. Devlin, K., *Mathematics: the science of patterns*, Random House, 1994.
2. Gasson, P. C., *Geometry of spatial forms*, Ellis Horwood Limitted, 1983.
3. Grünbaum, B., Shephard, G. C., *Tilings and patterns, an introduction*, W. H. Freeman and Company, 1989.
4. Sortais, Yvonne et René, *Géométrie de l'espace et du plan*, Herman, 1988.
5. Steinhaus, H., *Mathematical snapshots*, Oxford University Press, 1983.