مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی

کارگاه اعداد

دکتر آرش رستگار

انتشارات فاطمی

مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی

کارگاه اعداد

مؤلف: آرش رستگار
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ اول، ۱۳۸۳
شابک ۸ـ۳۳۷ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-337-8
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی (TEX-پارسی): سپیده آذروند
- صفحه‌بندی (TEX-پارسی): هنگامه صادقی
- طراحی و بازسازی تصاویر: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: صاحب

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ معراج

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

رستگار، آرش
کارگاه اعداد / مؤلف آرش رستگار؛ ویراستار ارشک حمیدی. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۳،
هفت، ۱۰۳ ص.: مصور، جدول. ــ (مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی).
ISBN 964-318-337-8
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
نمایه: ص. [۱۰۳].
۱. اعداد. ۲. نظریهٔ اعداد. الف. عنوان.
QA۱۴۱/۲/ر۵ک۲
۱۳۸۳
۵۱۳
کتابخانهٔ ملی ایران
۲۶۸۵ـ۸۳م

تقدیم به همسرم که نمونهٔ والای ایثار است

هوالعالم

کلام نخست

«مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی» منبعی برای آموزشهای جانبی و فوق برنامه برای دانش‌آموزان علاقه‌مند است و به مطالبی می‌پردازد که شوق و ذوقِ تفکر ریاضی را در دانش‌آموز برمی‌انگیزد و خلاقیت او را به‌بار می‌نشاند.

مطالبی که در این مجموعه می‌آید بیشتر از شهود ریاضی سرچشمه می‌گیرد و از موضوعاتی ساده سخن می‌گوید که منابع آموزشهای رسمی ازکنار آن می‌گذرند، ولی این مباحث ذهن علاقه‌مند را به سفری به اعماق می‌کشاند که «زیبایی ریاضی» را درک کند و از پسِ آن شکوفایی تفکرِ ریاضی دستاوردی ارزشمند است.

«مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی» برای دانش‌آموزان علاقه‌مند سالهای اول و دوم دبیرستان پهنهٔ چالشهای فکری و دست یافتن به مطالبی نو و تازه است، ولی مطالب به‌گونه‌ای گرد آمده است که حتی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی نیز می‌توانند از آن بهره گیرند. پس این گوی و این میدان.

پیشگفتار

بدون شک شناخت بشر از اعداد، همگام با رشد تمدن بشری پیشرفت می‌کند. مسلماً بزرگترین عددی که بشر در عصر کامپیوتر با آن سروکار دارد با بزرگترین عددی که در یونان باستان در زندگی روزمره به‌کار می‌رفته است تفاوت معنی‌داری دارد. نگاه به تاریخ پیدایش اعداد طبیعی، سبک کتاب حاضر را پیش‌رو می‌گذارد. در این سبک، هر عدد طبیعی شخصیتی دارد که دانش‌آموز باید آن را کشف کند. بررسی الگوهای عددی و ارتباط بین اعداد، ما را به تجرید برخی از خصوصیات آنها می‌رساند. در این روش آشنایی با اعداد، مباحث شیرین نظریهٔ اعداد برای دانش‌آموزان بسیار ملموس خواهد بود و توانایی عبور از ادراک جزئی به کلی در آنها تقویت می‌شود. این تلاش، گامی برای تقویت تفکر مجرد دانش‌آموزان و آوردن صحنهٔ آموزش اعداد از کلاس درس به زندگی روزمره است.

آرش رستگار

فروردین ۱۳۸۳

۰ + ۰ =

۰ × ۰ =

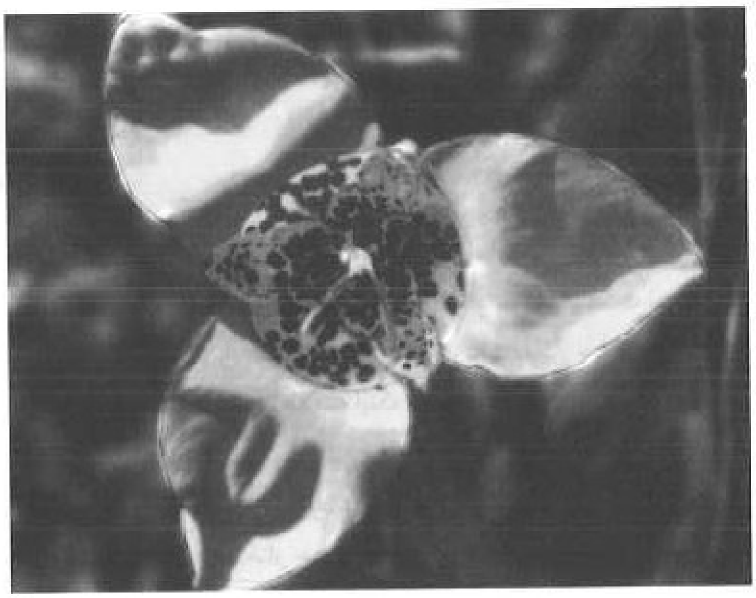
صفر کوچکترین عدد در دنیای اعداد است. اندازهٔ آن از اندازهٔ هر عدد دیگری کوچکتر است. آنقدر کوچک است که اگر آن را نصف کنید بازهم عددی کوچکتر از خودش به‌دست نمی‌آید. کوچکی آن تا حدی است که حتی اگر آن را دوبرابر کنید باز هم کوچکترین عدد ممکن خواهد بود. اگر آن را به عددی اضافه کنید بزرگتر و یا کوچکتر نمی‌شود. خلاصه اینکه صفر کوچکتر از آن است که به حساب بیاید.

همان‌طور که حتماً متوجه شده‌اید، وجود این عدد از نظر فلسفی بسیار نابدیهی است. می‌توانستیم فرض کنیم که هیچ عددی با خواص بالا وجود ندارد. اولین‌بار هندیها در قرن دوم پیش از میلاد دریافتند که فرض وجود چنین عددی با ساختار حسابی اعداد سازگار است. سالها بعد خوارزمی ریاضیدان ایرانی سیستم اعداد عربی و علامت صفر را در نوشته‌های خود به جهانیان معرفی کرد. در سیستم اعداد رومی (I، II، III، IV، V، ...) هیچ نمادی برای عدد صفر وجود ندارد و به‌همین دلیل محاسبات با اعداد رومی بسیار پیچیده‌تر از محاسبات در سیستم عددی امروزی است. دلیل این امر این است که نماد صفر به ما اجازه می‌دهد ارقام یکان، دهگان، صدگان و الی‌آخر را تعریف کنیم که در محاسبات بسیار سودمندند.

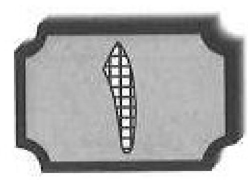
از آنجا که مفهوم صفر مجردتر از مفهوم اعداد طبیعی است، این مفهوم در سایر سیستمهای عددی مجرد نیز ظاهر می‌شود. کلیترین چارچوبی که برای یک سیستم عددی معرفی شده است ساختار «نیمگروه» است.

نیمگروه مجموعه‌ای از اعداد مجرد است که می‌توان هر دو عضو آن را با هم جمع کرد. هر نیمگروه عضوی به‌نام صفر دارد که با هر عدد مجرد دیگر جمع شود حاصل خود همان عدد مجرد است. خاصیت

جمع در هر نیمگروه شرکت‌پذیر است. برای مثال دورانهای یک گل حول ساقه آن در جهت مثلثاتی را درنظر بگیرید. هرکدام از این دورانها را می‌توان یک عدد مجرد درنظرگرفت. دو دوران را می‌توان با هم جمع کرد، به‌این ترتیب که مجموع دو دوران به‌عنوان یک عدد مجرد، خود دورانی است که از انجام دو دوران اولیه یکی پس از دیگری به‌دست می‌آید. می‌توان دید که این عمل جمع بین اعداد مجردِ دوران، عملی شرکت‌پذیر است. علاوه‌براین، دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ صفر همان خاصیت عدد مجرد صفر را دارد، چون هر دوران که با این دوران جمع شود، حاصل همان دوران اولیه است. با این اوصاف، دورانهای گل حول ساقه آن با عمل جمعی که تعریف کردیم تشکیل نیمگروه می‌دهند. آیا می‌توانید نیمگروه دیگری در طبیعت بیابید؟



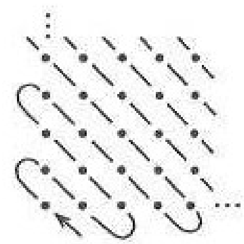
شکل ۱



$۱ \times ۱ =$

یک، احتمالاً اولین عددی است که بشر شناخت. به‌نظر می‌رسد ایده برقرار کردن تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه به‌اندازهٔ مفهوم عدد یک قدمت داشته باشد. هر مجموعه که بتوانیم اعضای آن را در تناظر یک‌به‌یک با اعداد طبیعی قرار دهیم، شمارا می‌نامیم. یعنی می‌توان اعضای چنین مجموعه‌ای را

شماره‌گذاری کرد. آیا می‌توانید بین اعداد طبیعی و نقاط صفحه که مختصات آنها اعدادی طبیعی‌اند تناظر یک‌به‌یک برقرار کنید؟ به‌شکل زیر توجه کنید:



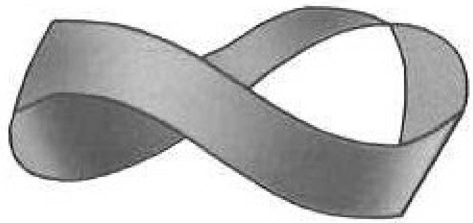
شکل ۲

اعداد صفر و یک تشکیل سیستمی عددی می‌دهند که در آن جمع و ضرب به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$
\begin{array}{ll}
0+0=0, & 0\times 0=0 \\
0+1=1+0=1, & 0\times 1=1\times 0=0 \\
1+1=0, & 1\times 1=1
\end{array}
$$

این سیستم دو عضوی ساده‌ترین سیستم عددی است. در حالت خاص صفر و یک با عمل جمع بالا تشکیل نیمگروهی دوعضوی می‌دهند. آیا می‌توانید شبیه این نیمگروه را در طبیعت بیابید؟

نوار موبیوس تنها یک لبه و یک رو دارد. ساختن نوار موبیوس آسان است. نوار کاغذی بلندی بسازید. یک سر آن را نیم دور بچرخانید و سپس به سر دیگر نوار بچسبانید. با این کار یک نوار موبیوس ساخته‌اید. سعی کنید یک روی آن را سبز و روی دیگر را قرمز کنید. آیا می‌توانید؟



شکل ۳

نوار موبیوس را موازی لبهٔ آن از وسط قیچی کنید. چه اتفاقی می‌افتد؟

هر یک از حروف انگلیسی A، B، C، D، E، M، T، U، V و W فقط یک محور تقارن دارد. یعنی اگر نیمی از یکی از آنها را با آینه بپوشانیم، نیم دیگر همراه با تصویر آینه‌ای خود شکل اولیه را بازسازی می‌کند. کدام حروف فارسی یک محور تقارن دارند؟

خط موجودی یک‌بعدی است. فرض کنید موجودی یک‌بعدی روی یک خط زندگی کند که هیچ تصوری از ابعاد بالاتر نداشته باشد. آیا می‌توانید فرق بین بعد یک و ابعاد بالاتر را به او بفهمانید؟ خط و دایره هر دو یک‌بعدی‌اند. آیا یک موجود یک‌بعدی کوچک می‌تواند بفهمد روی خط زندگی می‌کند یا روی دایره؟

= ۲ × ۱ (عددی اول)

= ۱ + ۱

= ۱ × ۲ = !۲

دو کوچکترین عدد اول است. اعدادی را که از یک بزرگترند و فقط بر یک و خودشان بخش‌پذیرند **اعداد اول** می‌نامند. اعدادی را که به دو نیمه تقسیم می‌شوند اعداد **زوج** می‌نامند. سایر اعداد طبیعی را، که بر دو بخش‌پذیر نیستند، اعداد **فرد** می‌نامند. عدد طبیعی n زوج است اگر و فقط اگر رقم یکان نمایش دهدهی آن عددی زوج باشد. اگر اعداد زوج را در یک دسته هم‌ارزی و اعداد فرد را در دسته هم‌ارزی دیگری قرار دهیم، اعمال جمع و ضرب بین این دسته‌های هم‌ارزی خوش‌تعریف‌اند.

زوج = زوج × زوج   زوج = زوج + زوج

زوج = زوج × فرد = فرد × زوج

فرد = فرد × فرد   زوج = فرد + فرد

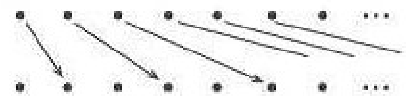
می‌بینید که اعمال جمع و ضرب روی دسته‌های هم‌ارزی اعداد زوج و فرد همان سیستم عددی را که روی صفر و یک گذاشتیم به‌دست می‌دهند. می‌گوییم این دو سیستم **یکریخت**‌اند، یعنی دارای نظم ریاضی یکسانی هستند. کافی‌است به‌جای اعداد زوج، عدد صفر و به‌جای اعداد فرد عدد یک قرار دهیم تا این یکسانی به‌وضوح مشاهده شود.

حروف H، I و X در بین حروف انگلیسی دو محور تقارن دارند. آیا حرفی از حروف الفبای فارسی دو محور تقارن دارد؟ آیا ممکن است دو محور تقارن شکلی که فقط دو محور تقارن دارد، با هم موازی باشند؟

یک نوار موبیوس را موازی لبهٔ آن از وسط قیچی کنید. شکل حاصل چند لبه دارد؟ آیا این شکل مانند نوار موبیوس فقط یک طرف دارد؟ این نوار را دوباره موازی لبهٔ آن از وسط قیچی کنید. چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا می‌توانید علت را بگویید؟

تناظر یک‌به‌یکی بین اعداد زوج و اعداد فرد برقرار کنید. آیا می‌توانید تناظر یک‌به‌یکی بین اعداد طبیعی و اعداد زوج برقرار کنید؟ می‌بینید که به تعبیری مجموعهٔ اعداد طبیعی با نصف خود و همچنین با دو برابر خود تناظر یک‌به‌یک دارد. اگر مجموعه‌ای متناهی را به آن اضافه کنیم و یا از آن کم کنیم هنوز مجموعهٔ به‌دست آمده با اعداد طبیعی تناظر یک‌به‌یک دارد. به‌نظر می‌رسد مجموعه اعداد طبیعی آنقدر

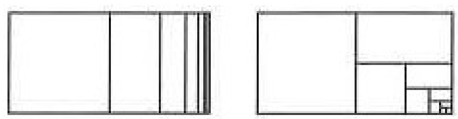
بزرگ است که نمی‌توان آن را به‌سادگی بزرگتر کرد. بزرگی مجموعهٔ اعداد طبیعی بسیار شبیه به کوچکی عدد صفر است.



شکل ۴

مجموعهٔ همهٔ توانهای ۲ را در نظر بگیرید: $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$. هر عدد طبیعی را می‌توان به‌طور یکتایی به‌صورت مجموع اعضای زیرمجموعه‌ای از این مجموعه نوشت. این مطلب به نمایش اعداد طبیعی در مبنای ۲ مربوط می‌شود. در مبنای ۲ تنها ارقام ۱ و ۰ در نمایش عدد ظاهر می‌شوند. مثلاً اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... در مبنای ۲ با ۱، ۱۰، ۱۱، ۱۰۰ و ... نمایش داده می‌شوند.

به دو الگوی هندسی زیر توجه کنید. آیا ایده مشترکی بین آنها مشاهده می‌کنید؟

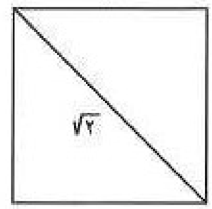


شکل ۵

اعداد گویا و گنگ

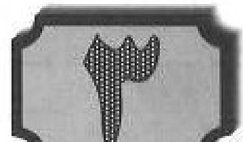
اولین عدد گنگ را فیثاغورسیان کشف کردند. می‌دانیم که هر عدد گنگ را می‌توان با اعداد گویا تقریب زد. آیا می‌توانید ثابت کنید که هر عدد گویا را می‌توان با اعداد گنگ تقریب زد؟

تلاش کنید چند عدد گنگ بسازید.



محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن یکی از مسأله‌های باستانی ریاضیات است. در کتاب «نه فصل در هنر ریاضی» که مجموعه‌ای از مسأله‌های ریاضی است که در دورهٔ هان در چین گردآوری شده است، عدد π برابر با عدد طبیعی ۳ فرض شده است. لیو هو، ریاضیدان چینی که در قرن سوم میلادی می‌زیسته است، دو تقریب ۳٫۱۴ و ۳٫۱۴۱۶ را به‌دست آورده است. او با محیط کردن یک شش‌ضلعی منتظم در دایره نشان

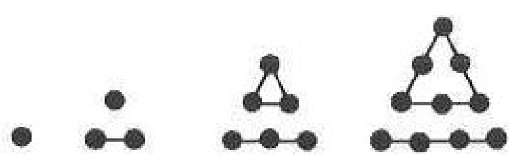
داد ۳ بسیار کوچکتر از عدد π است. در قرن پنجم میلادی تسو چونگ پومیه ریاضیدان چینی، تقریب $\frac{22}{7}$ را به‌مقدار دقیقتر $\frac{355}{113} \sim 3{,}1415929$ تصحیح کرد که با تقریب امروزی π، برابر با ...۳٫۱۴۱۵۹۲۶، تفاوت بسیار کمی دارد. در قرن چهاردهم میلادی غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی، با کمک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم عدد π را تا ۱۶ رقم اعشار حساب کرد. عاقبت در سال ۱۷۶۸ لامبرت ثابت کرد که عدد π گویا نیست. همچنین نخستین‌بار ارمیت در سال ۱۸۷۳ ثابت کرد که عدد π در هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح صدق نمی‌کند. اعداد حقیقی غیرگویا را گنگ می‌نامند. ثابت کنید در صورت گنگ بودن α و گویا بودن r، اعداد $-\alpha$ و $\frac{1}{\alpha}$ و $r + \alpha$ و $\frac{\alpha}{r}$ گنگ هستند.



$= 1 \times 3$ (عددی اول)

$= 1 + 2$

سه، عددی مثلثی است. n امین عدد مثلثی را با T_n نشان می‌دهیم. T_n مجموع اولین n عدد طبیعی، یعنی عددی به‌شکل $1 + 2 + 3 + \cdots + n$، است. علت این نامگذاری این است که می‌توان اعداد مثلثی را در الگویی مثلثی مانند شکل زیر مرتب کرد:



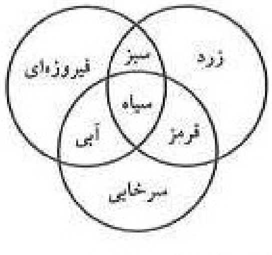
شکل ۶

آیا می‌توانید فرمولی برای nامین عدد مثلثی پیدا کنید؟ درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

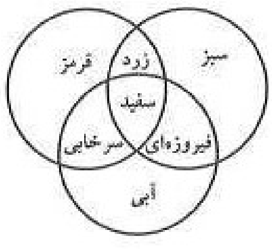
$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1} \qquad T_{2n} + T_{2n+1} = T_{5n+1}$$

آیا می‌توانید روابطی شبیه اینها بیابید؟

بیشتر رنگها را می‌توان از سه رنگ اولیه به‌دست آورد، اما رنگهای اولیهٔ متفاوتی برای کاربردهای متفاوت به‌کار می‌رود. برای مثال، تمام رنگهایی که روی صفحهٔ تلویزیون ظاهر می‌شوند از سه رنگ قرمز، سبز و آبی تشکیل شده‌اند. برای رنگ‌آمیزی، اکثر رنگها را می‌توان از سه‌رنگ اولیهٔ قرمز، زرد و آبی به‌دست آورد. برای چاپ رنگی در کتابها و مجلات از سه مرکب به رنگهای زرد، سرخابی و فیروزه‌ای و البته از مرکب مشکی استفاده می‌شود. دلیل استفاده از سه رنگ اصلی، نوع ساختار چشم ماست. در پشت چشم ما سه نوع سلول مخروطی وجود دارد که هر یک به طول موجهای خاصی از نور حساس‌اند. اگر در چشم ما چهار نوع سلول مخروطی وجود داشت، مجبور بودیم در تلویزیون، نقاشی و چاپ از چهار نوع رنگ اصلی استفاده کنیم.



شکل ۷ جدول ترکیب مرکبها در صنعت چاپ

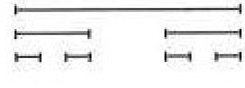


شکل ۸ جدول ترکیب نورها در تلویزیون

تقارن مرتبهٔ سه در گل ببر در شکل ۱ نشان داده شده است. اگر تعداد گلبرگهای گلی مضرب ۳ باشد، احتمالاً از دستهٔ گیاهانی به‌نام Monocoty ledons است. این دسته شامل زعفران، نرگس زرد، لاله، سوسن و یا گلهای دیگری که از پیاز گل می‌رویند است.

معادلهٔ موج در بعد سوم جوابهایی دارد که می‌توانند اطلاعات را به‌سادگی رد و بدل کنند. مثلاً اگر چراغ قوه‌ای را در تاریکی روشن و سپس خاموش کنیم، امواج نور از چراغ قوه شروع به حرکت می‌کنند، به‌چشم ما می‌رسند و آنگاه از چشم ما می‌گذرند. اما در بعد دوم این‌طور نیست. مثلاً وقتی سنگی در آب می‌اندازیم موجهایی تشکیل می‌شوند که ابتدا کوتاه‌اند و سپس بلند می‌شوند و دوباره کوتاه می‌شوند. اگر نور این‌گونه منتشر می‌شد، نور چراغ قوه را ابتدا ضعیف و سوسوکنان مشاهده می‌کردیم که کم‌کم قویتر و سپس دوباره ضعیف و محو می‌شد. اگر این‌طور بود، دیدن و شنیدن برای ما بسیار مشکل می‌شد. جوابهای معادلهٔ موج در تمام ابعاد فرد، خاصیت بعد سوم و در تمام ابعاد زوج، خاصیت بعد دوم را دارند.

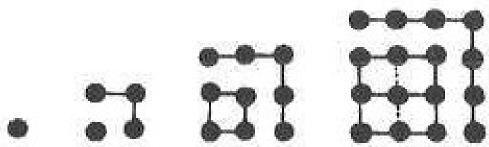
پاره‌خطی را به سه قسمت مساوی تقسیم و ثلث میانی آن را حذف کنید. دو پاره‌خط باقی می‌مانند. هر یک از آنها را نیز به سه قسمت مساوی تقسیم و ثلث میانی هر یک را حذف کنید. روی پاره‌خطهای باقی‌مانده همین عمل را بی‌نهایت بار تکرار کنید. مجموع طولهای پاره‌خطهایی را که حذف شده‌اند حساب و با طول پاره‌خط اولیه مقایسه کنید. چه مطلب عجیبی را درمی‌یابید؟



شکل ۹

$۲^۲ = ۲ \times ۲ =$

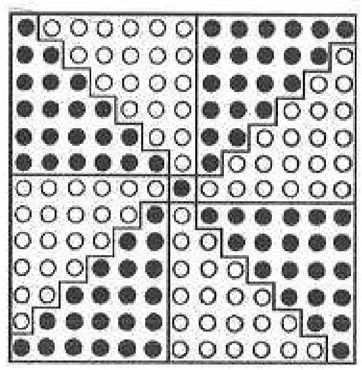
چهار، مربعی کامل است. nامین عدد مربعی، که آن‌را با S_n نشان می‌دهیم، عدد $n^۲$ است. علت این نامگذاری این است که می‌توان این اعداد طبیعی را در الگویی مربعی مانند شکل زیر مرتب کرد:



شکل ۱۰

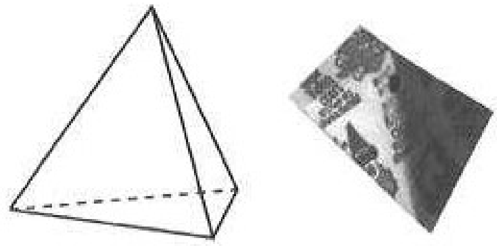
در الگوی هندسی بالا می‌توان دید که nامین عدد مربعی، مجموع اولین n عدد فرد است. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$T_{n-۱} + T_n = S_n = n^۲, \qquad ۸T_n + ۱ = S_{۲n+۱} = (۲n + ۱)^۲$$



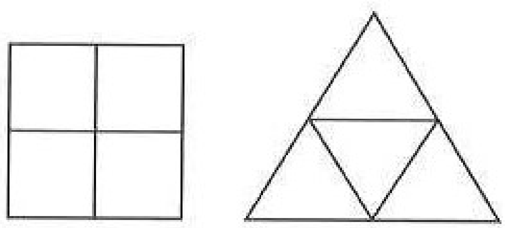
شکل ۱۱

ساده‌ترین چندوجهی چهاروجهی است. هر چهاروجهی چهارگوشه دارد. چهاروجهی چند صفحهٔ تقارن دارد؟ می‌توان یک چهاروجهی را پس از دوران حول محورهای خاصی دوباره بر خودش منطبق کرد؟ چهاروجهی چند محور تقارن دارد؟ با وصل کردن وسط اضلاع چهاروجهی، چهاروجهی کوچکتری به‌دست می‌آید. حجم چهاروجهی به‌دست آمده چه کسری از حجم چهاروجهی اولیه است؟ با وصل کردن مرکز وجه‌های چهاروجهی بازهم چهاروجهی دیگری به‌دست می‌آید. حجم این چندوجهی چه کسری از حجم کل چهاروجهی است؟



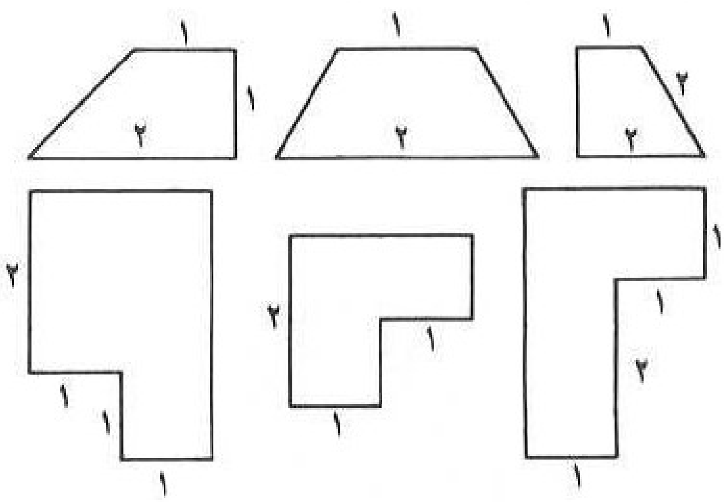
شکل ۱۲ پاکت شیر تقریباً به‌شکل چهاروجهی است.

اگر شکلی در صفحه را دو برابر کنیم، مساحت آن چهار برابر می‌شود. با چهار مربع می‌توان مربعی دوبرابر بزرگتر و با چهار مثلث می‌توان مثلثی دو برابر بزرگتر ساخت (شکل ۱۳ را ببینید).



شکل ۱۳

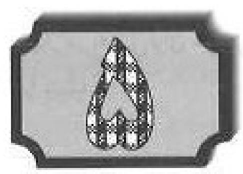
آیا می‌توانید با چهار نسخه از هر یک از شکلهای زیر همان شکل را ولی با اندازهٔ دو برابر بسازید؟



شکل ۱۴

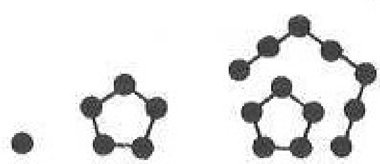
اگر بخواهیم کشورهای روی نقشهٔ جغرافیایی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هر دو کشور هم‌مرز به رنگ متفاوتی باشند، حداکثر چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی کفایت می‌کند. یک نقشهٔ ایران پیدا کنید و صحت این ادعا را دربارهٔ استانهای کشور بررسی کنید. این حکم برای هر نقشهٔ دلخواه صحیح است. آیا می‌توانید برای ردهٔ محدودی از نقشه‌ها اثباتی برای این حکم پیدا کنید؟

در هر ملکول DNA چهار نوع پایهٔ کد ژنتیکی مولکول را تشکیل می‌دهند که فرم متمایز هرگیاه یا حیوان را مشخص می‌کند. این چهار پایه تیمین، آدنوزین، گوانین و سیتوزین نام دارند که با علامتهای اختصاری T، A، G و C مشخص می‌شوند.


$= ۵ \times ۱$ (عددی اول)

پنج جسم افلاطونی تنها چندوجهیهای محدب منتظم ممکن‌اند. در چهاروجهی، در هرگوشه سه مثلث به‌هم می‌رسند. آیا می‌توانید شکلی محدب و منتظم بسازید که در هرگوشهٔ آن چهار مثلث به‌هم برسند؟ همچنین، آیا می‌توانید شکلی بسازید که در هر گوشهٔ آن پنج مثلث به‌هم برسند؟ اجسامی که ساخته‌اید جزء اجسام افلاطونی‌اند. به‌همین روش سعی کنید تمام اجسام افلاطونی را بسازید.

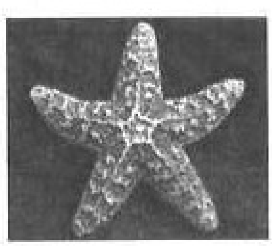
پنج از اعداد **مخمسی** است. اعداد مخمسی را از روی الگوی تصویری زیر می‌سازند. nامین عدد مخمسی را با P_n نشان می‌دهیم.



شکل ۱۵

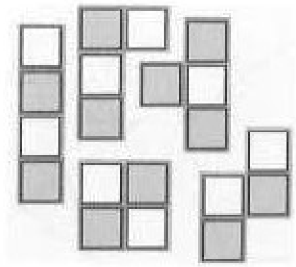
آیا می‌توانید فرمولی برای P_n به‌دست آورید؟ درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$S_n + T_{n-۱} = P_n, \qquad ۳P_n = T_{۳n-۱}, \qquad ۲۴P_n + ۱ = S_{۶n-۱}$$



شکل ۱۶ ستاره‌های دریایی معمولاً پنج بازو دارند.

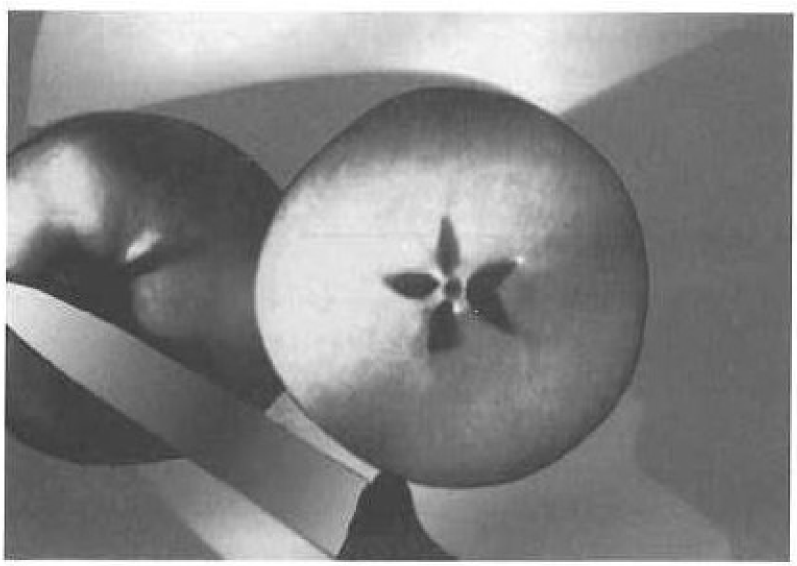
با کنار هم قرار دادن چهار مربع فقط می‌توان پنج الگو مانند زیر ساخت که با دوران دادن یا پشت و رو کردن بر هم منطبق نمی‌شوند.



شکل ۱۷

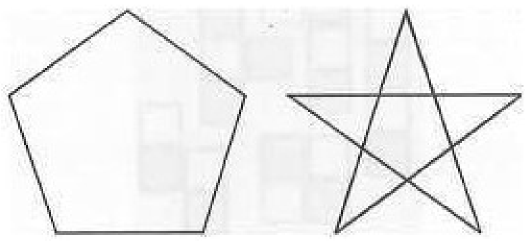
با پنج مربع چند الگوی متمایز می‌توان ساخت؟ با استفاده از تمام الگوهایی که به‌دست آورده‌اید، یک مستطیل را فرش کنید.

اگر یک سیب را از کمر ببرید، یک ستارهٔ پنج‌پر مشاهده می‌کنید. رز وحشی نیز پنج گلبرگ دارد. سیب و رز وحشی گیاهانی از خانوادهٔ بزرگ رزها هستند که شامل شاتوت، تمشک، توت‌فرنگی، گلابی، گیلاس، آلو و هلو است و همهٔ آنها گلهای پنج‌پر دارند. البته رزهای پرورشی چندین گلبرگ دارند. اما اگر زیر هر گل رز را نگاه کنید پنج کاسبرگ مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۸ تقارن مرتبهٔ پنج در سیب و سایر گیاهان خانوادهٔ رز

اولین nضلعی منتظم غیرمحدب پنج‌پر منتظم است. آیا می‌توانید چندوجهی غیرمحدب منتظمی بسازید که هر وجه آن یک پنج‌پر منتظم باشد؟ آیا می‌توانید پنج‌وجهی محدب منتظمی بسازید که هر وجه آن یک پنج‌ضلعی منتظم باشد؟



شکل ۱۹ پنج‌ضلعی (سمت چپ) و پنج‌پر (سمت راست)

پنج از **اعداد فیبوناتچی** است، یعنی در دنبالهٔ

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, \ldots$$

که در آن از جملهٔ سوم به‌بعد هرعدد مجموع دو عدد پیشین است، ظاهر می‌شود. آیا می‌توانید فرمولی برای nامین عدد فیبوناتچی، که آن‌را با U_n نشان می‌دهیم، به‌دست بیاورید؟ کپلر، منجم آلمانی، اولین کسی بود که توجه کرد که دنبالهٔ $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ هرچه n بزرگتر می‌شود به‌سمت

$$\Phi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

میل می‌کند. Φ را **عدد طلایی** می‌نامند و آن را زیباترین نسبت می‌دانند. نسبت طول ضلع پنج‌پر منتظم به طول ضلع پنج‌ضلعی منتظم برابر عدد Φ است. باور عمومی این است که مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد، زیباترین مستطیل است.

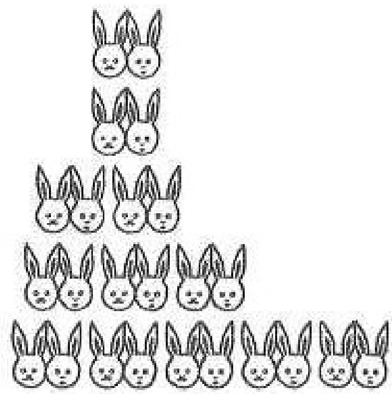
دنبالهٔ فیبوناتچی

لئوناردو فیبوناتچی در شهر پیزا در ایتالیا متولد شد. ساختن برج خمیدهٔ شهر پیزا در دوران زندگی او آغاز شده بود. البته تکمیل ساختمان این برج ۲ قرن به‌طول انجامید. در سال ۱۲۰۲ فیبوناتچی کتابی در مورد حساب و جبر نوشت و در آن مسألهٔ زیر را مطرح کرد:

یک زوج خرگوش یک ماه جوانتر از این هستند که خرگوش دیگری به‌وجود بیاورند، اما فرض کنید که از ماه دوم هر ماه یک زوج خرگوش متولد شود. اگر هر زوج جدید از خرگوشها دوباره پس از یک ماه تولیدمثل را آغاز کند و هیچ‌یک از خرگوشها نمیرند، در آغاز هر ماه چند زوج خرگوش وجود خواهد داشت؟

اعدادی که جواب این مسأله‌اند تشکیل دنباله‌ای به‌نام دنبالهٔ فیبوناتچی می‌دهند:

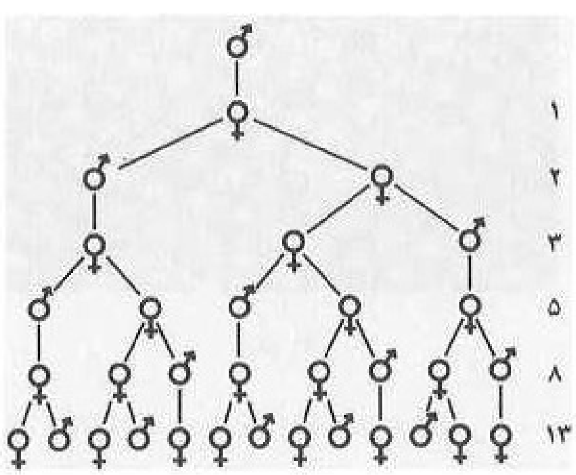
$$۱ \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۸ \quad ۱۳\ldots$$



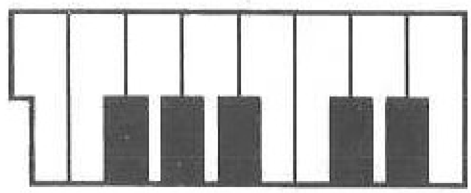
اولین دو عدد در این دنباله برابر ۱ هستند و از جملهٔ سوم به‌بعد هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبلی است:

$$۱ + ۱ = ۲$$
$$۱ + ۲ = ۳$$
$$۲ + ۳ = ۵$$
$$۳ + ۵ = ۸$$
$$۵ + ۸ = ۱۳$$
$$\vdots$$

دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی در درخت اجداد زنبور نر ظاهر می‌شود. هر زنبور نر فقط یک مادر دارد درصورتی که زنبور ماده هم پدر و هم مادر دارد. در نتیجه، درخت اجداد زنبور نر شکل عجیبی پیدا می‌کند. در شکل زیر زنبور نر با فلش و زنبور ماده با صلیب نمایش داده شده است. در هر سطر تعداد اجداد برابر یک عدد فیبوناتچی است.



همین الگو در یک اکتاو که دارای ۱۳ کلید است ظاهر می‌شود. ۸ کلید اصلی سفیدرنگ و ۵ کلید مشکی کوچکتر شباهت به نسل چهارم و پنجم خرگوشها دارند.



یکی از زیباییهای ریاضیات این است که ایده‌ای در چندین موضوع متفاوت و به‌ظاهر نامربوط کاربرد پیدا می‌کند.

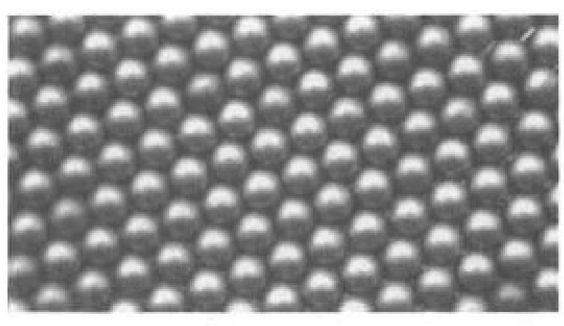
۲ × ۳ =

(عددی مثلثی) ۱ + ۲ + ۳ =

!۳ = ۱ × ۲ × ۳ =

شش، کوچکترین عدد کامل است. عدد کامل عددی است که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچکتر از خودش باشد. مقسوم‌علیه‌های شش بجز خود آن ۱، ۲ و ۳ هستند و شش برابر با مجموع آنهاست. نخستین چهار عدد کامل ۶، ۲۸، ۴۹۶ و ۸۱۲۸ هستند.

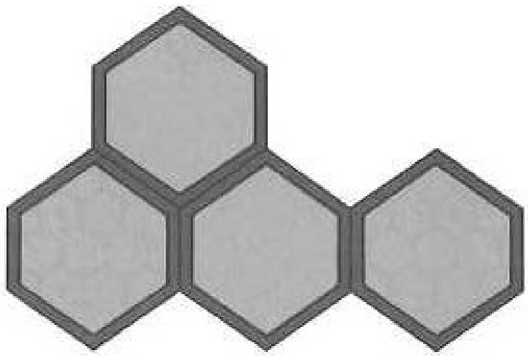
می‌توان با کاشیهایی به‌شکل شش‌ضلعی منتظم زمین را فرش کرد. به این الگو که به‌طور طبیعی توسط گویهای فلزی روی یک سطح صاف تشکیل می‌شود توجه کنید:



شکل ۲۰

این الگو در کندوی زنبور عسل نیز دیده می‌شود. زنبورها به‌طور غریزی می‌دانند که با این تقسیم‌بندی در کندویشان کمترین مقدار موم را مصرف می‌کنند.

با قرار دادن چهار شش‌ضلعی منتظم در کنار هم می‌توان شکلهای متفاوتی ساخت. یک نمونه از این شکلها را می‌بینید:



شکل ۲۱

به چند روش متفاوت می‌توان چهار شش‌ضلعی منتظم را کنار هم چید به‌طوری که الگوهای به‌دست آمده با دوران دادن یا پشت و روکردن بر هم منطبق نشوند؟

مکعب یکی از اجسام افلاطونی است. مکعب شش‌وجه دارد. با دوران مکعب حول محورهای خاصی، می‌توان مکعب را بر خودش منطبق کرد. مکعب چند محور تقارن دارد؟ مکعب چند صفحهٔ تقارن دارد؟ آیا مکعب نقطهٔ تقارن دارد؟ شش مربع را به روشهای مختلفی می‌توان کنار هم قرار داد. تمام الگوهایی را که ممکن است بازشدهٔ یک مکعب باشند مشخص کنید.

آیا این مسأله را شنیده‌اید که در صفحهٔ شطرنج به چند روش می‌توان ۸ مهرهٔ رخ قرار داد به‌طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ در لانه‌های مثلث لانه‌زنبوری شکل ۲۲ حداکثر چه تعداد رخ می‌توان قرار داد به‌طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ همین مسأله را در مورد مثلثهای بزرگتر حل کنید.

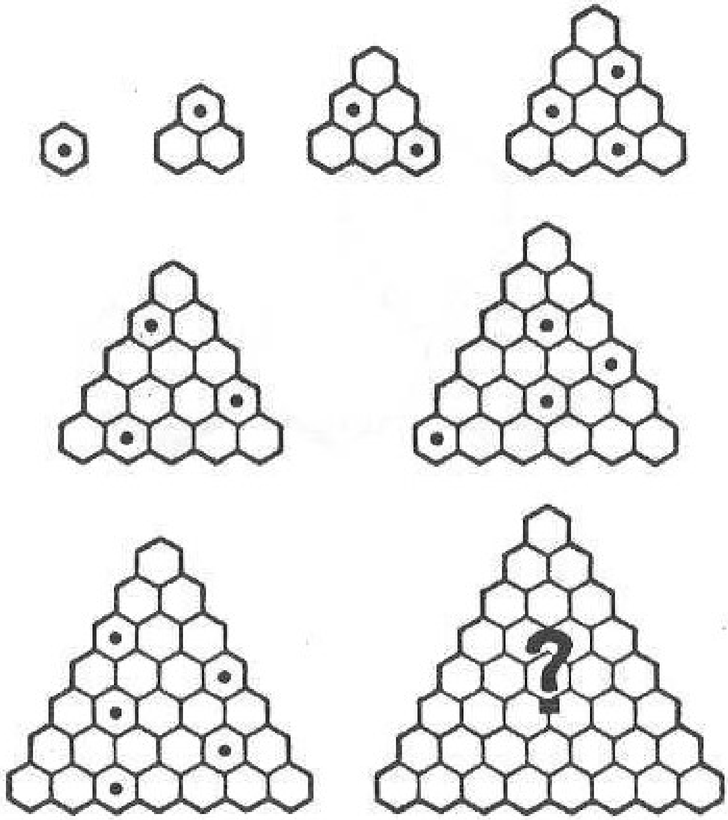
در صفحهٔ لانه‌زنبوری حروف الفبا را به‌تصادف قرار دهید و سعی کنید کلماتی را که با حرکت روی خانه‌های همسایه یکی پس از دیگری به‌دست می‌آیند پیدا کنید. می‌توانید با دوست خود مسابقه بدهید و هرکدام به‌نوبت یک کلمه بیابید و در آخر با شمردن تعداد حروف به‌کار برده شده در کلمات دو طرف، برنده را مشخص کنید.

شش عددی مسدسی است. به همان روشی که اعداد مثلثی، مربعی، مخمسی را تعریف کردیم، اعداد مسدسی را تعریف کنید. دنبالهٔ اعداد مسدسی چنین است

$$۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶, \ldots$$

آیا می‌توانید فرمولی برای nامین عدد مسدسی پیدا کنید؟

تمام حشرات شش پا دارند. از جملهٔ حشرات می‌توان مورچه، مگس، زنبور، پشه، موریانه و شپش را نام برد.



شکل ۲۲

= ۷ × ۱ (عددی اول)

هفت، از اعداد لوکاست. یعنی در دنبالهٔ

$$۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ۲۹, \ldots$$

که در آن از جملهٔ سوم به بعد هر عدد مجموع دو عدد پیشین است ظاهر می‌شود. این دنباله شبیه دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی است، با این تفاوت که دو جملهٔ اولش متفاوت‌اند. آیا می‌توانید فرمولی برای nامین عدد لوکا، که آن‌را با V_n نشان می‌دهیم، به‌دست آورید؟ درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$V_n = U_{n-1} + U_{n+1}$$

$$۲U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m$$

در تحقیقی که جرج میلز در سال ۱۹۵۶ انجام داد سعی کرد حدودی برای ظرفیت داده‌پردازی انسان تعیین کند. این تحقیق نشان می‌دهد مقدار داده‌هایی که می‌توان آنها را همزمان پردازش کرد و به‌خاطر آورد معمولاً به هفت قلم محدود می‌شود. مثالی ساده ظرفیت عددی است. از کسی بخواهید دقیقاً آنچه را که به او می‌گویید دوباره تکرار کند. با یک عدد چهاررقمی تصادفی شروع کنید، مانند ۶۶۲۵. آنگاه یک عدد پنج‌رقمی و سپس شش‌رقمی انتخاب کنید و همین‌طور ادامه دهید تا وقتی که تکرارکننده اشتباه کند. بیشترین تعدادی که تکرارکننده می‌تواند بدون اشتباه تکرار کند ظرفیت عددی اوست. برای بیشتر افراد ظرفیت عددی برابر هفت است. همین‌طور اگر الگویی تصادفی از چند نقطه روی یک صفحه برای مدت کوتاهی ـ مثلاً یک‌پنجم ثانیه ـ نشان بدهیم و بخواهیم تعداد نقاط را بگویند، معمولاً برای اعداد کمتر از هفت قادر به پاسخگویی هستند ولی برای اعداد بیشتر از هفت اشتباه می‌کنند.

اعداد اول به شکل $۲^n - ۱$ را اعداد اول مرسن می‌نامند. $۲^۳ - ۱$ از اعداد اول مرسن است. nامین عدد مرسن، که آن‌را با M_p نشان می‌دهیم، برابر با $۲^n - ۱$ است. عدد مرسن M_n در صورتی ممکن است اول باشد که n عددی اول باشد. یونانیان قدیم می‌دانستند که $M_۲$، $M_۳$، $M_۵$، $M_۷$ اول‌اند. در سال ۱۶۴۴ مرسن چنین حکم کرد که M_p به‌ازای اعداد اول

$$p = ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۳۱, ۶۷, ۱۲۷, ۲۵۷$$

اول و به‌ازای سایر اعداد اول p که از ۲۵۷ کوچکترند مرکب است. امروزه می‌دانیم که M_p به‌ازای ۲۴ عدد اول

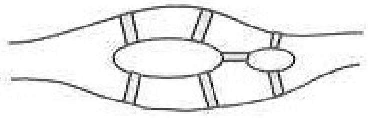
$$p = ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۳۱, ۶۱, ۸۹, ۱۰۷, ۱۲۷, ۵۲۱, ۶۰۷, ۱۲۷۹,$$

$$۲۲۰۳, ۲۲۸۱, ۳۲۱۷, ۴۲۵۳, ۴۴۲۳, ۹۶۸۹, ۹۹۴۱, ۱۱۲۱۳, ۱۹۹۳۷$$

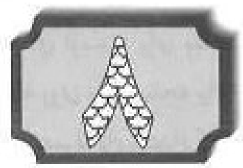
اول و به‌ازای سایر اعداد اول کوچکتر از ۲۰۰۰۰ مرکب است. تخمین زده شده که برای اثبات اول بودن $۲^{۱۹۹۴۱} - ۱$ اگر ۸۰ نفر همکاری کنند، باید هزار سال برای محاسبات وقت صرف کنند. اکثر اطلاعات بالا با کامپیوتر به‌دست آمده است.

اقلیدس در قضیهٔ سی‌وششم مقالهٔ نهم کتاب اصول ثابت کرده است که اگر عدد $۲^n - ۱$ اول باشد، عدد زوج $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ عددی کامل و زوج است. قریب دو هزار سال بعد اویلر ثابت کرد که هر عدد کامل زوج حتماً به همین شکل است. با استفاده از کامپیوتر نشان داده‌اند اگر عدد کامل فردی موجود باشد از $۱۰^{۱۰۰}$ بزرگتر است.

مسألهٔ پلهای کونیگسبرگ. در شهر کونیگسبرگ، هفت پل دو طرف رودخانهٔ شهر را به‌هم وصل می‌کردند (شکل ۲۳ را ببینید). سالها سرگرمی مردم شهر این بود که سعی کنند که هنگام پیاده‌روی، هر هفت پل را بدون اینکه بیش از یک‌بار از پلی بگذرند طی کنند. سرانجام، اویلر ثابت کرد که این کار ممکن نیست.

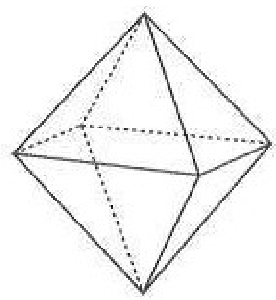


شکل ۲۳



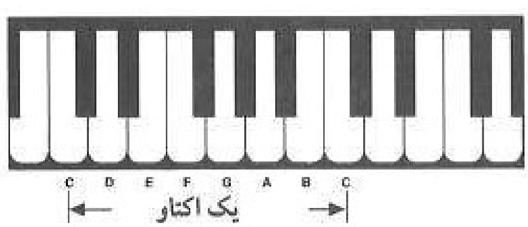
$= ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۳}$ (مکعبی کامل)

هشت‌وجهی منتظم یکی از اجسام افلاطونی است. اگر مرکز وجه‌های مجاور یک مکعب را به‌هم وصل کنیم هشت‌وجهی منتظم به‌دست می‌آید. می‌توان با دوران حول محورهای خاصی هشت‌وجهی را روی خودش منطبق کرد. آیا می‌توانید بگویید هشت‌وجهی چند محور تقارن دارد؟



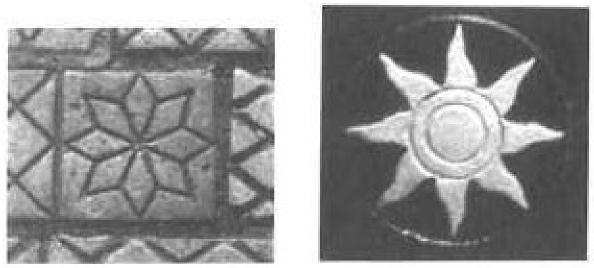
شکل ۲۴

در موسیقی بازهٔ بین دو نتی را که نت بالاتر فرکانسی دو برابر نت پایینتر دارد یک **اکتاو** می‌نامند. در پیانو یک اکتاو با هشت نت سفید متوالی متناظر است، مثلاً با نتهای CDEFGABC. چرا به‌جای ۸ نت، ۷ نت را در یک دسته قرار نداده‌اند؟ شاید به‌دلیل اینکه هفت نت پشت سر هم به‌نظر ناکامل و نارساست.



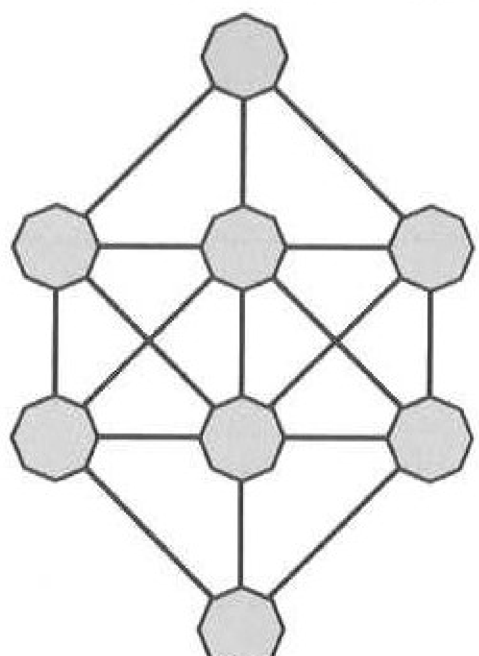
شکل ۲۵

مقدار ابر در آسمان را با مقادیری از صفر تا هشت اندازه‌گیری می‌کنند. واحد این اندازه‌گیری اُکتا نام دارد. هشت اُکتا یعنی اینکه آسمان کاملاً پر از ابر است و صفر اُکتا یعنی اینکه آسمان کاملاً خالی از ابر است. شش اُکتا یعنی اینکه $\frac{6}{8}$ آسمان با ابر پوشیده شده است.



شکل ۲۶ تقارن مرتبهٔ هشت در کاشیکاری و تزئینات بسیاری استفاده می‌شود.

آیا می‌توانید اعداد ۱ تا ۸ را در سلولهای شکل ۲۷ قرار دهید به‌طوری که هیچ دو عدد همسایه‌ای را نتوان با یک خط به‌هم وصل کرد؟ مثلاً ۵ و ۸ را می‌توان با یک خط به‌هم متصل کرد، چون همسایه نیستند، ولی اعداد ۳ و ۴ نباید با یک خط به‌هم وصل شوند.

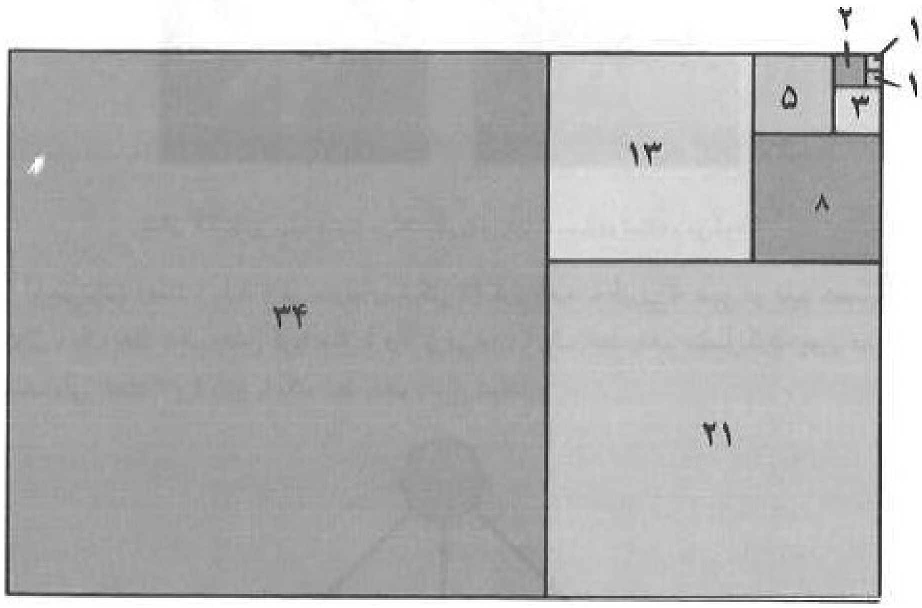


شکل ۲۷

عدد هشت از اعداد فیبوناتچی است. دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$U_{n-1}U_{n+1} = U_n^2 + (-1)^n$$

اعداد فیبوناتچی را لئوناردو فیبوناتچی در قرن سیزدهم میلادی معرفی کرد. این دنباله اولین‌بار در بررسی سرعت زادوولد خرگوشها مطرح شد. خواص ریاضی متنوع و شگفت‌انگیز این دنباله آن‌را بسیار مشهور کرده است.



شکل ۲۸ مربعهایی به‌طول ضلع اعداد فیبوناتچی کنار هم جفت می‌شوند و الگویی مستطیل‌شکل می‌سازند. نسبت طول به‌عرض این مستطیل به عدد طلایی میل می‌کند.

آیا می‌توانید بگویید الگوی عددی زیر چرا برقرار است؟

$$۱ \times ۸ + ۱ = ۹$$

$$۱۲ \times ۸ + ۲ = ۹۸$$

$$۱۲۳ \times ۸ + ۳ = ۹۸۷$$

$$۱۲۳۴ \times ۸ + ۴ = ۹۸۷۶$$

$$\vdots$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ + ۹ = ۹۸۷۶۵۴۳۲۱$$

عنکبوتیان هشت پا دارند. عنکبوتیان شامل عنکبوت، رتیل، عقرب و کنه می‌شوند.

$= ۳ \times ۳ = ۳^{۲}$ (مربعی کامل)

$= ۱ + ۳ + ۵$ (عددی مربعی)

$= ۲ + ۳ + ۴ = ۴ + ۵$ (مجموع اعداد متوالی)

$= ۱ + ۸$ (مجموع دو مکعب کامل)

نُه، مجموع دو مکعب کامل است: $۸ + ۱ = ۹$. مجموع اولین n مکعب کامل همیشه مربعی کامل است. می‌توان ثابت کرد

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + \cdots + n^{۳} = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲}$$

نمایش دهدهی عدد طبیعی n را درنظر بگیرید. مجموع ارقام n را $D(n)$ بنامید. عدد n بر ۹ بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر دنبالهٔ

$$n, D(n), D\big(D(n)\big), D\Big(D\big(D(n)\big)\Big), \ldots$$

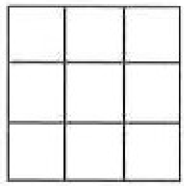
به رقم ۹ ختم شود. نشان دهید این دنباله همیشه به عددی یک رقمی منتهی می‌شود.

به‌ازای کدام اعداد طبیعی مانند n دنبالهٔ بالا به یکی از ارقام ۱ تا ۸ منتهی می‌شود؟

شکل ۲۹ در این شکل یک تمبر سوئدی را می‌بینید که الگویی «غیرممکن» از نه مکعب را نشان می‌دهد.

دو بازیکن ۹ سکه را به‌شکل یک دایره می‌چینند. بازیکنان به‌نوبت یک یا دو سکهٔ کنار هم را برمی‌دارند. برنده بازی کسی است که آخرین سکه را بردارد. آیا این بازی استراتژی برد دارد؟

اعداد ۱ تا ۹ را در یک مربع ۳×۳ چنان بچینید که مجموع اعداد هر یک از سطرها با مجموع اعداد هر یک از ستونها و نیز با مجموع اعداد روی هر یک از قطرهای مربع برابر باشد.



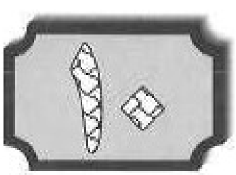
شکل ۳۰

نُه را می‌توان به‌صورت مجموع دو مکعب کامل نوشت. عدد ۱۷۲۹ کوچکترین عددی است که می‌توان آن را به دو روش به‌صورت مجموع دو مکعب کامل نوشت: $۱۷۲۹ = ۱۰^{۳} + ۹^{۳} = ۱۲^{۳} + ۱^{۳}$. آیا می‌توانید عدد دیگری با این خاصیت پیدا کنید؟

کلمه داماد این خاصیت را دارد که اگر آن را از آخر به اول بخوانیم همان کلمه به‌دست می‌آید. در زبان انگلیسی طولانی‌ترین کلمه با این خاصیت نُه حرف دارد: Redivider. طولانی‌ترین کلمه‌ای که در فارسی با این خاصیت می‌شناسید چند حرف دارد؟

نُه مجموع چند عدد متوالی است. بنابراین، آن را می‌توان به‌صورت تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی نمایش داد. کدام اعداد را می‌توان به‌صورت تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی نمایش داد؟

فرض کنید در میان نُه سکه یک سکهٔ تقلبی و سنگینی نسبی آن معلوم باشد. آیا می‌توان حداکثر با دو بار توزین سکهٔ تقلبی را مشخص کرد؟ اگر تعداد سکه‌ها عددی بین $۳^{n-۱}$ و ۳^{n} باشد، با چند بار توزین می‌توان سکهٔ تقلبی را تشخیص داد؟



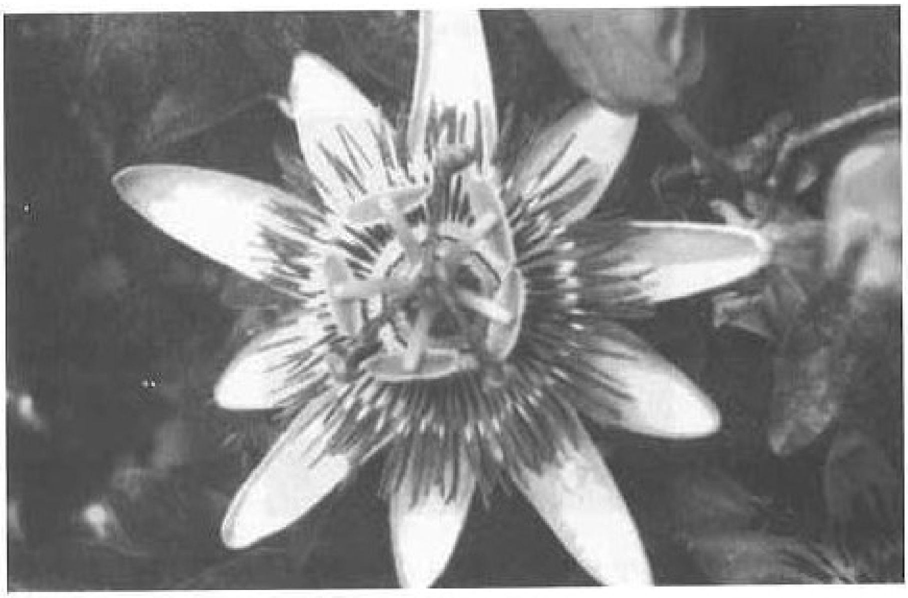
$۲ \times ۵ =$

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ =$ (عددی مثلثی)

$۱ + ۳ + ۶ =$ (عددی هرمی مثلثی)

ده از اعداد هرمی مثلثی است. اگر اولین n عدد مثلثی را روی هم بچینیم هرمی چهاروجهی به‌دست می‌آید. به‌همین دلیل مجموع اولین n عدد مثلثی را nامین عدد هرمی مثلثی می‌نامیم و آن‌را با TP_n نشان می‌دهیم. آیا می‌توانید فرمولی برای TP_n بیابید؟ توجه کنید که $TP_۳ = ۱ + ۳ + ۶ = ۱۰$.

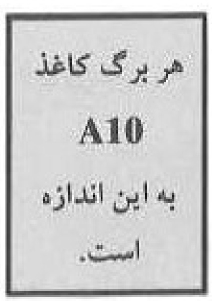
یک برگ کاغذ A10 چندان از یک تمبر پستی بزرگتر نیست. کاغذهایی که با سیستم A برش داده می‌شوند این خاصیت را دارند که هرکدام با تقسیم دیگری به دو نیمه به‌دست می‌آید و در عین حال همهٔ آنها متشابه‌اند. بزرگترین کاغذ در این سیستم برش A0 است که ابعادش $۸۴۱ \times ۱۱۸۹\text{mm}$ و مساحتش



شکل ۳۱ گل ساعت تقارن مرتبهٔ سه، پنج و ده دارد. این گل سه کلاله، پنج پرچم و ده گلبرگ دارد.

یک مترمربع است. تمام برگها در این سیستم برش از یک کاغذ A0 بدون دورریز به‌دست می‌آیند. در هریک از این اندازه‌ها نسبت ارتفاع به پهنای کاغذ تقریباً برابر ۱٫۱۴۱۴۲ است. اگر بخواهیم دقیقاً همهٔ این اندازه‌ها متشابه باشند، نسبت ارتفاع به پهنای کاغذ باید دقیقاً چه عددی باشد؟ از یک برگ کاغذ A0 چند برگ کاغذ A10 می‌توان به‌دست آورد؟

A1	با ابعاد	۵۹۵ × ۸۴۱mm	A6	با ابعاد	۱۰۵ × ۱۴۸mm
A2	با ابعاد	۴۲۱ × ۵۹۵mm	A7	با ابعاد	۷۴ × ۱۰۵mm
A3	با ابعاد	۲۹۷ × ۴۲۱mm	A8	با ابعاد	۵۲ × ۷۴mm
A4	با ابعاد	۲۱۰ × ۲۹۷mm	A9	با ابعاد	۳۷ × ۵۲mm
A5	با ابعاد	۱۴۸ × ۲۱۰mm	A10	با ابعاد	۲۶ × ۳۷mm



شکل ۳۲

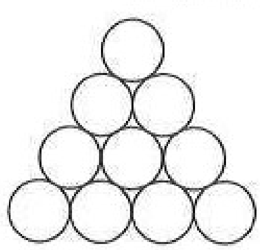
در سیستمهای متریک استاندارد، واحدها به تعداد توانهای ده تقسیم می‌شوند. مثلاً یک متر 10^2 سانتی‌متر و 10^3 میلی‌متر است.

شکل ۳۳ خرچنگ، میگو و خرچنگ دریایی از ردهٔ سخت‌پوستان هستند و ده پا دارند.

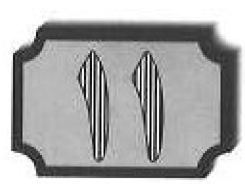
در سیستم نمایش دهدهی اعداد، ده رقم ۰ تا ۹ به‌کار می‌روند. شاید به این دلیل که استفاده از انگشتان دست باعث سهولت در انجام محاسبات می‌شده است عدد ده به‌عنوان مبنا درنظر گرفته شده است.

ده عددی مثلثی است. ارقام ۰ تا ۹ را در شکل زیر چنان قرار دهید که مجموع اعدادی که روی یک خط قرار دارند به‌پیمانهٔ ۳ برابر باشند.

آیا می‌توانید همین مسأله را به‌پیمانهٔ ۹ حل کنید؟



شکل ۳۴



= ۱۱ × ۱ (عددی اول)

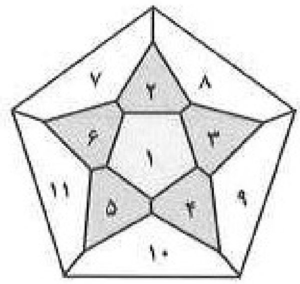
یازده، از اعداد لوکاست. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$V_{n+1}^2 - V_{n+1}V_n - V_n^2 = (-1)^{n-1}5$$

$$\sum_{j=۱}^{n} V_j^{۳} = \frac{۱}{۲}\left(V_{۲n+۲} - ۳\right) + ۳\left((-۱)^n V_{n-۱} + ۱\right)$$

$$\sum_{j=۰}^{۲n+۲} \left(\binom{۲n+۲}{j}\right) V_j^{۲} = ۵^{n+۱} V_{۲n+۲}$$

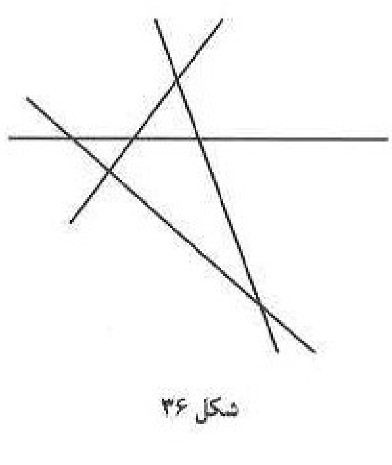
در الگوی زیر یازده ناحیه مشخص شده است:



شکل ۳۵

دو ناحیه را همسایه می‌نامیم هرگاه در یک ضلع مشترک باشند. پنج ناحیه از یازده ناحیهٔ بالا با ناحیهٔ بیرون الگو همسایه‌اند. در هر مرحله می‌توان عددی را که در یک ناحیه نوشته شده است به یک ناحیهٔ همسایهٔ خالی و یا در صورتی که این ناحیه با ناحیهٔ بیرون الگو همسایه باشد به بیرون الگو منتقل کرد و خود این ناحیه را خالی در نظر گرفت. نشان دهید اگر اعداد یک تا یازده به ترتیب دلخواه در خانه‌های الگوی بالا قرار گیرند، می‌توان در تعدادی متناهی مرحله با انتقال عددها به خانه‌های همسایه به روش بالا الگوی عددی اولیه را به الگوی بالا تبدیل کرد.

چهار خط در صفحه حداکثر یازده ناحیه به‌وجود می‌آورند. آیا می‌دانید n خط در صفحه حداکثر چند ناحیه به‌وجود می‌آورند؟



شکل ۳۶

اگر یازدهم فروردین جمعه باشد، چند ماه باید بگذرد تا دوباره یازدهم ماه روز جمعه باشد؟ بیشترین فاصلهٔ ممکن بین دو جمعهٔ یازدهم متوالی چند ماه است؟ کمترین فاصلهٔ ممکن بین دو جمعهٔ یازدهم چند ماه است؟

به تساویهای زیر توجه کنید:

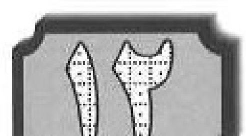
$$۱۱ = ۴^۲ - ۴ - ۱ = ۴^۲ - ۲ \times ۴ + ۳$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند x و عدد طبیعی n، $n > ۱$، فرض کنید n^k کوچکترین توان کاملی باشد که از x اکیداً بزرگتر است. می‌توان x را با یک چندجمله‌ای برحسب n از درجهٔ k با ضرایب کوچکتر از n نمایش داد. با استفاده از تجزیهٔ این چندجمله‌ایها ممکن است بتوان x را تجزیه کرد. مثلاً توجه کنید که

$$\begin{aligned} ۱۱ &= (۴ - ۳)(۲ \times ۴ + ۳) = ۲ \times ۴^۲ - ۳ \times ۴ - ۹ \\ &= ۲ \times ۴^۲ - ۳ \times ۴ - ۲ \times ۴ - ۱ = ۴^۲ - ۴ - ۱ \end{aligned}$$

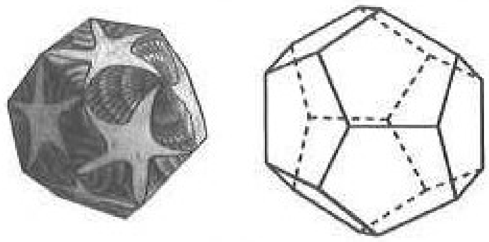
$$\begin{aligned} ۱ \times ۱ &= ۱ \\ ۱۱ \times ۱۱ &= ۱۲۱ \\ ۱۱۱ \times ۱۱۱ &= ۱۲۳۲۱ \\ ۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۳۲۱ \\ ۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۵۴۳۲۱ \\ ۱۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۵۶۵۴۳۲۱ \\ ۱۱۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۵۶۷۶۵۴۳۲۱ \\ ۱۱۱۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۵۶۷۸۷۶۵۴۳۲۱ \\ ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ &= ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۸۷۶۵۴۳۲۱ \end{aligned}$$

شکل ۳۷



$$\begin{aligned} ۲^۲ \times ۳ &= \\ ۲ \times ۶ &= \\ ۳ \times ۴ &= \\ ۲ + ۴ + ۶ &= \\ ۳ + ۴ + ۵ &= \end{aligned}$$

دوازده‌وجهی منتظم یکی از اجسام افلاطونی است که هر وجه آن یک پنج‌ضلعی منتظم است. آیا می‌دانید دوازده‌وجهی منتظم چند رأس، چند یال و چند محور تقارن دارد؟

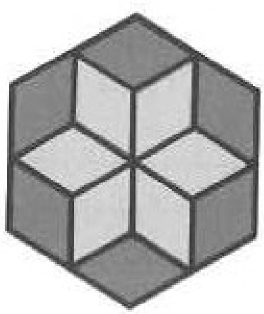


شکل ۳۸

به دوازده روش می‌توان ۸ وزیر را در صفحهٔ شطرنج طوری چید که یکدیگر را تهدید نکنند. الگوهایی که با دوران و یا تقارن نسبت به یکی از محورهای تقارن صفحهٔ شطرنج به‌دست می‌آیند متمایز شمرده نشده‌اند. آیا می‌توانید این دوازده الگو را بسازید؟

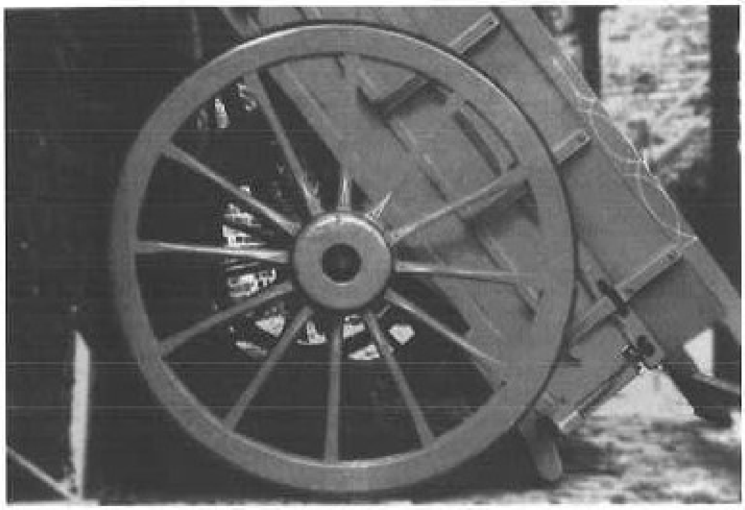
شکل ۳۹ اطراف این درخت با یک دوازده‌ضلعی منتظم فرش شده است.

مطابق شکل ۴۰ با دوازده لوزی می‌توان یک شش‌ضلعی منتظم ساخت. قطرهای اصلی این لوزیها در سه جهت متفاوت قرارگرفته‌اند. آیا می‌توانید نشان دهید به هر روشی که شش‌ضلعی را با دوازده لوزی فرش کنیم، تعداد لوزیهایی که قطر اصلی آنها موازی یکی از سه جهت بالاست برابر چهار است؟



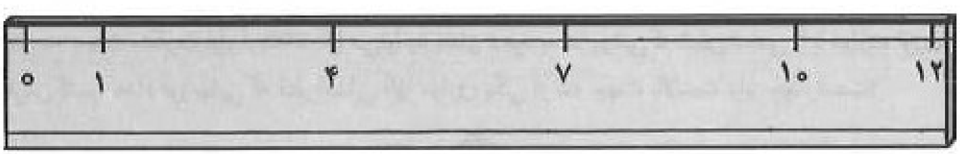
شکل ۴۰

تقارنِ مرتبهٔ ۱۲ بالاترین مرتبهٔ تقارنِ دورانی است که چشم می‌تواند بدون شمارش خطی تشخیص دهد. شاید الگوی ساعت که چشم با آن آشنایی دارد در این تشخیص بی‌تأثیر نباشد.



شکل ۴۱ تاکنون تقارن از چه مرتبه‌هایی را در چرخهای خودروهای سواری مشاهده کرده‌اید؟

آیا هرگز خطکشی مانند خطکش شکل ۴۲ خریده‌اید؟ ممکن است شما به خطکشی که بیشتر نشانه‌های آن پاک شده‌اند علاقه نداشته باشید، اما این خطکش بهتر از آن است که به‌نظر می‌رسد. با این خطکش می‌توان اندازه‌هایی از ۱ تا ۱۲ را به سانتیمتر اندازه‌گیری کرد. خطکشی به‌طول ۶ سانتیمتر با کمترین علامت ممکن بسازید.

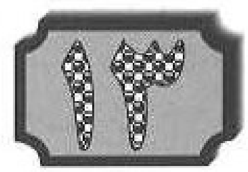


شکل ۴۲

دوازده سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است و سنگینی نسبی آن نامعلوم است. با سه بار توزین سکهٔ تقلبی را مشخص و سنگینی نسبی آن را معلوم کنید.

اگر به‌جای انگشتان دو دست خود، بندهای چهار انگشت غیرشست یک دست خود را بشمارید عدد ۱۲ را به‌دست می‌آورید. دلایل خوبی برای شمردن در مبنای ۱۲ به‌جای شمردن در مبنای ۱۰ وجود دارد.

شکل ۴۳



$= 13 \times 1$ (عددی اول)

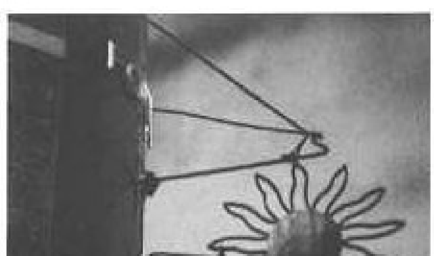
$= 3^2 + 2^2$ (مجموع دو مربع کامل)

سیزده، از اعداد فیبوناتچی است. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$U_{n+1}^{2} - U_{n+1}U_n - U_n^{2} = (-1)^n$$

$$U_{n+2}^{3} = U_{n+1}^{3} + U_n^{3} + 3U_nU_{n+1}U_{n+2}$$

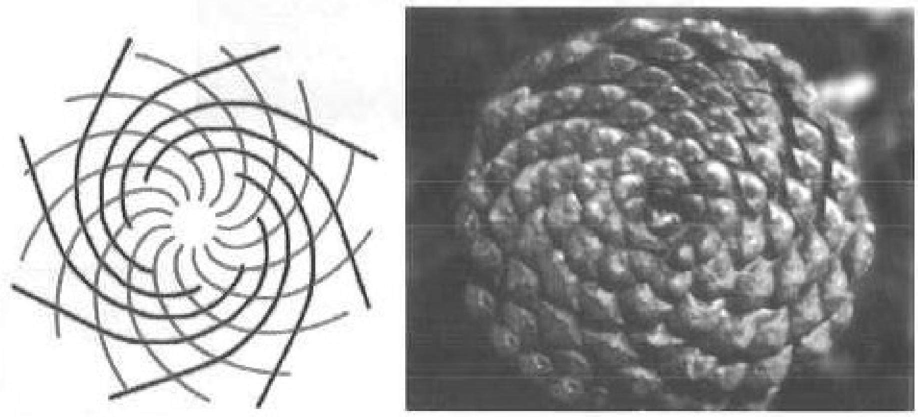
$$\sum_{n=1}^{n} U_n^{4} = \frac{1}{25}\left(U_{2n+1}V_{n-1}V_{n+2} + 6n + 3\right)$$



شکل ۴۴ معمولاً هیچ هنرمندی الگویی با تقارن از مرتبهٔ ۱۳ به‌کار نمی‌برد، چون ممکن است مشتریان او خرافاتی باشند.

چگونه می‌توان با سه وزنه تمام اشیای به‌وزنهای ۱ کیلوگرم، ۲ کیلوگرم، . . . و ۱۳ کیلوگرم را با یک ترازوی تعادلی وزن کرد؟

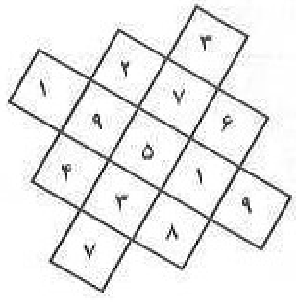
اگر به مخروط درخت کاج توجه کنید مارپیچهایی را مشاهده می‌کنید که از مرکز آن خارج می‌شوند. این مارپیچها در دو جهت مثلثاتی و عکس جهت مثلثاتی خارج می‌شوند. در یک جهت ۸ مارپیچ و در جهت دیگر ۱۳ مارپیچ دیده می‌شود. ۸ و ۱۳ هر دو از اعداد فیبوناتچی‌اند. اگر الگوهای مارپیچی مشابه در گیاهان دیگر را بشمارید، اعداد فیبوناتچی بزرگتری را به‌دست خواهید آورد.



شکل ۴۵

۱۳ مجموع دو مربع کامل است: ۴ + ۹ = ۱۳. هر عدد فرد اول را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت، اگر و فقط اگر به شکل $4k + 1$ باشد. آیا می‌توانید خودتان اثباتی برای این حکم پیدا کنید؟ بهتر است چند مثال را بررسی کنید. آیا می‌توانید ۷ و ۱۱ را به‌صورت مجموع دومربع کامل نمایش دهید؟

روش ساختن مربع وفقی ۳ × ۳:



شکل ۴۶

هر عدد فرد را می‌توان به شکل تفاضل دو مربع کامل متوالی نوشت. مثلاً

$$۱۳ = (۷ - ۶)(۷ + ۶) = ۷^۲ - ۶^۲$$

می‌توان این حکم را از اتحاد زیر نتیجه گرفت

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$$

چون $۶^۲ - ۷^۲ = ۱۳ = ۲^۲ + ۳^۲$، پس داریم $۶^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ = ۷^۲$. تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $a^۲ + b^۲ + c^۲ = d^۲$ را به‌دست آورید. همچنین به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲ = b^۲$ را به‌دست آورید.

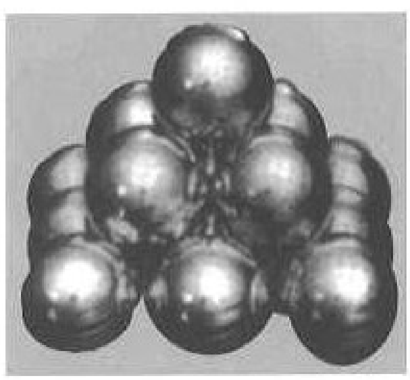
بیماری Triskaidekaphobia، نام علمی بیماری ترس از عدد ۱۳ است؛ مثلاً ترسیدن از ۱۳ نفر که دور یک میز نشسته‌اند.

$۲ \times ۷ =$

$= ۹ + ۴ + ۱$ (عددی هرمی مربعی)

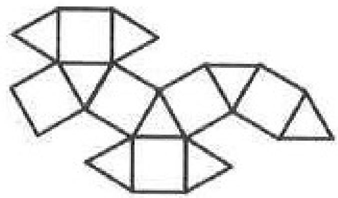
$۲ + ۳ + ۴ + ۵ =$

چهارده، از اعداد هرمی مربعی است. این نامگذاری به این دلیل است که از روی هم قرار دادن اولین n عدد مربعی هرمی با قاعدهٔ مربع تشکیل می‌شوند. آیا می‌توانید فرمولی برای nامین عدد هرمی مربعی پیدا کنید؟



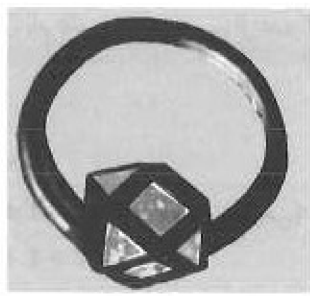
شکل ۴۷

مطابق شکل ۴۸ از اشتراک یک هشت‌وجهی منتظم و یک مکعب می‌توان یک چهارده‌وجهی به‌دست آورد که الگوی خیاطی آن را در زیر می‌بینید.



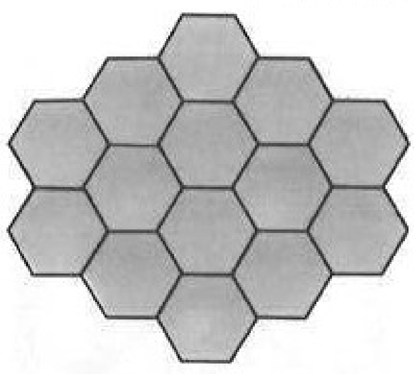
شکل ۴۸

آیا می‌دانید این شکل چند یال و چند رأس و چند محور تقارن دارد؟



شکل ۴۹ این جواهر ۱۵۰۰ سال قدمت دارد و در معبدی در کشور آلمان پیدا شده است.

آیا می‌توان الگوی زیر را با اعداد طبیعی متفاوت پر کرد به‌طوری‌که مجموع اعداد در هر ردیف خطی با هم برابر باشد؟ آیا می‌توانید پیشنهادی بدهید؟



شکل ۵۰

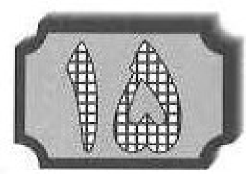
به الگوی خیاطی که برای چهارده وجهی همگن بالا رسم شده توجه کنید. آیا می‌توانید آن را به یک کاشیکاری صفحه با مثلثها و مربعها توسعه دهید؟

آیا می‌توان با آجرهایی به شکل هرم مربعی تمام فضا را پر کرد؟

با هشت شش‌ضلعی منتظم و شش مربع که طول اضلاع همهٔ آنها با هم برابر است می‌توان چندوجهی همگن سه‌بعدی ساخت. آیا می‌دانید این شکل چند یال و چند رأس و چند محور تقارن دارد؟ این شکل را می‌توان از اشتراک یک مکعب با یک هشت وجهی منتظم به‌دست آورد.

آیا معادلهٔ دیوفانتی $b^{۲} - a^{۲} = ۱۴$ جواب دارد؟ کدام اعداد زوج را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نمایش داد؟

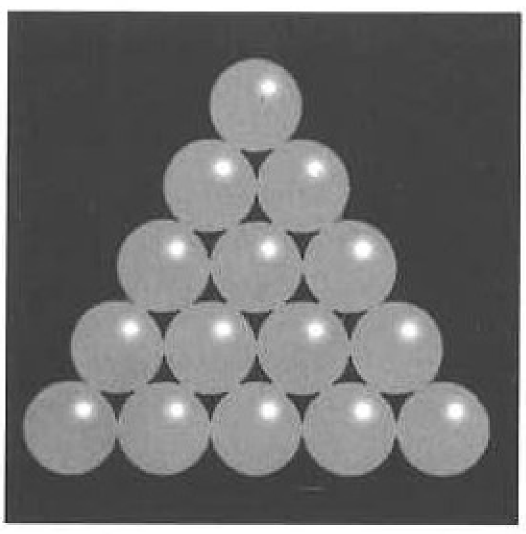
روی رأسهای یک مکعب و مرکز وجه‌های آن علامت بگذارید. می‌توان این کار را روی الگوی خیاطی یک مکعب انجام داد. سپس قطرهای همهٔ وجه‌ها را رسم کنید و روی این شکل بازی دوز را انجام دهید. در این بازی هر یک از دو بازیکن سه مهره دارد که با رنگ خاصی متمایز شده‌اند. بازیکنان به نوبت یک مهره روی شکل قرار می‌دهند، با این هدف که سه مهرهٔ همرنگ را روی یکی از قطرها ردیف کنند. پس از قرارگرفتن تمام مهره‌ها روی زمین بازی، در هر نوبت یکی از مهره‌ها جابه‌جا می‌شود.



$۳ \times ۵ =$

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ =$ (عددی مثلثی)

آیا می‌توانید پانزده عدد طبیعی متفاوت را در الگوی زیر قرار دهید به‌طوری‌که مجموع اعداد هر ردیف با هم برابر باشد؟



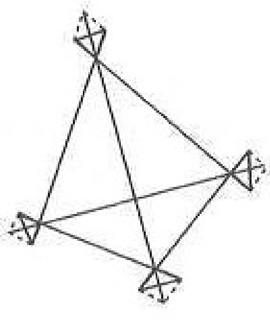
شکل ۵۱

به این تساویها توجه کنید:

$$۱۵ = ۱۶ - ۱ = ۴^۲ - ۱ = (۴ - ۱)(۴ + ۱) = ۳ \times ۵$$

آیا فکر می‌کنید همیشه می‌توان با استفاده از اتحادها هر عدد طبیعی را تجزیه کرد؟

چهار صفحه در فضا حداکثر پانزده ناحیه ایجاد می‌کنند. آیا می‌دانید n صفحه در فضا حداکثر چند ناحیه به‌وجود می‌آورند؟



شکل ۵۲

در یک میهمانی شش‌نفره، پانزده بار دست داده شده است. آیا می‌توانید نشان دهید یا سه نفر وجود داشته‌اند که هر یک از آنها دو نفر دیگر را می‌شناسند و یا سه نفر وجود داشته‌اند که هیچ‌یک از آنها دیگری را نمی‌شناسند؟ برای اینکه یا چهار نفر وجود داشته باشند که هر یک از آنها بقیه را بشناسد یا چهار نفر وجود داشته باشند که هیچ‌یک از آنها دیگری را نشناسد، حداقل چند میهمان باید در میهمانی شرکت کنند؟

چون $۸^۲ - ۷^۲ = ۱۵ = ۴^۲ - ۱^۲$، پس $۸^۲ + ۱^۲ = ۴^۲ + ۷^۲$. تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲$ را به‌دست آورید.

$۳ + ۶ + ۶ = ۱۵$. هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد مثلثی نمایش داد. این حکم اولین‌بار در یادداشتهای گاوس، ریاضیدان آلمانی، دیده شده است که به این صورت بیان شده بود:

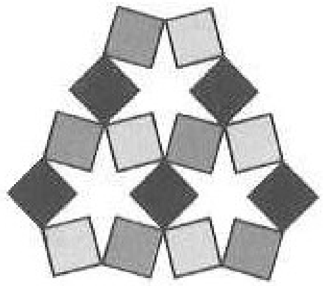
$$N = \triangle + \triangle + \triangle$$

$۱ + ۱ + ۴ + ۹ = ۱۵$. هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نمایش داد:

$$N = \square + \square + \square + \square$$

در مربع وفقی ۳×۳ مجموع اعداد هر سطر و ستون برابر ۱۵ است. در یک مربع وفقی ۵×۵ که در آن اعداد ۱ تا ۲۵ قرار داده شده‌اند، مجموع اعداد هر ستون چقدر است؟

در شکل زیر الگویی توسط ۱۵ مربع به‌وجود آمده است. آیا می‌توان این الگو را به تمام صفحه گسترش داد؟

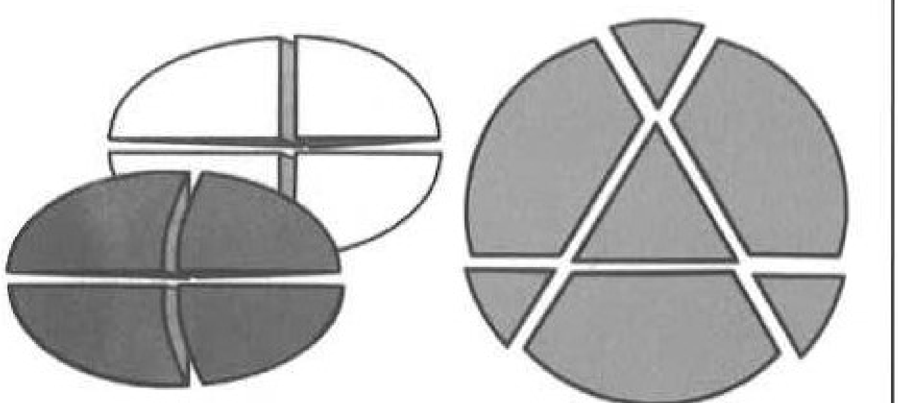


شکل ۵۳

۱۵ تفاضل دو توان چهارم کامل است: $2^4 - 1^4 = 15$.

برش با چاقو

فرض کنید که یک چاقو را برمی‌دارید و با سه برش مستقیم یک سیب‌زمینی را قسمت می‌کنید و بعد از سومین برش هم قسمتها را از هم جدا می‌کنید. چند قسمت تشخیص می‌دهید؟ جواب بستگی به این دارد که چطور برشها را انجام داده باشید. اما اگر حداکثر تعدادی را که ممکن است تولید شود درنظر بگیریم، سیب‌زمینی به هشت قسمت تقسیم شده است. فرض کنید می‌خواهید یک پیتزا را با سه برش مستقیم تقسیم کنید، اما تا وقتی که برش نهایی انجام نشده است نمی‌توان برشهای پیتزا را حرکت داد. این‌بار حداکثر تعداد قسمتهایی که می‌توان روی پیتزا به‌وجود آورد برابر ۷ است.



حال به یک رشتهٔ ماکارونی فکر کنید. اگر بخواهیم آن‌را هم فقط با سه برش تقسیم کنیم به چهار قسمت تقسیم می‌شود. تفاوت سیب‌زمینی، پیتزا و رشتهٔ ماکارونی تنها در این است که اولی سه‌بعدی، دومی دوبعدی

و سومی یک‌بعدی است. سیب‌زمینی، آجر، گلوله برفی و تکه پنیر همه سه‌بعدی‌اند و با یک برش به دو قسمت، با دو برش به چهار قسمت، با سه‌برش به حداکثر هشت قسمت و با چهار برش به حداکثر پانزده قسمت تقسیم می‌شوند. دنبالهٔ

$$۲, ۴, ۸, ۱۵, ۲۶, \ldots$$

را اعداد سیب‌زمینی می‌نامیم.

برشهای شکلهای مسطح مانند پیتزا، کیک و یک صفحهٔ کاغذ، دنبالهٔ

$$۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, \ldots$$

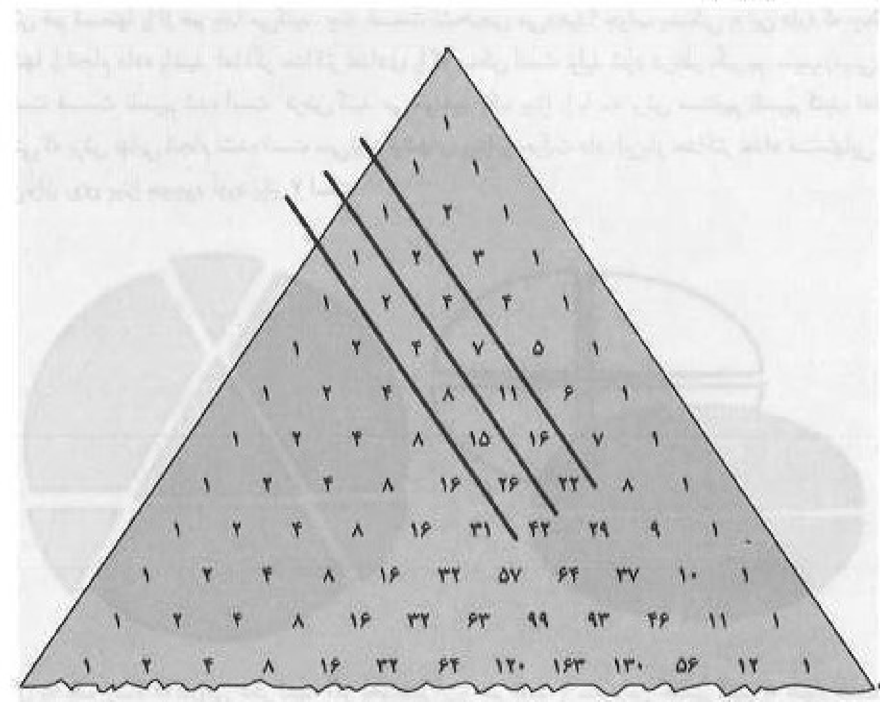
را به‌وجود می‌آورند که آنها را اعداد پیتزا می‌نامیم.

برشهای شکلهای یک‌بعدی مانند رشتهٔ ماکارونی یا طناب، دنبالهٔ

$$۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots$$

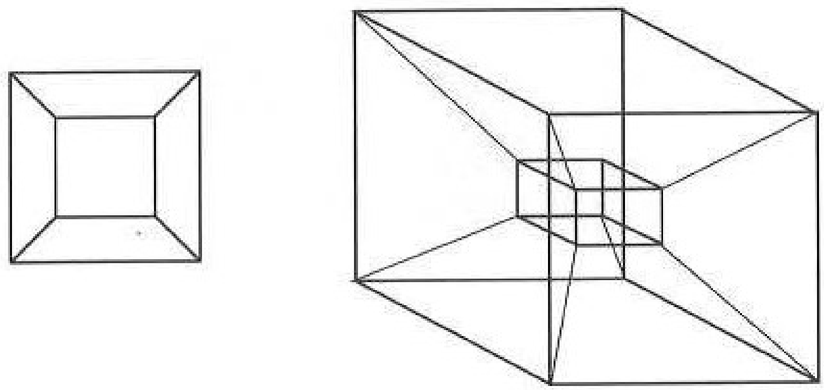
را تشکیل می‌دهند، که آنها را اعداد ماکارونی می‌نامیم.

اگر مثلثی از اعداد تشکیل دهیم که با ۱ شروع می‌شود و هر ردیف با ۱ آغاز و به ۱ ختم شود به‌طوری که هر عدد مجموع عدد سمت چپ بالای سر خودش در ردیف بالا و عددی که دو ردیف بالاتر درست بالای سرش قرار گرفته باشد، در این‌صورت دنبالهٔ اعداد سیب‌زمینی، دنبالهٔ اعداد پیتزا و دنبالهٔ اعداد ماکارونی در این مثلث ظاهر می‌شوند.



= $۲^{۴}$ (توان چهارم کامل)
= $۴^{۲}$ (مربعی کامل)
= ۲ × ۸
= ۱ + ۳ + ۵ + ۷

مکعب چهار بعدی شانزده رأس دارد. همان‌طورکه می‌توان الگوی رأسها و یالهای مکعب را در دو بعد پیاده کرد، می‌توان الگوی رأسها و یالهای مکعب چهاربعدی را در سه بعد پیاده کرد. آیا می‌دانید مکعب چهاربعدی چند یال و چند وجه سه‌بعدی دارد؟

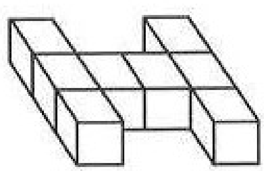


شکل ۵۴

مکعب یکی از چندوجهیهای منتظم چهاربعدی است. آیا می‌دانید چه تعداد چندوجهی منتظم چهاربعدی وجود دارد؟

اعداد یک تا شانزده را در مربعی ۴ × ۴ چنان قرار دهید که مجموع اعداد هریک از سطرها و ستونها با هم برابر باشد.

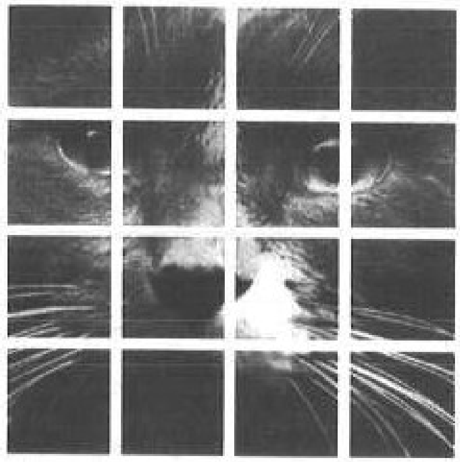
به چندین روش می‌توان ۸ مکعب مساوی را در فضا در همسایگی هم قرار داد به‌طوری‌که یک وجه کامل دو مکعب همسایه بر هم منطبق باشد. از میان این چندین روش کدامها می‌توانند الگوی خیاطی مکعب چهاربعدی باشند؟ مثلاً آیا الگوی زیر الگویی خیاطی برای مکعب چهاربعدی است؟



شکل ۵۵

کرم ابریشم شانزده پا دارد، ولی وقتی به‌شکل پروانه از پیله خود بیرون می‌آید فقط چهار پا دارد.

به چند روش می‌توان چهارمربع را کنار هم گذاشت به‌طوری‌که با چهارکپی از الگوی به‌دست آمده بتوان مربعی ۴ × ۴ را فرش کرد؟



شکل ۵۶

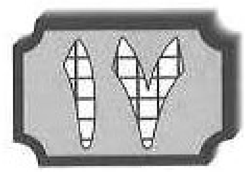
به چند روش می‌توان الگوی ۱۶تایی زیر را به چهار بخش قابل انطباق افراز کرد؟

شکل ۵۷

۱۶ = ۴^۲ = ۲^۴. آیا معادلهٔ

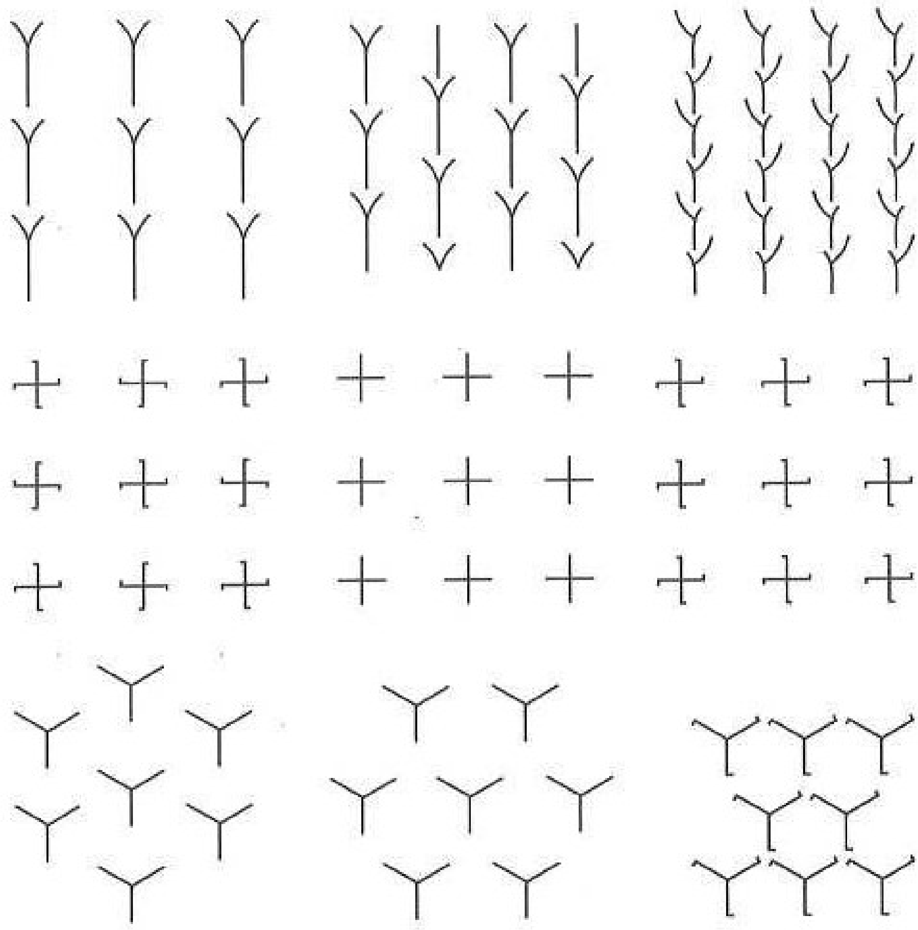
$$x^y = y^x$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دیگری هم دارد؟

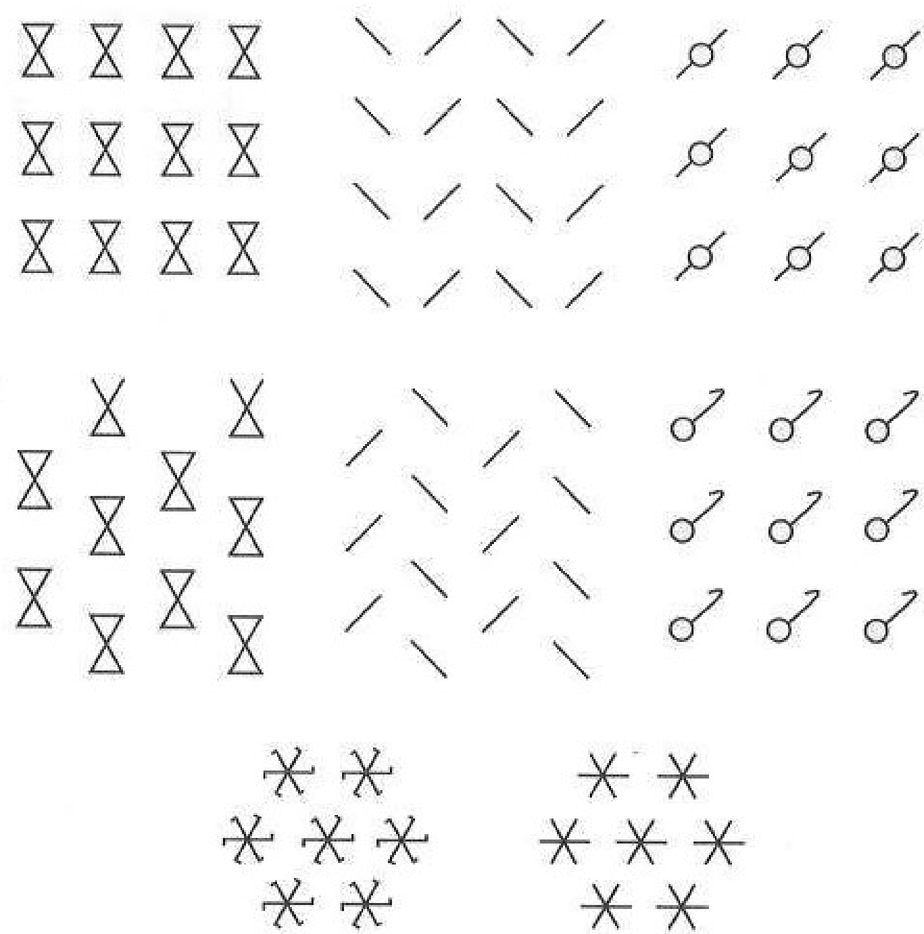


$= 17 \times 1$ (عددی اول)

الگوهای کاغذ دیواری همیشه از تکرار الگوهایی اولیه به‌دست می‌آیند. همیشه می‌توان با ترکیبی از دوران و انتقال الگوی کاغذ دیواری را روی خودش منطبق کرد. چنین انطباقی را یک تقارن الگوی کاغذ دیواری می‌نامند. همهٔ تقارنهای هر الگو تشکیل یک نیمگروه می‌دهند. یعنی از ترکیب هر دو تقارن، تقارن سومی به‌دست می‌آید. اگر بخواهیم الگوها را با نیمگروه تقارنشان رده‌بندی کنیم، دقیقاً ۱۷ نوع متفاوت تشخیص خواهیم داد. در زیر چند مثال از این الگوها دیده می‌شود.



شکل ۵۸



ادامهٔ شکل ۵۸

$۱^۴ + ۲^۴ = ۱۷$ را فقط به یک صورت می‌توان به‌صورت مجموع دو توان کامل چهارم نمایش داد. کوچکترین عددی که می‌توان آن را به صورت مجموع دو توان چهارم کامل متمایز نمایش داد عدد ۱۷ است.

۱۷ عددی اول به‌شکل $۴k + ۱$ است و می‌توان آن را به صورت مجموع دو مربع کامل نمایش داد: $۱۷ = ۴^۲ + ۱^۲$.

رییس قبیله‌ای ۱۷ شتر داشت و وصیت کرد که $\frac{۱}{۲}$ آنها را به پسر بزرگترش و $\frac{۱}{۳}$ آنها را به پسر دومش و $\frac{۱}{۹}$ آنها را به پسر کوچکترش بدهند. قاضی یک شتر از شتران خود به ۱۷ اضافه کرد و ۱۸ شتر را کنار هم قرار داد. نیمی از آنها را که ۹ شتر می‌شد به پسر اول و یک‌سوم آنها را که ۶ شتر می‌شد به پسر دوم و $\frac{۱}{۹}$ آنها را که دو شتر می‌شد، به‌پسر سوم داد. آنگاه شتر خود را که اضافه مانده بود، برداشت و به خانه برد. قاضی

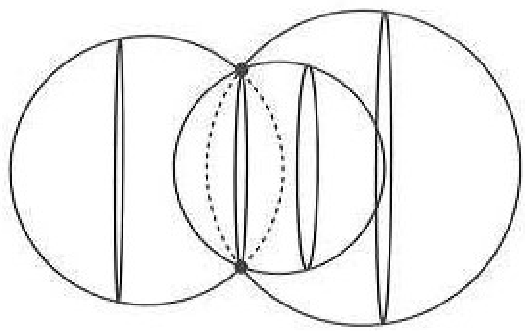
ازکجا فهمید که برای اجرای وصیت، یک شتر اضافه لازم دارد؟ تمام جوابهای طبیعی معادلهٔ دیوفانتی

$$\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲} + \frac{۱}{n_۳} = \frac{n - ۱}{n}$$

راکه در آن $n_۱$، $n_۲$ و $n_۳$ متمایزند به‌دست آورید.

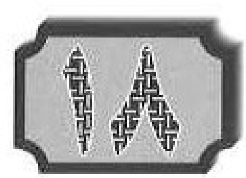
اعداد اول ۵، ۱۱ و ۱۷ تشکیل تصاعدی حسابی می‌دهند. همین‌طور سه‌تایی ۳، ۵ و ۷ و سه‌تایی ۳، ۷ و ۱۱ دو تصاعد حسابی از اعداد اول‌اند. آیا تعداد تصاعدهای حسابی سه‌تایی که هر سه عضو آنها اول‌اند نامتناهی است؟ پاسخ دادن به این سؤال بسیار مشکل است.

حداقل به چند کره نیاز داریم تا بتوانیم با آنها ۱۷ ناحیه در فضا به‌وجود آوریم؟ سه کره در فضا حداکثر چند ناحیه به‌وجود می‌آورند؟ چهار کره چطور؟



شکل ۵۹

$۹^۲ - ۸^۲ = ۱۷ = ۴^۲ + ۱^۲$ و در نتیجه $۱^۲ + ۴^۲ + ۸^۲ = ۹^۲$.



$۲ \times ۳^۲ =$

$۲ \times ۹ =$

$۳ \times ۶ =$

$۳ + ۴ + ۵ + ۶ =$

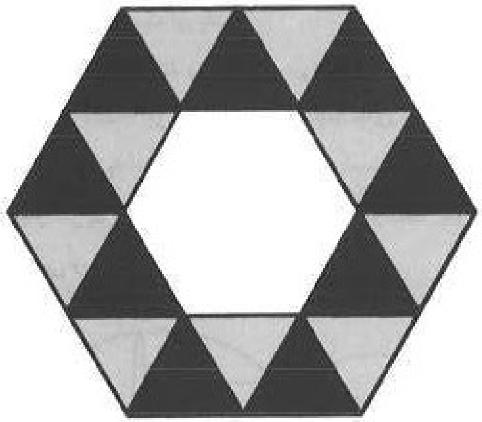
هجده از اعداد لوکاست. درستی روابط زیر را تحقیق کنید: (در اینجا $\Phi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$).

$$V_n = \left[\Phi^n + \frac{۱}{۲}\right], \quad n \geq ۲$$

$$V_{n+۱} = \left[\Phi V_n + \frac{۱}{۲}\right], \quad n \geq ۴$$

شکل صفحهٔ بعد با استفاده از ۱۸ مثلث به‌دست آمده است. با استفاده از این الگو راهی برای

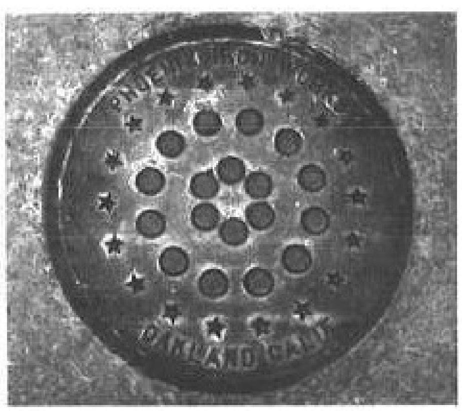
افراز شش‌ضلعی به ۸ قسمت قابل انطباق پیدا کنید. آیا می‌توانید شش‌ضلعی را به ۳۲ قسمت قابل انطباق افراز کنید؟



شکل ۶۰

هجده، تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی است: $۱۸ = \frac{۶(۶+۱)}{۲} - \frac{۲(۲+۱)}{۲}$.

هجده گوی را در الگویی مکعب مستطیلی به ابعاد $۳ \times ۳ \times ۲$ قرار دهید. به چند روش می‌توان این الگو را به سه جزء قابل انطباق افراز کرد؟



شکل ۶۱ تقارن مرتبهٔ هجده در کفپوش آهنی خیابان

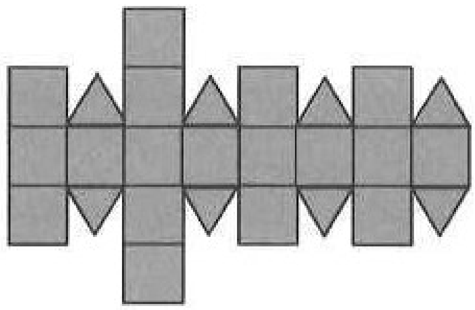
$۱۱ + ۷ = ۱۸$. آیا فکر می‌کنید هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت؟ این مطلب را در مورد اولین صد عدد زوج بررسی کنید.

$۱۱ + ۷ = ۱۸ = ۱۳ + ۵$. آیا تعداد اعداد زوجی که می‌توان آنها را به دو روش به صورت مجموع

دو عدد اول نمایش داد نامتناهی است؟

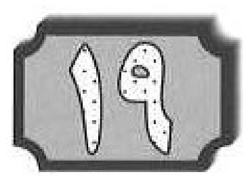
$۱ = \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}$. تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $۱ = \frac{۱}{n_k} + \cdots + \frac{۱}{n_۱}$ را که در آن n_iها متمایزند به دست آورید.

با ۱۸ مربع و ۸ مثلث می‌توان یک چندوجهی همگن درست کرد که الگوی خیاطی آن در زیر آمده است.



شکل ۶۲

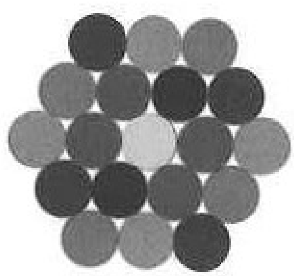
این شکل چند یال، چند رأس و چند محور تقارن دارد؟ آیا می‌توان آن را به صورت اشتراک چند جسم افلاطونی نمایش داد؟



$= ۱۹ \times ۱$ (عددی اول)

نوزده از اعداد شش‌ضلعی مرکزی است:

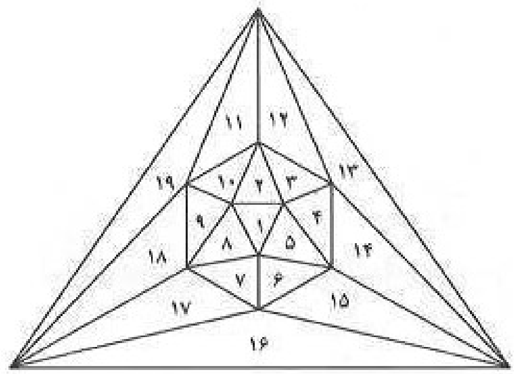
۷, ۱۹, ۳۷, ۶۱, ۹۱, ۱۲۷, ۱۶۹, ...



شکل ۶۳

اگر عددی مثلثی را شش برابر و یک واحد به حاصل اضافه کنیم، همیشه یکی از اعداد شش‌ضلعی مرکزی به‌دست می‌آید.

در الگوی زیر نوزده ناحیه مشخص شده‌اند:



شکل ۶۴

دو ناحیه را همسایه می‌نامیم هرگاه در یک ضلع مشترک باشند. سه ناحیه از نوزده ناحیهٔ بالا با ناحیهٔ بیرون الگو همسایه‌اند. در هر مرحله می‌توان عددی را که در یک ناحیه نوشته شده است به یکی از همسایه‌های خالی آن و یا در صورتی که این ناحیه با ناحیهٔ بیرون الگو همسایه باشد به بیرون الگو منتقل کرد و خود این ناحیه را خالی در نظر گرفت. نشان دهید اگر اعداد یک تا نوزده به ترتیب دلخواهی در خانه‌های الگوی بالا قرار گیرند، می‌توان در تعداد متناهی مرحله با انتقال عددها به خانه‌های همسایه به روش بالا الگوی عددی اولیه را به الگوی بالا تبدیل کرد.

نوزده را به دو روش می‌توان به صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت:

$$۱۹ = ۴^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$$

$$۱۹ = ۳^۲ + ۳^۲ + ۱^۲$$

عدد ۱۹ را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مکعب کامل نمایش داد: $۳^۳ - ۲^۳ = ۱۹$. آیا می‌توان ۱۹ را به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت؟

آیا کران بالایی برای تعداد روشهای نوشتن یک عدد به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل وجود دارد؟

دنبالهٔ اعداد مثلثی را درنظر بگیرید:

$$۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \ldots$$

نوزده را به دو روش می‌توان به‌صورت مجموع حداکثر سه عدد مثلثی نمایش داد:

$$۱۹ = ۱۵ + ۳ + ۱$$

$$۱۹ = ۱۰ + ۶ + ۳$$

آیا کران بالایی برای تعداد روشهای نوشتن یک عدد به‌صورت مجموع حداکثر سه عدد مثلثی وجود دارد؟

۱ + ۵ + ۱۳ = ۱۹. آیا هر عدد فرد را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نمایش داد؟ این مطلب را در مورد اعداد فرد کوچکتر از ۲۰۰ امتحان کنید.

$۲^{۲} \times ۵ =$

$۲ \times ۱۰ =$

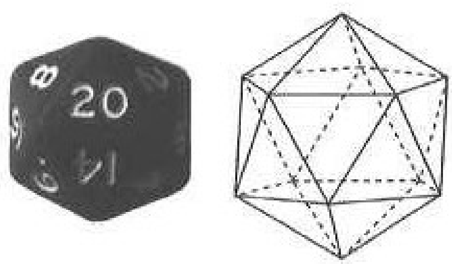
$۲ + ۴ + ۶ + ۸ =$

$۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ =$

بیست از اعداد هرمی مثلثی است، زیرا بیست مجموع اولین چهار عدد مثلثی است.

نوزاد در مرحلهٔ اول بیست دندان شیری درمی‌آورد که بعدها با ۳۲ دندان اصلی جایگزین می‌شوند.

بیست‌وجهی منتظم یکی از اجسام افلاطونی است که ۲۰ وجه مثلثی دارد.



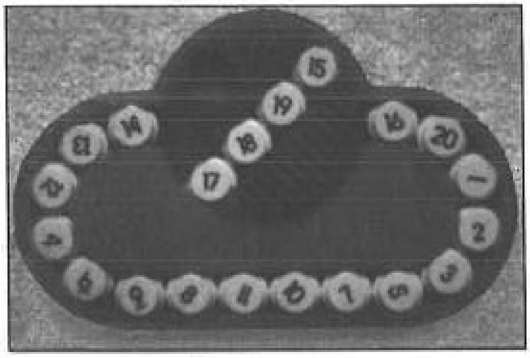
شکل ۶۵

بیست‌وجهی منتظم چند یال، چند رأس و چند محور تقارن دارد؟

قرن بیستم در نیمه‌شب ۳۱ دسامبر سال ۲۰۰۰ میلادی به‌پایان رسیده است.

در بازی بیست سؤالی باید اشیا را با پرسیدن ۲۰ سؤال که جوابشان فقط بله یا خیر است شناسایی کنیم. آیا تابه‌حال برای کشف یک عدد، ۲۰ سؤالی بازی کرده‌اید؟ یکی از بازیکنان عددی را روی کاغذ می‌نویسد و بازیکن دیگر سعی می‌کند با سؤالات خود این عدد را کشف کند. سؤالاتی نظیر آیا این عدد زوج است؟ یا آیا از ۱۰۰۰ بزرگتر است؟ یا آیا در آن رقم ۶ به‌کار رفته است؟ اگر با این قانون که ایدهٔ تمام سؤالات باید متفاوت باشد، بازی کنید، از یک بازی مشکل و هیجان‌انگیز لذت خواهید برد.

در بازی زیر باید اعداد یک تا بیست را به‌ترتیب ردیف کرد. می‌توان هر چهار عدد متوالی را با ترتیب برعکس درنظرگرفت. اگر به‌جای چهار عدد، ترتیب دو عدد را در هر مرحله جابه‌جا کنیم، آیا بازی سخت‌تر می‌شود یا آسانتر؟ اگر سه عدد جابه‌جا شوند چطور؟



شکل ۶۶

هر عدد به‌شکل $۴k$ را، که در آن k عددی فرد است، می‌توان به صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت: $۲۰ = ۶^۲ - ۴^۲$.

بیست گوی را در الگویی مکعب مستطیلی به ابعاد $۵ \times ۲ \times ۲$ قرار دهید. به چند روش می‌توان این الگو را به چهار جزء قابل انطباق افراز کرد؟

مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۲۰ که از خودش کوچکترند اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱۰ هستند. مجموع این مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۰ از دو برابر آن بزرگتر است. اعدادی که این ویژگی را دارند فراوانترند یا اعدادی که این ویژگی را ندارند؟

این مطلب را در مورد اعداد کوچکتر از ۲۰۰ بررسی کنید. آیا تعداد اعداد طبیعی مانند n که مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچکتر از خودشان برابر با $۲n$ است نامتناهی است؟

$= ۳ \times ۷$

$= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$ (عددی مثلثی)

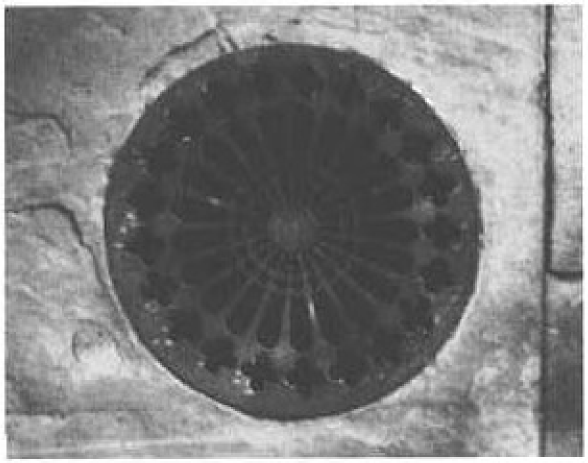
۲۱ از اعداد فیبوناچی است. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$U_n = \left[\frac{\Phi^n}{\sqrt{۵}} + \frac{۱}{۲}\right], \qquad n \geq ۱$$

$$U_{n+۱} = \left[\Phi U_n + \frac{۱}{۲}\right], \qquad n \geq ۲$$

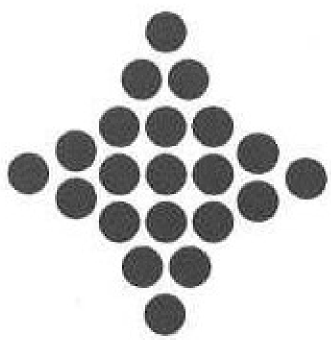
که در آنها $\Phi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

قرن ۲۱ در اول ژانویهٔ سال ۲۰۰۱ روز دوشنبه آغاز شده است.



شکل ۶۷

۲۱ عددی **ستاره‌ای** است. اعداد ستاره‌ای با یک مربع که روی هر ضلع آن یک مثلث بنا شده است تشکیل می‌شوند. ۲۱ سومین عدد ستاره‌ای است. کوچکترین عدد ستاره‌ای بزرگتر از ۱۰۰ چه عددی است؟



شکل ۶۸

۲۱ تفاضل دو مربع کامل است: $۲۵ - ۴ = ۲۱$، و با استفاده از این مطلب می‌توان این عدد را تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} ۲۱ &= ۵^۲ - ۲^۲ \\ &= (۵ - ۲)(۵ + ۲) \\ &= ۳ \times ۷ \end{aligned}$$

۲۱ فقط یک نمایش به‌صورت مجموع حداکثر چهار عدد مربع کامل دارد:

$$۲۱ = ۴^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$

آیا ۲۱ را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت؟ آیا این مطلب به مقسوم‌علیه‌های اول ۲۱ ربطی دارد؟

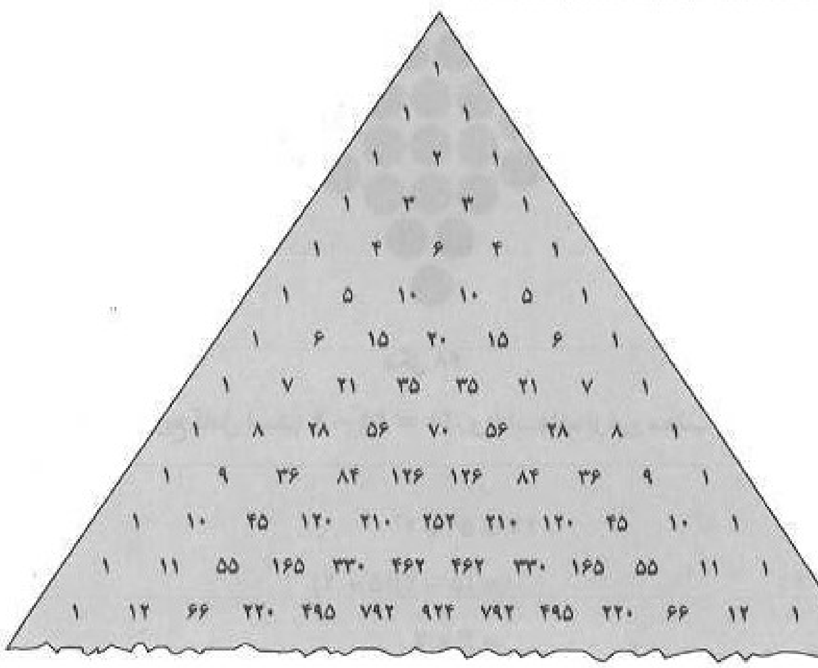
مثلث خیام ـ پاسکال

مثلث خیام ـ پاسکال یک الگوی عددی است که به‌سادگی ساخته می‌شود و کاربردهای فراوانی دارد. این مثلث را می‌توان برای چندین الگوی محاسباتی به‌کار برد. هر عدد، مجموع دو عدد بالای سر خودش است و دو سر هر ردیف به عدد ۱ ختم می‌شود.

مثلاً اگر بخواهیم از ۷ شیرینی دوتا را انتخاب کنیم و بخوریم، می‌توان دید که ۲۱ انتخاب متفاوت وجود دارد و اگر بخواهیم ۳ تا از آنها را انتخاب کنیم ۳۵ حالت ممکن است. همین‌طور اگر بخواهیم ۵ تا از ۷ شیرینی را انتخاب کنیم ۲۱ انتخاب داریم، چون تنها کافی است دو تا را انتخاب کنیم و کنار بگذاریم. اگر بخواهیم ۶ تا از ۷ شیرینی را انتخاب کنیم، ۷ انتخاب داریم که همان تعداد انتخاب ۱ شیرینی از ۷ شیرینی است. تعداد انتخابهای ۴ شیرینی از ۷ شیرینی هم به‌روش بالا قابل انطباق بر تعداد انتخابهای ۳ شیرینی از ۷ شیرینی است. اعداد

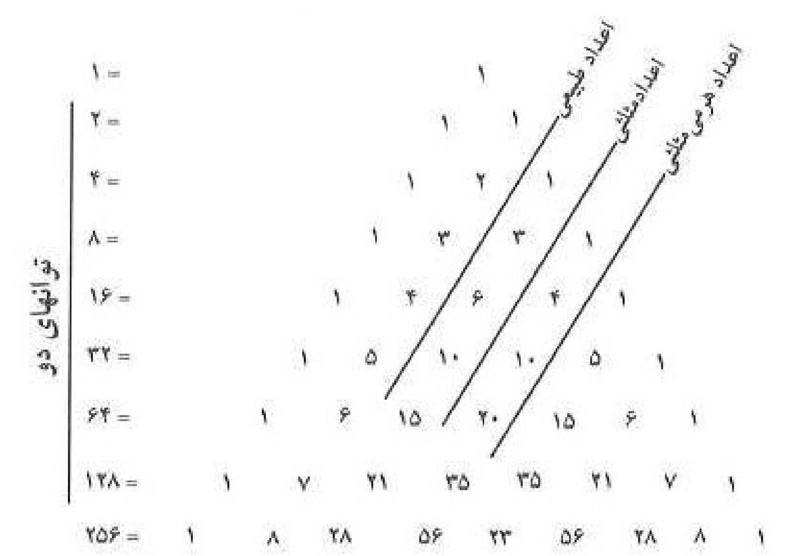
۷، ۲۱، ۳۵، ۳۵، ۲۱، ۷

یکی از ردیفهای مثلث خیام ـ پاسکال را تشکیل می‌دهند. پس این مثلث را می‌توان برای محاسبهٔ تعداد انتخابهای چند شیء از میان چندین شیء به‌کار برد.



مثلاً اگر شما مربی یک تیم ورزشی باشید و بخواهید از ۱۰ بازیکن ۷ بازیکن را انتخاب کنید به چند روش می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟ باید به‌دنبال ردیفی بگردید که با «۱، ۱۰» شروع می‌شود. خواهید دید که

۱۲۰ روش برای انتخاب وجود دارد. به الگوهای زیر در مثلث خیام پاسکال توجه کنید.



$$۲ \times ۱۱ =$$
$$۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ =$$
$$۴ + ۵ + ۶ + ۷ =$$

پنج شش‌ضلعی منتظم را به ۲۲ روش می‌توان کنار هم قرار داد.

۲۲ تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی است:

$$\frac{۷(۷ + ۱)}{۲} - \frac{۳(۳ + ۱)}{۲} = ۲۲$$

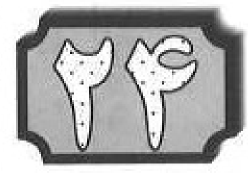
طولانیترین کلمه در زبان اسپانیایی ۲۲ حرف دارد: Superextraordinarisimo، به معنای فوق‌العاده!

$= ۲۳ \times ۱$ (عددی اول)

اگر ۲۳ دانش‌آموز در یک کلاس باشند، احتمال اینکه دو تا از آنها در یک روز از ماه متولد شده باشند بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ است. یعنی اینکه در بیشتر از نصف کلاسهای کشورمان، که معمولاً بیش از ۲۳ دانش‌آموز

دارند، دو نفر با روز تولد یکسان پیدا می‌شوند.

$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۳^۲ = ۲۳$. در نمایش ۲۳ به‌صورت مجموع چهار مربع کامل، عدد تکراری به‌کار رفته است. اعدادی را در نظر بگیرید که از عددی طبیعی مانند n کوچکترند و در نمایش آنها به حداکثر چهار مربع کامل، حتماً باید عددی تکراری استفاده کنیم. آیا تعداد این اعداد بیش از $\frac{n}{۲}$ است؟ این مطلب را در مورد اعداد کوچکتر از ۲۰۰ آزمایش کنید.



$$۲^۳ \times ۳ =$$
$$۲ \times ۱۲ =$$
$$۳ \times ۸ =$$
$$۴ \times ۶ =$$
$$= ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = !۴$$ (فاکتوریل یک عدد)
$$۳ + ۵ + ۷ + ۹ =$$

$۲۵ - ۱ = ۲۴$ و در نتیجه $۲۴ = ۵^۲ - ۱^۲ = (۵ - ۱)(۵ + ۱)$.

طلای ۲۴ عیار همان طلای خالص است. طلای ۱۲ عیار یعنی طلای ۵۰٪ خالص و طلای ۱۸ عیار یعنی طلای ۷۵٪ خالص. امروزه خلوص اشیایی که از طلا ساخته می‌شوند، با عددی مشخص می‌شود:

۳۷۵ یعنی طلای ۹ عیار؛

۵۸۰ یعنی طلای ۱۴ عیار؛

۷۵۰ یعنی طلای ۱۸ عیار؛

۹۱۵ یعنی طلای ۲۲ عیار.

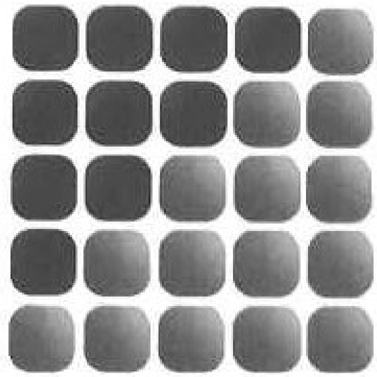
آیا می‌توانید بگویید چرا این اعداد سه‌رقمی انتخاب شده‌اند؟

۲۴ کوچکترین عددی است که ۸ مقسوم‌علیه مثبت دارد. مقسوم‌علیه‌های مثبت ۲۴ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ هستند.

$$= ۵^۲$$ (مربعی کامل)
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ =$$
$$۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ =$$
$$۳^۲ + ۴^۲ =$$

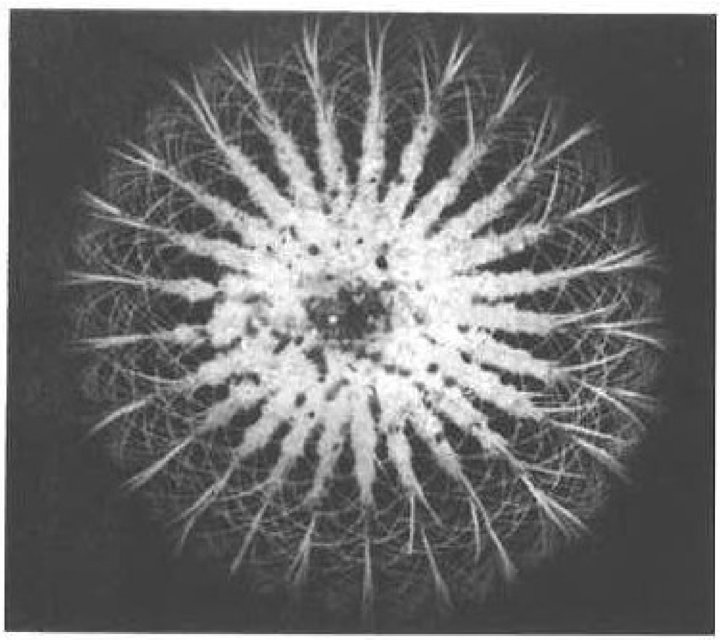
۲۵ کوچکترین مربع کامل است که مجموع دو مربع کامل کوچکتر از خودش است: $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$. بنابر عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلثی با ابعاد ۳، ۴ و ۵ مثلثی قائم‌الزاویه است.

هر مربع کامل را می‌توان به‌شکل مجموع دو عدد مثلثی نوشت. در شکل زیر این دو عدد مثلثی با دو رنگ متمایز نمایش داده شده‌اند.

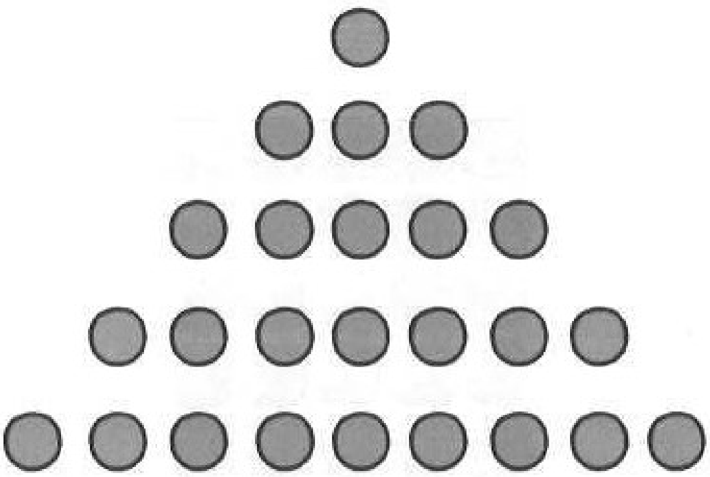


شکل ۶۹

در تلویزیون تصاویر با سرعت ۲۵ تصویر در ثانیه نمایش داده می‌شوند. در یک ساعت ۹۰۰۰۰ تصویر در تلویزیون نمایش داده می‌شود. در سینما معمولاً در هر ثانیه ۲۴ تصویر نمایش داده می‌شود. البته هر تصویر دو بار ظاهر می‌شود تا چشم تماشاگران گسستگی تصاویر را کمتر احساس کند.



شکل ۷۰ ۲۵ شعاع از مرکز این کاکتوس بزرگ خارج شده‌اند.



شکل ۷۱

با اعداد ۱ تا ۲۵ مربع وفقی ۵ × ۵ بسازید.

۲۵ مجموع اولین پنج عدد فرد است.

$$۲ \times ۱۳ =$$

$$۵ + ۶ + ۷ + ۸ =$$

در زبان انگلیسی ۲۶ حرف به‌کار برده می‌شود و در بین آنها فقط دو حرف i و j نقطه دارند.

در زبان ایتالیایی بلندترین کلمه ۲۶ حرف دارد: Precipitevolissimevolmente، به‌معنی هرچه زودتر.

مجموع تعداد یالها، رأسها و وجه‌های مکعب ۲۶ است. آیا چندوجهیی با ۲۶ وجه می‌شناسید؟ آیا ارتباطی بین این چندوجهی و مکعب می‌بینید؟

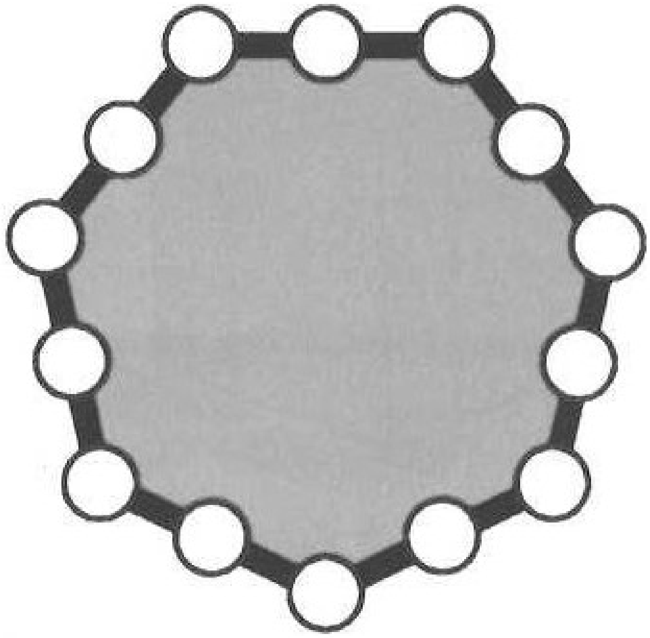
آیا ۲۶ کوچکترین عددی است که به سه روش می‌توان آن را به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت؟

$$۲۶ = ۵^۲ + ۱^۲$$

$$۲۶ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۱^۲$$

$$۲۶ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۳^۲$$

اعداد ۱ تا ۱۴ را چنان در دایره‌های شکل صفحهٔ بعد قرار دهید که مجموع اعداد هر ضلع ۲۶ شود.



شکل ۷۲

۲۷

= $۳^۳$ (مکعبی کامل)

= ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷

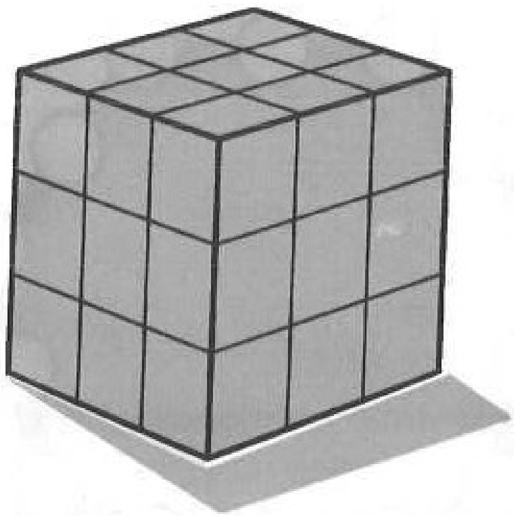
می‌گویند افلاطون ساعتها با شگفتی به این تساوی نگاه می‌کرده است: $۶^۳ = ۵^۳ + ۴^۳ + ۳^۳$.

چگونه می‌توان با چهار وزنه اشیایی به وزنهای ۱ کیلوگرم، ۲ کیلوگرم، ... و ۲۷ کیلوگرم را با یک ترازوی تعادلی وزن کرد؟

مکعب ۳ × ۳ × ۳ شکل ۷۳ از ۲۷ مکعب کوچکتر تشکیل شده است. سطح خارجی آن را قرمز کرده‌ایم. چند مکعب کوچک وجود دارد که هیچ‌یک از وجه‌های آنها قرمز نشده است؟ چند مکعب وجود دارد که فقط یک وجه آنها رنگ شده است؟ چند مکعب وجود دارد که فقط دو وجه آنها رنگ شده است؟ چند مکعب وجود دارد که فقط سه وجه آنها رنگ شده است؟ آیا بین این اعداد و وجه‌ها، یالها و رأسهای مکعب ارتباطی می‌بینید؟

۲۷ تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی است:

$$\frac{۷(۷+۱)}{۲} - \frac{۱(۱+۱)}{۲} = ۲۷$$



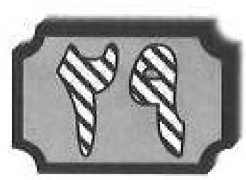
شکل ۷۳

معادلهٔ $x^۳ - y^۲ = k$ را معادلهٔ مُردل می‌نامند. اگر $k = ۱$ این معادله فقط یک جواب دارد: $۳^۲ - ۲^۳ = ۱$ و اگر $k = -۲$، یک جواب این معادله $۳^۳ - ۵^۲ = ۲$ است. آیا می‌توانید همهٔ جوابهای $x^۳ - y^۲ = ۲$ را پیدا کنید؟

آیا می‌توان اعدادی طبیعی مانند x، y و z را پیدا کرد که $x^۳ + y^۳ = z^۳$؟

$$۲^۲ \times ۷ =$$
$$۲ \times ۱۴ =$$
$$۴ \times ۷ =$$
$$= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷$$ (عددی مثلثی)
$$= ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴$$ (عددی کامل)

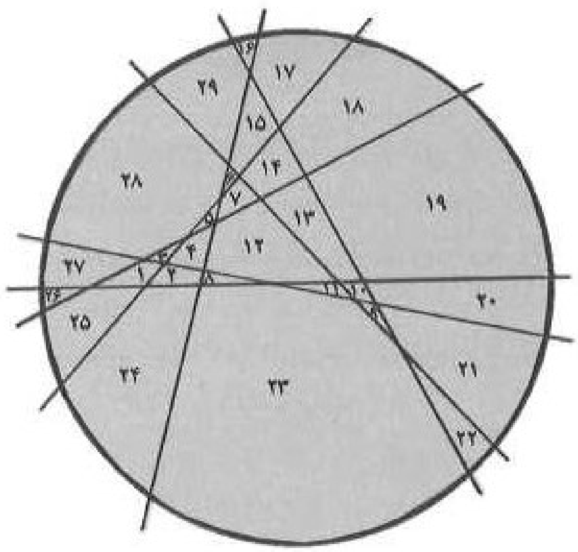
۲۸ عددی کامل است، زیرا مجموع مقسوم‌علیه‌های آن دو برابر خود ۲۸ می‌شود. اولین پنج عدد کامل ۶، ۲۸، ۴۹۶، ۸۱۲۸ و ۳۳۵۵۰۳۳۶ هستند. تمام اعداد کامل شناخته شده به‌شکل $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ هستند که در آن $۲^n - ۱$ یک عدد اول مرسن است.



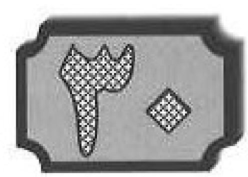
$$= ۱ \times ۲۹$$ (عددی اول)

۲۹ از اعداد لوکاست.

تمام ماهها در تقویم اسلامی و یهودی ۲۹ روزه یا ۳۰ روزه هستند.
پیتزا را با ۷ برش مستقیم می‌توان حداکثر به ۲۹ قسمت تقسیم کرد.
با n برش پیتزا را حداکثر به چند قسمت می‌توان تقسیم کرد؟



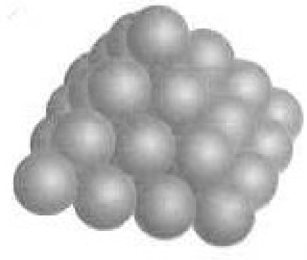
شکل ۷۴



۲ × ۳ × ۵ =
۲ × ۱۵ =
۳ × ۱۰ =
۵ × ۶ =
۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ =
= ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)
= ۱۶ + ۹ + ۴ + ۱ (عددی هرمی مربعی)

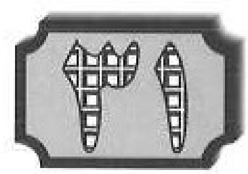
دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم هر دو ۳۰ یال دارند.

اگر مدت یک ماه را دقیق حساب کنیم خواهیم دید که یک ماه حدوداً ۲۹/۵۳ روز طول می‌کشد. برای اینکه هر ماه مضرب صحیحی از یک روز باشد، در هر تقویم تمهیداتی اندیشیده شده است. تقویم مسلمانان بر حرکت ماه بنا شده است. یک سال از دوازده ماه ۲۹ روزه یا ۳۰ روزه تشکیل شده است که روی هم ۳۵۴ روز است. در این تقویم ماهها بین فصلها گردش می‌کند. تقویم یهودی نیز از ماههای ۲۹



شکل ۷۵

روزه یا ۳۰ روزه تشکیل شده است، اما هر سال ممکن است ۱۲ ماه یا ۱۳ ماه داشته باشد. با این کار گردش ماهها بین فصلها از بین می‌رود. در تقویم غربی که براساس تقویم رومی بنا شده است، هر ماه ممکن است ۲۸ روزه ، ۲۹ روزه، ۳۰ روزه یا ۳۱ روزه باشد. همان‌طور که گفته شد، اگر از طریق حرکت خورشید طول ماه را حساب کنیم حدوداً ۲۹٫۵۳ روز طول می‌کشد. اما اگر زمانی را که ماه به‌دور زمین می‌چرخد حساب کنیم، تقریباً ۲۷٫۳۲ روز به‌دست می‌آید.



$= 31 \times 1$ (عددی اول)

$= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$= 5^2 + 5^1 + 5^0$

$= 2^5 - 1$ (عدد اول مرسن)

الفبای روسی ۳۱ حرف دارد.

نمایش ۳۱ در مبنای ۲، به‌شکل ۱۱۱۱۱ است. در بین اعضای دنبالهٔ

۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, . . .

در مبنای ۲، چه اعداد اول دیگری می‌شناسید؟

$= 2^5$ (توان پنجم کامل)

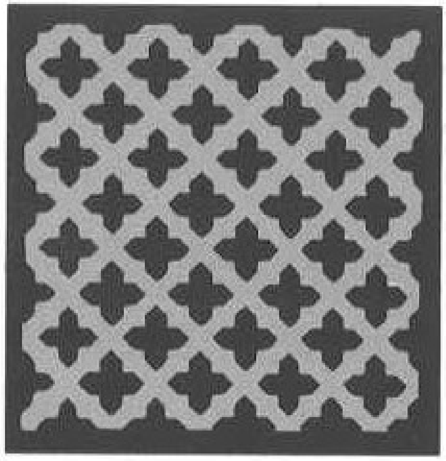
$= 16 \times 2$

$= 8 \times 4$

$= 11 + 9 + 7 + 5$

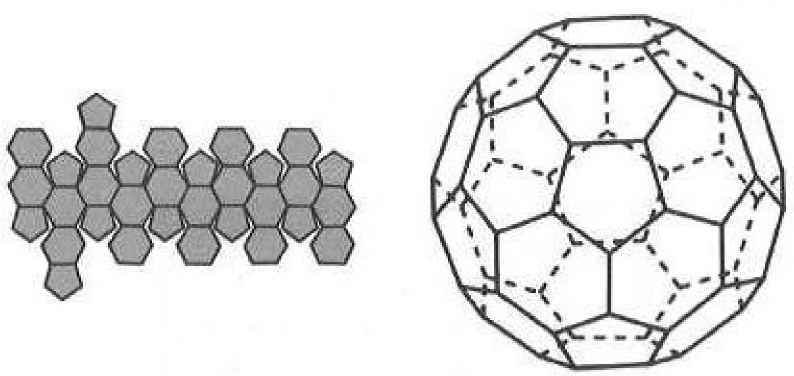
32° فارنهایت دمای ذوب یخ است.

در الگوی زیر ۳۲ خانه دیده می‌شود. اگر یک درجه الگو را بزرگتر کنیم چند خانه در آن دیده می‌شود؟



شکل ۷۶

توپ چهل‌تکه از اشتراک یک بیست‌وجهی منتظم و یک دوازده‌وجهی منتظم به‌دست می‌آید. این چندوجهی همگن برخلاف نامش ۳۲ وجه دارد. آیا می‌دانید این شکل چند رأس، چند یال و چند محورتقارن دارد؟



شکل ۷۷

مولکول فولرن ($C_{۶۰}$) شکل جدیدی از کربن است که در دههٔ ۸۰ کشف شده است. اتمهای کربن در این مولکول مانند الگوی توپ چهل‌تکه قرارگرفته‌اند. این مولکول کروی کربن سیاه رنگ است و خواص بسیار شگفت‌انگیزی دارد. چون اتمها و مولکولهای دیگر می‌توانند درون این مولکول که حالت قفس دارد گیر کنند.

$۶^۲ - ۲^۲ = ۳۲ = ۲^۵$. تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی

$$x^۵ + x^۲ = y^۲$$

را پیدا کنید.

۳۳

$۳ \times ۱۱ =$

$۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ =$

$۹ + ۱۱ + ۱۳ =$

$۱! + ۲! + ۳! + ۴! =$

$$۵^۲ + ۳^۲ - ۱^۲ = ۵^۲ + ۲^۳ = ۲^۵ + ۱ = ۳۳ = ۷^۲ - ۴^۲$$

۳۳ تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی است:

$$\frac{۸(۸+۱)}{۲} - \frac{۲(۲+۱)}{۲} = ۳۳$$

می‌توان عدد ۳۳ را با استفاده از اتحادها تجزیه کرد:

$$۳۳ = ۷^۲ - ۴^۲ = (۷-۴)(۷+۴) = ۳ \times ۱۱$$

۳۴

$۲ \times ۱۷ =$

$۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ =$

۳۴ از اعداد فیبوناتچی است:

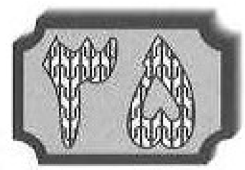
$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۹, ۱۳, ۲۱, ۳۴, \ldots$$

ثابت کنید مجموع اعداد هر سطر و هر ستون هر مربع وفقی ۴×۴ برابر با ۳۴ است.

۱۵	۱۰	۳	۶
۴	۵	۱۶	۹
۱۴	۱۱	۲	۷
۱	۸	۱۳	۱۲

شکل ۷۸

مثال قبل یک مربع وفقی بخصوص است که نه‌تنها مجموع اعداد سطرها و ستونها و قطرهای اصلی آن برابر عددی ثابت است، بلکه مجموع اعداد قطرهای شکسته نیز برابر ۳۴ است، مثلاً ۷ + ۱۳ + ۱۰ + ۴. حتی مجموع چهار سلول که در چهارگوشهٔ مربع واقع‌اند، برابر ۳۴ است.

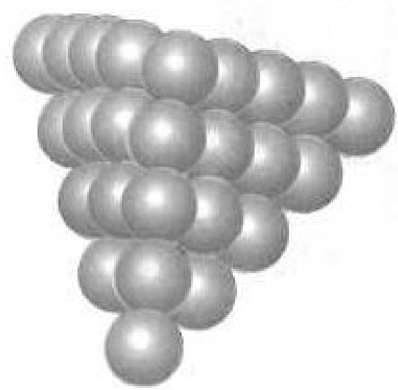


$۵ \times ۷ =$

$= ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

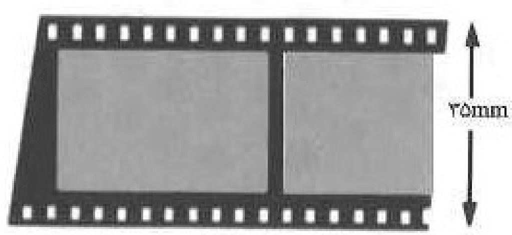
$= ۱۵ + ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱$ (عددی هرمی مثلثی)

۳۵ مجموع اولین پنج عدد مثلثی است.



شکل ۷۹

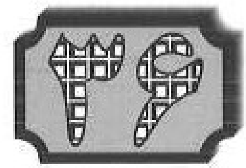
مشهورترین اندازهٔ فیلم برای دوربینهای مدرن اندازهٔ ۳۵ میلیمتری است.



شکل ۸۰

$$۶^۲ - ۱ = ۳۵ = ۲^۳ + ۳^۳$$

$$۳۵ = ۶^۲ - ۱^۲ = (۶ - ۱)(۶ + ۱) = ۵ \times ۷$$



$= ۳^۲ \times ۲^۲$ (مربعی کامل)

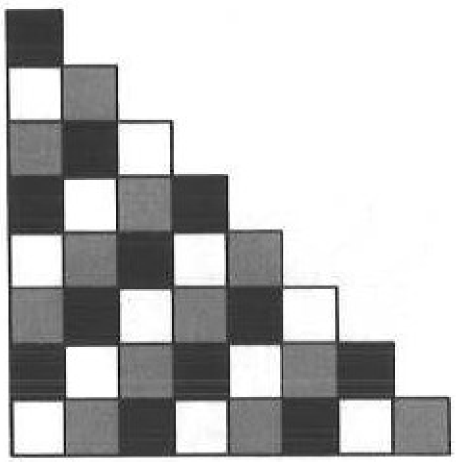
$= ۲ \times ۱۸$

$= ۳ \times ۱۲$

$= ۴ \times ۹$

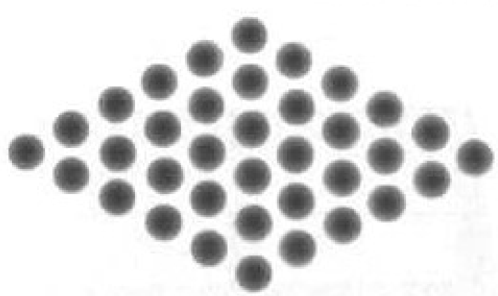
$= ۶ \times ۶$

$= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸$



شکل ۸۱

اعداد زیادی یافت نمی‌شوند که هم عددی مثلثی باشند و هم مربع کامل. اولین چهار عدد با این خاصیت ۱، ۳۶، ۱۲۲۵ و ۴۱۶۱۶ هستند.



شکل ۸۲

۳۶ کوچکترین عددی است که ۹ مقسوم‌علیه مثبت دارد. این مقسوم‌علیه‌ها ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸ و ۳۶ هستند.

$۶^۲ = ۳۶ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳$.

مجموع سه مکعب

در سال ۱۸۹۵ ثابت شد که هر عدد صحیح را می‌توان به‌شکل مجموع ۹ عدد صحیح مکعبی نامنفی نمایش داد. از طرف دیگر ۳۲ برابر با مجموع ۸ عدد صحیح مکعبی نامنفی نیست. همچنین می‌دانیم هر عدد صحیح به‌اندازهٔ کافی بزرگ مجموع ۷ مکعب نامنفی است. اگر مجاز باشیم از مکعبهای منفی هم استفاده کنیم، می‌توان دید که هر عدد صحیح مجموع ۵ عدد صحیح مکعبی است. از طرف دیگر اعداد به‌شکل $۹m \pm ۴$ مجموع سه مکعب نیستند. پس سه مسألهٔ (هنوز حل‌نشده) مطرح می‌شوند.

مسألهٔ ۱. آیا هر عدد صحیح مجموع ۴ عدد صحیح مکعبی است؟

مسألهٔ ۲. آیا هر عدد صحیح که به شکل $۹m \pm ۴$ نباشد مجموع سه عدد مکعبی است؟

مسألهٔ ۳. آیا الگوریتمی متناهی وجود دارد که تشخیص بدهد عدد داده شده مجموع ۳ مکعب است یا نه؟

ثابت شده است که اعدادی را که به‌شکل $۱۸m \pm ۴$ نیستند می‌توان به‌صورت مجموع چهار مکعب نوشت. اگر به مسألهٔ دوم پاسخ مثبت داده شود، مسأله‌های اول و سوم نیز به‌راحتی جواب می‌گیرند.

(جوابهای صحیح مینیمال $a^۳ + b^۳ + c^۳ = d$، $d \neq ۹m + ۴$ و $۰ \leqslant d \leqslant ۲۹$ با ترتیب قاموسی.)

a	۰	۰	۰	۱	−۱	۰	۰	۰	۱	−۲	۷	−۱
b	۰	۰	۱	۱	−۱	−۱	۰	۱	۱	−۲	۱۰	۲
c	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۲	۳	−۱۱	۲
d	۰	۱	۲	۳	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۵
a	۰	۱	−۱	۰	۱	−۱۱	۲	−۱	۰	۰	۰	۱
b	۲	۲	−۲	−۲	−۲	−۱۴	۲	−۱	−۱	۰	۱	۱
c	۲	۲	۳	۳	−۳	۱۶	۲	۳	۳	۳	۳	۳
d	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹

(جوابهای صحیح معادلهٔ $a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۱$، $|c| \leq |b| < |a| \leq ۳۸۲۰۰$، که نسبت به a مرتب شده‌اند.)

a	۱	۹	−۱۲	−۱۰۳	۱۴۴	−۱۵۰	۱۷۲	−۲۴۹	−۲۹۵	۵۰۵	۵۷۷	۷۲۹	−۷۳۸	۹۰۴	۱۰۱۰
b	۰	−۸	۱۰	۹۴	−۱۳۳	۱۴۴	−۱۳۸	۲۳۵	۴۳۸	−۴۲۶	−۴۸۶	−۷۲۰	۷۲۹	−۸۲۳	−۸۱۲
c	۰	−۶	۹	۶۴	−۷۱	۷۳	−۱۳۵	۱۳۵	۳۴۴	−۳۷۲	۴۲۶	−۲۴۲	۲۴۴	−۵۶۶	−۷۹۱

a	۱۲۱۰	−۱۵۴۴	−۱۸۵۲	−۱۹۸۸	۲۳۰۴	−۲۳۱۶	۳۰۹۷	−۴۱۸۴	۳۷۵۳	−۵۲۶۲	۵۶۲۵	−۵۶۴۰
b	−۱۲۰۷	۱۵۳۷	۱۷۳۸	۱۸۹۷	−۲۲۹۲	۲۳۰۴	−۲۸۲۰	۳۵۱۸	−۳۲۳۰	۴۵۲۸	−۵۶۱۰	۵۶۲۵
c	−۲۳۶	۳۶۸	۱۰۳۳	۱۰۱۰	−۵۷۵	۵۷۷	−۱۹۳۸	۳۰۹۷	−۲۶۷۶	۳۷۵۳	−۱۱۲۴	۱۱۲۶

a	۶۰۸۱	۶۷۵۶	−۸۹۵۷	۸۷۰۳	−۹۹۵۳	۱۱۶۶۴	−۱۱۶۸۲	۱۲۸۸۴	۱۶۸۴۹	۱۸۶۴۹	۲۱۶۰۹
b	−۵۹۸۴	−۶۷۰۲	۸۳۴۳	−۸۶۷۵	۹۷۳۵	−۱۱۶۴۶	۱۱۶۶۴	−۱۱۹۰۳	−۱۶۸۰۶	−۱۷۳۲۸	−۲۱۵۸۸
c	−۲۱۹۶	−۱۹۴۳	۴۰۸۳	−۱۸۵۱	۳۹۸۷	−۱۹۴۳	۱۹۴۵	−۷۶۷۶	−۳۳۱۸	−۱۰۸۶۶	۳۰۸۶

a	−۲۱۶۳۰	۲۴۹۸۷	۲۹۷۳۷	−۳۱۶۱۵	−۳۸۵۹۹	−۳۶۶۲۰	۳۶۸۶۴	−۳۶۸۸۸	۳۷۵۱۳	۳۸۱۴۳
b	۲۱۶۰۹	−۲۴۹۶۵	−۲۷۶۳۰	۳۱۱۸۰	۳۳۴۱۲	۳۵۴۴۲	−۳۶۸۴۰	۳۶۸۶۴	−۳۱۲۱۲	−۳۷۸۸۷
c	۳۰۸۸	−۳۴۵۳	−۱۷۳۲۸	۱۰۸۷۹	۲۷۲۳۸	۱۶۶۱۷	−۴۶۰۷	۴۶۰۹	−۲۸۱۸۲	−۱۰۲۳۰

(جوابهای صحیح نسبت به هم اول $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۸$، $|c|\leq|b|<|a|\leq ۲۵۰۰۰$، که نسبت به $|c|$ مرتب شده‌اند.)

a	−۱۶	−۳۴	۴۱	−۸۹	−۱۲۷	−۱۵۰	−۳۸۵	−۴۶۶	−۸۷۳	۹۹۵	−۱۳۱۲	−۱۹۸۵
b	۱۵	۳۳	−۴۰	۸۶	۱۰۶	۱۴۱	۳۴۵	۴۵۹	۸۲۵	−۹۴۷	۱۲۹۳	۱۸۰۸
c	۹	۱۵	−۱۷	۴۱	۹۵	۸۳	۲۵۲	۱۶۵	۲۷۰	−۵۱۴	۴۵۶	۱۲۴۱

a	−۱۹۸۷	−۲۴۴۸	۲۸۴۰	۲۸۸۳	−۲۹۰۸	−۲۹۲۰	−۳۳۳۰	−۴۰۷۳	−۴۱۲۹	−۶۵۶۲	−۸۷۸۶
b	۱۷۴۰	۲۱۸۹	−۲۸۳۱	−۲۵۲۶	۲۶۷۱	۲۳۷۷	۲۹۷۹	۴۰۱۶	۳۹۶۶	۵۲۴۵	۷۱۶۳
c	۱۳۷۱	۱۶۱۱	−۶۰۱	−۱۹۸۷	۱۷۶۹	۲۲۵۵	۲۱۸۹	۱۴۰۹	۲۰۰۱	۵۱۷۱	۶۷۷۳

a	−۱۰۷۱۳	۱۱۸۵۲	−۱۳۸۱۳	۱۷۴۲۹	۱۸۴۱۴	۱۹۸۸۱	۲ − ۳۵۱	−۲۱۱۸۴	۲۳۱۴۵	−۲۳۳۹۹	۲۳۹۶۱
b	۱۰۲۸۹	−۱۰۳۰۳	۱۳۲۲۴	−۱۴۶۳۶	−۱۷۲۱۷	−۱۸۸۰۸	−۱۹۸۰۶	۲۰۸۸۳	−۲۱۰۷۶	۲۲۲۶۸	−۲۰۰۹۷
c	۵۱۹۶	−۸۲۹۷	۶۸۹۱	−۱۲۹۲۵	−۱۰۴۴۷	−۱۰۶۴۱	−۸۷۷۰۳	۷۳۶۵	−۱۴۴۸۱	۱۲۰۹۵	−۱۷۸۰۰

(جوابهای صحیح $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=d$، $|c|\leq|b|<|a|\leq ۹۹۹۹۹$ و $d=۳,۶,۷,۹$، ترتیب قاموسی نسبت به $(d,|a|)$.)

a	−۵	۶۵	۲۳۶	۶۴۴	−۶۰۳۵۵	−۱۰۵	−۱۶۹	۲۱۷	−۱۱۳۲۹
b	۴	−۵۸	−۲۳۵	−۶۳۷	۶۰۲۴۸	۱۰۴	۱۶۸	−۲۱۶	۱۱۳۰۵
c	۴	−۴۳	−۵۵	−۲۰۵	۱۰۵۲۹	۳۴	۴۴	−۵۲	۲۰۹۷
d	۳	۶	۶	۶	۶	۷	۷	۹	۹

(جوابهای صحیح $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=d$، $|c|\leq|b|<|a|\leq ۹۹۹۹۹$ و $d=۱۰,۱۱,۱۲$، ترتیب قاموسی نسبت به $(d,|a|)$.)

a	۲	۴	−۱۷۱	۶۸۳	۳	۲۵۸	−۶۴۱	۸۴۳	۶۶۲۸	−۱۱
b	۱	−۳	۱۴۱	−۶۵۰	−۲	−۲۱۲	۶۱۹	−۶۹۵	−۵۹۷۳	۱۰
c	۱	−۳	۱۳۰	−۳۵۳	−۲	−۱۹۷	۲۹۷	−۶۴۱	−۴۲۷۴	۷
d	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲

۳۷

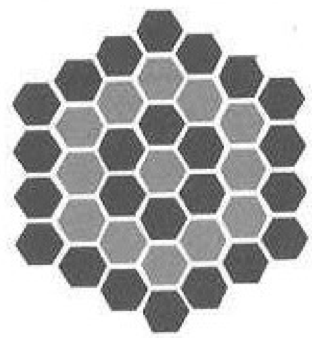
$= ۳۷ \times ۱$ (عددی اول)

۳۷ از اعداد شش‌ضلعی مرکزی است.

۳۷ درجه سلسیوس دمای طبیعی بدن انسان است.

$۱^{۲}+۶^{۲}=۳۷=۱۸^{۲}-۱۹^{۲}$ و در نتیجه

$$۱۹^{۲}=۱۸^{۲}+۶^{۲}+۱^{۲}$$



شکل ۸۳

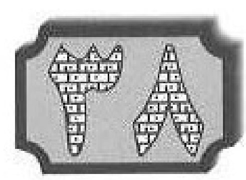
۳۷ تفاضل دو مکعب کامل است:

$$۳۷ = ۴^۳ - ۳^۳$$

$۱۹^۲ - ۱۸^۲ = ۳۷ = ۴^۳ - ۳^۳$. همهٔ جوابهای معادلهٔ دیوفانتی

$$(x + ۱)^۲ - x^۲ = (y + ۱)^۳ - y^۳$$

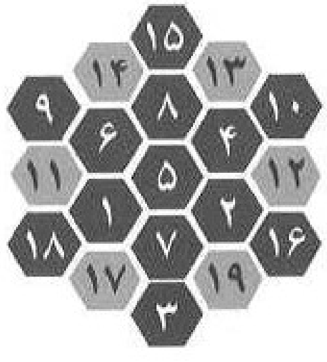
را پیدا کنید.



$= ۲ \times ۱۹$

$= ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در شش‌ضلعی وفقی زیر مجموع اعداد هر ردیف برابر ۳۸ است. این شکل ۱۵ ردیف دارد و اعداد ۱ تا ۱۹ درون این شش‌ضلعی وفقی قرار گرفته‌اند. این الگو را یکی از مسئولین راه‌آهن در آمریکا کشف



شکل ۸۴

کرده است. او به‌دنبال پیدا کردن یک شش‌ضلعی وفقی بود و تلاش خود را از سال ۱۹۱۰ آغاز کرد. او ۴۷ سال روی این مسئله فکر کرد تا اینکه بالاخره جواب آن را پیدا کرد. متأسفانه کاغذی را که محتوی جواب بود گم کرد و نتوانست دوباره مسئله را حل کند. در سال ۱۹۶۲ این کاغذ پیدا شد. او جواب خود را برای یک ریاضیدان فرستاد. ریاضیدانان ثابت کردند مثالی که این مسئول راه‌آهن کشف کرده است تنها شش‌ضلعی وفقی ممکن است.

$$۳ \times ۱۳ =$$

$$۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ =$$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$$۱۱ + ۱۳ + ۱۵ =$$

$۵^۲ - ۸^۲ = ۳۹ = ۱^۲ - ۲^۲ + ۶^۲$ و در نتیجه

$$۶^۲ + ۲^۲ + ۵^۲ = ۱^۲ + ۸^۲$$

۳۹ را فقط به یک صورت می‌توان به‌شکل مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت:

$$۳۹ = ۵^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$

$$۳^۳ + ۲^۳ + ۲^۲ = ۳(۳^۲ + ۲^۲) = ۳۹ = ۵^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$

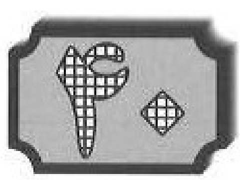
و در نتیجه

$$۳^۳ + ۲^۳ = ۵^۲ + ۳^۲ + ۱^۲$$

$$۳^۳ + ۲^۳ + ۲^۲ = ۳۹ = ۶^۲ + ۲^۲ - ۱$$

و در نتیجه

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ = ۶^۲$$



$$۲^۳ \times ۵ =$$

$$۲ \times ۲۰ =$$

$$۴ \times ۱۰ =$$

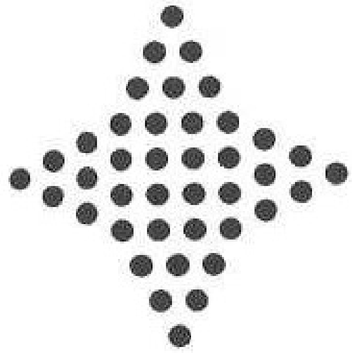
$$۵ \times ۸ =$$

$$۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ =$$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

۴۰ عددی ستاره‌ای است.

$۴۰ = ۶^۲ + ۲^۲$.

با ۴۰ گوی یک الگوی مکعب مستطیلی به ابعاد $۵ \times ۴ \times ۲$ بسازید. به چند روش می‌توان این الگو را به‌چهار قسمت قابل‌انطباق افراز کرد؟

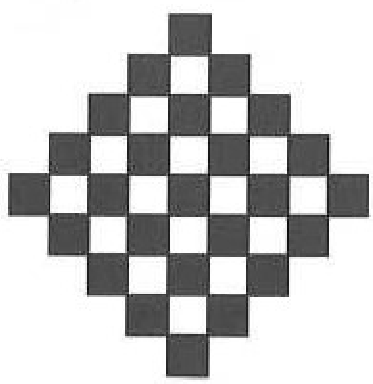


شکل ۸۵

$۱ \times ۴۱ =$ (عددی اول)

$۲۱^۲ - ۲۰^۲ = ۴۱ = ۵^۲ + ۴^۲$ و در نتیجه $۴^۲ + ۵^۲ + ۲۰^۲ = ۲۱^۲$

در الگوی زیر ۴۱ مربع وجود دارد. قطر این الگو نُه مربع است. اگر الگویی مانند این الگو با قطر ۱۹ مربع داشته باشیم، این الگو شامل چند مربع است؟



شکل ۸۶

می‌توان عدد ۴۱ را به سه روش به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت:

$$۴۱ = ۶^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$

$$۴۱ = ۵^۲ + ۴^۲$$

$$۴۱ = ۴^۲ + ۴^۲ + ۳^۲$$

۲ × ۳ × ۷ =

۲ × ۲۱ =

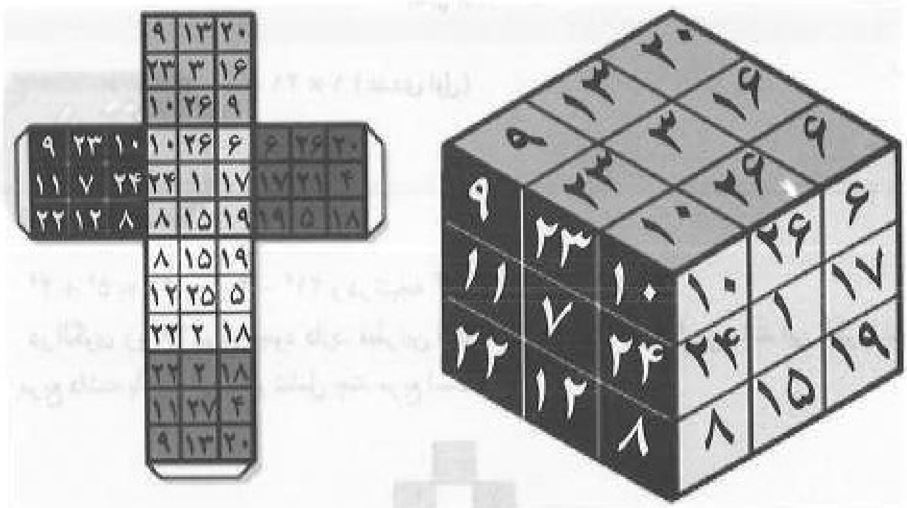
۳ × ۱۴ =

۶ × ۷ =

= ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

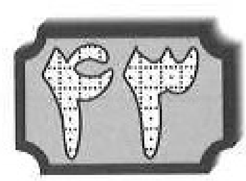
۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ =

در مکعب وفقی زیر همهٔ ۲۷ سطر و ستون شامل اعدادی با مجموع ثابت ۴۲ هستند. اعداد ۱ تا ۲۷ در این مکعب چیده شده‌اند. همین‌طور مجموع اعداد چهار قطر اصلی نیز برابر ۴۲ است.



شکل ۸۷

شمارهٔ خانه‌ای که در مرکز مکعب واقع است در شکل نمایش داده نشده است. آیا می‌توانید آن‌را حساب کنید؟



= ۴۳ × ۱ (عددی اول)

$۳^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ = ۴۳$. می‌توان عدد ۴۳ را به بیش از یک روش به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت:

$$۴۳ = ۵^۲ + ۴^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$$

$۲^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ = ۴۳$. آیا عددی طبیعی مانند n وجود دارد که هر عدد را بتوان به‌صورت مجموع

حداکثر n مکعب کامل نمایش داد؟

$۱^۲ - ۲^۲ + ۹^۲ - ۱۱^۲ = ۴۳ = ۲۱^۲ - ۲۲^۲$ و در نتیجه

$$۲۲^۲ + ۹^۲ + ۱^۲ = ۲۱^۲ + ۱۱^۲ + ۲^۲$$

عدد $\frac{۱}{۴۳}$ عددی گویاست. پس نمایش اعشاری آن متناوب است. آیا می‌توانید دورهٔ تناوب آن‌را حساب کنید؟

۴۴

$۲ \times ۲ \times ۱۱ =$

$۲ \times ۲۲ =$

$۴ \times ۱۱ =$

$= ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ =$

تعداد حالتهایی که ممکن است پنج نفر با پنج کلاه همگی کلاهی اشتباه برسر بگذارند، برابر ۴۴ است.

$۱^۲ - ۳^۲ + ۶^۲ = ۴۴ = ۱^۲ + ۳^۲ + ۳^۲ + ۵^۲$ و در نتیجه $۶^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲$.

۴۵

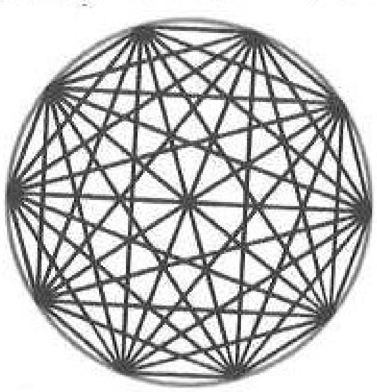
$۳^۲ \times ۵ =$

$۳ \times ۱۵ =$

$۵ \times ۹ =$

$= ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱$ (عددی مثلثی)

در الگوی زیر ۴۵ خط وجود دارد. در این الگو ۱۰ نقطه با فاصله‌های مساوی روی دایره قرار داده شده است. سپس تمام وترهایی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کنند، رسم شده است. اگر ۲۰ نقطه روی دایره انتخاب کنیم، به‌روش قبل چند خط این نقاط را به‌هم وصل می‌کنند؟



شکل ۸۸

$۲۳^۲ - ۲۲^۲ = ۴۵ = ۶^۲ + ۳^۲$ و در نتیجه $۲۳^۲ = ۲۲^۲ + ۶^۲ + ۳^۲$.

۴۶

$$۲ \times ۲۳ =$$

$۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در هر سلول انسان ۴۶ کروموزوم وجود دارد. از بین اینها ۲۳ تا از مادر و ۲۳ تا از پدر به‌ارث رسیده‌اند.

$۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲ - ۲^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ - ۲^۲ = ۴۶ = ۶^۲ + ۳^۲ + ۱^۲$ و در نتیجه

$$۵^۲ + ۴^۲ = ۶^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$

$۷^۲ - ۲^۲ + ۱^۲ = ۴۶ = ۱^۲ + ۳^۲ + ۶^۲$ و در نتیجه

$$۷^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ + ۲^۲$$

به‌ازای $β = ۲$، $۱۴ + ۴β + ۶β^۲ = ۴۶$. اتحاد

$$(۷ - ۱۶β - ۳β^۲)^۳ + (۱۴ + ۴β + ۶β^۲)^۳ = (۱۴ - ۴β + ۶β^۲)^۳ + (۷ + ۱۶β - ۳β^۲)^۳$$

را ثابت کنید و نتیجه بگیرید

$$۴۶^۳ - ۳۷^۳ = ۳۰^۳ + ۲۷^۳$$

۴۷

$۱ \times ۴۷ =$ (عددی اول)

۴۷ از اعداد لوکاست:

$$۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ۲۹, ۴۷, \ldots$$

میانگین دنبالهٔ فیبوناتچی و دنبالهٔ لوکا همان دنبالهٔ فیبوناتچی است:

دنبالهٔ فیبوناتچی

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, \ldots$$

دنبالهٔ لوکا

$$۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ۲۹, ۴۷, \ldots$$

دنبالهٔ میانگین

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, \ldots$$

دنباله‌ای پیدا کنید که میانگین این دنباله و دنبالهٔ فیبوناتچی، دنبالهٔ لوکا باشد.

بین ۱ تا ۱۰۰ تعداد اعداد اول برابر ۲۵ است. حدس می‌زنید ۴۷ جزء نیمهٔ اول باشد یا نیمهٔ دوم؟

۱

۲ ۳ ۴

۵ ۶ ۷ ۸ ۹

۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵

۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶

۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹

۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴

۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱

۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۰۱ ۱۰۲ ۱۰۳ ۱۰۴ ۱۰۵ ۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۸ ۱۰۹ ۱۱۰ ۱۱۱ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵ ۱۱۶ ۱۱۷ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱

۱۲۲ ۱۲۳ ۱۲۴ ۱۲۵ ۱۲۶ ۱۲۷ ۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۰ ۱۳۱ ۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۹ ۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴

۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ۱۵۰ ۱۵۱ ۱۵۲ ۱۵۳ ۱۵۴ ۱۵۵ ۱۵۶ ۱۵۷ ۱۵۸ ۱۵۹ ۱۶۰ ۱۶۱ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۱۶۵ ۱۶۶ ۱۶۷ ۱۶۸ ۱۶۹

۱۷۰ ۱۷۱ ۱۷۲ ۱۷۳ ۱۷۴ ۱۷۵ ۱۷۶ ۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۹ ۱۸۰ ۱۸۱ ۱۸۲ ۱۸۳ ۱۸۴ ۱۸۵ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۸۹ ۱۹۰ ۱۹۱ ۱۹۲ ۱۹۳ ۱۹۴ ۱۹۵ ۱۹۶

۱۹۷ ۱۹۸ ۱۹۹ ۲۰۰ ۲۰۱ ۲۰۲ ۲۰۳ ۲۰۴ ۲۰۵ ۲۰۶ ۲۰۷ ۲۰۸ ۲۰۹ ۲۱۰ ۲۱۱ ۲۱۲ ۲۱۳ ۲۱۴ ۲۱۵ ۲۱۶ ۲۱۷ ۲۱۸ ۲۱۹ ۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲ ۲۲۳ ۲۲۴ ۲۲۵

۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱ ۲۳۲ ۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷ ۲۳۸ ۲۳۹ ۲۴۰ ۲۴۱ ۲۴۲ ۲۴۳ ۲۴۴ ۲۴۵ ۲۴۶ ۲۴۷ ۲۴۸ ۲۴۹ ۲۵۰ ۲۵۱ ۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۴ ۲۵۵ ۲۵۶

۲۵۷ ۲۵۸ ۲۵۹ ۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۲ ۲۶۳ ۲۶۴ ۲۶۵ ۲۶۶ ۲۶۷ ۲۶۸ ۲۶۹ ۲۷۰ ۲۷۱ ۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۷۷ ۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۰ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۳ ۲۸۴ ۲۸۵ ۲۸۶ ۲۸۷ ۲۸۸ ۲۸۹

۲۹۰ ۲۹۱ ۲۹۲ ۲۹۳ ۲۹۴ ۲۹۵ ۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸ ۲۹۹ ۳۰۰ ۳۰۱ ۳۰۲ ۳۰۳ ۳۰۴ ۳۰۵ ۳۰۶ ۳۰۷ ۳۰۸ ۳۰۹ ۳۱۰ ۳۱۱ ۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۴ ۳۱۵ ۳۱۶ ۳۱۷ ۳۱۸ ۳۱۹ ۳۲۰ ۳۲۱ ۳۲۲ ۳۲۳ ۳۲۴

۳۲۵ ۳۲۶ ۳۲۷ ۳۲۸ ۳۲۹ ۳۳۰ ۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۳ ۳۳۴ ۳۳۵ ۳۳۶ ۳۳۷ ۳۳۸ ۳۳۹ ۳۴۰ ۳۴۱ ۳۴۲ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۴۵ ۳۴۶ ۳۴۷ ۳۴۸ ۳۴۹ ۳۵۰ ۳۵۱ ۳۵۲ ۳۵۳ ۳۵۴ ۳۵۵ ۳۵۶ ۳۵۷ ۳۵۸ ۳۵۹ ۳۶۰ ۳۶۱

۳۶۲ ۳۶۳ ۳۶۴ ۳۶۵ ۳۶۶ ۳۶۷ ۳۶۸ ۳۶۹ ۳۷۰ ۳۷۱ ۳۷۲ ۳۷۳ ۳۷۴ ۳۷۵ ۳۷۶ ۳۷۷ ۳۷۸ ۳۷۹ ۳۸۰ ۳۸۱ ۳۸۲ ۳۸۳ ۳۸۴ ۳۸۵ ۳۸۶ ۳۸۷ ۳۸۸ ۳۸۹ ۳۹۰ ۳۹۱ ۳۹۲ ۳۹۳ ۳۹۴ ۳۹۵ ۳۹۶ ۳۹۷ ۳۹۸ ۳۹۹ ۴۰۰

۴۰۱ ۴۰۲ ۴۰۳ ۴۰۴ ۴۰۵ ۴۰۶ ۴۰۷ ۴۰۸ ۴۰۹ ۴۱۰ ۴۱۱ ۴۱۲ ۴۱۳ ۴۱۴ ۴۱۵ ۴۱۶ ۴۱۷ ۴۱۸ ۴۱۹ ۴۲۰ ۴۲۱ ۴۲۲ ۴۲۳ ۴۲۴ ۴۲۵ ۴۲۶ ۴۲۷ ۴۲۸ ۴۲۹ ۴۳۰ ۴۳۱ ۴۳۲ ۴۳۳ ۴۳۴ ۴۳۵ ۴۳۶ ۴۳۷ ۴۳۸ ۴۳۹ ۴۴۰ ۴۴۱

۴۴۲ ۴۴۳ ۴۴۴ ۴۴۵ ۴۴۶ ۴۴۷ ۴۴۸ ۴۴۹ ۴۵۰ ۴۵۱ ۴۵۲ ۴۵۳ ۴۵۴ ۴۵۵ ۴۵۶ ۴۵۷ ۴۵۸ ۴۵۹ ۴۶۰ ۴۶۱ ۴۶۲ ۴۶۳ ۴۶۴ ۴۶۵ ۴۶۶ ۴۶۷ ۴۶۸ ۴۶۹ ۴۷۰ ۴۷۱ ۴۷۲ ۴۷۳ ۴۷۴ ۴۷۵ ۴۷۶ ۴۷۷ ۴۷۸ ۴۷۹ ۴۸۰ ۴۸۱ ۴۸۲ ۴۸۳ ۴۸۴

۴۸۵ ۴۸۶ ۴۸۷ ۴۸۸ ۴۸۹ ۴۹۰ ۴۹۱ ۴۹۲ ۴۹۳ ۴۹۴ ۴۹۵ ۴۹۶ ۴۹۷ ۴۹۸ ۴۹۹ ۵۰۰ ۵۰۱ ۵۰۲ ۵۰۳ ۵۰۴ ۵۰۵ ۵۰۶ ۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۱۰ ۵۱۱ ۵۱۲ ۵۱۳ ۵۱۴ ۵۱۵ ۵۱۶ ۵۱۷ ۵۱۸ ۵۱۹ ۵۲۰ ۵۲۱ ۵۲۲ ۵۲۳ ۵۲۴ ۵۲۵ ۵۲۶ ۵۲۷ ۵۲۸ ۵۲۹

۵۳۰ ۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰ ۵۴۱ ۵۴۲ ۵۴۳ ۵۴۴ ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷ ۵۴۸ ۵۴۹ ۵۵۰ ۵۵۱ ۵۵۲ ۵۵۳ ۵۵۴ ۵۵۵ ۵۵۶ ۵۵۷ ۵۵۸ ۵۵۹ ۵۶۰ ۵۶۱ ۵۶۲ ۵۶۳ ۵۶۴ ۵۶۵ ۵۶۶ ۵۶۷ ۵۶۸ ۵۶۹ ۵۷۰ ۵۷۱ ۵۷۲ ۵۷۳ ۵۷۴ ۵۷۵ ۵۷۶

۵۷۷ ۵۷۸ ۵۷۹ ۵۸۰ ۵۸۱ ۵۸۲ ۵۸۳ ۵۸۴ ۵۸۵ ۵۸۶ ۵۸۷ ۵۸۸ ۵۸۹ ۵۹۰ ۵۹۱ ۵۹۲ ۵۹۳ ۵۹۴ ۵۹۵ ۵۹۶ ۵۹۷ ۵۹۸ ۵۹۹ ۶۰۰ ۶۰۱ ۶۰۲ ۶۰۳ ۶۰۴ ۶۰۵ ۶۰۶ ۶۰۷ ۶۰۸ ۶۰۹ ۶۱۰ ۶۱۱ ۶۱۲ ۶۱۳ ۶۱۴ ۶۱۵ ۶۱۶ ۶۱۷ ۶۱۸ ۶۱۹ ۶۲۰ ۶۲۱ ۶۲۲ ۶۲۳ ۶۲۴ ۶۲۵

شکل ۸۹ چه الگوهایی در جدول اعداد اول مشاهده می‌کنید؟

۴۸

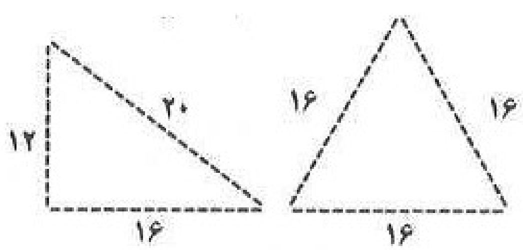
$$۲^{۴} \times ۳ =$$
$$۲ \times ۲۴ =$$
$$۳ \times ۱۶ =$$
$$۴ \times ۱۲ =$$
$$۶ \times ۸ =$$
$$۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ =$$

۴۸ کوچکترین عددی است که ۱۰ مقسوم‌علیه مثبت دارد. مقسوم‌علیه‌های ۴۸ اعداد

۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۴, ۴۸

هستند.

با ۴۸ چوب‌کبریت می‌توان به ۴۸ روش مختلف مثلث درست کرد. دو تا از این مثلثها در زیر دیده می‌شوند.



شکل ۹۰

به چند روش با ۱۱ چوب‌کبریت می‌توان مثلث درست کرد؟ با ۱۲ چوب‌کبریت چطور؟

۴۹

$$= ۷^{۲} \text{ (مربعی کامل)}$$
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ =$$

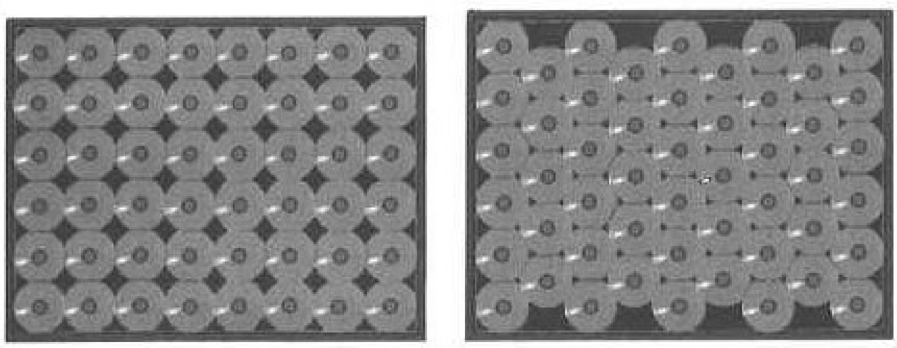
۴۹ یک مربع کامل است. عدد ۴۸ را وسط آن قرار دهید. عدد ۴۴۸۹ به‌دست می‌آید که خود مربع کامل است. دوباره عدد ۴۸ را وسط عدد جدید قرار دهید. عدد ۴۴۴۸۸۹ به‌دست می‌آید که دوباره مربع کامل است. این کار را دوباره تکرار کنید. عدد ۴۴۴۴۸۸۸۹ به‌دست می‌آید که بازهم مربع کامل است.

عدد $\frac{۱}{۴۹}$ برابر ... ۰٫۰۲۰۴۰۸۱۶۳۲۶۵ است. بعد از ۴۲ رقم دوباره الگوی عددی تکرار می‌شود.

$$۲ \times ۵^۲ =$$
$$۲ \times ۲۵ =$$
$$۵ \times ۱۰ =$$
$۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در جعبهٔ مستطیل‌شکل که شامل ۴۸ بطری است و این بطریها به شکل ۸×۶ در جعبه قرار گرفته‌اند، می‌توان ۵۰ بطری جا داد. البته به‌شرط اینکه از الگوی چیدن متفاوتی استفاده کنیم:

$$۵۰ = ۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲$$
$$۵۰ = ۶^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$$
$$۵۰ = ۵^۲ + ۵^۲$$



شکل ۹۱

$$۳ \times ۱۷ =$$
$۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)
$$۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + ۱۳ + ۱۶ =$$

۵۱ مجموع سه مربع کامل است:

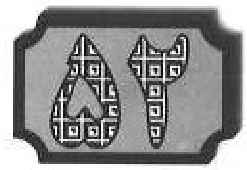
$$۵۱ = ۵^۲ + ۵^۲ + ۱^۲$$
$$۵۱^۲ = ۴۹^۲ + ۱۰^۲ + ۱۰^۲$$
$$۵۱^۳ = ۱۸۵^۲ + ۹۵^۲ + ۱۹۹^۲$$

اگر عددی مجموع سه مربع کامل باشد، مربع آن عدد و مکعب آن هر دو مجموع سه مربع کامل هستند:

$$(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲ = (x^۲ + y^۲ - z^۲)^۲ + (۲xz)^۲ + (۲yz)^۲$$

$$
\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2)^3 = {} & (x^3-3xz^2-2xy^2+xy^2)^2 \\
& + (y^3-yx^2-yz^2+4xyz)^2 \\
& + (z^3-3zx^2-2xy^2+zy^2)^2
\end{aligned}
$$

پیدا شدن چنین اتحادهایی بر اثر کوشش ریاضیدانان برای حل بعضی از معادله‌های دیوفانتی بوده است.



$2^2 \times 13 =$

$2 \times 26 =$

$4 \times 13 =$

(تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی) $3+4+5+6+7+8+9+10 =$

$10+12+14+16 =$

هر سال شمسی شامل ۵۲ هفته است.

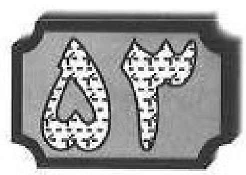
$$
\begin{aligned}
14^2 - 12^2 = 52 &= 4 \times (3^2+2^2) \\
&= 6^2 + 4^2
\end{aligned}
$$

و در نتیجه

$$14^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2$$

$48^2 + 20^2 = 52^2$. این تساوی با استفاده از اتحاد زیر به‌دست آمده است:

$$(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$$



(عددی اول) $1 \times 53 =$

ید از عناصر شیمیایی و عدد اتمی آن ۵۳ است. اگر ید را گرم کنیم کریستالهای بنفش تیرهٔ آن به‌صورت گازی ارغوانی‌رنگ متصاعد می‌شوند، بدون اینکه به مایع تبدیل شوند. محلول ید برای ضدعفونی کردن به‌کار می‌رود. همچنین نشاسته در تماس با ید آبی رنگ می‌شود. برای همین در پی بردن به وجود نشاسته در غذا از ید استفاده می‌کنند.

نمایش اعشاری عدد $\frac{1}{53}$،

$$0/0188679245283\ldots$$

است و دورهٔ تناوبش ۱۳ رقم دارد.

۵۴

$۲ \times ۳^۳ =$

$۲ \times ۲۷ =$

$۳ \times ۱۸ =$

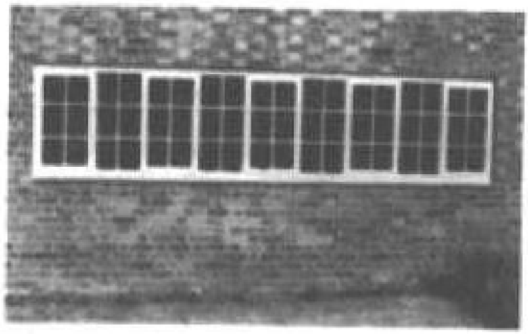
$۶ \times ۹ =$

$۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ =$

(تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در مکعب روبیک ۵۴ مربع رنگی دیده می‌شود.

در تصویر زیر ۵۴ شیشهٔ کوچک دیده می‌شود. می‌توانید این الگو را به‌روشهای متفاوتی دسته‌بندی کنید. مثلاً به‌صورت ۹ × ۶، ۱۸ × ۳ یا ۹ × ۳ × ۲.



شکل ۹۲

۵۵

$۵ \times ۱۱ =$

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ =$ (عددی مثلثی)

$۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ =$ (عددی هرمی مربعی)

۵۵ از اعداد فیبوناتچی است:

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, \ldots$$

$۲۸^۲ - ۲۷^۲ = ۵۵ = ۸^۲ - ۳^۲$ و در نتیجه $۲۸^۲ + ۳^۲ = ۸^۲ + ۲۷^۲$.

$۵۵ = ۳^۳ + ۳^۳ + ۱^۳$.

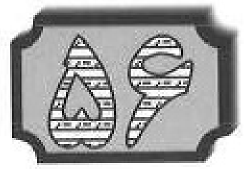
$m^۲ + ۵mn + ۵n^۲ = ۱۱$ به‌ازای $m = n = ۱$ و $p^۲ + ۵pq + ۵q^۲ = ۵$ به‌ازای $p = ۰$ و $q = ۱$؛

همچنین $۵۵ = (-۵)^۲ - ۵ \times ۵ \times ۶ + ۵ \times ۶^۲$. در حالت کلی اگر

$$r = mp - bmq, \qquad s = np + mq + anq$$

آنگاه

$$(m^۲ + amn + bn^۲)(p^۲ + apq + bq^۲) = r^۲ + ars + bs^۲$$



$= ۲^۳ \times ۷$

$= ۲ \times ۲۸$

$= ۴ \times ۱۴$

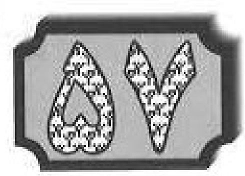
$= ۷ \times ۸$

$= ۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴$

$= ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ۲۱$ (عددی هرمی مثلثی)

$۵۶ = ۶^۲ + ۵^۲ - ۲^۲ - ۱^۲$. ثابت کنید مجموع مربعهای اعداد هر سطر یا ستون برابر مربع $p^۲ + q^۲ + r^۲ + s^۲$ است:

$$\begin{array}{ccc} p^۲ + q^۲ - r^۲ - s^۲ & ۲(qr + ps) & ۲(qs - pr) \\ ۲(qr - ps) & p^۲ + r^۲ - q^۲ - s^۲ & ۲(rs + pq) \\ ۲(qs + pr) & ۲(rs - pq) & p^۲ + s^۲ - q^۲ - r^۲ \end{array}$$



$= ۳ \times ۱۹$

$= ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

به‌ازای $\alpha = ۲$ و $\beta = ۱$، $۷\alpha^۲ + ۱۶\alpha\beta - ۳\beta^۲ = ۵۷$. اتحاد زیر را ثابت کنید

$$(۷\alpha^۲ - ۱۶\alpha\beta - ۳\beta^۲)^۳ + (۱۴\alpha^۲ + ۴\alpha\beta + ۶\beta^۲)^۳$$
$$= (۱۴\alpha^۲ - ۴\alpha\beta + ۶\beta^۲)^۳ + (۷\alpha^۲ + ۱۶\alpha\beta - ۳\beta^۲)^۳$$

به این ترتیب $۷۰^۳ - ۷^۳ = ۵۴^۳ + ۵۷^۳$.

$۵۷ = ۴^۳ - ۲^۳ + ۱^۳$.

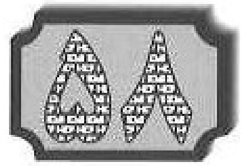
به‌ازای $p = q = ۱$،

$$p^۲ + pq + q^۲ = ۳$$

و به‌ازای $n = ۲$ و $m = ۳$،

$$m^۲ + mn + n^۲ = ۱۹$$

عدد ۵۷ را به‌شکل $r^۲ + rs + s^۲$ بنویسید.



$= 2 \times 29$

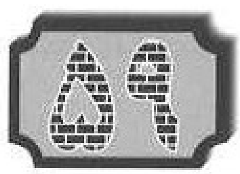
$= 16 + 15 + 14 + 13$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$= 10 + 13 + 16 + 19$

۵۸ درجهٔ سلسیوس بیشترین دمایی است که تاکنون روی زمین به‌ثبت رسیده است. تاریخ ثبت این دما ۱۹۲۲ و محل ثبت کشور لیبی است.

$29 = 5^2 + 2^2$، $2 = 1^2 + 1^1$ و $58 = 7^2 + 3^2$:

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$$
$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 + (aq - bp)^2$$



$= 1 \times 59$ (عددی اول)

$59 = 5^2 + 3^2 + 5^2$ و $59 = 7^2 + 3^2 + 1^2$ و در نتیجه $7^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2$.

برای اینکه نشان دهیم هر عدد را می‌توان به صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت، کافی است این حکم را برای اعداد اول ثابت کنیم. زیرا

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (-ap+cs+dq+br)^2 &+ (dr - bq + as + cp)^2 \\ &+ (bs + dp - cr + aq)^2 \\ &+ (cq + ar + bp - ds)^2\end{aligned}$$

$= 2^2 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 30$

$= 3 \times 20$

$= 4 \times 15$

$= 5 \times 12$

$= 6 \times 10$

در هر دقیقه ۶۰ ثانیه و در هر ساعت ۶۰ دقیقه وجود دارد.

در ریاضیات سومری و بابلی ۶۰ به‌عنوان مبنا در محاسبات عددی به‌کار می‌رفت. در سیستم عددی آنها کسر و ارزش مکانی وارد شده بود.

۶۰ کوچکترین عددی است که ۱۲ مقسوم‌علیه مثبت دارد. مقسوم‌علیه‌های مثبت ۶۰ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰ و ۶۰ هستند.

۶۱

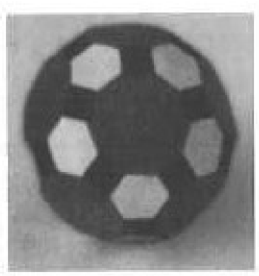
$= ۶۱ \times ۱$ (عددی اول)

عدد $\frac{۱}{۶۱} = ۰/۰۱۶۳۹۳۴۴۲۶۲۲۹۵۰۸۱\ldots$ است که دورهٔ تناوبش ۶۰ رقمی است.
عدد ۶۱ از اعداد شش‌ضلعی مرکزی است.
$۶^۲ + ۵^۲ = ۶۱ = ۳۱^۲ - ۳۰^۲$ و در نتیجه $۶^۲ + ۵^۲ + ۳۰^۲ = ۳۱^۲$.
فرض کنید $i = \sqrt{-۱}$. در این‌صورت $(۵ + ۶i)(۵ - ۶i) = ۶۱$. آیا می‌توانید $۵ + ۶i$ یا $۵ - ۶i$ را به‌صورت حاصل‌ضرب اعدادی به‌شکل $m + ni$ بنویسید که هیچ‌یک از آنها ۱ نباشد؟ به‌عبارت دیگر آیا می‌توان این دو عدد را در مجموعهٔ اعداد به‌شکل $m + ni$ تجزیه کرد؟

۶۲

$= ۲ \times ۳۱$
$= ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در شکل زیر یک ۶۲ وجهی همگن نسبت به رأسها دیده می‌شود که از ده‌ضلعیها، شش‌ضلعیها و مربعها تشکیل شده است. این شکل چند شش‌ضلعی، چند ده‌ضلعی و چند مربع دارد؟ چند یال و چند رأس و چند محور تقارن دارد؟



شکل ۹۳

$۳۱ = ۷^۲ - ۲ \times ۳^۲$، $۲ = ۲^۲ - ۲ \times ۱^۲$ و $۶۲ = ۸^۲ - ۲ \times ۱^۲$ پس ۲، ۳۱ و ۶۲ به‌شکل $p^۲ - ۲q^۲$ هستند.
در حالت کلی، $(a^۲ + \lambda b^۲)(p^۲ + \lambda q^۲) = (ap - \lambda bq)^۲ + \lambda(aq + bq)^۲$.

۶۳

$= ۳^۲ \times ۷$

$= ۳ \times ۱۲$

$= ۷ \times ۹$

$= ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$= ۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + ۲^۵$

در استرالیا شش نوع سکهٔ ۵ سنتی، ۱۰ سنتی، ۲۰ سنتی، ۵۰ سنتی، یک دلاری و دو دلاری وجود دارد. اگر از هر یک از این سکه‌ها یکی داشته باشیم، می‌توانیم ۶۳ مقدار متفاوت پول از آنها به‌وجود آوریم.

تفاضل دو عدد دو رقمی متفاوت که از رقمهای یکسانی تشکیل شده‌اند، ۶۳ است. این دو عدد را پیدا کنید.

$$\begin{aligned}
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۹ &= ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۱۸ &= ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۲۷ &= ۳۳۳۳۳۳۳۳۳ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۳۶ &= ۴۴۴۴۴۴۴۴۴ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۴۵ &= ۵۵۵۵۵۵۵۵۵ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۵۴ &= ۶۶۶۶۶۶۶۶۶ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۶۳ &= ۷۷۷۷۷۷۷۷۷ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۷۲ &= ۸۸۸۸۸۸۸۸۸ \\
۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۸۱ &= ۹۹۹۹۹۹۹۹۹
\end{aligned}$$

شکل ۹۴

۶۴

$= ۲^۶$ (توان ششمی کامل)

$= ۴^۳$ (مکعبی کامل)

$= ۸^۲$ (مربعی کامل)

$= ۲ \times ۳۲$

$= ۴ \times ۱۶$

$= ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵$

۶۴ نوع واحد اطلاعاتی در کد ژنتیک وجود دارد که تمام مشخصات گیاه یا حیوان را مشخص می‌کنند. هر واحد اطلاعاتی سه پایه دارد که در طول مولکول DNA یا RNA قرار گرفته‌اند. از آنجا که چهار نوع پایه (T، A، G و C) وجود دارد، ۶۴ نوع واحد اطلاعاتی به‌وجود می‌آید.

۱	۴۸	۳۱	۵۰	۳۳	۱۶	۶۳	۱۸
۳۰	۵۱	۴۶	۳	۶۲	۱۹	۱۴	۳۵
۴۷	۲	۴۹	۳۲	۱۵	۳۴	۱۷	۶۴
۵۲	۲۹	۴	۴۵	۲۰	۶۱	۳۶	۱۳
۵	۴۴	۲۵	۵۶	۹	۴۰	۲۱	۶۰
۲۸	۵۳	۸	۴۱	۲۴	۵۷	۱۲	۳۷
۴۳	۶	۵۵	۲۶	۳۹	۱۰	۵۹	۲۲
۵۴	۲۷	۴۲	۷	۵۸	۲۳	۳۸	۱۱

شکل ۹۵

حرکت اسب از خانهٔ ۱ تا خانهٔ ۶۴ تمام صفحهٔ شطرنج را پر می‌کند. علاوه‌براین، این شماره‌ها مربعی وفقی تشکیل می‌دهند که در تمام سطرها و ستون‌ها مجموع ۲۶۰ به‌دست می‌آید.

۵ × ۱۳ =

۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ =

۶۵ پنجمین عدد ستاره‌ای است.

ستونها، سطرها و قطرهای یک مربع وفقی ۵ × ۵ مجموع ۶۵ را به‌دست می‌دهند.

جمعی از دانش‌آموزان برای صرف غذا به یک رستوران چینی رفتند. هر دو نفر در یک بشقاب برنج و هر سه نفر در یک بشقاب سوپ و هر چهار نفر در یک بشقاب مرغ شریک‌اند. اگر روی‌هم‌رفته ۶۵ بشقاب مصرف شده باشد، تعداد دانش‌آموزان را به‌دست آورید.

۲ × ۳ × ۱۱ =

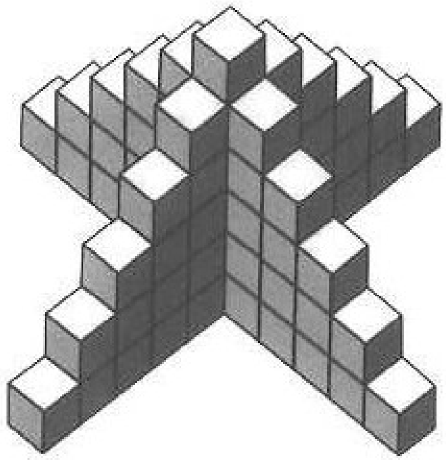
۲ × ۳۳ =

۳ × ۲۲ =

۶ × ۱۱ =

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ... + ۱۱ = (عددی مثلثی)

ساختار شکل ۹۶ که ۶ بلوک ارتفاع دارد، شامل ۶۶ بلوک است.



شکل ۹۶

ساختار مشابه با ۱۲ بلوک ارتفاع، از چند بلوک تشکیل شده است؟

$= ۶۷ \times ۱$ (عددی اول)

فقط با ۱۲ برش می‌توان پیتزا را به ۶۷ قسمت تقسیم کرد.

$$۷ \times ۷ = ۴۹$$
$$۶۷ \times ۶۷ = ۴۴۸۹$$
$$۶۶۷ \times ۶۶۷ = ۴۴۴۸۸۹$$
$$۶۶۶۷ \times ۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۸۸۸۹$$
$$۶۶۶۶۷ \times ۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۸۸۸۸۹$$
$$۶۶۶۶۶۷ \times ۶۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۴۸۸۸۸۸۹$$
$$۶۶۶۶۶۶۷ \times ۶۶۶۶۶۶۷ = ۴۴۴۴۴۴۴۸۸۸۸۸۸۹$$

شکل ۹۷

سعی کنید ۶۷ را در مجموعهٔ اعداد به‌شکل $m + ni$ تجزیه کنید. آیا این کار ممکن است؟ آیا امکان‌پذیری این تجزیه به این که ۶۷ به‌شکل $۴k + ۳$ است، مربوط می‌شود؟

۶۷ دومین عدد اولی است که از ارقام متوالی در نمایش آن استفاده شده است.

آیا اعداد اول به‌شکل $۴k + ۳$ فراوانتر از اعداد اول به‌شکل $۴k + ۱$ هستند؟ این مطلب را برای اعداد اول بین ۱ و ۲۰۰ امتحان کنید.

$۲^۲ \times ۱۷ =$

$۲ \times ۳۴ =$

$۴ \times ۱۷ =$

$= ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$۱۴ + ۱۶ + ۱۸ + ۲۰ =$

$۲^۲ + ۸^۲ = ۶۸ = ۱۶^۲ - ۱۸^۲$ و در نتیجه $۱۸^۲ = ۱۶^۲ + ۸^۲ + ۲^۲$.

چه اعدادی را می‌توان به‌صورت تفاضل دو عدد مثلثی نمایش داد؟

چه اعدادی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد زوج متوالی نمایش داد؟

چه اعدادی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد فرد متوالی نمایش داد؟

$۳ \times ۲۳ =$

$= ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

تنها عددی که مربع و مکعب آن یک و تنها یک‌بار هر یک از ارقام ۰ الی ۹ را در بر دارند، عدد ۶۹ است:

$$۶۹^۲ = ۴۷۶۱, \quad ۶۹^۳ = ۳۲۸۵۰۹$$

رکورد بیشترین تعداد بچه‌ای که مادری به‌دنیا آورده است ۶۹ بچه است. این رکورد متعلق به یک زن روسی از اهالی شویاست که در قرن هجدهم می‌زیسته است. او در ۲۷ شکم، ۱۶ دوقلو و ۷ سه‌قلو و ۴ چهارقلو زاییده است.

$۲ \times ۵ \times ۷ =$

$۲ \times ۳۵ =$

$۵ \times ۱۴ =$

$۷ \times ۱۰ =$

$= ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

چهار مقسوم‌علیه عدد ۷۰ را مشخص کنید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر جفت از این اعداد دوبه‌دو متمایز و مخالف یک باشند. کوچکترین چهار عدد با خواص بالا کدام‌اند؟

تخمین می‌زنید $\frac{۳}{۵}$ بیشتر از ۷۰٪ باشد یا کمتر از آن؟ برای محاسبه، با نماد کسرها راحت‌تر هستید یا با نماد درصد؟ چرا؟

$= ۱ \times ۷۱$ (عددی اول)

$$۷۱ = ۶^۲ + ۶^۲ - ۱^۲ = ۹^۲ - ۳^۲ - ۱^۲ = ۸^۲ + ۴^۲ - ۳^۲$$
$$= ۱۰^۲ - ۵^۲ - ۲^۲ = ۱۱^۲ - ۵^۲ - ۵^۲$$

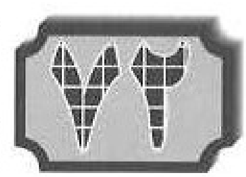
چه اعداد صحیحی را می‌توان به‌صورت مجموع یا تفاضل سه مربع کامل نوشت؟

$۷۱ = ۹^۲ - ۹^۱ - ۹^۰$.

چه اعداد صحیحی را می‌توان به‌صورت مجموع یا تفاضل توانهای یک عدد داده شده نوشت؟

$۷۱ = ۸^۲ + ۸^۱ - ۸^۰$.

کوچکترین عددی که می‌توان آن را به دو روش به‌صورت مجموع یا تفاضل توانهای یک عدد داده شده نوشت، چه عددی است؟



$۲^۳ \times ۳^۲ =$

$۲ \times ۳۶ =$

$۳ \times ۲۴ =$

$۴ \times ۱۸ =$

$۶ \times ۱۲ =$

$۸ \times ۹ =$

$۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ =$

$= ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$$۱ + ۶ + ۷ + ۱۷ + ۱۸ + ۲۳ = ۲ + ۳ + ۱۱ + ۱۳ + ۲۱ + ۲۲ = ۷۲$$
$$۱^۲ + ۶^۲ + ۷^۲ + ۱۷^۲ + ۱۸^۲ + ۲۳^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ + ۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۲۱^۲ + ۲۲^۲$$
$$۱^۳ + ۶^۳ + ۷^۳ + ۱۷^۳ + ۱۸^۳ + ۲۳^۳ = ۲^۳ + ۳^۳ + ۱۱^۳ + ۱۳^۳ + ۲۱^۳ + ۲۲^۳$$
$$۱^۴ + ۶^۴ + ۷^۴ + ۱۷^۴ + ۱۸^۴ + ۲۳^۴ = ۲^۴ + ۳^۴ + ۱۱^۴ + ۱۳^۴ + ۲۱^۴ + ۲۲^۴$$
$$۱^۵ + ۶^۵ + ۷^۵ + ۱۷^۵ + ۱۸^۵ + ۲۳^۵ = ۲^۵ + ۳^۵ + ۱۱^۵ + ۱۳^۵ + ۲۱^۵ + ۲۲^۵$$

۷۳

$= ۷۳ \times ۱$ (عددی اول)

$۳۷^۲ - ۳۶^۲ = ۷۳ = ۸^۲ + ۳^۲$ و در نتیجه $۳۷^۲ = ۳۶^۲ + ۸^۲ + ۳^۲$.

$۷۳ = (۸ + ۳i)(۸ - ۳i)$

$۲^۶ + ۳^۲ = ۷۳ = ۳^۴ - ۲^۳$. معادلهٔ دیوفانتی $x^۶ + y^۲ = y^۴ - x^۳$ را حل کنید.

$۷۳ = ۱۰^۲ - ۳^۳$. جواب دیگری برای معادلهٔ دیوفانتی $y^۲ - x^۳ = ۷۳$ پیدا کنید که در آن x و y گویا باشند.

۷۴

$= ۲ \times ۳۷$

$= ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰$

تنگستن با عدد اتمی ۷۴، فلزی است که درون حباب چراغ به‌کار می‌رود. تنگستن می‌تواند صدها ساعت بدون شکستن یا آب شدن نور تولید کند. نقطهٔ ذوب تنگستن ۳۳۷۰ درجهٔ سانتیگراد است که بالاترین نقطهٔ ذوب در بین تمام فلزات است.

$۷۴ = ۸^۲ + ۳^۲ + ۱^۲$.

$۷۴ = ۷^۲ + ۵^۲$.

$۷۴ = ۶^۲ + ۶^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$.

$۷۴ = ۷^۲ + ۴^۲ + ۳^۲$.

۷۵

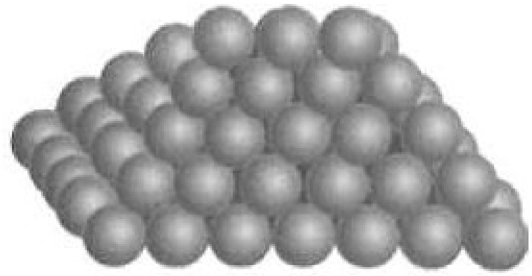
$= ۳ \times ۵^۲$

$= ۳ \times ۲۵$

$= ۵ \times ۱۵$

$= ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

در شکل صفحهٔ بعد یک هرم مستطیلی دیده می‌شود. قاعده یک مستطیل ۵×۷ و ردیف دوم ۴×۶ و ردیف سوم ۳×۵ و ردیف چهارم ۲×۴ است. ردیف بالا یک خط سه‌تایی است.



شکل ۹۸

$۷۵ = ۱۰^۲ - ۵^۲$

$۷۵ = ۷^۲ + ۵^۲ + ۱^۲$

$= ۲^۲ \times ۱۹$

$= ۲ \times ۳۸$

$= ۴ \times ۱۹$

$= ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

۷۶ از اعداد لوکاست.

ستارهٔ دنباله‌دار هالی هر ۷۶ سال یکبار ظاهر می‌شود.

$۷۶ = ۱۰^۲ - ۵^۲ + ۱^۲$.

$۷۶ = ۶^۲ + ۶^۲ + ۲^۲$.

$۷۶ = ۷^۲ + ۳^۳$. معادلهٔ دیوفانتی $c = x^۳ + y^۲$ را برای cهای کوچک بررسی کنید.

$۷۶ = ۱۱^۲ - ۷^۲ + ۲^۲$.

$= ۷ \times ۱۱$

برای هر جواب درست ۹ امتیاز مثبت و هر جواب غلط ۶ امتیاز منفی در نظرگرفته شده است. آیا ممکن است کسی امتیاز ۷۷ بیاورد؟ اگر جوابتان منفی است، نزدیکترین امتیاز ممکن به ۷۷ چه امتیازی است؟

$۷۷ = ۹^۲ - ۲^۲$.

$۷۷ = ۲^۶ + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۰$.

$۷۷ = ۳^{۴} - ۳ - ۳^{۰}$.

$۷۷ = ۴^{۳} + ۴^{۲} - ۴ + ۴^{۰}$.

کوچکترین عددی که می‌توان آن‌را به سه روش به‌صورت مجموع یا تفاضل توانهای یک عدد نوشت چه عددی است؟

$= ۲ \times ۳ \times ۱۳$

$= ۱ + ۲ + \cdots + ۱۲$ (عددی مثلثی)

$۷۸ = ۷^{۲} + ۵^{۲} + ۲^{۲}$.

$۷۸ = ۹^{۲} - ۲^{۲} + ۱^{۲}$.

$۷۸ = ۳^{۴} - ۳$.

$۷۸ = ۲^{۶} + ۲^{۴} - ۲$.

$$
\begin{aligned}
۷۸ = ۲ \times ۳ \times (۳^{۲} + ۲^{۲}) &= ۲(۳^{۳} + (۲^{۲} - ۱)۲^{۲}) \\
&= (۳ - ۱)۳^{۳} + ۲(۲^{۲} - ۱)۲^{۲} \\
&= (۳^{۴} - ۳^{۳}) + (۲^{۵} - ۲^{۳})
\end{aligned}
$$

$۷۸ = ۸^{۲} + ۸^{۲} - ۵^{۲} - ۵^{۲}$.

$= ۷۹ \times ۱$ (عددی اول)

عدد اتمی طلا ۷۹ است.

می‌توان پیتزا را با ۱۳ برش مستقیم به ۷۹ قسمت تقسیم کرد. امتحان کنید!

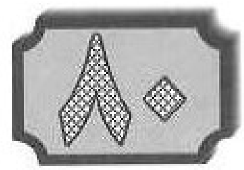
$۷۹ = ۱۰^{۲} - ۵^{۲} + ۲^{۲}$.

آیا مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که طول اضلاعش اعدادی طبیعی باشند و طول وترش برابر ۷۹ باشد؟

تمام مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول اضلاعشان اعدادی طبیعی باشند و طول وتر آنها عدد اول باشد.

$۷۹ = ۴^۳ + ۴^۲ - ۴^۰$.

$۷۹ = ۳^۴ - ۳ + ۳^۰$.



$۲^۴ \times ۵ =$

$۲ \times ۴۰ =$

$۴ \times ۲۰ =$

$۸ \times ۱۰ =$

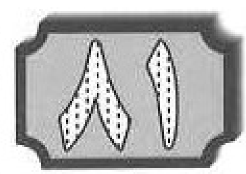
$۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ =$

$۸۰ = ۸ \times ۱۰ = ۸ \times ۸ + ۸ \times ۲ = ۸^۲ + ۴^۲$.

$۸۰ = ۹^۲ - ۱^۲$ و در نتیجه $۹^۲ = ۸^۲ + ۴^۲ + ۱^۲$.

$۸۰ = ۱۰^۲ - ۴^۲ - ۲^۲$.

$۴^۳ + ۴^۲ = ۸۰ = ۹^۲ - ۱^۳$. دو جواب برای معادلهٔ $y^۲ - x^۳ = ۸۰$ به‌دست می‌آید. آیا می‌توانید از این دو جواب، جواب گویایی برای معادلهٔ دیوفانتی $y^۲ - x^۳ = ۸۰$ به‌دست آورید؟



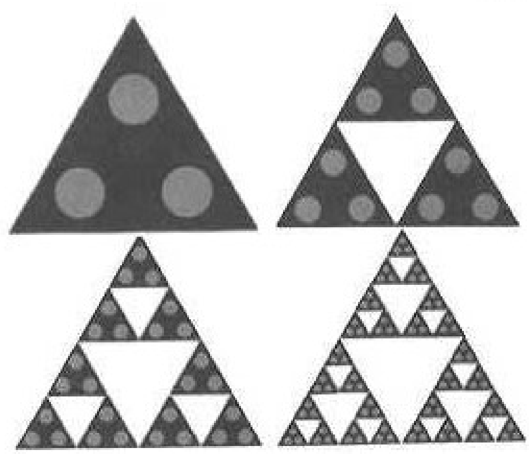
$= ۳^۴$ (توان چهارمی کامل)

$۳ \times ۲۷ =$

$۹ \times ۹ =$

$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ =$ (مربعی کامل)

عدد $\frac{۱}{۸۱}$، $۰{,}۰۱۲۳۴۵۶۷۹۰۱۲۳۴۵۶۷۹\ldots$ است که دورهٔ تناوبش ۹ رقم دارد. جالب است که رقم ۸ حذف شده است!



شکل ۹۹ تعداد دایره‌ها در هر یک از شکلها توانی از ۳ است.

اعداد توان کامل

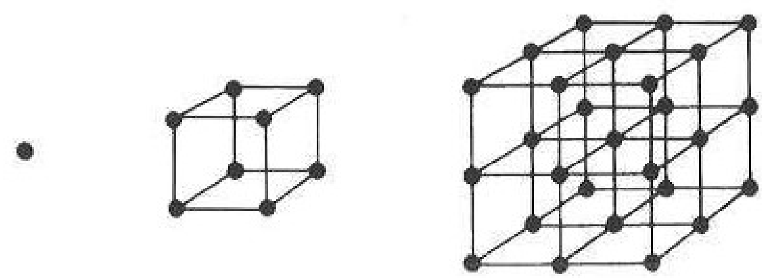
تاکنون با دنبالهٔ اعداد مربع کامل آشنا شده‌اید:

۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ...

همچنین دنبالهٔ اعداد مکعب کامل را می‌شناسید:

۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ۱۲۵, ...

یونانیان اعداد مکعب کامل را سه‌بعدی تصور می‌کردند.



به‌دنبالهٔ توانهای کامل در جدول زیر توجه کنید:

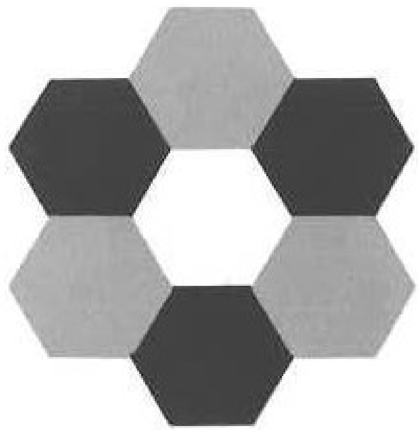
دنباله	پنج جملهٔ اول				
توانهای چهارم	۱	۱۶	۸۱	۲۵۶	۶۲۵...
توانهای پنجم	۱	۳۲	۲۴۳	۱۰۲۴	۳۱۲۵...
توانهای ششم	۱	۶۴	۷۲۹	۴۰۹۶	۱۵۶۲۵...
توانهای هفتم	۱	۱۲۸	۲۱۸۷	۱۶۳۸۴	۷۸۱۲۵...

می‌بینید که توانهای کامل به‌سرعت از ۱۰۰ بزرگتر می‌شوند. برای اینکه سرعت این رشد را بهتر بفهمید، به مثال زیر توجه کنید. با اعداد مربع کامل مساحت سطوح را اندازه می‌گیرند و با اعداد مکعب کامل حجم اجسام را حساب می‌کنند. پس دنبالهٔ اعداد مربع کامل و دنبالهٔ اعداد مکعب کامل برای بررسی آثار تغییر ابعاد یک شکل اهمیت دارند. مثلاً یک مدل هواپیما و خود هواپیما را در نظر بگیرید. با اینکه یک شکل دارند نمی‌توانند مانند هم پرواز کنند. اگر هواپیما ۱۰۰ برابر بزرگتر از مدل خود باشد، مساحت آن $۱۰۰^۲$ یا ۱۰۰۰۰ برابر است. از طرف دیگر حجم هواپیما $۱۰۰^۳$ یا ۱۰۰۰۰۰۰ برابر است. از آنجا که وزن هواپیما به حجم مربوط است، وزن هواپیمای اصلی ۱۰۰۰۰۰۰ برابر مدل آن خواهد بود. اینکه هواپیما چطور پرواز می‌کند هم به وزن و هم به نیروی بالابرنده مربوط می‌شود. پس مدل هواپیما هرگز مانند خود هواپیما رفتار نخواهد کرد. کاربردهای آزمایشگاهی مدل هواپیما مثلاً در تونل باد، مربوط به خصوصیاتی هستند که با بزرگتر شدن اندازهٔ مدل تغییر چندانی نمی‌کنند.

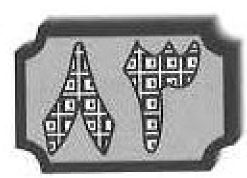
$۲ \times ۴۱ =$

$۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

سرب فلزی با عدد اتمی ۸۲ است. یکی از اولین فلزاتی که بشر کشف کرد سرب بود، زیرا به‌سادگی استخراج و به‌کار برده می‌شود. البته این فلز برای بدن ضرر دارد. سرب ممکن است از طریق آب و هوای اطراف وارد بدن ما شود.



شکل ۱۰۰ شش شش‌ضلعی را می‌توان به ۸۲ حالت کنار یکدیگر قرار داد. یکی از این حالتها در اینجا آمده است.



$۱ \times ۸۳ =$ (عددی اول)

$.۸۳ = ۴^۳ + ۴^۲ + ۴ - ۴^۰$

$.۸۳ = ۳^۴ + ۳ - ۳^۰$

$.۸۳ = ۱۰^۲ - ۴^۲ - ۱^۲$

$.۸۳ = ۷^۲ + ۵^۲ + ۳^۲$

$.۸۳ = ۹^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$

$.۸۳ = ۱۱^۲ - ۶^۲ - ۱^۲ - ۱^۲$

آیا می‌توان مثلثی قائم‌الزاویه پیدا کرد که طول اضلاعش اعدادی طبیعی باشند و طول یکی از اضلاعش برابر ۸۳ باشد؟

$۲^۲ \times ۳ \times ۷ =$

$۲ \times ۴۲ =$

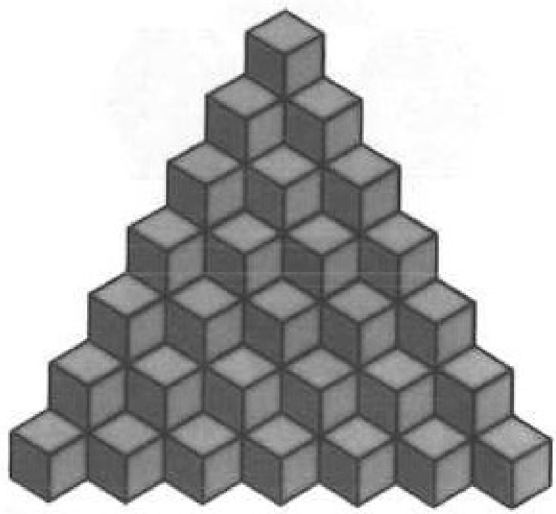
$۳ \times ۲۸ =$

$۴ \times ۲۱ =$

$۶ \times ۱۴ =$

$۷ \times ۱۲ =$

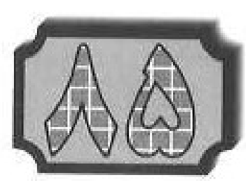
$= ۲۸ + ۲۱ + ۱۵ + ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱$ (عددی هرمی مثلثی)



شکل ۱۰۱ در این شکل به دو روش می‌توانیم عدد ۸۴ را بشماریم. یکی اینکه تعداد مکعبها را بشماریم، دیگر اینکه تعداد لوزیها را بشماریم.

$۱^۲ \times ۳ + ۳^۴ = ۸۴$، پس ۸۴ مجموع سه مربع کامل است:

$$x^۴ + ۳y^۴ = (x^۲ - y^۲)^۲ + (y^۲ + xy)^۲ + (y^۲ - xy)^۲$$



$۵ \times ۱۷ =$

$= ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$۱۳^۲ + ۸۴^۲ = ۸۵^۲$.

به الگوی زیبای زیر توجه کنید و خط بعد را حدس بزنید.

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$
$$۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$$
$$۷^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲$$
$$۹^۲ + ۴۰^۲ = ۴۱^۲$$
$$۱۱^۲ + ۶۰^۲ = ۶۱^۲$$
$$۱۳^۲ + ۸۴^۲ = ۸۵^۲$$
$$\vdots$$

$۱^۴ \times ۴ + ۳^۴ = ۸۵$، پس ۸۵ مجموع چهار مربع کامل است:

$$x^۴ + ۴y^۴ = (x^۲ - y^۲)^۲ + (y^۲ + xy)^۲ + (y^۲ - xy)^۲ + (y^۲)^۲$$

روش تفاضل متناهی

این تکنیک بسیار جالب، روشی برای حدس زدن فرمول دنباله‌های چندجمله‌ای است. مثلاً دنبالهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$۱۶۹,\ ۱۹۶,\ ۲۲۵,\ ۲۵۶,\ ۲۸۹,\ ۳۲۴,\ldots$$

اگر این دنباله، دنباله‌ای چندجمله‌ای باشد، آیا می‌توانید عدد بعدی را حدس بزنید؟ روش تفاضل متناهی، این است که تفاضل هر دوجملهٔ متوالی را حساب کنیم و دنبالهٔ دیگری به‌دست آوریم. سپس همین کار را با دنبالهٔ جدید تکرار کنیم، تا جایی که تفاضل هر دوجملهٔ متوالی عددی ثابت باشد:

$$\begin{array}{ccccccccccc} ۱۶۹ & & ۱۹۶ & & ۲۲۵ & & ۲۵۶ & & ۲۸۹ & & ۳۲۴\ldots \\ & ۲۷ & & ۲۹ & & ۳۱ & & ۳۳ & & ۳۵\ldots & \\ & & ۲ & & ۲ & & ۲ & & ۲\ldots & & \end{array}$$

در ردیف دوم:

$$۱۹۶ - ۱۶۹ = ۲۷, ۲۲۵ - ۱۹۶ = ۲۹,\ldots$$

در ردیف سوم:

$$۲۹ - ۲۷ = ۲, ۳۱ - ۲۹ = ۲,\ldots$$

آیا اکنون می‌توانید عدد بعدی در دنباله را حدس بزنید؟ با بازگشت به عقب می‌توان جملات بعدی دنباله را حدس زد. عدد بعدی در ردیف سوم ۲ است. پس در ردیف دوم عدد بعدی باید ۳۷ باشد. بنابراین عدد بعدی دنباله اصلی باید ۳۶۱ باشد. این تکنیک یکی از روشهای بسیار قدرتمند است و می‌توان از آن برای دنباله‌های بسیاری فرمول چندجمله‌ای به‌دست آورد. برای بعضی دنباله‌های عددی تنها یک ردیف تفاضل

گرفتن کافی است و برای بعضی دیگر باید چندین دنبالهٔ تفاضلی حساب کرد. البته این روش همیشه به‌کار نمی‌آید. بعضی وقتها اعداد داده شده برای حدس زدن عدد بعدی کافی نیستند.

یک اتفاق جالب دیگر که ممکن است در دنباله‌ای بیفتد، این است که ممکن است دنبالهٔ تفاضلی تکرار دنبالهٔ اصلی باشد. مثلاً

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۰ ۱۵ ۲۲ ۳۲...

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۰...

خودتان تحقیق کنید که چگونه این دنباله پس از محاسبهٔ یک دنبالهٔ تفاضلی دیگر دوباره خودش را تولید می‌کند. در هر صورت محاسبهٔ عدد بعدی کار ساده‌ای است. عدد بعدی در ردیف دوم ۱۵ است. بنابراین عددی که باید در دنبالهٔ اصلی حدس بزنیم ۴۷ است. در اینجا چند دنباله آمده است که می‌توانید دنبالهٔ تفاضلی آنها را حساب کنید:

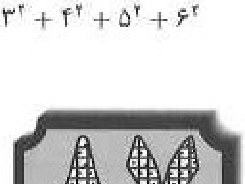
A: ۵ ۸ ۱۱ ۱۴ ۱۷ ۲۰ ۲۳...	دنباله‌ای خطی
B: ۲۴ ۵۴ ۹۶ ۱۵۰ ۲۱۶ ۲۹۴ ۳۸۴...	تعداد مربعهای واحد روی سطح مکعب
C: ۴ ۸ ۱۶ ۳۲ ۶۴ ۱۲۸ ۲۵۶...	توانهای عدد ۲
D: ۱۵ ۳۴ ۶۵ ۱۱۱ ۱۷۵ ۲۶۰ ۳۶۹...	ثابت مربعهای وفقی با افزایش طول ضلع
E: ۷ ۱۱ ۱۸ ۲۹ ۴۷ ۷۶ ۱۲۳...	اعداد لوکا

$۲ \times ۴۳ =$

$= ۲۳ + ۲۲ + ۲۱ + ۲۰$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

رادون گازی بی‌رنگ، بی‌بو و خنثی با عدد اتمی ۸۶ است. این گاز بسیار خطرناک است چون رادیواکتیو است. مردمی که روی صخره‌های گرانیتی زندگی می‌کنند از این گاز بیمناک‌اند، چون این گاز از طریق زمین وارد بنای ساختمان می‌شود.

$۸۶ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲$.



$۳ \times ۲۹ =$

$= ۱۷ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$۸۷ = ۲^۶ + ۲^۴ + ۲^۳ - ۲^۰$.

$۸۷ = ۳^{۴} + ۳^{۲} - ۳$.

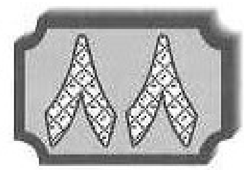
$۸۷ = ۱۰^{۲} - ۳^{۲} - ۲^{۲}$.

$۸۷ = ۹^{۲} + ۳^{۲} - ۲^{۲} + ۱^{۲}$.

$۸۷ = ۷^{۲} + ۶^{۲} + ۲^{۲} - ۱^{۲}$.

$۸۷ = ۶^{۲} + ۵^{۲} + ۵^{۲} + ۱^{۲}$.

$۸۷ = ۱۱^{۲} - ۶^{۲} + ۱^{۲} + ۱^{۲}$.



$= ۲^{۳} \times ۱۱$

$= ۲ \times ۴۴$

$= ۴ \times ۲۲$

$= ۸ \times ۱۱$

$= ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

شکل ۱۰۲

۵۲ کلید سفید و ۳۶ کلید سیاه بیش از ۷ اکتاو را به‌وجود می‌آورند.

$$۹ \times ۹ + ۷ = ۸۸$$
$$۹۸ \times ۹ + ۶ = ۸۸۸$$
$$۹۸۷ \times ۹ + ۵ = ۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶ \times ۹ + ۴ = ۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵ \times ۹ + ۳ = ۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴ \times ۹ + ۲ = ۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴۳ \times ۹ + ۱ = ۸۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴۳۲ \times ۹ + ۰ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸$$

شکل ۱۰۳

۸۹

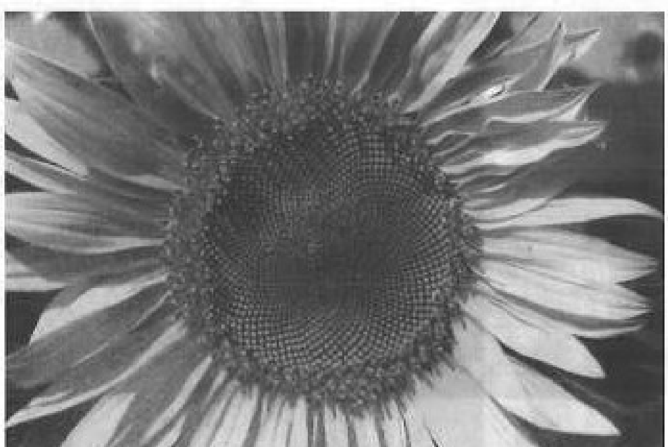
$= ۸۹ \times ۱$ (عددی اول)

$۸۹ = ۱۰^۲ - ۱۰ - ۱۰^۰$.

۸۹ از اعداد فیبوناتچی است.

بسط اعشاری عدد $\frac{۱}{۸۹}$، ...۰٫۰۱۱۲۳۵۹۵ است. عجیب است که ابتدا دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی در این بسط ظاهر می‌شود. اما این الگو در رقم ۹ می‌شکند. دورهٔ تناوب این نمایش اعشاری ۴۴ رقم دارد.

گل آفتابگردان معمولاً ۵۵ مارپیچ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و ۸۹ مارپیچ در جهت عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت دارد.



شکل ۱۰۴

گلهای کوچکتر ۳۴ و ۵۵ مارپیچ دارند. حتی گلهایی یافت شده‌اند که ۸۹ و ۱۴۴ مارپیچ داشته‌اند. البته الگوی مارپیچها عوض نمی‌شود. اما وقتی گل آفتابگردان بزرگتر می‌شود، الگویی که چشم ما تشخیص می‌دهد متفاوت است.

$۲ \times ۳^۲ \times ۵ =$

$۲ \times ۴۵ =$

$۳ \times ۳۰ =$

$۵ \times ۱۸ =$

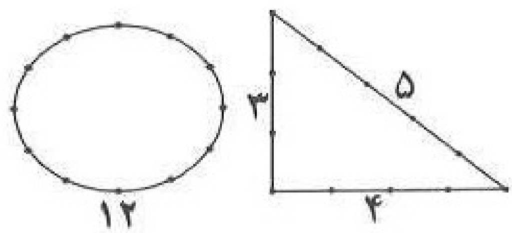
$۶ \times ۱۵ =$

$۹ \times ۱۰ =$

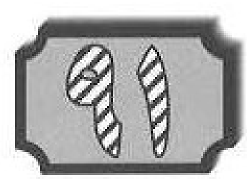
$۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۸ =$

رشد گیاه بامبو از تمام گیاهان بیشتر است. این گیاه در روز ۹۰ سانتیمتر رشد می‌کند.

چشمان ما می‌توانند با دقت زیادی زاویهٔ °۹۰ را تشخیص دهند. برای تشخیص این زاویه روشهای زیادی وجود دارد. روش مصریان باستان این بوده است که روی طنابی ۱۲ گره با فاصله‌های برابر به‌وجود می‌آوردند. سپس یک مثلث با اضلاع ۳، ۴ و ۵ از آن می‌ساختند. خودبه‌خود زاویه °۹۰ تشکیل می‌شد.



شکل ۱۰۵



$۷ \times ۱۳ =$

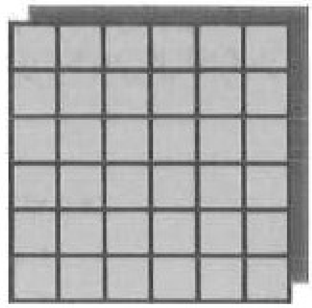
$۱ + ۲ + \ldots + ۱۳ =$ (عددی مثلثی)

$۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + ۳۶ =$ (عددی هرمی مربعی)

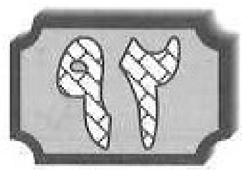
در شکل صفحهٔ بعد ۹۱ مربع دیده می‌شود. آنها را پیدا کنید.

تعداد مربعها در یک مربع شطرنجی ۴ × ۴ را به‌دست آورید.

$۹۱ = ۴^۳ + ۳^۳$.



شکل ۱۰۶



$۲^۲ \times ۲۳ =$

$۲ \times ۴۶ =$

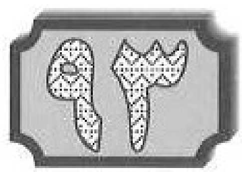
$۴ \times ۲۳ =$

$۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

عدد اتمی اورانیوم ۹۲ است. این عدد اتمی بالاترین عدد اتمی عنصری است که به‌طور طبیعی وجود دارد.

$۹۲ = ۱۰^۲ - ۲^۳$. یک جواب گویای دیگر برای معادلهٔ دیوفانتی $y^۲ - x^۳ = ۹۲$ به‌دست بیاورید.

$۲۳ = ۱۲^۲ - ۱۱^۲$ و در نتیجه $۹۲ = ۲۴^۲ - ۲۲^۲$.



$۳ \times ۳۱ =$

$۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ =$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

با نُه برش می‌توان سیب‌زمینی را به ۹۳ قسمت تقسیم کرد.

$۹۳ = ۳^۴ + ۳^۲ + ۳$.

$۹۳ = ۲^۶ + ۲^۵ - ۲^۲ + ۲^۰$.

$۹۳ = ۳ \times ۳۱ - (۲^۲ - ۱)(۲^۵ - ۱) = ۲^۷ - ۲^۵ - ۲^۲ + ۲^۰$.

نمایش عدد ۹۳ به‌صورت مجموع یا تفاضل توانهای عدد ۲ یگانه نیست. آیا می‌توان عددی پیدا کرد که نمایش آن به‌صورت مجموع یا تفاضل توانهای عدد دیگری غیر از عدد ۲ یگانه نباشد؟

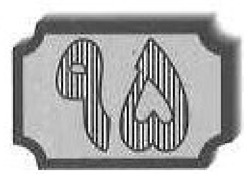
$۹۳ = ۹^۲ + ۴^۲ - ۲^۲$.

$۲ \times ۴۷ =$

$۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ =$

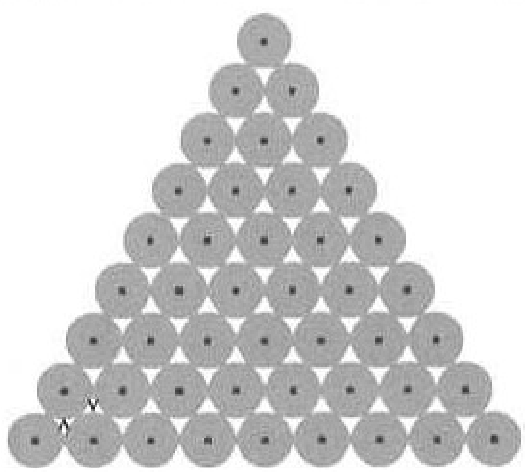
پلوتونیوم، با عدد اتمی ۹۴، عنصری است که به‌طور طبیعی وجود ندارد و برای اولین‌بار به‌طور مصنوعی در سال ۱۹۴۰ به‌وجود آمده است. این عنصر در سلاحهای اتمی و رآکتورهای اتمی به‌کار می‌رود. بسیار سمی و رادیواکتیو است. نیمه‌عمر این عنصر ۲۴۰۰۰ سال است، یعنی ۲۴ کیلو پلوتونیوم بعد از ۲۴۰۰۰ سال به ۲ کیلو و بعد از ۴۸۰۰۰ سال به یک کیلو تقلیل می‌یابد.

$۹۴ = ۵^{۳} - ۵^{۲} - ۵ - ۵^{۰}$.



$۵ \times ۱۹ =$

فرض کنید بخواهیم هرمی از پرتقالها در میوه‌فروشی ایجاد کنیم. فرض کنید ابتدا مثلثی به ضلع نه پرتقال ایجاد کنیم. به دو روش می‌توان ردیف دوم را چید. در یک روش ردیف دوم مثلثی به ضلع هفت پرتقال خواهد بود و در روش دیگر مثلثی به ضلع هشت پرتقال. در کدام‌یک از روشها مجموع پرتقالها ۹۱ پرتقال می‌شود؟



شکل ۱۰۷

$۹۵ = ۵^{۳} - ۵^{۲} - ۵$.

$۹۵ = ۱۰^۲ - ۲^۲ - ۱^۲$.

$۹۵ = ۹^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$.

$۲^۵ \times ۳ =$

$۲ \times ۴۸ =$

$۳ \times ۳۲ =$

$۴ \times ۲۴ =$

$۶ \times ۱۶ =$

$۸ \times ۱۲ =$

$۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ =$

۹۶ ششمین عدد ستاره‌ای است.

$۱ \times ۹۷ =$ (عددی اول)

نمایش اعشاری عدد $\frac{۱}{۹۷}$، ۰٫۰۱۰۳۰۹۲۷۸۳... است. ابتدا به‌نظر می‌رسد که توانهای ۳ به‌ترتیب در این بسط اعشاری ظاهر شده‌اند. اما این الگو ادامه پیدا نمی‌کند. دورهٔ تناوب این نمایش اعشاری ۹۶ رقم دارد.

$۹۷ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۱^۲$.

$۹۷ = ۹^۲ + ۴^۲$.

$۹۷ = ۳^۴ + ۲^۴$.

$۹۷ = ۳^۴ + ۳^۳ - ۳^۲ - ۳ + ۳^۰$.

$۹۷ = ۲^۶ + ۲^۵ - ۲^۰$.

$۹۷ = ۱۰^۲ - ۲^۲ + ۱^۲$.

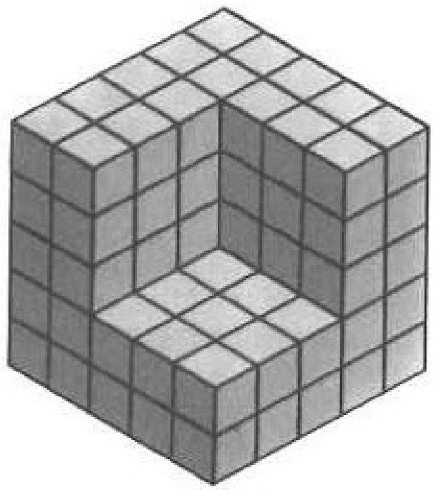
$۲ \times ۷^۲ =$

$۲ \times ۴۹ =$

$۷ \times ۱۴ =$

$۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ = ۱۶ + ۱۷ =$

نمایش اعشاری عدد $\frac{۱}{۹۸}$، ۰٫۰۱۰۲۰۴۰۸۱۶۳۲۶۵... است. ابتدا به‌نظر می‌رسد که توانهای ۲ در این بسط ظاهر می‌شوند، ولی این الگو ادامه پیدا نمی‌کند. دورهٔ تناوب این نمایش اعشاری ۴۲ رقم دارد.



شکل ۱۰۸ $۹۸ = ۵^{۳} - ۳^{۳}$.

$۹۸ = ۱^{۴} + ۲^{۴} + ۳^{۴}$.

۹۹

$= ۳ \times ۳ \times ۱۱$

$= ۳ \times ۳۳$

$= ۹ \times ۱۱$

$= ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴$ (تفاضل دو عدد مثلثی غیرمتوالی)

$$۹ \times ۹ = ۸۱$$
$$۹۹ \times ۹۹ = ۹۸۰۱$$
$$۹۹۹ \times ۹۹۹ = ۹۹۸۰۰۱$$
$$۹۹۹۹ \times ۹۹۹۹ = ۹۹۹۸۰۰۰۱$$
$$۹۹۹۹۹ \times ۹۹۹۹۹ = ۹۹۹۹۸۰۰۰۰۱$$
$$۹۹۹۹۹۹ \times ۹۹۹۹۹۹ = ۹۹۹۹۹۸۰۰۰۰۰۱$$

شکل ۱۰۹

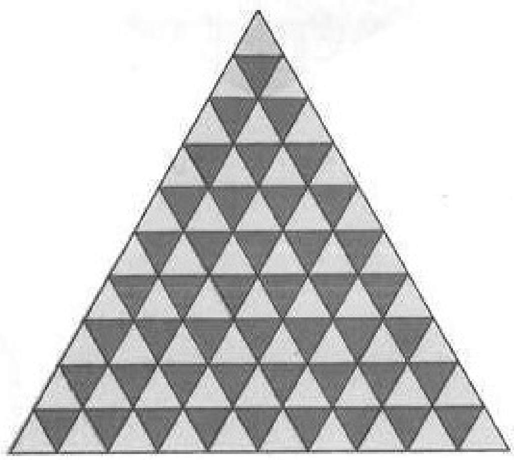
$۹۹ = ۱۰^{۲} - ۱^{۲}$.

$۹۹ = ۳^{۴} + ۳^{۳} - ۳^{۲}$.

$۹۹ = ۲^{۶} + ۲^{۵} + ۲^{۱} + ۲^{۰}$.

$$۲^۲ \times ۵^۲ =$$
$$۲ \times ۵۰ =$$
$$۴ \times ۲۵ =$$
$$۵ \times ۲۰ =$$
$$۱۰ \times ۱۰ =$$
$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ =$$

۱۰۰ درجهٔ سانتیگراد دمای جوش آب خالص است.



شکل ۱۱۰

در این الگو ۱۰۰ مثلث کوچک دیده می‌شود. تعداد تمام مثلثهایی را که دیده می‌شوند حساب کنید.

$۱۰۰ = ۱۰^۲$.

$۱۰۰ = ۵^۲ + ۵^۲ + ۵^۲ + ۵^۲$.

$۱۰۰ = ۹^۲ + ۳^۲ + ۳^۲ + ۱^۲$.

$۱۰۰ = ۸^۲ + ۶^۲$.

آیا ۱۰۰ کوچکترین عددی است که می‌توان آن‌را به چهار روش به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع کامل نوشت؟

$۱۰^۲ = ۱۰۰ = ۵^۳ - ۵^۲$ و درنتیجه $۵^۳ = ۵^۲ + ۱۰^۲$. تمام جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $y^۳ = a^۲ + b^۲$ را به‌دست آورید.

$۱۰۰ = ۳^۴ + ۳^۳ - ۳^۲ + ۳^۰$.

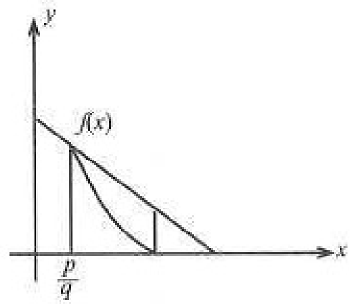
$۱۰۰ = ۲^۶ + ۲^۵ + ۲^۲$.

$$۱ \times ۷ + ۳ = ۱۰$$
$$۱۴ \times ۷ + ۲ = ۱۰۰$$
$$۱۴۲ \times ۷ + ۶ = ۱۰۰۰$$
$$۱۴۲۸ \times ۷ + ۴ = ۱۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵ \times ۷ + ۵ = ۱۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷ \times ۷ + ۱ = ۱۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱ \times ۷ + ۳ = ۱۰۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱۴ \times ۷ + ۲ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱۴۲ \times ۷ + ۶ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸ \times ۷ + ۴ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵ \times ۷ + ۵ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$
$$۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷ \times ۷ + ۱ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

شکل ۱۱۱

اعداد جبری و اعداد متعالی

حل معادلات چندجمله‌ای از زمان یونان باستان مورد توجه قرار گرفته است. دیوفانتوس اسکندرانی در کتاب حساب خود که آن را در ۱۳ جلد نوشت به حل معادلات چندجمله‌ای در مجموعه اعداد صحیح و اعداد گویا پرداخت. از این کتاب تنها ۶ جلد به‌جا مانده است. حل معادلات چندجمله‌ای یک متغیره با ضرایب صحیح در مجموعهٔ اعداد گویا الگوریتمی بسیار ساده دارد. می‌توان نشان داد که اگر کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ جواب معادلهٔ $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ باشد، آنگاه $p \mid a_0$ و $q \mid a_n$، پس کافی است تعدادی متناهی عدد گویا را در معادله قرار دهیم تا همهٔ جوابهای گویای معادله را بشناسیم. از طرف دیگر، چندجمله‌ای درجهٔ فرد حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد. اگر یک معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ فرد هیچ جواب گویایی نداشته باشد، درمورد ریشهٔ حقیقی آن، که با تعدادی متناهی ضریب صحیح معادله مشخص می‌شود، چه می‌توان گفت؟ می‌توان از یک عدد گویا شروع کرد و روی نمودار چندجمله‌ای نقطه‌ای با طول آن عدد گویا درنظر گرفت و از آن مماسی بر نمودار چندجمله‌ای رسم کرد تا محور x را قطع کند. محل تقاطع این مماس با محور x عددی گویاست که به ریشهٔ حقیقی چندجمله‌ای نزدیکتر است. با تکرار این روش می‌توان جواب حقیقی معادله را با اعداد گویا تقریب زد. این روش سریع برای تقریب اعداد حقیقی تنها برای اعدادی که ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح هستند به‌کار می‌آید. از طرفی ثابت شده است که عدد π ریشه هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نیست. پس این روش تقریب برای اعداد حقیقی خاصی به‌کار می‌آید. اعدادی که ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح هستند، اعداد جبری نام دارند. آیا می‌توانید ثابت کنید که مجموع دو عدد جبری و حاصل‌ضرب دو عدد جبری هر دو اعدادی جبری‌اند؟



اولین عدد جبری غیرگویا را فیثاغورسیان کشف کردند. وجود $\sqrt{۲}$ ضربهٔ محکمی بر بنای فلسفی فیثاغورسیان که بر مبنای اعداد گویا استوار شده بود وارد کرد. آیا می‌توانید ثابت کنید که $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست؟ اعداد حقیقی غیرجبری را **اعداد متعالی** می‌نامند. تلاش کنید چند عدد متعالی بسازید.

اعداد مختلط

اعداد به‌صورت $a + bi$ را که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند و i با رابطهٔ $i^۲ = -۱$ مشخص می‌شود، **اعداد مختلط** می‌نامند. اولین‌بار گاوس ثابت کرد که هر چندجمله‌ای با ضرایب در مجموعهٔ اعداد حقیقی ریشه‌ای در مجموعهٔ اعداد مختلط دارد. جمع و ضرب دو عدد مختلط به‌روش زیر تعریف می‌شود:

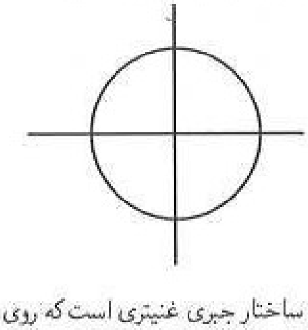
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اگر بخواهیم خودمانی‌تر اعداد مختلط را معرفی کنیم، باید بگوییم فرض وجود جواب برای معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ آنقدر قوی است که از آن نتیجه می‌شود تمام چندجمله‌ایها دارای ریشه‌اند. در واقع همین که ساختار تقریبی اعداد حقیقی شکسته شود، مشکلات وجود جواب برای چندجمله‌ایها حل می‌شود. **قدرمطلق** عدد مختلط $a + bi$ این‌طور تعریف می‌شود:

$$|a + bi| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق ثابت و غیرصفر دارند یک دایره است.



مزیت اعداد مختلط بر اعداد حقیقی ساختار جبری غنی‌تری است که روی فضایی دوبعدی دارند. این مزیت امکان کنار هم قرار گرفتن سه رشتهٔ جبر، آنالیز و هندسه را به‌گونه‌ای فراهم می‌آورد که در هیچ‌جای دیگر

ریاضیات مثل و مانندی ندارد. فرمول شگفت‌انگیز $e^{\pi i} + ۱ = ۰$ یکی از زیباترین فرمولهای ریاضی است که چند عدد تاریخی و مهم ریاضیات را به‌هم پیوند می‌دهد. در فیزیک معادلات با زمان مختلط را بررسی می‌کنند. معرفی این اعداد یکی از اساسیترین و فراگیرترین تلاشهایی است که ریاضیدانان به‌انجام رسانده‌اند. اعداد صحیح مختلط را اولین‌بار گاوس معرفی کرد. اعدادی به‌شکل $a+bi$ را که در آن a و b اعدادی صحیح هستند اعداد صحیح گاوسی می‌نامیم. آیا می‌توانید اعداد اول صحیح گاوسی را شناسایی کنید؟ چند معادلهٔ دیوفانتی مهم را در مجموعهٔ اعداد صحیح گاوسی حل کنید. آیا به‌نظر شما اعداد صحیح گاوسی به‌اندازهٔ اعداد صحیح معمولی ملموس‌اند؟

نمایه