جبر و معادله

مقدمه‌ای بر آموزش تفکر جبری

آرش رستگار

$(a+b)^۲$

قابل استفاده‌ی:

- معلمان دوره‌ی ابتدایی
- دبیران ریاضی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی
- دانش آموزان مستعد دوره‌ی راهنمایی
- دانش آموزان اول دبیرستان
- دانشجویان مراکز تربیت معلم

۲
مجموعه ی کتاب های
دانش پایه ی ریاضی

بسم الله الرحمن الرحیم

از سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی

«آموزش معلمان»

جبر و معادله

مقدمه‌ای بر آموزش تفکر جبری

مؤلف: آرش رستگار

سرشناسه: رستگار، آرش
عنوان و نام پدیدآور: جبر و معادله: مقدمه‌ای بر آموزش تفکر جبری
مشخصات نشر: تهران: مدرسه، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری: ۱۶۸ ص.
فروست: ... سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی «آموزش معلمان»
شابک: 978-964-08-0032-4
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
موضوع: جبر
موضوع: جبر -- راهنمای آموزشی (متوسطه)..
شناسه افزوده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۷ ۲ ج ۵ ر / ۲ / ۱۵۲ QA
رده‌بندی دیویی: ۵۱۲
شماره کتابشناسی ملی: ۱۲۵۷۸۸۵

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش وپرورش

جبرومعادله
مقدمه ای برآموزش تفکرجبری
(از سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی - آموزش معلمان)
مؤلف: آرش رستگار
طرح جلد: کاظم طلایی
طراح گرافیک: علی ابوالحسنی
چاپ اول: ۱۳۸۷
تیراژ: ۲۲۰۰ نسخه
لیتوگرافی چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
قیمت: ۲۲۰۰۰ ریال

شابک ۴ - ۰۰۳۲ - ۰۸ - ۹۶۴ - ۹۷۸
ISBN 978-964-08-0032-4

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹ - ۸۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۸۹۰۳۸۰۹

خواننده محترم، با سلام و احترام؛ ضمن تشکر از شما، خواهشمند است هرگونه نظر، انتقاد و پیشنهاد خود را در مورد این کتاب یا دیگر کتاب‌های انتشارات مدرسه از طریق پیام‌نگار (ایمیل) madreseh@madresehpublications.com یا از طریق صندوق‌پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ ارائه فرمایید. هم‌چنین می‌توانید کتاب‌های ما را از طریق پایگاه اینترنتی www.madresehpublications.com ثبت و سفارش دهید تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پاسخ لازم یا کتاب مورد نظر خود را دریافت کنید.

مقدمه

برای این‌که معلمی موفق باشیم، علاوه بر دانش حرفه‌ای، به دانش موضوعی نیز نیاز داریم. دانش حرفه‌ای آگاهی داشتن از شیوه‌های آموزش، اهداف، روش‌های ارزش‌یابی، دیدگاه‌ها، شناخت دانش‌آموز از نظر توانایی و مهارتی و ... است. در این خصوص، با وجود تدوین کتاب‌های تألیف شده‌ی مؤلفان کتب درسی و تعدادی کتاب ترجمه شده به عنوان منبعی مناسب برای معلم و نیز وجود دوره‌های آموزش ضمن خدمت و تولید مجلات مخصوص معلمان و دانشجویان تربیت معلم، نیاز کم‌تری برای تولید یک مجموعه‌ی آموزشی احساس می‌شود.

اما در خصوص دانش موضوعی و مورد نیاز معلمان کار کم‌تری صورت گرفته است. اغلب معلمان دوره‌ی ابتدایی با توجه به نوع کاری که انجام می‌دهند کم‌کم از دانش‌های موضوعی که پیش از این با آن‌ها سر و کار داشته‌اند، دور می‌شوند و کم‌تر به تقویت خود در این زمینه فکر می‌کنند. معلمان محترم دوره‌ی راهنمایی نیز با همین مشکل مواجه می‌شوند، یا در بعضی موارد، رشته‌ی تحصیلی آن‌ها مرتبط با موضوعی که تدریس می‌کنند نیست.

با عنایت به موارد فوق، تولید مجموعه‌ای که صرفاً به بیان دانش موضوعی به جهت تقویت بنیه‌ی علمی معلمان بپردازد، بیش از پیش احساس می‌شود؛ به خصوص برای درس ریاضی که از دروس محوری دوره‌های ابتدایی و راهنمایی است و اغلب معلمان از نظر دانش موضوعی، نیاز تقویت خود را درک کرده‌اند. از طرفی دانشجویان تربیت معلم، که فارغ‌التحصیل شده و قصد دارند به امر آموزش بپردازند، به مرور و در جریان تدریس، احساس می‌کنند که باید بعضی از مفاهیم و موضوعات را دوباره بازنگری کنند.

این مجموعه با هدف توسعه و بسط دانش پایه‌ی ریاضیِ مورد نیاز معلمان دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی تهیه شده است. ویژگی مهم این مجموعه، موضوعی بودنِ مطالب هر جلد است. به عبارت دیگر، هر کتاب از این مجموعه فقط به یک موضوع ریاضی می‌پردازد، فارغ از آن‌که این مفاهیم و دروس در حال حاضر در چه پایه‌ای تدریس می‌شوند. برای مثال، موضوع «عدد و عددنویسی» عنوان یکی از کتاب‌های این مجموعه است. این کتاب، نگاه جامعی به این موضوع خواهد داشت، اگر چه مفاهیم مربوط به آن، سال‌های اول ابتدایی تا پایان دوره‌ی راهنمایی را شامل می‌شود.

امیدواریم این حرکت باعث رشد توانایی‌های علمی معلمان محترم و در نتیجه، اعتلای آموزش ریاضی در کشور باشد.

در پایان از همه‌ی مؤلفان محترم که در تدوین این مجموعه همکاری داشته‌اند و هم‌چنین از مسئولان انتشارات مدرسه که زمینه‌ی تولید آن را فراهم کرده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

خسرو داودی - دبیر مجموعه

ستایش‌نامه

ستایش می‌کنم خدایی را که آفریدگان را از هیچ پدید آورد. الگویی نداشت تا به کاربرد و نه مقیاسی از آفریننده‌ای پیش از خود تا بدان دستور کار کند؛ و آفریدگان اعتراف دارند بدین حقیقت که سراسر ناتوان‌اند و نیازمند و حقیر؛ و اوست که باید بر آنان رحمت آرد، و به قدرت خود برپایشان دارد.

به ما آن نشان داد که دیدیم، به حکم ضرورت آشکار است که این نشانه‌ها بر شناخت او دلیلی استوار است، و در آن‌چه آفریده، آثار صنعت و نشانه‌های حکمت او پدیدار است؛ چنان‌که هرچه آفریده او را برهانی است، و بر قدرت و حکمت او نشانی؛ وگرچه آفریده‌ای باشد خاموش، بر تدبیر او گویاست، و بر وجود پدید آورنده دلیلی رساست.

سخنی با خوانندگان

خواننده‌ی عزیز و گرامی! فرض بنده‌ی ناتوان در این نوشته چنین است که خواننده هم‌چون راقم این سطور، به ریاضیات هم به عنوان یک هنر، و هم یک ابزار در خدمت بشر و هم به عنوان علمی شریف که در الهیات ریشه دارد و در تمام علوم بشری کاربرد و حضوری تعیین‌کننده دارد، ارادت داشته و عشق می‌ورزد و آموزش ریاضیات را نه تنها اهرمی مؤثر برای رشد تفکر، بلکه وسیله‌ای برای تعالی انسان از طریق ترقی ساختارهای شناختی و معرفتی او می‌داند که بدون تکیه بر معارف الهی و علوم توحیدی هرگز میسر نخواهد شد.

دوست محترم و بزرگوار! این بنده‌ی نیازمند، چنین پنداشته که آن بزرگوار از اهمیت نقشی که ریاضیات در تربیت نسل آینده‌ی فرزندان میهنمان ایفا خواهد کرد، به خوبی آگاه است و می‌داند اگر نسلی خلاق و توانا تربیت شود که به اخلاق و معارف الهی مسلح نباشد، به سادگی تمدن ما را از راه راست منحرف خواهد کرد و به بیراهه خواهد کشانید، و این‌که اخلاق و معارف باید در دل علم آموزش داده شود، نه این‌که از بیرون اثرگذاری کند.

معلم دانا و متعالی! این بنده‌ی حقیر تصور می‌کند که مخاطب این کتاب، معلم مجاهدی است که پرچم توحید در یک دست و سلاح قلم در دست دیگر دارد تا به جنگ جهل و نادانی و عقب‌افتادگی برود و نور دانش را در قلب‌های عزیز فرزندان میهنمان استوار کند. باشد که خداوند نامتان بلند کند و خبر مجاهدت‌هایتان را بر همه‌ی مؤمنان آشکار کند و با پیامبران محشورتان فرماید و نزد خود قرارگاهی مخصوصتان در نظر بگیرد تا در آن جاودانه سکنی گزینید.

مقدمه در باب ریاضیات و آموزش آن

هدف ما این است که علم ریاضیات را چنان آموزش دهیم که از آن منافع مادی و معنوی هر دو حاصل شود. اشیای ریاضی که مجرداتی ساخته‌ی ذهن انسانی هستند، همان ارتباطی را با مصداق‌های واقعی خود دارند که ظاهر با باطن و یا نماد با حقیقت دارد.

همه‌ی این مخلوقات ذهنی با یکدیگر ارتباطی حقیقی دارند. تعمیم و تخصیص که از انواع ارتباطات است، به تجرید و تجلی یا عروج و نزول شباهت دارد. از این‌رو زبان ریاضیات مانند زبان حقیقت زبانی لایه‌لایه است. درک زبان ریاضی مانند درک زبان معنویات دارای سطوح مختلف توانایی مجرد ذهنی است و هر کس به تناسب ذهن خود قادر خواهد بود. بعضی از تجلیات حقایق مورد بحث را ادراک کند. زبان ریاضیات به علت دقت مستتر در آن و رابطه معین بین اجزای آن در تربیت ساختار ذهنی تواناست و به علت لایه‌لایه بودن برای تربیت ساختارهای شناختی و معرفتی مناسب است. مسائل واقعی که در ارتباط با حقایق باطنی انسانی نیز هستند، زمینه‌ی مناسب برای آموزش اخلاق و معارف الهی در دل ریاضیات را فراهم خواهند آورد و دانش‌آموزان را به علمی معنوی تجهیز خواهند کرد.

مقدمه درباب جبر

هندسه و حساب دو شاهراه موازی در ریاضیات هستند که در سراسر تاریخ

این علم، جریان‌های فکری مختلف را دربرگرفته‌اند. علم جبر از همرسی هندسه و حساب، شکل و عدد، تصویر و اندازه در یونان باستان شکل گرفت و تا به ثمر رسیدن زبان جبری معادلات قرن‌ها طول کشید. مفهوم طول یک پاره‌خط اولین ظهور مفهوم متغیر بوده است که پدیده‌ای یونانی است، اما زبان نمادین جبر توسط خوارزمی ابداع شد؛ هرچند مفهوم حل معادله در تمدن چین باستان و تمدن بابل پیش از آن شکل گرفته بود. جبر علم شناخت عدد و ساختارهای عددی است. کلمه‌ی عدد خود یک واژه‌ی قرآنی است.

کتاب «جبر و معادله» یک خواهر دوقلو دارد به نام «ترسیم‌های هندسی» که در آن دو سعی شده است تا توازی داستان هندسه و جبر هم در بستر تاریخ و هم در بستر فلسفه و هم در بستر آموزش به نمایش گذاشته شود.

مقدمه در سبک نگارش

از آن‌جا که مخاطبان این کتاب معلمانی فرهیخته و درس آموخته‌اند، نگارنده در مباحث ریاضی نزد ایشان حرفی نو برای گفتن ندارد. لذا تأکید بر مبانی فلسفی ریاضیات و نکات آموزش ریاضی، اهم محتوای کتاب را تشکیل خواهد داد. در مباحث فلسفی بر پشتوانه‌های فرهنگ ریاضی در تمدن بشری تأکید خواهیم کرد و در آموزش ریاضی نگاهی به مباحث انسان‌شناسی خواهیم داشت. این رویکرد به‌ناچار اختصار بسیار را ایجاب می‌کند، چرا که پرگویی در مباحث فلسفی و انسان‌شناسی در حد این نگارنده نیست. برای جبران اختصار بدنه‌ی اصلی کتاب، مثال‌هایی ملموس در سطح ریاضیات دبستان، راهنمایی و دبیرستان خواهیم آورد و اگر عمق مباحث اجازه دهد، مثال‌هایی هم در سطح ریاضیات دانشگاهی ضمیمه خواهیم کرد تا دیدگاه‌های فلسفی و انسان‌شناسانه در محک عمل خود را به نمایش بگذارند و خواننده‌ی حکیم در صحنهٔ منصفانه‌ی رد و قبولی این دیدگاه‌ها قرار گیرد؛ با این وصف تمنّا دارم تا وقتی که دیدگاهی را در عمل نسنجیده‌اند، به آن دل نسپارند که حکیمان هرگز چنین نمی‌کنند.

فهرست

تقدیم به همه‌ی بچه‌های عزیزم، بچه‌های ایران، چه آن‌ها که هستند و چه آن‌ها که نیستند اما بعداً هست خواهند شد.

فهرست اجمالی

فصل ۱

جبر چیست؟

البته قرار است خواننده پس از مطالعه‌ی این کتاب، به‌خصوص بخش‌های پایانی، با این سؤال دست و پنجه نرم کند، اما علم جبر که فرزند علم هندسه و علم حساب است، همگام با تکامل تمدن‌های بشری دستخوش تغییر و تحول بوده است. مسلماً علمای اعصار مختلف در برابر این سؤال که جبر چیست، یکسان نمی‌اندیشیده‌اند و این به خاطر اختلاف دیدگاه‌های دانشمندان نیست، بلکه درک بشر از علم جبر در بستر تاریخ علم تکامل یافته است. فیثاغورس و اقلیدس در مورد جبر تفکر مشابهی نداشته‌اند و نه ارشمیدس و دیوفانتوس شبیه هم فکر می‌کرده‌اند. خوارزمی و خیام دیدگاه یکسانی نداشته‌اند و دکارت و فرما درک همسنگی از جبر نداشته‌اند. آبل و گالوا آرای متفاوتی داشتند. هم‌چنین است تفاوت دیدگاه‌های هامیلتون و نوتر یا فرمول‌بندی‌های گروتندیک و کانتسویچ که تعاریف یکسانی از علم جبر ندارند. ولی این همه یک سیر تاریخی و یک مسیر تکامل برای درک بشر از علم جبر بوده است و بی‌شک در این‌جا ثابت نخواهد ماند و پیش‌تر خواهد رفت.

مفهـوم متغیر در علم جبر به مادرش هندسـه بازمی‌گـردد و مفهوم عدد از پدرش حسـاب وارد این علم شـده است و هر دوی این مفاهیم در کنار یکدیگر در بدو تولد علم جبر با در نظر گرفتن طول پاره‌خط و مفهوم اندازه‌گیری به‌وجود آمده‌اند. روش ما در به دست آوردن درکی سرتاسری و فلسفی از تاریخ تحول علم جبر، این است و آن این‌که به شرایط و چگونگی تولد این علم و جایگاه اولیه‌ی آن در بین علوم نظر کنیم و پدران و فرزندانش را بشناسیم و سپس سعی کنیم مرز توانایی‌های معرفتی این علم را پیش‌بینی کنیم. این روشی کلی است که ادعا می‌کند جنس تحولات و ابعاد فلسفی درگیر در هر علم که از تاریخ آن قابل استخراج است، همه در نطفه‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن علم قابل بازشناسی است.

بـرای درک تاریـخ تحول علم جبر، درک تاریخ تحـول مفاهیم حرکت و عدد هر دو لازم اسـت. در هر عصری درک بشـر از حرکت و درجه‌ی انتزاع او از مفهوم عدد، تعریفی جدید از علم جبر را ارائه می‌دهد که پیوسـته بازسـازی می‌شـود. برخی از این تحولات از هندسـه و برخی از حسـاب سرچشمه می‌گیرند. عموماً تحول مفهوم حرکت از علم هندسه و تحول مفهوم عدد از حساب وارد این علم می‌شود. با وجود این‌که این دو مفهوم قرن‌ها در کنار یکدیگر زیسـته‌اند، مفهوم عدد متغیر تنها توسـط خیام مطرح شـد که راه را برای هندسـه عددی دکارت و سپس هندسه جبری آبل باز کرد. تقارن تولد مفاهیم متغیر و عدد هندسـی، ظهور هندسـه عددی دکارت و هندسه جبری آبل را از پیش نوید می‌داد. تولد این مفاهیم تحت‌تأثیر ظهور مفهوم اندازه‌گیری ارتباط هندسه‌ی جبری با علم فیزیک را پیش‌بینی می‌کرد که در اواخر قرن بیستم اتفاق افتاد. جالب این‌جاسـت که خیام مفهوم عدد متغیر را برای مدل‌سـازی زمان توسـط محور اعداد به کار برد که نشان می‌دهد از بدو تولد هندسه‌ی عددی، ارتباط با فیزیک مورد توجه بوده است. دکارت نیز هندسه‌ی دکارتی را به عنوان اولین مدل از فضای نامتناهی ارائه کرد که در آن ارتباط با فیزیک مجدداً آشکار است.

سـرانجام مفاهیم عدد و حرکت منجر به مطالعه‌ی ساختارهای عددی و حرکت و دگردیسی آنان شدند که مدرن‌ترین تعریف جبر را به دست می‌دهند. این‌که جبر علم

مطالعه‌ی ساختارهای عددی و دگردیسی آن‌هاست. این‌که ساختار عددی چیست، در نیمه‌ی دوم قرن نوزدهم شکل گرفت و این‌که چگونه می‌توان ساختارهای عددی را حرکت داد و خانواده‌ای از آنان را مطالعه کرد، در نیمه‌ی دوم قرن بیستم معنی پیدا کرد، اما هنوز هم مفهوم عدد ولذا مفهوم ساختار عددی و دگردیسی آن دستخوش تحول است. ارتباط با فیزیک هنوز هم درخشان و آشکار است.

اما عدد نزد فیثاغورس چه معنی داشت؟ فیثاغورس از ۵۶۰ تا ۴۸۰ قبل از میلاد زیست و در جوانی تالس پیر را ملاقات کرد و به ترغیب او به مصر سفر کرد. فیثاغورس هم مانند تالس اصلاً فینیقی بوده است. او سی سال برای ساختن شخصیت خود به سفر پرداخت. او به مصر، بلاد عرب، فینیقیه و کلده، ایران، هند و بابل سفر کرد و برای کسب تجربه، این جمله را دستور کار خود قرار داد که هرگاه به خارج از دیار خود سفر می‌کنی، مرز و بوم خود را فراموش کن! چنین عقیده‌ای از کسی که معتقد به تناسخ بوده است، بعید به نظر نمی‌رسد. فلسفه‌ی فیثاغورس که عصاره‌ای از ادیان سرزمین‌هایی بود که در آن‌ها سفر کرده و در بین کاهنانشان نفوذ کرده بود، بر این که جوهر همه چیز عدد است، پایه‌گذاری شده بود. او عالم را جسمی کروی و زنده می‌دانست که مرکز آن زمین است. زمین نیز از دیدگاه فیثاغورس کروی است و از غرب به شرق دوران می‌کند. خسوف ناشی از حایل شدن جرمی در برابر خورشید است. او نفس را سه جزء می‌دانست. عاطفه که مرکز آن قلب است و شهود و عقل که مرکز آنان مغز است. عاطفه و شهود را بین انسان و حیوان مشترک می‌دانست، اما عقل را مختص انسان می‌دانست. اعتقاد داشت نفس پس از مرگ در برزخ پاک می‌شود و در جسم دیگری حلول می‌کند. انسان به نیروی فضیلت باید از حلول در بدن‌ها خلاصی یابد.

روش علمی فیثاغورس تعمیمی وسیع مبتنی بر مشاهداتی محدود بود. مثلاً اعتقاد او که جوهر همه چیز عدد است، چنین شواهدی داشت: سه قطعه چوب به نسبت‌های ۳، ۴ و ۵ همیشه زاویه‌ی قائمه می‌سازند؛ نسبت‌های مساوی در آلات موسیقی نتهای مشابه را به دست می‌دهند؛ و در حرکت اجرام آسمانی ثوابتی وجود دارند. استدلال

او این بود که چون الحان و اشیا با عدد تبیین می‌شوند، شاید جوهر همه‌ی آن‌ها عدد باشد. فیثاغورس جبر هندسی را پایه‌گذاری کرد و نظریه‌ی اعداد را چیزی فراتر از حساب عملی می‌دانست. هرم، مکعب و دوازده وجهی منتظم را می‌شناخت. کلمه‌ی تئوری و کلمه‌ی موناد را که مبنای فلسفه‌ی لایبنیتز را تشکیل می‌دهد، مدیون فیثاغورس هستیم. او در کرت مدرسه‌ای ساخت که در آن برای شاگردانش قوانینی وضع کرد. منع خوردن گوشت، تخم‌مرغ و لوبیا ریشه در اعتقاد او به تناسخ داشت. در پایان روز هر فردی وظیفه داشت که به محاسبه‌ی نفس بپردازد. وظیفه‌ی شاگردانش تطهیر جسم و روح از راه پرهیز و تحصیل معارف بود. برنامه‌ی درسی مدرسه‌ی او هندسه، حساب، نجوم و موسیقی بود. فیثاغورسیان راه درازی را پیمودند تا ریاضیات یونان ریشه‌های محکمی یافت. در مورد فیثاغورسیان داستان‌های بسیاری گفته می‌شود که خواننده بی‌گمان درباره‌ی آن‌ها بسیار شنیده است.

مفهوم معادله و حل آن بسیار قبل از فیثاغورس توسط ریاضی‌دانان باستان مطرح شده بود. ریاضی‌دانان باستان حساب را در نجوم و بازرگانی و معماری به‌کار می‌برند. لوحه‌هایی هم برای آموزش ریاضیات نوشته می‌شد که در آن به حل عده‌ای از مسائل همت گماشته می‌شد. در طی این محاسبات، گاهی داده‌های اولیه از دست می‌رفتند و برای بازیابی آنان ریاضی‌دانان ناچار بودند که عملیات را به طور معکوس انجام دهند. این منجر به ظهور مهارت حل معادله و مفهوم معادله‌ی عددی شد. حتّی گاهی دستگاه معادلات نیز در لوحه‌ها و پاپیروس‌های باستانی موردتوجه قرار می‌گرفت. دستگاه معادلات در چین نیز به طور موازی با مصر و بابل موردتوجه قرار گرفت و اهمیت یافت. مفهوم حل معادله نزد دیوفانتوس که او را پدر علم جبر می‌دانند، به حل معادلات دیوفانتی تبدیل شد و نزد خوارزمی منجر به ظهور مفاهیم جبر و مقابله گردید. نام این علم از کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی به عاریت گرفته شده است. در این میان، اقلیدس دیدگاهی شبیه به فیثاغورس داشت که علم اعداد را بر اصول موضوعه‌ای استوار کرد و استدلال ریاضی در اثبات احکام عددی را برای همیشه در علم جبر جاودانه ساخت.

فعالیت/ دبستان ....

اشکال سادهی هندسی مانند مثلث، مربع، پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی را در نظر بگیرید. روی رئوس هر یک از این شکل‌ها یک مهره قرار دهید. حال ردیف دوم مهره‌ها و سپس ردیف سوم و چهارم را بچینید. اعداد مثلثی، مربعی، مخمسی و مسدسی تشکیل خواهند شد. برای هر یک از این شکل‌ها دنباله‌ی اعداد مربوطه را تشکیل دهید. سپس سعی کنید در هر یک از دنباله‌ها الگویی بیابید و جمله‌های بعدی آن‌ها را حدس بزنید. مجموعه‌ی این فعالیت‌ها به چه تعریفی از علم جبر اشاره می‌کنند؟

فعالیت/ راهنمایی ....

برای اتحادهای جبری تعبیری هندسی بیابید. برای نشان دادن تساوی‌های با مقادیر صحیح یک الگوی هندسی گسسته و برای تساوی‌های با مقادیر حقیقی یک الگوی هندسی پیوسته ارائه دهید. آیا الگوی هندسی شما برای مقادیر منفی متغیرها هم جواب می‌دهد؟ سعی کنید الگویی هندسی پیدا کنید که برای مقادیر منفی نیز جوابگو باشد. این فعالیت، دانش‌آموزان را به چه تعریفی از جبر راهنمایی می‌کند؟

فعالیت/ دبیرستان ....

یک چند جمله‌ای با در دست داشتن ضرایبش به طور یگانه مشخص می‌شود. آیا با داشتن ریشه‌های حقیقی یک چندجمله‌ای به طور یگانه مشخص می‌شود؟ آیا با داشتن نقاط ماکزیمم و مینیموم یک چندجمله‌ای به طور یگانه مشخص می‌شود؟ با داشتن هر دوی این اطلاعات چه‌طور؟ اگر ریشه‌های حقیقی و مختلط هر دو را داشته باشیم، چه‌طور؟ با این وصف طبیعی‌تر است مطالعه چند جمله‌ای‌ها را در اعداد حقیقی دنبال کنیم یا در اعداد مختلط؟ این فعالیت چه تعریفی از جبر را پیش‌رو می‌آورد؟

فعالیت / دانشگاه ....

مطالعه میدان‌های توابع توسـط ریمان آغاز شـد. کرونکر دریافت که قضایایی که برای میدان‌های توابع برقرارند، در مورد میدان‌های اعداد نیز قابل اثبات هستند. ابتدا تئوری میدان‌های توابع موجب پیشرفت تئوری میدان‌های اعداد شد، اما سرآخر این دو به دو تئوری موازی که پیشـرفت یکدیگر را تحت‌تأثیر قرار می‌دهند، بدل شـدند. سـاختار این دو نظریه کم و بیش مشـترک اسـت. این شباهت‌ها بین این دو تئوری ما را به سوی چه تعریفی از جبر رهنمون می‌کنند؟

۱ـ۱. کتاب اصول اقلیدس و اتحادهای جبری

هر علاقه‌مند به ریاضیات باید بداند که کتاب اصول اقلیدس مهم‌ترین اثر ریاضی و لذا مهم‌ترین اثر در تمام علوم برگرفته از علم یونانی اسـت؛ بعد از کتب آسـمانی پرخواننده‌ترین کتاب بوده است و اکثر ریاضی‌دانان بزرگ اسلامی بر آن شرح نوشته‌اند. سـبک نـگارش کتاب اختصـار در عین کمال دقت اسـت و روش اصل موضوعه‌ای مهم‌ترین ابزار اقلیدس در این راه است. روش اصل موضوعه‌ای و هم‌چنین مقدمات ظهور دقت ریاضی اقلیدسـی پیش از او در مکتب ریاضیات یونان شـکل گرفته بود. او قضایای پراکنده‌ی بزرگان پیش از خود را جمع کرد و بسـیاری از این نتایج را به کمال رساند و بعضی را که با دقت کمی اثبات شده بود، مستحکم‌تر کرد و این کار را چنان هنرمندانه انجام داد که کتاب او همواره مهم‌ترین کتاب ریاضی بوده است و به گمان قوی چنین نیز خواهد ماند. به توصیه‌ی اینشتین هر کس می‌خواهد ریاضی‌دان بزرگی شود، حتماً باید اصول اقلیدس را بخواند.

در مورد زمان دقیق تولد و مرگ اقلیدس، اطلاعات دقیقی دردسـترس نیسـت. اما قرائن نشان می‌دهد بین شاگردان افلاطون و ارشمیدس ارتباط برقرار کرده است. لذا دوران شـکوفایی او چیزی حدود ۳۰۰ سـال قبل از میلاد بوده اسـت. او در اسکندریه تدریس می‌کرد و بنیانگذار مدرسـه‌ی بزرگ اسـکندریه محسوب می‌شود. پیش از او نیز کتاب‌هایی با نام «اصول» نوشـته شـده بود، اما کتاب او از همه کامل‌تر اسـت و

معیارهایی محکم برای دقت در استدلال را پایه‌گذاری می‌کند. گامی قطعی در هندسی کردن ریاضیات برداشت و صورت استدلال هندسی را بر همه‌ی ریاضیات تحمیل کرد. این روش بر پرینسیپیای نیوتن، نقد خرد محض کانت و اخلاق اسپینوزا تأثیر گذاشت و مدت دو هزار سال هسته‌ی ریاضیات محض را تشکیل داد. اقلیدس شخصیتی دائرةالمعارفی داشت و تسلط او بر شاخه‌های مختلف ریاضی نقش تعیین‌کننده‌ای در فرهنگ ریاضی و جهت‌گیری ریاضی ایفا کرد. اما محتویات اصول به هیچ‌وجه تمام ریاضیات یونان را شامل نمی‌شود، بلکه هسته‌ی اصلی آن را شکل می‌دهد. او چندین کتاب درسی دیگر نیز نوشته که فقط بعضی به جای مانده است. این کتاب‌ها در زمینه‌های هندسه، نورشناسی، اخترشناسی، موسیقی و مکانیک هستند. کتاب گمشده‌ی اقلیدس درباب مقاطع مخروطی، خلاصه مطالعات منایخموس، آریستائوس و دیگران در رشته‌ی مخروطات است. کشفیات اقلیدس نظریه‌ی پرتابه‌ها را پیش راند و مکانیک، دریانوردی و نجوم را ترقی داد.

باید متذکر شد که به جز روش استدلالی که در کتاب اقلیدس آمده است، روش‌های استدلال دیگری نیز از یونان باستان تاکنون معمول بوده است. اما از آن‌جا که در استاندارد دقت ریاضی قابل مقایسه با اصول اقلیدس نبوده‌اند، یا به مرور فراموش شده‌اند و یا مانند روش بی‌نهایت کوچک‌های لایبنیتز قبول عام نیافته‌اند و یا به طور پنهانی توسط ریاضی‌دانان بزرگ برای کشف قضایای مهم به کار می‌روند و سپس سعی می‌کنند این قضایا را به روش اقلیدس به اثبات رسانند تا جمهور ریاضی‌دانان آن را مورد پذیرش قرار دهند. از این‌رو یک تأثیر مخرب کتاب اصول اقلیدس، ثبت نشدن روند تفکر ریاضی‌دانان و مکاشفاتی است که به اکتشاف صورت قضایا منجر شده‌اند. لازم است بدانید که اکثر ریاضی‌دانان اسلامی از این عیب مبرّا بوده‌اند، اما پس از قرون وسطا بازگشت به اقلیدس، استانداردهای نگارش ریاضیات در جهان را به عقب بازگرداند.

جبر از دیدگاه اقلیدس کاملاً هندسی است. تمام اعداد به صورت طول پاره‌خط وارد می‌شوند و محاسبات جبری همیشه روابط طولی و مساحتی در اشکال هندسی

هستند. حتّی وقتی در نظریه‌ی اعداد، اعداد زوج و فرد در نظر گرفته می‌شوند، آنان را به صورت طول پاره‌خط مطرح می‌کند. به خوبی آشکار است که چرا معادله‌ی مجرد در زمان دیوفانتوس بسیار بعد از اقلیدس شکل می‌گیرد. ایده‌ی اعداد منفی دکارت ناچار است قرن‌ها صبر کند و مفهوم صفر باید از هند بیاید. حتّی خیام به روش اقلیدس اعتراض دارد که بین نسبت و عدد فرق نمی‌نهد و ضرب دو طول یک مساحت است که دیگر یک طولی نیست.

معادلات جبری درجه‌ی یک و درجه‌ی دو در کتاب اصول رده‌بندی و سپس به روش هندسی حل می‌شوند. دایره برای حل هندسی معادلات درجه‌ی دوم کفایت می‌کند، اما روش یگانه‌ای که برای همه‌ی معادلات درجه‌ی دو کار کند، ارائه نمی‌شود. رده‌بندی معادلات درجه‌ی دوم از این لحاظ مطرح می‌شود که در هر معادله همه‌ی ضرایب باید اعدادی مثبت باشند تا بتوانند به عنوان طول پاره‌خط در نظر گرفته شوند. روابط طولی موردنیاز برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم پیچیده نیستند.

اتحادهای جبری نیز کاملاً به زبان هندسی بیان شده‌اند. قسمت عمده‌ی اتحادها بعدها اصول موضوعه‌ی دستگاه جبری اعداد حقیقی در نظر گرفته شدند و بعضی دیگر از این اصول نتیجه شدند و محاسبات صوری کم‌کم جای تصویرسازی هندسی را گرفتند. بعضی از اتحادها برحسب طول‌ها، بعضی برحسب مساحت‌ها و بعضی برحسب حجم‌ها قابل بیان بودند. محاسبات صوری اتحادهایی را به دست می‌داد که نمی‌شد به سادگی هندسی‌سازی کرد، لذا کم‌کم تفکر اصل موضوعه‌ای کتاب اصول منجر شد که تعبیر هندسی اعداد به فراموشی سپرده شود. اما حتّی تا زمان خیام که معادلات درجه‌ی سه به روش هندسی حل شدند، اعداد با طول پاره‌خط‌ها در تناظر قرار می‌گرفتند.

تلاش و همت پیگیرانه‌ی مسلمانان سرانجام منجر به جداسازی و استقلال جبر از هندسه شد. اما هم‌چنان این شاخه از دو سرچشمه‌ی هندسه و حساب سیراب می‌شود. ریاضی‌دانان مسلمان بسیاری در جهت فهم عمیق‌تر کتاب اصول تلاش کردند. چندین شرح اصول اقلیدس نوشته شد که معروف‌ترین آنان توسط جوهری،

ماهانی، خازن، بوزجانی، ثابت ابن قرّه، کوهی، فارابی، ابن‌سینا، اهوازی، نصیرالدین طوسی، سمرقندی، قاضی‌زاده رومی، نیریزی و عبدالباقی بغدادی نوشته شده بودند. بعضی از این شروح تنها به قسمتی از کتاب اصول می‌پرداختند و برخی همه‌ی ترجمه‌ی عربی را دربرمی‌گرفتند.

آن‌چه کمک کرد جبر مستقل از هندسه بر روی پای خود بایستد، به‌وجود آوردن سنت حل معادله به روش جبری بود که توسط خوارزمی در کتاب «جبر و مقابله» صورت پذیرفت. خوارزمی مفهوم صفر را از هند وارد کرد که به استقلال جبر از هندسه کمک شایانی کرد. اتحادهای جبری در این سیستم توسعه‌یافته نیز معنی پیدا کردند و هنوز قابل بیان توسط مدل‌های هندسی بودند. تنها باید این نکته اضافه می‌شد که مساحت هر پاره‌خط و حجم هر شکل مسطح برابر صفر است که به نوعی مقدمه‌ی نظریه‌ی اندازه محسوب می‌شود.

فعالیت / دبستان ....

مسائلی که در آن‌ها تشکیل معادله‌ی خطی با مضارب طبیعی مطرح شده باشد، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید معادله‌ی مربوطه را تشکیل دهند و با آزمون و خطا جواب آن را پیدا کنند. سپس با کم و زیاد کردن مضربی از متغیر در دو طرف معادله و انجام همین کار با اعداد ثابت، حل معادله را تبدیل به یک تقسیم ساده کنید. می‌توان اعداد منفی را از طریق ساده کردن دو طرف معادله به دانش‌آموزان معرفی کرد.

فعالیت / راهنمایی ....

چند اتحاد جبری ساده را به روش هندسی برای دانش‌آموزان اثبات کنید. سپس جبری دیگری در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید به روش هندسی اثباتی برای آنان بیابند. حال اشکالی هندسی را که به طور منظم به اشکال ساده تجزیه شده‌اند، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آنان بخواهید اتحادی جبری بیابند که

توسط شکل داده شده قابل اثبات باشد.

فعالیت/دبیرستان

فرمولی که برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌دانید در نظر بگیرید. سعی کنید با محاسبات جبری از روی فرمول ریشه‌ها، خود معادله‌ی درجه‌ی دوم را به دست آورید. سپس حدس بزنید به چه روشی این فرمول به دست آمده است. همین کار را برای فرمول کاردانو برای ریشه معادله‌ی درجه‌ی سوم انجام دهید. حال فرض کنید اعداد منفی هنوز مطرح نشده‌اند. سعی کنید همه‌ی این محاسبات را بدون کمک اعداد منفی انجام دهید.

فعالیت / دانشگاه

جبر خطی می‌تواند برای جبری‌سازی هندسه‌ی اقلیدسی در هر بعدی به کار رود. برای مطالعه‌ی هندسه‌ی کروی و هذلولوی در ابعاد بالا یک فرمول‌بندی جبری ارائه دهید که در آن معادله‌ی خط، صفحه و کره صورت ساده‌ای داشته باشد. مخروط نیز تخت است و هندسه‌ی اقلیدسی روی آن برقرار است. یک جبری‌سازی از مخروط ارائه دهید که معادلات خط و دایره در آن ساده باشند. توجه کنید که خمیدگی صفر نتیجه می‌دهد که هندسه‌ی مخروط موضعاً مانند هندسه‌ی صفحه‌ی اقلیدسی است.

۲ـ۱. نقش نمادگذاری در ریاضیات

هر چند ظهور نماد و نمادگذاری در تمدن بشری به دوران ماقبل تاریخ بازمی‌گردد، اما اگر از نمادهایی که برای اعداد به کار می‌رفته صرف‌نظر کنیم، شاید بتوان گفت بنیان‌گذاری نماد و نمادگذاری ریاضی در یونان باستان صورت گرفته است. می‌توان به تاریخ تحول نمادهایی که در ریاضی به کار می‌رفته پرداخت، اما آن‌چه مورد توجه ماست، ساختار نمادین ریاضیات و لایه‌های تجرید آن است که با یکدیگر ارتباط نمادین دارند. برای شناخت ساختار نمادین ریاضیات فلسفه‌های ریاضی که در اوایل

قرن بیستم ظهور کردند، بسیار درس‌آموزند. هرچند قدمت این ساختار نمادین به ریاضیات تالس و فیثاغورس بازمی‌گردد.

مسئله‌ی درک ساختار نمادین ریاضیات، مسئله‌ی ارتباط بین بود و نمود است. از دیدگاه افلاطون مهم‌ترین مسئله‌ی فلسفه‌ی تشخیص حقیقت از نمود است، حقیقتی که تغییرناپذیر است. محک حقیقت ریاضی از دید او دقت ریاضی و استقلال از زمان است. فلسفه‌ی ریاضی ارسطو در تقابل با فلسفه‌ی افلاطون شکل گرفت. او به‌هیچ‌وجه برای شیء حاصل تجرید وجودی مستقل قائل نبود. بنابراین دایره باید در همان چیزی باشد که از آن تجرید شده است یا به تعداد موضوع تجرید دایره داریم. ارسطو به جای مفهوم تجرید کلاس اشیا را جایگزین کرد. ارسطو بین اصول موضوع مشترک بین همه‌ی علوم، اصولی که ریاضی‌دانان صحت آن را فرض می‌کنند، تعاریفی که فرض نمی‌کنند آن‌چه تعریف می‌کنند وجود دارد، و فرضیات وجودی، تمایز قائل می‌شود. لایبنیتز که مانند افلاطون و ارسطو فیلسوف بود مبانی منطق ارسطویی را پذیرفت. از دیدگاه لایبنیتز حقیقت با استدلال عجین است و غیر آن ممکن نیست، اما واقعیت‌ها ممکن است وارونه باشند. اصل عدم تناقض و اصل عدم وقوع بدون دلیل کافی مبنای منطق استدلالی لایبنیتز را تشکیل می‌دهند. در فلسفه‌ی او حقیقت است که مورد بررسی قرار می‌گیرد، نه واقعیت. نظر او در مورد ریاضیات، متفاوت با افلاطون و ارسطوست. گزاره‌های ریاضی در مورد اشیای خاص ایده‌آل‌سازی شده سخن نمی‌گویند، بلکه این گزاره‌ها صحیح هستند، چون انکار آن‌ها از لحاظ منطقی غیرممکن است. این دیدگاه به ریاضیات بسیار نزدیک به منطق است. با تأکید بر این نکته که محاسبه جزء جدایی‌ناپذیر استدلال منطقی است، لایبنیتز روشی ارائه کرد تا ریاضیات و منطق را براساس اصل عدم تناقض و تحویل گزاره‌ها به گزاره‌های بدیهی منطقی استوار کند.

فرگه، راسل و پیروانشان برنامه‌ی لایبنیتز را به اجرا گذاشتند. فرگه و پیروانش ناچار بودند برای تمام مفاهیم و استنتاجات منطقی نمایش سمبولیک و نمادین ارائه دهند. البته در روند اثبات منطقی گزاره به این روش باید در مرحله‌ای از نماد

منطقی به نمادهایی که منطقی به نظر نمی‌رسند، گذر کرد. این گذر از دیدگاه فرگه و راسل توسط تعاریف اتفاق می‌افتد. راسل برخلاف فرگه تعاریف را کاملاً صوری می‌داند، اما از دید منطق واقع‌گرای فرگه تعریف کردن اعداد به معنی خلق آن نیست. تعریف تضمین نمی‌کند که موضوع آن موجود باشد. هدف منطق این است که نشان دهد همه‌ی ریاضیات تعریف‌پذیر براساس تعداد کمی مفاهیم منطقی است و همه‌ی گزاره‌ها اثبات‌پذیر توسط تعداد کمی اصول منطقی است و منطق باید این کار را با استانداردهای بالای دقت و یقین ریاضی انجام دهد.

برخلاف لایبنیتز که مبانی ریاضی را به سوی منطق جدید پیش راند، کانت مقدمات دو فلسفه‌ی دیگر را پیش کشید: صورت‌گرایی هیلبرت و شهودگرایی براوئر که اولی با مفهوم نماد در ارتباط است. هیلبرت ایده‌های کانت را چنین فرمول‌بندی می‌کند که ریاضیات از موجوداتی فرامنطقی تشکیل شده که به طور شهودی به عنوان تجربه مستقیم نزد ما حاضرند و همه‌ی افکار ما را هدایت می‌کنند. عقیده‌ی مشترک کانت، هیلبرت و براوئر این است اگر ریاضیات به توصیف اشیای ریاضی خاص محدود شود و روابط منطقی بین آن‌ها که همه به دقت و روشنی بنا شده‌اند، جایی برای ظهور تناقض نمی‌ماند. صورت‌گرایی هیلبرت برخلاف شهودگرایی براوئر اصرار دارد که می‌توان از مفهوم بی‌نهایت با یک ساختار صوری متناهی سخن گفت.

روش هیلبرت در صورت‌گرایی، اصل موضوعه‌سازی و ارائه‌ی یک مدل است و این آغاز برنامه‌ی حسابی‌سازی ریاضیات است. برای این کار هیلبرت باید ابتدا سازگار بودن علم حساب را ثابت می‌کرد. راه‌حل هیلبرت تکیه بر روش‌های متناهی است، چه این روش‌ها تناقضی به‌وجود نمی‌آورند. پس مسئله‌ی اصلی هیلبرت بازسازی حساب با روش‌های متناهی است. منظور ارائه‌ی یک فرمول‌بندی متناهی از حساب است که هر گزاره‌ی قابل اثبات در آن صحیح باشد و هر گزاره‌ی صحیحی را بتوان با آن فرمول‌بندی به اثبات رساند.

در حساب ساختارهایی هست که کاملاً نامتناهی است. از جمله اعداد حقیقی هم از نظر وجود اعداد متعالی و هم از نظر کاردینال آن که از اعداد صحیح بیش‌تر است.

تسرملو نیز یکی دیگر از اصول غیرساختارگرایانه ریاضیات را کشف کرد و آن اصل انتخاب است. او متوجه شد که این اصل نتیجه می‌دهد هر کلاسی خوش‌ترتیب است ولذا هر دو کاردینالی قابل مقایسه‌اند.

در صورت‌گرایی هیلبرت اضافه کردن کلیات بی‌نهایت چیزی مشابه اضافه کردن نقاط در بی‌نهایت در هندسه‌ی تصویری بود که قبلاً هم در ریاضیات پیش آمده بود. مفاهیم ایده‌ال و گزاره‌های ایده‌آل در مورد بی‌نهایت که لازم بود با ریاضیات متناهی تعامل داشته باشد، باید به ریاضیات اضافه می‌شد.

فرمول‌بندی حساب باید در یک فراتئوری صورت می‌گرفت که در آن قواعدی برای فرمول ساختن و گزاره پیشنهاد کردن وجود داشته باشد. سازگار بودن صوری این فراتئوری معادل سازگار بودن منطقی تئوری حساب خواهد بود. از آن‌جا که این تئوری صوری بر خود استوار است، نه بر علم حساب، خود می‌تواند موضوع علم ریاضی دانسته شود. این تفکر موجب افراط در فلسفه‌ی صورت‌گرایی شد، گویی که ریاضیات چیزی جز تئوری‌های صوری و نمادین نیست. حتّی صورت‌گرایی افراطی انکار می‌کند که ریاضیات قابل استنتاج از منطق است. در هر حال فرمول‌بندی فرگه از منطق با پارادوکس راسل و صورت‌گرایی هیلبرت با اصل ناتمامیت گودل برچیده شدند.

این مقدمه بر فلسفه‌های ریاضی اوایل قرن بیستم نشان می‌دهد که درک مفهوم نماد با درک درستی از لایه‌های تجرید ریاضیات ممکن می‌شود. ریاضیات علمی است که از چندین لایه‌ی تجرید تشکیل شده است که با یکدیگر رابطه‌ی تعمیم و تخصیص دارند. این رابطه‌ی تعمیم و تخصیص بسیار شبیه رابطه‌ی بود و نمود است که به درک مفهوم نماد کمک می‌کند. با این وصف مفهوم نماد در ریاضیات بسیار فراتر از نمادهای اعتباری است، بلکه به نمادهای حقیقی مربوط می‌شود. منظور از نمادهای حقیقی، ارتباط نمادینی است که به خاطر ارتباط ذاتی بین ساختارها معنی پیدا می‌کنند، نه به اعتباری که ما برای آنان قائل می‌شویم.

در واقع علم جبر درک همین ارتباطات نمادین را شامل می‌شود. آن‌چه کمک

می‌کند این ارتباطات نمادین درک شوند، مفهوم ساختار ریاضی است. البته علم جبر به عنوان علم ساختارها بسیار مدرن است و علم جبر تا اوایل قرن نوزدهم علم حل معادلات و تا اواخر قرن نوزدهم، علم شناخت ساختارهای عددی محسوب می‌شده است. مفهوم ساختار ریاضی در زمان گالوا با معرفی ساختار گروه که یک ساختار غیرعددی است، شروع شد و با علم نظریه‌ی رسته‌ها به کمال خود رسید. درک مفهوم ساختار کمک شایانی به درک مفهوم نماد حقیقی و رابطه‌ی نمادین خواهد کرد.

با این وصف، نمادگذاری در ریاضیات، هنری است که موضوع آن تعریف نمادهایی اعتباری است که ارتباط بین آن‌ها با رابطه‌ی نمادین حقیقی هماهنگی داشته باشد. به همین دلیل است که بسیاری از ساختار و نمادهایی که توسط ریاضی‌دانان مطرح می‌شود، به زودی فراموش می‌شوند و به همین دلیل است که مهارت معرفی ساختارها و نمادهای ماندگار مهارتی است که فقط توسط بعضی ریاضی‌دانان بزرگ احراز می‌شود و این‌که نمادی مورد قبول جمهور ریاضی‌دانان قرار بگیرد، تصادفی نیست و از قوانینی پیروی می‌کند.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید برای ارقام صفر تا نه نمادهای ساده‌ای معرفی کنند و با کمک آن نمادها محاسباتی چند به انجام رسانند. از آنان بخواهید برای مشخص کردن یک پاره‌خط، یک خط، یک نیم خط و یک دایره نمادهایی ابداع کنند. هم‌چنین برای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، طول پاره‌خط و مساحت یک شکل نمادهایی ارائه کنند و در حل چند مسئله به کار ببرند.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید بررسی کنند که چرا الگوریتم‌هایی که در دبستان خوانده‌اند و محاسبات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را ساده می‌کنند، درست کار می‌کنند. پس از درک درستی الگوریتم‌ها، از دانش‌آموزان بخواهید خود الگوریتم‌هایی برای جمع

و تفریـق و ضـرب و تقسیم ارائه کنند و برای به کار بـردن راحت‌تر آن‌ها نمادهایی معرفـی کننـد مثلاً اعـداد را برای ضرب کردن چگونه کنار هم بچینند که به سـهولت محاسبات کمک کند.

فعالیت /دبیرستان..

چند جمله‌ای‌ها را به عنوان توسـعه‌ای از اعداد حقیقی در نظر بگیرید. می‌توان جمـع و تفریـق و ضـرب چندجمله‌ای‌ها را تعریف کرد؛ به طـوری که با جمع و تفریـق و ضـرب چند جمله‌ای‌های ثابت تطابق داشـته باشـد. برای این‌که خارج قسـمت چند جمله‌ای‌ها نیز قابل تعریف باشـد، چند جمله‌ای‌ها را به توابع گویا توسـعه می‌دهیم. جمع و تفریق و ضرب و تقسـیم توابع گویا را تعریف کنید. حال سـعی کنیـد حل معادلات خطـی و درجه‌ی دوم و بالاتر را بـا ضرایب توابع گویا انجام دهید.

فعالیت / دانشگاه..

اکثـر نمادگذاری‌هـای حسـابان از ریاضی‌دانان قرن ۱۸ اویلر به‌جا مانده اسـت. روش تحقیـق او چنیـن بوده اسـت که ابتدا یک موضوع اصلـی را مورد تحقیق قرار می‌داده و شاخه‌های فرعی آن را مشخص می‌کرده است. سپس در هر یک از شاخه‌ها مقاله‌ای می‌نوشـته و برای یک دهه موضوع را رها می‌کرده اسـت. پس از یک دهه در یک مقاله‌ی توصیفی تحقیقات انجام شده را در یک مقاله‌ی اصلی خلاصه می‌کرده و موضوعات فرعی جدیدی را مشخص می‌کرده و به همین روش ادامه می‌داده است. از این‌رو تحقیقات اویلر از دیدگاه آموزشی از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند. سعی کنید نمادگذاری جدیدی برای مشتق و انتگرال ارائه کنید.

۳-۱. تفکر محاسباتی

محاسـبات تقریباً تمام ریاضیات را دربرگرفته اسـت و تفکر محاسـباتی به طور

اساسـی بـه نمایش نمادین حقایق ریاضی تکیه می‌زند. تنهـا با به کار بردن نمادها و کشف قوانینی که در محاسبه با نمادها مجاز است، محاسبه معنی پیدا می‌کند. این، هم در چارچوب جبری‌سازی دکارت می‌گنجد و هم در چارچوب حسابی‌سازی هیلبرت. برنامه‌ی دکارت این بود که تمام مسـائل ریاضی را به زبان جبری تبدیل و سـپس با کمک ابزارهای جبری حل کند. هندسه‌ی عددی دکارت در همین راستا به‌وجود آمد. برنامه‌ی هیلبرت این بود که تمام ریاضیات را اصل موضوعه‌سازی کند. سپس با کمک حساب مدل‌هایی برای این اصول موضوعه ارائه کند که سازگار باشند. در هر دوی این برنامه‌های تحقیقاتی، تفکر نمادین و محاسبات نمادین نقشی اساسی ایفا می‌کنند.

تفکر محاسـباتی از آن‌جا اهمیت دارد که لازم نیسـت در هر مرحله‌ی محاسـبات تطابق آن‌ها را با موضوع نمادها مقایسه کنیم. این به روش کار فیزیک‌دانان بسیار نزدیک اسـت. فیزیک‌دانـان ابتدا فرضیات فیزیکی خود را به زبـان ریاضی ترجمه می‌کنند، سپس به محاسبه می‌پردازند. سپس نتایج محاسبات را به زبان فیزیک برمی‌گردانند و نتیجه‌ی فیزیکی می‌گیرند، اگر از آنان بخواهیم تعبیر فیزیکی تمام مراحل محاسبات را بیان کنند، عاجز می‌مانند. درست به دلیل همین عجز است که تفکر محاسباتی اهمیت دارد و می‌تواند ما را به نتایجی برسـاند که اگر بخواهیم مسـتقیماً به آن‌ها برسـیم، کار بسیار پیچیده‌ای را پیش‌روی خود قرار داده‌ایم.

تفکر محاسباتی در هندسه‌ی محاسباتی بسیار کارآمد بوده است. هندسه‌ی دکارتی به ما اجازه می‌دهد تا با حساب اعداد حقیقی و ساختار جبری حاکم بر آن، به روش تحلیلی تمام قضایای هندسـه‌ی اقلیدسـی را به اثبات رسانیم. در حالت بعد ۲ کاربرد اعداد مختلط حتّی کار را از این هم سـاده‌تر می‌کند. در اواخر قرن نوزدهم هامیلتون اعداد چهارگان را معرفی کرد و به وسیله‌ی آن‌ها مسائل هندسه‌ی اقلیدسی در بعد ۳ را به روش جبری حل کرد. اوج موفقیت روش‌های جبری در حل مسائل هندسی در هندسـه‌ی جبری محاسـباتی ظاهر شده است. در این شاخه جبر جابه‌جایی به کمک درک ساختارهای هندسی می‌آید. نظریه‌ی تقاطع، نظریه‌ی تکینگی و نظریه‌ی فضاهای مدولی مثال‌های مهمی در این زمینه هستند.

شاید بتوان گفت تفکر محاسباتی مرتبه‌ای خاص از ادراک است و پس از تجرید به تفکر جبری منجر می‌شود. برای مثال، محاسبات عددی که در تمدن‌های باستانی انجام می‌شد، گاهی ایجاب می‌کرد که معکوس محاسبات انجام شود تا مقدارهای اولیه به دست آید. برای مثال،اگر لوحه‌ای می‌شکست و به اعدادی که محاسبات با آن شروع شده بود نیاز بود، روند معکوس تنها چاره بود. این منجر شد که مفهوم معادله تجرید و دستگاه دو معادله‌ی دو مجهول مطرح شد. برای مثال، اگر جمع دو عدد و ضرب دو عدد را داشته باشیم، آن دو عدد کدام‌اند؟ این سؤال منجر به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم شد و الی آخر. به این ترتیب، از تجرید محاسبات است که علم جبر شکل گرفته است. بنابراین می‌توان تفکر محاسباتی و تفکر جبری را دو لایه‌ی تجرید مختلف فرض کرد که بین آن‌ها رابطه‌ی نمادین برقرار است؛ یعنی آن لایه‌ی تفکر که مجردتر است، در لایه‌ی تفکر ملموس‌تر تجلی می‌کند و آن‌که ملموس‌تر است، نمادی است برای لایه‌ی عمیق‌تر.

حال که می‌خواهیم تفکر محاسباتی را یک لایه‌ی ادراک بدانیم، باید بتوانیم این لایه را توصیف و خصوصیات آن را بیان کنیم و مهارت‌های لازم برای آن را بشماریم. این کار برای آموزش لایه‌های مختلف تجرید تفکر نیز اهمیت بسیاری دارد. آن‌چه در محاسبه مورد تأکید است، کاربرد اعداد است. البته به معنی تعمیم‌یافته‌ی آن. بی‌دلیل نیست که حساب و محاسبه از یک ریشه هستند. نکته‌ی دیگری که محوریت دارد، مسائل زبانی است. اجزای مختلف محاسبات بدون ترجمه به زبان‌های محاسباتی مختلف، نمی‌توانند یک کل را تشکیل دهند؛ چراکه رابطه‌ی بین اجزا فقط وقتی هم‌زبان باشند، امکان دارد. پس مهارت ترجمه از یک زبان محاسباتی به زبانی دیگر، از مهارت‌های محاسبه است. هرچند برای ترجمه نیاز هست که موضوع نمادها در دو طرف موردتوجه قرار گیرد و مقایسه شود، که این خود مهارت دیگری است.

سعی می‌کنیم روند محاسبات را تا جایی که به نتیجه می‌رسند، توصیف کنیم. ابتدا شرایط مسئله را به زبان عددی ترجمه می‌کنیم. سپس قیود مسئله را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم نتایج آن‌ها را بشناسیم. اگر موفق شویم نتیجه‌ای را بیابیم که با قیود

قبلی به دست آمده تطابق داشته باشد و معادل باشد، شانس آن وجود دارد که بتوانیم عمل ترجمه از یک زبان محاسباتی به زبانی دیگر را انجام دهیم و قیود موردنظر را به زبان دوم ترجمه کنیم و همین‌طور الی آخر؛ یعنی تا جایی که قیود به نتایج زبانی منجر شوند که همان چیزی است که مطلوب است.

سؤال این‌که آیا تفکر محاسباتی به یک‌سری ترجمه بین فرمول‌ها و نمادها خلاصه می‌شود و به تلاش‌هایی صرفاً زبانی محدود می‌گردد؟ پاسخ این‌که دقیقاً بله! و اگر تفکری متعالی‌تر از تفکر محاسباتی باشد، دقیقاً همان چیزی است که به آن می‌گوییم تفکر جبری که البته باید در جای خود شناخته شود و مهارت‌های مربوط به آن تحلیل و بررسی گردند. بلکه اگر بخواهیم تفکر جبری را یک لایه‌ی ادراک بدانیم، باید بتوانیم آن را توصیف و خصوصیات آن را بیان کنیم.

جالب این‌جاست که اگر به تاریخ تکامل علم ریاضیات نگاه کنیم، ابتدا ابعاد ملموس‌تر و سپس ابعاد مجردتر ریاضیات به ترتیب شکل گرفته‌اند. اما رابطه‌ی تجلی معکوس تکامل تاریخی است. تجلیات از مجردترین ابعاد شروع می‌شوند و به ملموس‌ترین ابعاد ختم می‌گردند. برای مثال، ظهور تفکر محاسباتی در سیر تکامل تاریخی ریاضیات بر ظهور تفکر جبری مقدم بوده است، اما این تفکر جبری است که مجردتر است و بر تفکر محاسباتی که ملموس‌تر است، قوانینی را دیکته می‌کند.

شبیه همین نظام در خلقت انسان نیز دیده می‌شود. ابتدا جسد او شکل می‌گیرد و کامل می‌شود و سپس ابعاد مجردتر وجود او خلق می‌شوند و تصویر می‌پذیرند. اما پس از این‌که لایه‌های تجرید هستی انسان شکل گرفتند و ثابت شدند، تجلیات آیات الهی از مراتب مجردتر آغاز می‌شوند و لایه به لایه به سوی ابعاد ملموس‌تر سیر می‌کنند. این نکته از نظر شناخت‌شناسی بسیار اهمیت دارد که ساختار شناخت انسانی در ساختار علمی که او خلق می‌کند، متجلی می‌شود. لایه‌های تجرید ریاضیاتی که انسان به‌وجود آورده است، ساختاری شبیه خود انسان دارند. این نکته نه تنها در ریاضیات، بلکه در تمام علوم بشری قابل مشاهده است.

فعالیت / دبستان ....

کار با چرتکه را به دانش‌آموزان آموزش دهید. با تمرین به زودی قادر خواهند بود چندین عدد سه‌رقمی را پشت سرهم جمع و تفریق کنند. حتّی سرعت محاسبه با چرتکه قابل مقایسه با سرعت محاسبه با ماشین حساب خواهد بود. دانش‌آموزان را به دو گروه تقسیم کنید و بین آن‌ها مسابقه بگذارید تا ببینید محاسبه با چرتکه سریع‌تر است یا محاسبه با ماشین حساب.

فعالیت / راهنمایی ....

برای ضرب و تقسیم توسط چرتکه الگوریتم‌هایی پیشنهاد کنید. سعی کنید یک ماشین حساب مکانیکی بسازید که اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را انجام دهد. این کار اولین بار توسط ریاضی‌دان فرانسوی پاسکال انجام شد. حال فرض کنید جدول ضرب اعداد دو رقمی داده شده باشد. برای ضرب و تقسیم اعداد الگوریتمی ارائه کنید که از این جدول استفاده کند و از الگوریتم‌های معمول که تنها از جدول ضرب یک رقمی استفاده می‌کند، ساده‌تر و کوتاه‌تر باشد.

فعالیت / دبیرستان ....

روش استقرای ریاضی یکی از مؤثرترین روش‌ها برای صرفه‌جویی در محاسبات جبری است. استقرای ضعیف چنین است که با داشتن $P(1)$ و این که $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ می‌توان نتیجه گرفت حکم P برای هر عدد طبیعی برقرار است. به جز استقرای ضعیف چندین روش استقرا دیگر وجود دارد، مانند استقرای قوی که با داشتن $P(1)$ و این که $P(1),\dots,P(n-1) \Rightarrow p(n)$ نتیجه می‌گیرد P برای هر عدد طبیعی برقرار است. یا استقرای بازگشتی که با داشتن $P(2^k)$ برای هر k و این که $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ همان نتیجه را به دست می‌آورد. چند روش استقرای دیگر بسازید.

فعالیت / دانشگاه ....

مثلثات کروی، اقلیدسی و هذلولوی را اصل موضوعه‌سازی کنید. سپس روشی به دست آورید که از هر اتحاد مثلثات اقلیدسی، اتحاد متناظر مثلثات کروی یا مثلثات هذلولوی به دست آید. با این کار می‌توان تمام محاسبات مثلثات اقلیدسی را بدون تکرار به دیگر تئوری‌های مثلثات ترجمه کرد. آیا می‌توانید یک مشابه سه‌بعدی برای مثلثات اقلیدسی ارائه کنید. آیا این مشابه نیز برادرانی چون مثلثات کروی سه‌بعدی و مثلثات هذلولوی سه‌بعدی دارد؟

۴ـ۱. تفکر جبری

این‌که جبر چیست، عمیقاً با تفکر کلامی گره خورده است. شاید بهتر باشد تفکر کلامی را به اضدادش معرفی کرد. تفکر کلامی در برابر تفکر تصویری و تفکر دست‌ورزانه قرار می‌گیرد. تفکر تصویری تفکری کل‌نگر، شهودی و بصری است. کسانی که تصویری فکر می‌کنند، هنگام تفکر تابلویی را در ذهن خود می‌سازند که وقتی کامل شد، ادراک تصویری ممکن خواهد بود. ادراک تصویری ادراکی دفعی و ناگهانی است و از مفاهیم سرتاسری و کل‌نگرانه شکل گرفته است. تفکر دست‌ورزانه تفکری عملی و تجربی است. کسانی که دست‌ورزانه فکر می‌کنند، برای تفکر نیازمند به ابزار دست‌ورزی هستند. تفکر کلامی، تفکری مرحله به مرحله، قراردادی و قابل تقسیم به اجزاست. کسانی که کلامی فکر می‌کنند، ساختمانی را در ذهن خود مرحله به مرحله می‌سازند و روندی منطقی را پله‌به پله طی می‌کنند تا به مقصد برسند.

درک چیستی تفکر جبری، با مفهوم معادلات جبری گره خورده است. با برگرداندن مسئله به زبان معادلات، آن را برای تفکر کلامی مهیا می‌کنیم. در واقع معادله جبری‌ساز است. معادلات جبری روش‌های جبری‌سازی هستند. طبیعت هر مسئله‌ای ایجاب می‌کند که به روش خاصی جبری‌سازی شود. به عبارت دیگر، هر مسئله‌ای زبانی جبری و مخصوص به خود دارد. این نقش جبردان است که زبان جبری طبیعی مسائل را کشف کند و با این کار معادله‌سازی کند و مسئله را برای تفکر کلامی مهیا کند.

تقابل تفکر تصویری و تفکر جبری از تجلیات تقابل شهود و عقل است. شهود کل‌نگر و عقل ساختارساز دو بعد معرفتی انسان هستند که یکدیگر را کامل می‌کنند. شهود به نور ادراک می‌کند و عقل به ساختار، لذا شهود از عقل مجردتر است. از این‌رو تفکر هندسی از تفکر جبری مجردتر است و هندسی‌سازی مسئله بر جبری‌سازی آن مقدم است. از این‌رو، تفکر جبری در بستر تاریخ باید زودتر از تفکر هندسی شکل گرفته باشد و ارتباط با کلام باید بر ارتباط با تصویر تقدم داشته باشد.

همان‌طور که نور ابزار شهود است، ساختار ابزار عقل است. انسان موجودی ساختارساز است و می‌تواند خالق ساختار باشد. این حقیقت که جبردان جبری‌سازی می‌کند، تجلی همین خلق ساختار است. جبردان می‌تواند به تفکر جبری معنی‌ای جدید ببخشد؛ معنی‌ای که پیش از آن متصور نبوده است. به همین دلیل است که علم جبر همواره رو به کمال می‌رود و مفهوم جبری‌سازی در تاریخ علم پیوسته پیچیده‌تر و غنی‌تر می‌شود. با کمال یافتن درک ما از جبر و ساختارهای جبری، درک ما از ساختارهای طبیعت اطرافمان بیش‌تر خواهد شد و مفاهیم فیزیکی را عمیق‌تر خواهیم فهمید و این به‌واسطه‌ی ساختارهایی است که جبردان خالق آن بوده است.

برای مثال، خلق مفهوم عدد و محاسبات عددی مانند جمع و تفریق که به طور مطلق در طبیعت یافت نمی‌شوند، به عنوان مدل‌هایی که در شمارش کاربرد دارند و قبل از فیثاغورس که واضع علم اعداد محسوب می‌شود ظهور پیدا کردند، خود یک نوع جبری‌سازی است. جبری‌سازی مفهوم زمان منجر به جبر اعداد حقیقی شد. جبری‌سازی اصول موضوعه‌ی جبر اعداد حقیقی منجر به کشف ساختارهای عددی شد. جبری‌سازی اعداد حقیقی منجر به مفهوم میدان شد و بعد، از جبری‌سازی فضای هندسی که منجر به میدان‌های توابع شد، مفهوم لغت‌نامه بین دو تئوری کشف شد. علم جبر قبل و بعد از کشف اعداد حقیقی و قبل و بعد از رویکرد اصل موضوعه‌ای و قبل و بعد از کشف مفهوم ساختار عددی و قبل و بعد از کشف مفهوم ساختار معانی متفاوتی داشته است. امروز دیگر جبر علم حل معادله نیست، بلکه علم ساختارشناسی است.

سؤال این‌که آیا می‌توان یک حقیقت ریاضی را به چند روش مختلف جبری‌سازی کرد؟ به عبارت دیگر، آیا ممکن است چند نوع تفکر جبری برای درک موضوع واحدی ارائه شود؟ مثال‌هایی بسیار ساده نشان می‌دهند که این کار ممکن است. مثلاً جبری‌سازی یک حکم هندسه‌ی مسطحه به چندین روش ممکن است یا مختصات‌گذاری فضا به چندین طریق مختلف قابل انجام است. این نشان می‌دهد که علم جبر، علمی ذاتی و از پیش تعیین شده نیست و تأیید می‌کند که جبری‌سازی نوعی مدل‌سازی است که مسئله را برای تفکر کلامی مهیا می‌کند. ممکن است علم جبر طور دیگری شکل می‌گرفت و تاریخ تکامل آن و هم محصول نهایی آن با آن‌چه واقع شده متفاوت می‌بود. این نکته راهنماست به این که ریاضیات، علمی ذاتی نیست و روند شکل‌گیری آن وابسته به تمدن‌هایی است که در آن‌ها شکل می‌گیرد.

آن‌چه در ریاضیات اصالت دارد و ذاتی است، ساختارهای شناختی انسانی است که به چنین علمی منجر می‌شوند. مثلاً تفکر کلامی از چه ساختارهای شناختی انسانی نتیجه می‌شود؟ تفکر کلامی از این‌جا ناشی می‌شود که انسان موجودی است که ظاهر و باطن آن به کلام و عقل مزیّن شده است. پس ارتباط برقرار کردن انسان با کلام و ساختارها لایه‌های تجرید متفاوتی دارد و با هر کدام از لایه‌های تجرید مفهومی از جبر متناظر می‌شود و بین این علوم جبری رابطه‌ی تجلی برقرار است. این‌که تفکر جبری ذاتی انسان است، بدین معناست که ریاضیات به هر شکلی که تحول پیدا می‌کرد و به هر ثمره‌ای که ختم می‌شد، شاهراه تفکر کلامی و علم جبر به همین معنا که ما می‌شناسیم، در آن به‌وجود می‌آمد. به عبارت دیگر، هر چند علم جبر ذاتی و از پیش تعیین شده نیست، تعریف آن ذاتی و از پیش معلوم است و این به خاطر ساختار شناختی انسانی است که از پیش تعیین شده است.

فعالیت / دبستان ....

اعداد یک رقمی منفی را به دانش‌آموزان بیاموزید و به آنان کمک کنید جمع و تفریق و ضرب اعداد طبیعی را به کمک روش‌های جبری انجام دهند. به این روش که

تجرید، وجودی مستقل قائل نبود. ارسطو به جای تجرید، مفهوم کلاس اشیا را جایگزین کرد. لایبنیتز مانند افلاطون و ارسطو فیلسوف بود. دکترین منطقی و متافیزیکی او بسیار شبیه ارسطو است. در منطق ارسطویی، هر گزاره قابل تحویل به شکل موضوع محور است و در متافیزیک ارسطویی جهان از جوهرهایی همراه با عرض تشکیل شده است. این منطق و متافیزیک تطابق دارند. در منطق لایبنیتزی محمول هر گزاره مشمول در موضوع است و در متافیزیک او جهان از موضوعات یا مونادهایی مستقل که نمی‌توانند ارتباط برقرار کنند، تشکیل شده است. این منطق و متافیزیک از یکدیگر جدایی‌ناپذیرند. از دیدگاه لایبنیتز حقیقت با استدلال عجین است و غیر آن ممکن نیست، اما واقعیت‌ها ممکن است وارونه باشند. اصل عدم تناقض و اصل عدم وقوع بدون دلیل کافی مبنای منطق استدلالی لایبنیتز را تشکیل می‌دهند. در فلسفه‌ی او حقیقت است که مورد بررسی قرار می‌گیرد، نه واقعیت. نظر او درباره‌ی ریاضیات، متفاوت با نظر افلاطون و ارسطوست. گزاره‌های ریاضی در مورد اشیای خاص ایده‌آل‌سازی شده سخن نمی‌گویند، بلکه این گزاره‌ها صحیح هستند، چون انکار آن‌ها از لحاظ منطقی غیرممکن است.

لایبنیتز تأثیرگذارترین فرد بر منطق فرگه بود. هرچند فرگه و پیروانش هرگز موفق نشدند که ریاضیات را کاملاً بر منطق استوار کنند و در نهایت کُنه استدلال بشری ناشناخته ماند. این برنامه‌ای بود که توسط لایبنیتز طراحی شده بود و شکست آن پیروان کانت را در صدر فلسفه‌ی ریاضی قرار داد. هر چند کانت قبل از نوشتن «نقد خرد محض» بسیار تحت‌تأثیر لایبنیتز بود، اما پس از دوازده سال کار روی دکترین خود، فلسفه‌ای کاملاً مستقل بنا کرد که در شناخت استدلال هندسی و جبری بسیار راهگشاست. او به فرق بزرگ ریاضیات و فلسفه‌ی اولی پی برد. این‌که موضوعات ریاضی همه درون ذهنی هستند، اما جسم و جان چون مخلوق ذهن نیستند، به برهان عقلی حقیقتشان به دست نمی‌آید.

کانت دو وجه متمایز را که در فلسفه‌ی لایبنیتز درهم آمیخته‌اند، جدا می‌کند: یکی تمایز قضایای تحلیلی و ترکیبی، و دیگری تمایز میان قضایای از پیشی و تجربی.

تحلیلی یعنی از تعاریف درونی مفاهیم نتیجه می‌شود و ترکیبی غیر آن است. همه‌ی قضایایی که تنها از راه تجربه به آن علم داریم، ترکیبی هستند، اما برخلاف لایبنیتز و دیگران، کانت نمی‌پذیرد که همه‌ی قضایای ترکیبی تجربی هستند. هیوم ثابت کرده بود که قانون علیت تحلیلی نیست و کانت ادعا کرد که ترکیبی است، اما علم به آن به طریق پیشینی حاصل می‌شود. قضیه‌ی پیشینی قضیه‌ای است که ممکن است توسط تجربه استخراج شود، اما بعد معلوم می‌شود که مبنایی فراتر از تجربه دارد. از نظر کانت همه‌ی قضایای ریاضی محض به آن معنی پیشینی است. اما چگونه حکم ترکیبی ممکن است پیشینی باشد؟ این همان مسئله‌ای است که دوازده سال روی آن کار کرد. سرآخر فلسفه‌ی کانت به این جا می‌رسد که معرفت از حدود تجربه فراتر نمی‌رود و این حدود را دقیقاً می‌توان تعیین کرد و با این کار، انقلابی کوپرنیکی در فلسفه به‌وجود آورد.

از دیدگاه کانت دنیای خارج فقط مایه‌ی احساس می‌شود، اما دستگاه ذهنی ما آن را در زمان و مکان تقسیم می‌کند و تصوراتی را که ادراکاتی تجربی هستند، فراهم می‌کند. کانت می‌گوید زمان و مکان تصور نیستند، بلکه اشکالی از «دید» هستند، اما تصورات پیشینی هم وجود دارند که همان مقولات دوازده‌گانه‌ی منطق قیاسی ارسطو هستند. بخش اعظم کتاب «نقد خرد محض» به خطاهایی می‌پردازد که از انطباق دادن زمان و مکان بر آن‌چه به تجربه درنمی‌آید، حادث می‌شود. کانت معتقد است که موضوعات بلاواسطه ادراک، بعضی از موجودات خارجی و بعضی از دستگاه ادراکی ما ناشی می‌شوند. جزء منبعث از ذهن ما وابسته به تجربه نیست و پیشینی است. جزء منبعث از موجود خارجی را احساس می‌نامد که دو صورت دارد: زمان و مکان، یکی مربوط به حس درونی و دیگری مربوط به حس بیرونی.

برای اثبات این ادعا که زمان و مکان پیشینی هستند، کانت دو نوع برهان می‌آورد؛ یکی برهان مابعدالطبیعی که از ماهیت زمان و مکان گرفته شده است و دیگری برهان معرفت‌شناختی که از امکان ریاضیات محض استفاده می‌کند. برهان در مورد مکان از هندسه گرفته شده است و در برهان زمان حساب جای هندسه را می‌گیرد، زیرا هنگام

هر عدد طبیعی را به صورت مجموعی از اعداد به شکل یک‌رقم در توانی از ده بنویسند و سپس جملات متناظر را با هم جمع و تفریق و ضرب کنند. صحت محاسبات به این روش بسیار بیش‌تر از قبل خواهد بود. به‌علاوه دانش‌آموزان درک خواهند کرد که چرا الگوریتم‌های محاسباتی جواب می‌دهند.

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک اشکال هندسی، اتحادهایی جبری را به اثبات برسانید. هم مدل‌های گسسته و هم مدل‌های پیوسته برای اثبات اتحادهایی برای مقادیر طبیعی یا حقیقی مثبت به کار خواهند آمد. حال از اتحادهای جبری شروع کنید و سعی کنید مدلی هندسی برای اثبات این اتحادها بیابید. آیا می‌توان مدلی هندسی ارائه داد که اتحادها را برای مقادیر منفی متغیرها نیز به اثبات رساند؟

فعالیت /دبیرستان..

اعداد مختلط اعدادی به شکل a+bi هستند که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند و $i^2=-1$. جمع و تفریق و ضرب اعداد مختلط را چگونه تعریف کنیم تا توسعه‌ای طبیعی از اعداد حقیقی باشد. عمل تقسیم را چه‌طور؟

با کمک اعداد مختلط می‌توان صفحه‌ی اقلیدسی را جبری‌سازی کرد. معادله‌ی خط و دایره را در دستگاه اعداد مختلط بنویسید و سپس از اعداد مختلط برای حل مسائل هندسه کمک بگیرید.

فعالیت / دانشگاه ....

اعداد مختلط برای جبری‌سازی هندسه‌ی اقلیدسی مسطح به کار می‌رود. توسعه‌ای از سیستم اعداد مختلط بیابید و آن را برای جبری‌سازی هندسه‌ی اقلیدسی سه‌بعدی به کار ببرید. آیا این توسعه برای جبری‌سازی هندسه‌ی کروی سه‌بعدی و هندسه‌ی هذلولوی سه‌بعدی نیز به کار می‌آید؟ اعداد مختلط چه‌طور؟ آیا اعداد مختلط برای

جبری‌سازی هندسه‌ی کروی و هندسه‌ی هذلولوی کارآمدند؟

۵ـ۱. استدلال جبری در برابر استدلال هندسی

چنان‌که دیدیم علم جبر ذاتی و از پیش تعیین شده نیست، اما این‌که جبر چیست، ذاتی است و به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد. ساختار استدلال در علم جبر که مطمئناً در زمان فیثاغورس شکل نگرفته بود و به مرور کامل گردید، از همین ابعاد ذاتی جبر است که به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد. این‌که استدلال چیست و چگونه ما را به حقیقت رهنمون می‌کند و این‌که چرا یقین جبری با استدلال تأمین می‌شود و این‌که چرا استدلال ما را به احکام متناقض نمی‌رساند، سؤالاتی است که در چارچوب شناخت‌شناسی می‌گنجد. اقلیدس کسی بود که ساختار استدلالی هندسه را به تمام ریاضیات توسعه داد و یک استاندارد ماندگار از دقت ریاضی به جای گذاشت. این تأییدی است بر این‌که ساختار استدلالی جبر که از هندسه آمده است، فراجبری است و به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد.

در جهت فرمول‌بندی تفکر منطقی مستقل از ریاضیات تلاش‌هایی صورت گرفته است. شاید بتوان گفت که مهم‌ترین نقش در این راه، توسط فرگه ایفا شد. هر چند فلسفه‌ی ریاضی قبل و بعد از فرگه صورت کاملاً متفاوتی دارد و ریاضی‌دانان فیلسوف و فیلسوفان ریاضی‌دان به این نتیجه می‌رسند که شاخه‌ای جدید به نام منطق را پایه‌گذاری کنند تا یکسری مشکلات در مبانی ریاضی را حل کند و با وجود این‌که منطق و ریاضیات مسیر تکامل مستقلی را پیموده‌اند، صحیح نیست که داستان فلسفه‌ی ریاضی قبل و بعد از فرگه را داستان پیوسته‌ای ندانیم. هر چند در زبان و ابزارهای فلسفی انقلابی به پا شد، اما هرگز نمی‌توان گفت که نقش فلسفه‌ی ریاضی پس از فرگه تغییر پیدا کرده است. لذا داستان فلسفه‌های ریاضی را از یونان باستان دنبال می‌کنیم.

از دیدگاه افلاطون ریاضیات بر باطن محض آن استوار است. فلسفه‌ی ریاضی ارسطو در تقابل با فلسفه‌ی افلاطون شکل گرفت. او به‌هیچ‌وجه برای شیء حاصل

عمل شمارش زمان مصرف می‌شود! کانت عقیده دارد که علم ما به ریاضیات، پیشینی است، هر چند بسیاری از قسمت‌های ریاضیات ترکیبی است؛ یعنی از منطق محض قابل استنتاج نیست. براهین جبر متکی به ساختارها هستند و این تصورات مربوط به ساختارها از پیش در ذهن ما کاشته شده‌اند.

نظریات کانت نتیجه می‌دهند که استدلال جبری در برابر استدلال هندسی یا معادلاً تفکر کلامی در برابر تفکر تصویری، متناظر با احساسات درونی و بیرونی هستند. زمان ولذا مفهوم تغییر در ساخت ساختارهای جبری اهمیت دارد. هم‌چنین مکان ولذا مفهوم فضا در شناخت اشکال هندسی اهمیت دارد. مفاهیم مربوط به تغییر و مفاهیم مربوط به فضا متناظرند، همان‌طور که زمان و مکان متناظرند. به‌طور خلاصه، برای درک مفاهیم جبری باید مفاهیم هندسی متناظر با آن‌ها را در کنارشان قرار داد و آن‌ها را با هم مطالعه کرد. چیستی علم جبر، بدون درک چیستی علم هندسه ممکن نخواهد بود. با توجه به این که این دو نوع ادراک سرچشمه‌ی مشترکی دارند، آیا صحیح نیست آنان را تجلی حقیقتی پشت صحنه بدانیم که در تجربه نیز تجلی کرده است؟

فعالیت / دبستان ....

اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ... را اعداد فرد و اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ و ... را اعداد زوج بنامید. از دانش‌آموزان بخواهید در مورد اعداد زوج و فرد بحث کنند و برای آن‌ها تعریفی ارائه کنند. سپس سعی کنند با کمک تعریفی که پیدا کرده‌اند، ثابت کنند مجموع دو عدد زوج، یک عدد زوج و مجموع دو عدد فرد، یک عدد زوج و مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.

فعالیت/ راهنمایی ....

یک مثلث را در نظر بگیرید. با وصل کردن اوساط اضلاع، به چهار مثلث مساوی تقسیم خواهد شد که متشابه با مثلث اصلی است. یک مستطیل را هم می‌توان با دو برش افقی و عمودی به چهار مستطیل مساوی متشابه با مستطیل اصلی تقسیم کرد.

شکل L روی صفحه‌ی شطرنج هم همین خاصیت را دارد، اما باید با دقت بیش‌تری آن را برش داد تا به چهار L کوچک‌تر تقسیم شود. شکل‌های دیگری بیابید که همین خاصیت را داشته باشند. برای پیدا کردن چنین شکلی، چه استدلال‌های جبری و چه استدلال‌های هندسی را به کار می‌برید؟

فعالیت /دبیرستان...

جبر گزاره‌ها را با کمک جداول درستی و نادرستی به دانش‌آموزان بیاموزید. حال فرض کنید اطلاعاتی به زبان احتمالات در مورد درستی یا نادرستی ارزش گزاره‌ها داشته باشیم. از روی این ایده‌ها و با کمک حساب احتمالات، می‌توان احتمال درستی یا نادرستی یک جمله‌ی ترکیبی را از روی جملات ساده یا به‌عکس محاسبه کرد. چنین مسئله‌ای طراحی کنید و با تغییرات در احتمال درستی یا نادرستی‌های داده شده، تغییرات احتمال نهایی را بررسی کنید. آیا عدد نهایی همیشه تابعی خطی از داده‌های اولیه است؟

فعالیت / دانشگاه ....

در فیزیک برای تغییر پیوسته، محور اعداد حقیقی را به عنوان مدل می‌گیرند. اما از نظریه‌ی اعداد می‌دانیم که $\mathbb{R}$ تنها کامل‌سازی Q نیست، بلکه میدان‌های p-گون Q_p نیز برای هر عدد اول p یک کامل‌سازی از Q هستند. خانواده‌ای از ساختارهای جبری معرفی کنید که به طور طبیعی با Q_p پارامتریزه شده باشد. آیا ممکن است خانواده‌ای از ساختارهای جبری با حلقه‌ی دیگری پارامتریزه شوند؟

فصل ۲

لایه‌های تجرید جبر و علم مختصات‌گذاری و تشکیل معادله

دیدیم که برخلاف افلاطون، انسان‌شناسی ارسطو و سایر فیلسوفان شهیر متأخر، انسان را متشکل از جسم و جان می‌داند. تئوری‌های شناخت در این فلسفه‌ها ناچارند همه‌ی ادراکات انسانی را با همین دو بُعد انسان تبیین کنند. از طرفی انسان‌شناسی فیلسوفان اسلامی هم‌چون افلاطون، انسان را موجودی با چندین لایه‌ی تجرید مرتبط می‌شناسد و این در شناخت‌شناسی اسلامی، نتایج تعیین‌کننده‌ای دارد. لایه‌های تجرید علم ریاضیات تأییدی است بر کثرت لایه‌های تجریدشناختی انسان ولذا تأییدی است بر انسان‌شناسی اسلامی. چنین دیدگاهی به انسان ایجاب می‌کند که فلسفه‌ی ریاضی راهی بسیار متفاوت با نظریات لایبنیتز، کانت و پیروانشان در پیش بگیرد.

در این نگاه جدید به فلسفه‌ی علم، ساختار علوم چه از لحاظ نظام لایه‌های تجرید، چه از لحاظ ابعاد اجتماعی انقلاب‌های علمی و چه از دیدگاه تاریخ علم، بسیار شبیه ساختارهای شناختی انسان است. شباهت ساختار علم و ساختار

عالـم در علوم مجردتر مثل ریاضیات و فلسـفه آشـکارتر اسـت. حتّی سـاختار علم بر ساختارشـناختی متعلم تأثیرگذار اسـت. به‌علاوه سـاختار معرفتی عالم در ساختارشـناختی تحقیقات علمی او منعکس می‌شـود. می‌بینیم که شباهت ساختار علم و عالم تمام ابعاد را دربرمی‌گیرد. حتّی در فلسـفه‌ی اسـلامی به اتحاد عالم و معلوم اعتقاد دارند.

هم‌نشینی عالم و علم در شرق، همیشه آشکارا مورد توجه بوده است. شخصیت عالم در شـرق هم‌نشـین تئوری‌های عملی او بوده و روند کشـف حقیقت همواره در کنار علم تدریس می‌شـده اسـت. علومی که توسـط مسـلمانان به‌وجود آمده، سرشـار از نشـانه‌های تربیت عقلانی و معنوی ایشـان است. فلسفه‌ی علم در کنار علم تدریس می‌شـده و به همین دلیل دانشـمندان شـاگردان بسیاری داشتند که از سـبک و روش و دیدگاه‌های استادشـان پیروی می‌کردند و این باعث پیشـرفت و توسعه‌ی علوم بود.

این انسان‌شناسـی موجب می‌شـود در تحقیقات علمی به تفاوت‌های نژادی، تفاوت‌هـای مدرسـه‌ی علمـی و هم تفاوت‌های فردی بسـیار توجه شـود. حتّی امـروزه بسـیاری از ریاضی‌دانـان اعتقاد دارند که نژادهـای مختلف مهارت‌های متفاوتـی در تحقیقـات علمـی دارند: ژاپنی‌ها در محاسـبات، ایرانیـان در جبر، نژادهـای لاتیـن در هندسـه، روس‌ها در ریاضـی ـ فیزیک، کشـورهای اروپای شـرقی در ترکیبات، انگلیسـی‌ها در ریاضیات کاربردی، آلمانی‌ها در فلسـفه و... مهارت خود را به نمایش گذاشـته‌اند. شـاید اگر بسـیاری از علوم مدرن در شرق توسـعه می‌یافتند، صورت ظاهری دیگری داشـتند. مثلاً ممکن بود شرقی‌ها برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی از مدل‌های ریاضی دیگری کمک می‌گرفتند. حداقل پنهان‌سـازی نقش عالم در علم مورد تأکید قرار نمی‌گرفت.

در علـم مـدرن سـعی دارند به علم چهره‌ای مسـتقل از تمدن‌هـا و فرهنگ‌ها بدهنـد تا چه رسـد بـه این‌که به نقـش ماوراءالطبیعه در شـکل‌گیری تفکر علمی اقرار کنند. حتّی عالمان سـعی می‌کنند روند کشـف را نیز پنهان کنند تا هیچ اثری

می‌شوند؟

فعالیت /دبیرستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید پس از حل هر مسئله‌ای، روند تفکر خود را یادداشت کنند و بنویسند در طی مراحل حل مسئله چه تصمیم‌گیری‌هایی انجام داده‌اند. پس از این‌که آموختند چگونه روند تفکر خود را با جزئیات بنویسند، از آنان بخواهید روند تفکر خود را کنترل کنند. استراتژی‌های حل مسئله را فهرست و استراتژی مناسب را انتخاب کنند. سپس از دانش‌آموزان بخواهید شخصیت حل مسئله‌ی خود را با دوستانشان مقایسه کنند و بگویند هر کدام برای حل چگونه مسائلی مناسب‌اند.

فعالیت / دانشگاه ....

در مورد مکاتب ریاضی در کشورهای مختلف تحقیق کنید و ببینید چه کشورهایی در چه شاخه‌هایی از ریاضیات صاحب مکتب هستند. سپس نژادهای مشابه را مقایسه کنید و ببینید آیا ریاضیاتی که در آن صاحب مکتب هستند، بین آن‌ها مشترک است؟ سپس نژادهای مختلف را مقایسه کنید و توانایی‌های ریاضی هر یک را به طور تقریبی تعیین کنید. سپس بررسی کنید که آیا این توانایی‌ها با فرهنگ قومی یا عوامل جغرافیایی ارتباطی داشته‌اند یا خیر؟ آنگاه فرض کنید یک مکتب ریاضی در محملی غیر از محمل واقعی خود توسعه می‌یافت. بررسی کنید که توسعه و تکامل این مکتب در کشور جدید، احتمالاً چه تفاوت‌هایی با توسعه آن در محمل واقعی خود می‌داشت.

۱ـ۲. اعداد به عنوان اشیای جبری

عدد چیست؟ متغیر چیست؟ معادله چیست؟ تساوی چیست؟ اعمال جبری جمع و تفریق و ضرب و تقسیم از کجا آمده‌اند؟ آیا این اشیای مجرد ریاضی در

طبیعت وجود دارند؟ آیا عدد و اعمال جبری جمع و تفریق و ضرب و تقسیم از ایده‌آل‌سازی مفاهیم روزمره به دست آمده‌اند؟ یا ریشه در ماوراءالطبیعه دارند؟ آیا تنها در یک لایه‌ی تجرید خاص معنی پیدا می‌کنند؟ آیا این اشیا و عملگرهای جبری وجود دارند؟ اگر وجود دارند، آیا ساختنی هستند؟ آیا می‌توان مفاهیم مختلف عدد را در مفهوم یگانه‌ای متحد کرد؟ چه ساختارهایی با این اشیا قابل ساختن هستند؟ این ساختارها از چه درجه‌ای از پیچیدگی برخوردارند؟ آیا این اشیا را می‌توان به طور پیوسته تغییر داد، به طوری که از همان جنس بمانند؟ صلب هستند یا قابل دگردیسی؟ آیا می‌توان خانواده‌ای از این اشیا را مطالعه کرد؟ آیا می‌توان این اشیا را در رسته‌های بزرگ‌تر نیز مطالعه کرد؟

مفهوم عدد و بسیاری از عملیات جبری بسیار قبل از فیثاغورس در تمدن بشری رواج پیدا کرده بود. مردم برای رفع نیازهای روزمره، به‌شمارش و حساب روی آوردند. چنین نبود که مفهوم عدد در طبیعت مشابه داشته باشد. هرچند مفهوم اولیه‌تری مانند تناظر یک به یک قابل مشاهده و استنتاج از پدیده‌های طبیعی بوده است. تناظر چند به یک نیز منجر به مفهوم تابع شد که از مفاهیم جبری است که تعمیم مفهوم عدد است. شاید مفهوم تناظر در موجودات بی‌جان قابل مشاهده نباشد، اما در انتخاب موجود جاندار است که حتماً مفاهیم تناظر وارد می‌شوند. ذهن ما نیز این تناظر را ادراک و ایده‌آل‌سازی می‌کند. با این حال، مفهوم عدد تنها از ایده‌آل‌سازی تناظر به دست نمی‌آید، بلکه حاصل ایده‌آل‌سازی و رده‌بندی است. رده‌بندی ساختارهای ایده‌آل‌سازی شده است که مفهوم عدد را به دست می‌دهند. رده‌بندی مهارتی است که کاملاً به ساختارشناختی ما برمی‌گردد و هیچ ارتباطی با طبیعت ندارد. قرابت این ایده‌آل‌سازی‌ها با مصداق‌های روزمره، موجب کاربردپذیری این اشیای مجرد شده است و رده‌بندی ساختارها به این کاربردپذیری صدمه‌ای نمی‌زند. زبان ریاضیات حاصل کار با مجرداتی است که محصول ایده‌آل‌سازی و رده‌بندی هستند و از زبان روزمره مجردتر است. به همین دلیل ریاضیات زبانی جهانی است که فراتر از فرهنگ‌ها و تمدن‌هاست.

از شخصیت عالم باقی نماند. این‌که سبک تألیف مقالات علمی همه یکدست و یکپارچه است، گواهی بر این مدعاست. گرایش به اصل موضوعه‌ای کردن ریاضیات توسط هیلبرت و شاگردانش در اوایل قرن بیستم و سپس توسط گروه بورباکی، افراطی‌ترین اقدامات در جهت پنهان‌سازی نقش عالم است. هر چه یک علم مجردتر باشد، بر روند پنهان‌سازی نقش عالم بیش‌تر تأکید می‌شود. در ریاضیات و فلسفه بیش از همه چنین حرکتی آشکار است.

انسان‌شناسی اسلامی نتایج مهمی در فلسفه‌ی علم دارد. برای مثال، تاریخ رشد تفکر علمی را می‌توان با شناخت شخصیت‌های علمی برجسته که در آن تأثیرگذار بوده است، مطالعه کرد؛ چرا که این شخصیت‌ها خلاصه و عصاره‌ی اوضاع علمی زمان خود بوده‌اند. و یا نقش شخصیت‌های مختلف علمی در تاریخ رشد تفکر علمی، مشابه نقش شخصیت‌های یادگیری درون ذهن متعلم است و هر متعلم متناسب با توانایی این شخصیت‌های یادگیری، می‌تواند در علوم عمیق شود. مهم‌ترین نتیجه این‌که، شناخت لایه‌های تجرید هستی انسان به شناخت لایه‌های تجرید علم کمک خواهند کرد.

نگاهی انسانی به علم نتیجه می‌دهد که علوم واقعیت‌های عینی هستند، نه ذهنی و نه مادی، بلکه مثالی و عقلانی، اما مطابق با عالم ماده. یعنی علم، هم فعالیتی بشری است و هم پدیده‌ای اجتماعی و هم بخشی از فرهنگ بشری است و هم درگیر با تاریخ و هم قابل درک و فهمیدنی است و در عین حال خارج از همه‌ی اذهان وجود دارد. همان‌طور که برای ادراک انسان لایه‌های تجرید مختلف مثل برزخ و عقل قائل می‌شویم، می‌توان برای جهان خلقت نیز عالم برزخ و عالم عقل را مستقل از بشر قائل شد و این‌گونه خاستگاهی برای علم مستقل از بشر معنی خواهد داشت.

بنابراین، ساختار علوم و ساختار معرفتی جهان هستی در ساختار ادراک انسانی خلاصه شده است. ارتباط ساختار علم و ساختار ادراک انسانی باید بررسی شود تا رابطه‌ی عالم و علم و رابطه‌ی متعلم و علم شناخته شود. علم و

ادراک انسانی هر دو ذومراتب هستند و با تمام لایه‌های هستی خود ارتباط برقرار می‌کنند. همان‌طور که دو انسان بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند، علم بر نظام‌شناختی عالم و نظام‌شناختی عالم بر علم تأثیر می‌گذارند.

سرآخر این‌که مراتب تشکیل لایه‌های تجرید هستی انسان مطابق با مراحل شکل‌گیری لایه‌های شناخت اوست. بنابر انسان‌شناسی و شناخت‌شناسی مطرح شده، این دو مطابق‌اند با مراتب شکل‌گیری لایه‌های تجرید علم که به راحتی قابل بازشناسی از تاریخ آن علم نیز هست. این، روشی عملی به دست می‌دهد که لایه‌های تجرید علوم بازشناسی شوند و ارتباط بین این لایه‌های تجرید مورد بررسی قرارگیرند.

فعالیت /دبستان..

از دانش‌آموزان بخواهید الگوریتم‌های جمع و تفریقی که در محاسبات پولی در جامعه رواج دارد، جمع‌آوری کنند. الگوریتم‌های مناطق مختلف شهر را با هم مقایسه کنند و در صورت ممکن، الگوریتم‌های شهرهای مختلف را مقایسه کنند و تفاوت‌های فرهنگی مردم را در محاسبه کردن به کمک اسکناس مورد بررسی قراردهند.

فعالیت/راهنمایی..

مصریان برای مساحی نواحی اطراف نیل به مثلثات نیاز داشتند و برای دادوستد نیازمند محاسبه‌ی حجم اشکال هندسی بودند. بابلیان برای نجوم به مثلثات نیاز داشتند و مسلمانان برای مسائل ارث به علم جبر و برای تعیین قبله به مثلثات کروی نیازمند بودند. هندیان برای نجوم نیازمند به اعداد بزرگ بودند. مباحث جبر و مثلثات را در نظر بگیرید و بگویید کدام‌ها بیش‌تر موردنیاز تمدن مصر، کدام‌ها موردنیاز تمدن بابل، کدام‌ها موردنیاز تمدن هند و کدام‌ها موردنیاز مسلمانان بوده است. چرا این نیازهای مستقل توسط علم مشترکی برآورده

اشـیای جبری که حاصل ایده‌آل‌سـازی و رده‌بندی هسـتند، از درجات تجرید مختلفی هسـتند مثلاً تابع از عدد مجردتر اسـت، چون تعمیم آن اسـت. از طرفی سـاختارهای عددی حاکم بر اعداد و توابع از یک درجه‌ی تجرید هسـتند. مفهوم متغیر از مفهوم عدد مجردتر است، اما در چارچوب حل معادلات عدد و متغیر از یـک درجه‌ی تجرید هسـتند. اعمال جبری مجردتـر از عدد، تابع و متغیرند، چون می‌توانند بر هر سـه حاکم شـوند. سـاختارهای عدد از اعمال جبری مجردترند، چـون از رده‌بندی اعمال جبری به دسـت می‌آینـد. مفهوم عدد نیز هم‌چون مفهوم تابع از مفهوم تناظر مجردتر اسـت، چرا که حاصل مهارت مجرد رده‌بندی اسـت. رده‌بنـدی تناظرها سـاده‌ترین مصداق رده‌بندی ساختارهاسـت که به مفهوم عدد منجر می‌شـود. آیا توابع را نیز می‌توان حاصل رده‌بندی تناظرها دانسـت؟ پاسـخ این‌کـه مفهومـی از تابع که از رده‌بندی تناظرها به دسـت می‌آید، با مفهوم متداول تابع منطبق نیسـت.

عدد به مفهوم شمارشـی آن که متناظر با اعداد طبیعی می‌شـود، صلب اسـت. همین‌طـور مجموعـه‌ی اعداد طبیعی به عنوان یک سـاختار عددی صلب اسـت. امـا عـدد به مفهوم اندازه ی صلب نیسـت. می‌توان هر نقطه از خط را با یک عدد متناظر کرد. لذا سـاختارهای عددی در حالت کلی نباید صلب باشـند. بررسـی و مطالعه‌ی سـاختارهای جبری نتیجه می‌دهد که سـاختارهای غیرصلب نیز وجود دارند. سـاختارهای عددی نیز مانند اشـکال هندسـی قابل تغییر و حرکت هستند. لذا می‌توان سـاختارهای عددی را نیز بـه صورت خانواده مورد مطالعه قرار داد. خانواده‌ای از سـاختارهای جبری می‌توانند به سـوی ساختار جبری دیگری میل کنند. مثلاً سـاختارهایی ناجابه‌جایی به سـاختارهایی جابه‌جایی میل کنند و مانند آن. خانواده‌ی سـاختارهای جبری به طور طبیعی اشـیای هم‌جنس را در یک دسته قـرار می‌دهنـد. حالت‌های حدی همیشـه حالت‌های خاص جالبی هسـتند که به درک سـاختار مورد مطالعه کمک می‌کنند.

می‌توان برخی از اعمال جبری روی اعداد را به اعمال جبری روی ساختارها

تعمیم داد. البته این کار برای هر ساختار جبری ممکن نیست، اما بعضی ساختارها این انعطاف را دارند. با اعمال جبری روی ساختارها از یک یا چند ساختار، ساختار جدیدی ساخته می‌شود که هم به طور فردی قابل مطالعه است و هم به طور جمعی. منظور از مطالعه‌ی جمعی ساختارها این است که مطالعه‌ی همه‌ی ساختارهایی که اعمال جبری ساختارها روی آن‌ها عمل می‌کنند، فراساختارهایی به دست می‌دهند که به آنان رسته می‌گویند. همان‌طور که ساختارهای عددی بدون این‌که اعداد لزوماً منطبق شوند، قابل انطباق هستند، رسته‌ها نیز ممکن است ساختار مشترکی داشته باشند، بدون آن‌که ساختارهای مورد مطالعه‌ی آن‌ها انطباق داشته باشند. نگاشت‌های حافظ ساختار بین رسته‌ها را وردش می‌گویند. نگاشت‌های حافظ ساختار بین ساختارهای عددی را ریختار می‌گویند. گاهی وردش‌ها را می‌توان در اشیای خاصی خلاصه کرد. این اشیای به دست آمده که اطلاعات وردشی را در خود خلاصه می‌کند، اشیای نمایشگر وردش نام گرفته‌اند. مفهوم نمایش وردش‌ها متناظر جبری مفهوم مکان هندسی است. بسیاری از اشیای جبری می‌توانند یک شیء نمایشگر برای وردشی باشند. اما روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد و لزوماً یگانه نیست. همین نکته مسئله‌ی ساختارگرایی را وارد می‌کند.

اعداد، توابع، ساختارهای عددی و ساختارهای جبری کلی‌تر و رسته‌ها، همه ملموس‌ترین لایه‌ی علم جبر را تشکیل می‌دهند. اشیای جبری مجسم‌ترین مصادیق حقایق جبری محسوب می‌شوند. مفاهیمی که در رابطه با این اشیای جبری مطرح می‌شوند، خود لایه‌ی تجریدی به دست می‌دهند که مجردتر از اشیای جبری است. مفاهیم به زبان ذهن و اشیا به زبان مصداق‌های مادی خود هستند و تجرد مفاهیم در برابر اشیای جبری مشابه تجرد ذهن در برابر جسم است.

فعالیت / دبستان

از دانش‌آموزان بخواهید داستانی بنویسند که شخصیت‌های اصلی آن اعداد یک رقمی مثبت و منفی باشند، به طوری که حقایق حسابی در طول داستان به کار روند و معنی جدیدی بیابند. سپس از آن‌ها بخواهید داستانی بسازند که اعداد و اشکال ساده‌ی هندسی در کنار هم به کار رفته باشند.

فعالیت / راهنمایی

فرض کنید یک متغیر تنها مقادیر ۱ و ۰ را می‌پذیرد. یک چند جمله‌ای با ضرایب ۱ و ۰ در نظر بگیرید. با فرض ۰ = ۱+۱ این چند جمله‌ای‌ها را در هم ضرب کنید. سپس جدول ضربی تشکیل دهید و تصمیم بگیرید کدام چند جمله‌ای‌ها حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های از درجه‌ی پایین‌تر هستند و کدام چند جمله‌ای‌ها تحویل‌پذیرند. برای تقسیم چند جمله‌ای‌ها با ضرایب ۰ و ۱ الگوریتمی ارائه کنید.

فعالیت / دبیرستان

چند جمله‌ای‌های دو متغیره را در نظر بگیرید. ضرب و جمع و تفریق آن‌ها را تعریف کنید. برای آن‌که تقسیم چندجمله‌ای‌ها را هم ممکن سازیم توابع گویای دو متغیره را هم در نظر بگیرید، با صفر قرار دادن یکی از متغیرها، توابع گویای یک متغیره به دست خواهد آمد. بنابراین توابع گویای دو متغیره توسیعی از توابع گویای یک متغیره و آن به‌نوبهٔ خود توسیعی از اعداد حقیقی خواهد بود. فرض کنید یک چند جمله‌ای دو متغیره برای نامتناهی مقدار یکی از متغیرها تحویل‌ناپذیر باشد. ثابت کنید این چندجمله‌ای به عنوان یک چندجمله‌ای دو متغیره تحویل‌ناپذیر است.

فعالیت / دانشگاه ....

یک حلقه‌ی دلخواه را در نظر بگیرید. آیا می‌توان این حلقه را به عنوان حلقه‌ی دگردیسی جهانی برای یک وردش مطالعه کرد؟ فرض کنید یک تبدیل طبیعی بین دو وردش داده شده باشد. مرفیسمی بین حلقه‌های دگردیسی جهانی به دست خواهد آمد. آیا می‌توان دو حلقه همراه با مرفیسمی بین آن‌ها را به عنوان حلقه‌ی دگردیسی جهانی برای دو وردش چنان قرار داد که مرفیسم بین حلقه‌ها از یک تبدیل طبیعی بین وردش‌ها به دست آمده باشد؟ پس از پاسخ به این پرسش، تصمیم بگیرید که آیا حلقه‌های دگردیسی جهانی به عنوان دیدگاهی برای درک مفهوم حلقه غنای لازم را دارند؟

۲ـ۲. فرمول‌ها و نمادهای متناظر با مفاهیم

مفهوم چیست؟ این سؤالی است که برای پاسخ به آن بسیار تلاش شده است، اما هنوز کسی به پاسخ نهایی دست نیافته است. بسیاری تلاش کرده‌اند که با کمک علم زیست‌شناسی مفهوم را شناسایی کنند. بسیاری با روان‌شناسی ذهن و بسیاری از طریق تئوری‌های آموزش به این مسئله حمله کرده‌اند. شاید نتوان به این سادگی مفهوم را تعریف کرد، اما چیزی که می‌توان شناخت، درجه‌ی تجرید مفاهیم است. مفهوم از جنس تفکر است ولذا نفسانی و برزخی است. از این لحاظ از لایه‌ی تجرید اشیا مجردتر است. اگر کسی بتواند روند تفکر را برحسب مفاهیم بشناسد، کار مهمی انجام داده است. به‌خصوص، درک روند تفکر ریاضی برحسب مفاهیم ریاضی بسیار مفید خواهد بود. این‌که ذهن چه اعمالی را بر مفاهیم به انجام می‌رساند تا جریان تفکر شکل بگیرد، به ما کمک خواهد کرد علم ریاضیات را بهتر بشناسیم. و حدود آن‌ها را بهتر تعیین کنیم.

مفاهیم چگونه در ذهن شکل می‌گیرند؟ عده‌ای اعتقاد دارند ذهن برای صرفه‌جویی در حفظ داده‌ها مفاهیم را خلق می‌کند، لذا مفاهیم وجودی مستقل از ذهن ندارند و بسته به اعمالی که ذهن درگیر آن‌هاست، ممکن است مفاهیم

متفاوتی در ذهن ایجاد شود. اگر مفاهیم اذهان بسیار شبیه هم هستند، این به خاطر شباهت اعمالی است که اذهان با آنان درگیر می‌شوند. عده‌ای نیز مفاهیم را نتیجه‌ی ایده‌آل‌سازی می‌دانند. عده‌ای مانند افلاطون به وجود عالمی به نام عالم مُثُل معتقدند که مفاهیم مستقلاً در آن‌جا زندگی می‌کنند و از آن‌جا در ذهن ما متجلی می‌شوند. عده‌ای نیز به ابعاد زبان‌شناسانه‌ی شکل‌گیری مفاهیم تأکید می‌کنند و اعتقاد دارند هرگز یک مفهوم بدون این‌که با کلام متناظر شود، شکل نمی‌گیرد و معنی را در بطن کلمه می‌دانند.

در هنگام تفکر چه اعمالی بر سر مفاهیم به اجرا درمی‌آید؟ ذهن متفکر بین مفاهیم ارتباط برقرار می‌کند، شبکه‌های ارتباطی مفاهیم را در نظر می‌گیرد، ساختارهای این شبکه را مقایسه می‌نماید، مفاهیم را با هم متناظر می‌کند یا از هم تشخیص می‌دهد، مفاهیم را تعمیم می‌دهد و تخصیص می‌کند، مفاهیم را مقایسه و بر هم منطبق می‌کند، مفاهیم را دگرگون و بازسازی می‌کند، شبکه‌های مفهومی را مستقل از تشخص مفاهیم آن بازشناسی می‌کند و مانند آن. می‌بینیم که تفکر را نمی‌توان برحسب مفاهیم تعریف کرد. دلیل آن این است که چیزی بالاتر بر آن حکومت می‌کند و حیات تفکر از لایه‌ی تجرید مجردتری می‌آید. همان‌طور که حیات جسد با لایه‌های مجردتر نفس و روح قابل توصیف است، حیات نفس و امور نفسانی نیز به لایه‌های تجرید بالاتر مربوط می‌شود. خاستگاه تقلب مفاهیم، قلب است. حیات تفکر از سیطره‌ی قلب بر نفس نتیجه می‌گردد و حیات قلب از سیطره‌ی روح بر آن.

در علم جبر مفاهیم نمادین نیز موردتوجه قرار می‌گیرند. مفاهیمی که شکل‌گیری آن‌ها حاصل یک قرارداد نمادین است. از طرفی یک قرارداد نمادین بسیار شبیه یک تعریف دقیق از یک مفهوم هندسی است، اما تفاوت اصلی بین قرارداد و تعریف این است که تعریف به مصادیق نزدیک‌تر است. تعاریف بسیاری از مفاهیم هندسی به طور طبیعی از هم‌نشینی ذهن با پدیده‌های طبیعی ناشی می‌شوند، اما قراردادهای نمادین با توجه به سهولت محاسبات شکل می‌گیرند

و معمولاً مصداق ملموسی ندارند؛ هرچند در اکثر اوقات مفاهیم جبری با شهود هماهنگ‌اند و به مشاهدات تأیید می‌شوند.

چه چیز باعث می‌شود یک مفهوم را جبری بدانیم؟ فلسفه‌ی کانت حساب را با مفهوم زمان متناظر می‌کند و هندسه را با مفهوم مکان. جبر از تلاقی هندسه و حساب به وجود آمده است و آغاز آن با روش نمادین مطالعه‌ی مفاهیم هندسی پایه‌گذاری شده است. می‌توان پیدایش علم جبر را در سهولت محاسبات خلاصه کرد. به عبارت دیگر، آن‌چه جبری بودن یک مفهوم را تضمین می‌کند، ارتباط آن مفهوم با محاسبات است. محاسبه امری منطقی است و به‌نوبه‌ی خود با شهود درگیر است. ارتباط بین مفاهیم جبری نیز با محاسبه‌پذیری درگیر است و شبکه‌ی ارتباطات مفاهیم جبری محاسبات را روان‌تر می‌کند. شاید بتوان گفت توانایی ما در محاسبه چیزی جز شبکه‌ی ارتباطات مفاهیم جبری نیست. بنابراین مفهومی جبری است که در شبکه‌ای از مفاهیم جبری که با مفهومی از محاسبه در ارتباط است، شرکت جسته باشد.

جالب این‌جاست که هویت یک مفهوم با شبکه‌ی مفاهیمی که با آن در ارتباط است، شکل می‌گیرد. اگر شبکه‌های مفهومی شبیه به هم را دارای هویتی مستقل از مصداق خاص مفاهیم آن بدانیم، جبری بودن یک مفهوم تابعی از ساختار شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با آن مفهوم خاص خواهد بود. پس این سؤال مطرح می‌شود که شبکه‌ی مفاهیم جبری به خاطر چه ساختاری جبری یا غیرجبری دانسته می‌شود؟ به عبارت دیگر، آیا می‌توان جبری بودن یک مفهوم را کاملاً به زبان ساختار شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با آن و مستقل از مصداق خاص آن مفهوم تعریف کرد؟ این‌که هر شبکه را وقتی جبری بدانیم که با شبکه‌ای از مفاهیم جبری هم‌ریخت باشد، پاسخی قابل قبولی است؟ اگر تعریفی غیر از این داشته باشیم، آیا هرگز محاسبه و تفکر منطقی در تفکر جبری حضوری قطعی خواهد داشت؟ در این صورت باید بتوان تفکر منطقی را کاملاً برحسب شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با هم تعریف کرد که تجریدی بسیار ناملموس و دور از ذهن است.

اگر بخواهیم نقادانه به فلسفه‌ی کانت بنگریم، باید مبانی آن را زیر سؤال ببریم. آیا ممکن است فضا هرگز در شبکه‌ی ارتباطی مفاهیم جبری وارد شود؟ آیا هرگز فضای تئوریک به درک ما از محاسبه‌پذیری کمک می‌کند؟ آیا درک ما از فضای تئوریک و محاسبات جبری همپایه‌ی هم رشد می‌کنند؟ در این صورت مفاهیم جبری را فراتر از نقش محاسباتی آنان دانسته‌ایم یا این‌که محاسبات معنی جدیدی پیدا می‌کند که فضای تئوریک حاکم بر آن را نیز دربرمی‌گیرد. با این وصف، خلق یک مفهوم جبری به منزله‌ی به‌وجود آوردن یک نظام تئوریک جدید خواهد بود که مفاهیم مربوطه را به روش جدید محاسبه‌پذیر می‌کند.

سرآخر می‌توان نتیجه گرفت که تکامل علم جبر و عمق مفاهیم جبری همگام با تکامل درک ما از نظام‌های منطقی و کلامی حاکم بر موضوع مورد تحقیق است. بنابراین علم جبر همیشه باید بر شاخه‌ی دیگری سوار شود. علم جبر با جبری‌سازی سایر شاخه‌های ریاضیات تکامل پیدا می‌کند. تلاش همه‌ی ریاضی‌دانان این است که شاخه‌های مختلف را جبری‌سازی کنند تا برای محاسبه مهیا شوند و کشف و اثبات احکام صادق در این شاخه‌ها آسان‌تر شود. باید گفت که جبر فرزند سایر شاخه‌های ریاضیات است. اگر سلسله دلایلی که باعث می‌شود مفهومی جبری انگاشته شود، دنبال کنیم، سرآخر به سرچشمه‌ای در یکی از شاخه‌های ریاضیات می‌رسیم که از دو رودخانه‌ی اصلی هندسه و حساب جاری شده‌اند.

فعالیت / دبستان ....

با کمک تناظر یک به یک مفاهیم عدد، جمع و ضرب را به دانش‌آموزان معرفی کنید. مفاهیم تفریق و تقسیم به طور طبیعی از تناظر یک به یک نتیجه نمی‌شوند، بلکه از حل معادله و مجهول‌یابی که عملی برعکس جمع یا ضرب باشد، به دست می‌آیند. حال مسئله‌هایی را که در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهید و پاسخ آن را به دست می‌آورند، در نظر گرفته از آن‌ها بخواهید پاسخ را دانسته فرض کنند

و یکی از داده‌های مسئله را بازیابی کنند. این روشی طبیعی برای مطرح کردن حل معادله و سپس مفاهیم تفریق و تقسیم است.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید هر عدد را به شکل یک چندجمله‌ای با ضرایب یک رقمی برحسب عدد ۱۰ بنویسند. این نمایش یگانه است. جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد را با الگوریتمی برحسب همین نمایش انجام دهید. حال از آنان بخواهید به جای عدد ۱۰ عدد دیگری جایگزین کنند. در این صورت به جای اعداد یک رقمی چه اعدادی باید جایگزین شوند؟ از آن‌ها بخواهید برای این اعداد نمادی ارائه کنند. سپس آن‌ها را به مفهوم مبنای عددی‌نویسی رهنمون کنید.

فعالیت /دبیرستان..

فرمول ریشه برای معادله‌ی درجه‌ی دوم و درجه‌ی سوم را در نظر بگیرید. برای تعداد جواب‌های معادله با کمک این فرمول‌ها بحث کنید. مفهوم مبین یک چندجمله‌ای را از این حل و بحث بیرون بکشید. حال سعی کنید مفهوم مبین را به چند جمله‌ای دلخواه تعمیم دهید. ابتدا با چندجمله‌ای‌هایی که به تعداد درجه ریشه دارند، شروع کنید. سپس چندجمله‌ای دلخواه را در نظر بگیرید.

فعالیت / دانشگاه ....

بسیاری از اوقات مفهوم‌سازی با اصل موضوعه‌سازی انجام می‌پذیرد. فضاهای برداری را در نظر بگیرید. این مفهوم با اصل موضوعه‌سازی فضاهای اقلیدسی به دست آمده‌اند. حال فضاهای کروی و هذلولوی از بعد دلخواه را در نظر بگیرید و سعی کنید آن‌ها را اصل موضوعه‌سازی کنید. حال روی میدان دلخواه این فضاها را تعریف کنید. حال خمینه‌هایی را در نظر بگیرید که فضای

مماس آن‌ها به طور طبیعی یک فضای کروی یا یک فضای هذلولوی باشد. در مورد این خمینه‌ها چه می‌توانید بگویید؟

۳ـ۲. تنوع نمادگذاری و تقلب مفاهیم جبری

تاریخ تحول مفاهیم جبری قابل مطالعه است؛ چرا که مفاهیم جبری در بستر تاریخ علم ریاضیات تحول می‌یابند و صورت اولیه‌ی خود را حفظ نمی‌کنند. مثلاً مفهوم عدد از فیثاغورس تا ارشمیدس و از آن‌جا تا خیام و خوارزمی تحول پیدا می‌کند. در دستگاه مختصات دکارت، اعداد منفی و نزد ویت اعداد مختلط معنی پیدا می‌کنند. با ظهور میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع و مطرح شدن نظریه‌ی گالوا ساختارهای عددی معنی جدیدی می‌یابند. تا این‌که در زمان نتر جبر جابه‌جایی متولد می‌شود. این رودخانه‌ی مفاهیم که در بستر زمان جاری است، سرچشمه‌ی یکسانی دارند و آن همان مفهوم عدد است که از زمان فیثاغورس و پیش از او به جای مانده است.

چرا مفاهیم دگرگون می‌شوند؟ مفاهیم چگونه دگرگون می‌شوند؟ آیا همراه با یک مفهوم شبکه‌های ارتباطی شامل آن نیز دگرگون می‌شوند؟ یا این‌که دگرگونی یک مفهوم چیزی جز دگرگونی شبکه‌های ارتباطی شامل آن نیست؟ آیا دگرگونی یک مفهوم از فضای تئوریک و تحولات آنان نشأت می‌گیرد؟ ارتباط بین دو مفهوم چگونه همگام با تحولات آن مفاهیم دگرگون می‌شود؟ چه قوانینی بر تاریخ تحول مفاهیم حکومت می‌کنند؟ اگر بتوانیم روند تحول مفاهیم در ذهن را بشناسیم، خواهیم توانست مسیر تکامل تفکر بشری را شناسایی کنیم؛ چرا که تکامل تفکر درگرو تکامل مفاهیم و ساختارهای مفهومی شامل آن‌هاست.

عده‌ای مفاهیم را متأثر از صرفه‌جویی مغز در حفظ داده‌ها می‌دانند. اگر اعمالی که ذهن درگیر آن‌هاست، تحول پیدا کند، مفاهیم موردنیاز برای سهولت کار ذهن نیز تحول پیدا می‌کند. همین مصداق، تحول مفاهیم را برای آنان که مفاهیم را حاصل ایده‌آل‌سازی می‌دانند نیز نتیجه می‌دهد. وقتی دامنه‌ی اشیای

موردتوجه ذهن توسعه بیابد، ذهن ناچار است مفاهیم ایده‌ال‌سازی شده را تعمیم دهد تا بتواند آن‌ها را در حوزه‌ی گسترده‌تری به کار بندد. عده‌ای مانند افلاطون، به عالمی که مفاهیم مستقلاً در آن زندگی می‌کنند، اعتقاد دارند. در نظر ایشان کُنه ذات مفاهیم تحول پیدا نمی‌کند، بلکه تحول تنها در تجلیات آن است. عده‌ای نیز ابعاد زبان‌شناسانه را در شکل‌گیری مفاهیم دخیل می‌دانند. هر مفهوم با کلمه یا کلماتی متناظر می‌شود که معنی آن‌ها توسط ابعاد اجتماعی زبان شکل می‌گیرد و تحول می‌یابد. می‌بینیم که در مورد چیستی تحول مفاهیم اتفاق‌نظر وجود ندارد. همان‌طور که در مورد چیستی مفاهیم به نتیجه‌ی واحدی دست نیافته‌ایم.

می‌توان بعضی از ابعاد تحول مفاهیم را برحسب شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با یک مفهوم توضیح داد. تحول و دگرگونی یک مفهوم باعث می‌شود با مفاهیم جدیدی ارتباط برقرار کند و حتّی ممکن است بعضی از ارتباطات قدیمی به علت صلبیت مفاهیم مرتبط با آن دیگر دردسترس نباشد. بنابراین حاصل تحول و دگرگونی یک مفهوم شبکه‌ی ارتباطی جدیدی است که با شبکه‌ی مفاهیم اولیه متفاوت خواهد بود. شاید بتوان گفت داستان تحول یک مفهوم را می‌توان در داستان تحول شبکه‌ی ارتباطی مفاهیم متصل به آن خلاصه کرد. باید توجه کرد که این دیدگاه همه‌ی ابعاد تحولات مفاهیم را دربرنمی‌گیرد. بسیاری از تحولات از فضای تئوریک حاکم بر مفاهیم ناشی می‌شود که شبکه‌های مفهومی را با حفظ ساختار دگرگون می‌کند؛ به طوری که مفاهیم و ارتباطات مفهومی آن تغییر کند، ولی شبکه‌ی ارتباطی بین آن‌ها به همان شکل باقی بماند.

تقلب و دگرگونی مفاهیم جبری می‌تواند از تحول مفهوم محاسبه و فضای تئوریک حاکم بر آن ناشی شود یا از تحول احکامی که مورد توجه و تمرکز هستند، به وجود آید. مثلاً با گذر از اتحادهای جبری به ساختارهای عددی مفاهیم تغییر هویت می‌دهند و شبکه‌ی ارتباطی جدیدی پیدا می‌کنند. تاریخ تحول مفهوم عدد را در نظر بگیرید. می‌توان گفت تمام تحولات مفهوم عدد ناشی از تحولات نیازهای محاسباتی بوده‌اند. تحولات نیازهای محاسباتی را می‌توان ناشی از

تحول فضای تئوریک حاکم بر آن‌ها دانست. با این وصف تحولات خُرد دیگری قابل مشاهده هستند که در ظهور تئوری‌ها و مسائل خاص ناشی می‌شوند. مثلاً اشیای جهانی در نظریه‌ی رسته‌ها معنی جدیدی به شمارش و مفهوم عدد می‌دهند که تعمیمی است که از ناکامی‌های محاسباتی ناشی شده است.

بیایید تحولات شبکه‌ی ارتباطی همسایه با مفهوم عدد را مطالعه کنیم. در یونان باستان عدد که پیش از آن برای شمارش تعداد اعضا به کار می‌رفت، ابزار اندازه‌گیری شد و با طول و مساحت و حجم متناظر گردید. در زمان فیثاغورسیان کشف اعداد گنگ منجر به کشف این نکته شد که عدد برای اندازه‌گیری مفهومی گسترده‌تر از اعداد گویاست و حل هندسی معادلات جبری ابزاری کارآمدتر از جست‌وجوی جواب‌های گویای معادلات خواهد بود. پس ابزارهای هندسی برای حل معادلات جبری به کار برده شد. از جمله اقلیدس دایره را برای حل کامل معادلات درجه‌ی دو و خیام سهمی را برای حل کامل معادلات درجه‌ی سه به کار بردند. حل معادلات جبری توسط رادیکال‌ها که ابزاری جبری هستند، به طور موازی، اما به کندی دنبال شد. قرارداد دکارت در کاربرد اعداد منفی موجب تسهیل تکنیک‌های جبری شد. روش‌های جبری با این ابداع دکارت چنان پیشرفت کردند که تمام قدرت ابزارهای هندسی را با روش‌های جبری فتح کردند. این جا اعداد رادیکالی اهمیت یافتند و این سؤالات مطرح شد که آیا هر معادله‌ای که جواب هندسی داشته باشد، با رادیکال‌ها قابل حل است یا خیر؟ در صورتی که پاسخ مثبت می‌بود، اعداد رادیکالی توانایی پاسخ‌گویی به نیازهای حل معادله در تمام حالت‌ها را پیدا می‌کردند و روش‌های جبری موفق به فتح کامل دستاوردهای روش‌های هندسی می‌شد. طی این تلاش‌ها اعداد مختلط که محاسبات رادیکال‌ها را ساده می‌کردند، معرفی شدند و سرانجام آبل و گالوا مستقلاً ثابت کردند که در حالت کلی معادلات درجه‌ی پنجم قابل حل با رادیکال‌ها نیستند. هر چند آرزوی جبردانان برآورده نشد و رؤیای دیرینه‌ی آنان با شکست روبه‌رو شد، اما در نتیجه‌ی تحقیقات آبل و گالوا عصر ساختارهای

عـددی طلـوع کـرد که در آن به جـای مطالعه‌ی اعـداد یک به یک بـه مطالعه‌ی دسته‌جمعی آنان پرداختند. در دست شاگردان هیلبرت که تفکر اصل موضوعه‌ای را ترویـج می‌کردنـد، حلقه‌های جابه‌جایی فرمول‌بندی شـدند و جبر مدرن که به مطالعه‌ی سـاختارهای جبری می‌پرداخت، شـکوفا شـد. مطالعه‌ی سـاختارهای جبری یک به یک به مطالعه‌ی دسـته‌جمعی آنان تبدیل شـد. این موضوع نظریه‌ی رسـته‌ها بود که توسـط آیلنبرگ و مکلین بنیانگذاری گردید و به دست گروتندیک کمـال یافـت و در هندسـه جبری به کار گرفته شـد. این‌جا بود کـه عدد به عنوان ناوردا، به سـاختار به عنوان ناوردا تعمیم یافت.

بررسـی تحـولات مفهوم عدد نشـان می‌دهـد که دیدگاه افلاطونـی چندان از تأییـد عملی بهره‌مند نمی‌شـود. در برابر دیدگاه زبان‌شناسـانه بـه مفاهیم در کنار ایـن دیـدگاه که ذهن به دلیل تغییر در نیازهای عملی مفاهیم را دسـتخوش تحول می‌کنـد، طبیعی‌تر به نظر می‌رسـند، امـا باید به روش صحیحی با حقیقت پشـت صحنه‌ی ریاضی پیوند بخورند. تنها چاره این اسـت که عوالم مجرد افلاطونی را بـر عوالم مجرد معرفتی انسـانی اسـتوار کنیم. این دیدگاه بـا تاریخ تحول مفاهیم ریاضی نیز هم‌خوانی دارد.

فعالیت /دبستان..

در هر ماشـین پنج سرنشـین جا می‌گیرند. می‌خواهیم تمام افراد شـرکت‌کننده در یک سـخنرانی را به بازدید علمی ببریم. با روش چوب‌خطی مشـخص کنید که چند ماشین برای انتقال این افراد لازم است. باقی‌مانده‌ی چوب‌خط‌ها را که هنوز دسته‌ی پنج‌تایی نشده‌اند، در نظر بگیرید. حال اگر شرکت‌کنندگان دو سخنرانی را بخواهیم به بازدید علمی ببریم و تعداد ماشـین‌های لازم برای هر یک را بدانیم و تعداد باقی‌مانده‌های هر دو دسته را نیز بدانیم، تعداد ماشین‌های لازم برای همه‌ی شـرکت‌کنندگان را محاسـبه کنید. حال با جمع و تفریق تعداد شـرکت کنندگان در دسـته‌های مختلف، جمع و تفریق باقی‌مانـده‌ی چوب‌خط‌هـا را تعریـف کنیـد.

فعالیت / راهنمایی

فرض کنید هر عمل جمع یا تفریق ۱± خطا دارد. برای نمایش اعداد در دستگاه ده‌دهی و جمع و تفریق آن‌ها الگوریتم‌هایی ارائه دهید که جمع و تفریق کم‌ترین خطا را داشته باشد. آیا با بیش‌تر شدن تعداد رقم‌های اعداد خطای محاسبه با آن‌ها بیش‌تر خواهد شد؟ خطای ضرب را با توجه به خطای جمع محاسبه کنید. برای ضرب اعداد الگوریتمی ارائه دهید که کم‌ترین خطا را داشته باشد. آیا با بیش‌تر شدن تعداد رقم‌های اعداد خطای محاسبه با آن‌ها بیش‌تر خواهد شد؟

فعالیت / دبیرستان

فرض کنید اعداد روی یک دایره مدل شده باشند، نه محور اعداد که یک خط است. ساختار جمعی اعداد حقیقی در یک همسایگی مبدأ محور اعداد شبیه یک همسایگی مبدأ روی دایره خواهد بود. آیا ساختار ترتیبی اعداد حفظ خواهد شد؟ آیا ساختار ضربی اعداد باقی خواهد ماند؟ اصل ارشمیدس و اصل تقسیم چه‌طور؟ آیا اگر مضرب صحیحی از یک عدد صفر شود، آن عدد صفر است؟ ساختار اعداد دایره‌ای چه تفاوت‌هایی با ساختار محور اعداد خواهد داشت؟

فعالیت / دانشگاه

با عمل $\mathbb{Z}^n$ روی $\mathbb{R}^n$ می‌توان نگاشت خارج قسمتی از فضای n- بعدی به یک چنبره‌ی n- بعدی تعریف کرد. ساختار جمعی $\mathbb{R}^n$ به طور موضعی به خارج قسمت القا خواهد شد. با در نظر گرفتن چندین چنبره که از شبکه‌های مختلف $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ القا می‌شوند و مقایسه‌ی ساختار جمعی آن‌ها بگویید که آیا این ساختار جمعی وابسته به انتخاب عمل $\mathbb{Z}^n$ است یا مستقل از آن؟

۴-۲. خاستگاه تغییر مفاهیم

حیات مفاهیم ریاضی و امکان تغییر و تحول در این مفاهیم، مدیون روح علم ریاضی است و آن خاستگاه تحول مفاهیم است. به عبارت دیگر، عالمی که چارچوب تحولات ممکن مفاهیم را تعیین می‌کند، خاستگاه تغییر مفاهیم خوانده‌ایم. همان‌طور که روح انسان ادراکی فرازمانی دارد، این درجه از درک مفاهیم، درکی فراتحولی به دست می‌دهد؛ یعنی درکی از مفاهیم پیدا می‌کند که فارغ از همه‌ی تحولاتی که ممکن است برای آن‌ها رخ دهد، آن درک پایدار می‌ماند و صحت این ادراک دست‌نخورده باقی خواهد ماند.

ادراک مفاهیم در این درجه‌ی تجرید، مجردتر از ادراک مفاهیم از طریق تحول و دگرگونی آن است. می‌توان گفت ادراک قلبی ادراکی درون تحولی و ادراک روحانی ادراکی فراتحولی یا برون‌تحولی است. مثال مفهوم ساختار عددی یا عدد را در نظر بگیرید. این که این مفهوم در طی تاریخ چه تحولاتی پیدا کرده و کدام تحولات ماندگار شده و کدام‌ها به فراموشی سپرده شده است، درکی از مفهوم عدد می‌دهد که ادراکی قلبی است و به زبان تحول و دگرگونی مفاهیم است. این‌که مفهوم عدد در اثر تحولات چه چیزهایی می‌تواند بشود و چه چیزهایی نمی‌تواند بشود، در حد درک قلب نیست و ادراکی فراتحولی است. مثلاً این‌که علم جبر، علم شناخت ساختارهای ناوردا است، گزاره‌ای فراتحولی است و فارغ از هرگونه تغییر در معنی جبر و در مفهوم ساختار ناوردا صادق خواهد ماند. و یا تاریخ تحول مفهوم عدد که در فصول قبل به آن اشاره شد، ادراکی قلبی به دست می‌دهد و درک فراتحولی مفهوم عدد از این اطلاعات ممکن نیست.

چه چیز جبری بودن یک مفهوم را به زبان فراتحولی تضمین می‌کند؟ آیا ممکن است یک مفهوم جبری در تقلب و دگرگونی خود به یک مفهوم هندسی تبدیل شود؟ مفهوم عدد مختلط منجر به آنالیز مختلط و سپس هندسه مختلط شد. این‌که می‌توان از یک مفهوم جبری پس از تحولاتی به یک مفهوم هندسی رسید، به این معنی است که تمایز بین هندسی بودن یک مفهوم یا جبری بودن آن

به زبان فراتحولی ممکن نیست. یعنی علم هندسه و علم جبر به این زبان قابل تمیز نیستند. بلکه هندسی بودن یا جبری بودن دو دیدگاه مختلف به یک حقیقت ریاضی هستند.

این‌که در خاستگاه تغییر مفاهیم، هندسه و جبر قابل تمیز نباشند، بسیار درس‌آموز است. بسیاری از مفاهیم جبری وجود دارند که هنوز ما به ازای هندسی ندارند و بسیاری از مفاهیم هندسی هستند که هنوز جبری‌سازی نشده‌اند. تطابق علم هندسه و علم جبر به این معنی است که هم تمام مفاهیم جبری ما به ازای هندسی دارند و هم تمام مفاهیم هندسی قابل جبری‌سازی هستند. این درس در تحقیق ریاضی بسیار کارآمد است. حتّی می‌توان روش‌های تفکری را از زبان فراتحول پیشنهاد کرد که در جبری‌سازی و یافتن ما به ازای هندسی، که دو عمل دوگان هستند، به ما کمک کنند.

فعالیت / دبستان ....

فرض کنید می‌خواهیم بدون این‌که مانع از ورود و خروج افراد از شهر شویم، جمعیت دقیق آن شهر را محاسبه کنیم. آیا جمعیت شهر عدد ثابتی است؟ اگر شهر چندین ورودی داشته باشد، آیا روشی برای محاسبه‌ی دقیق جمعیت آن در هر لحظه وجود دارد؟ شهردار می‌خواهد برای مصرف مردم شهر گندم بخرد. با توجه به این‌که جمعیت دقیق شهر در حال تغییر است، چه روشی را برای شهردار پیشنهاد می‌کنید تا تصمیم بگیرد چه‌قدر گندم خریداری کند؟

فعالیت / راهنمایی ....

طول یک پاره خط مفروض را واحد بگیرید و با کمک آن به هر پاره خطی عددی مثبت نسبت دهید. با کمک قضیه‌ی تالس جمع و ضرب و تفریق و تقسیم طول پاره‌خط‌ها را با استفاده از خط‌کش و پرگار بسازید. آیا می‌توانید اعداد منفی و حساب آن‌ها را نیز با کمک طول پاره‌خط‌ها بیان کنید؟ حساب اعداد مثبت و

منفی را ترکیب کنید و روشی برای محاسبه توسط خط‌کش و پرگار ارائه کنید.

فعالیت /دبیرستان.....................................

در هندسه‌ی تحلیلی روشی ارائه شده است که مسائل هندسه به روش جبری حل شوند. اما روش‌های جبری استدلال لزوماً قابل ترجمه به یک استدلال هندسی برای حکم موردنظر نیستند. سعی کنید روش‌های جبری حل مسائل هندسه را به الگوریتم‌هایی تحویل کنید که قابل ترجمه به زبان هندسه باشند. اگر موفق شوید چنین کنید، توانسته‌اید به یک متخصص نرم‌افزار کمک کنید تا برنامه‌ای بنویسد که برای احکام هندسی، استدلال هندسی بیابد.

فعالیت / دانشگاه ....

در هندسه‌ی تحلیلی روشی جبری برای حل مسائل هندسه‌ی اقلیدسی در صفحه یا فضا ارائه شده است. برای هندسه‌ی کروی در بعد دو و سه و همین‌طور هندسه‌ی هذلولوی در بعد دو و سه روش‌هایی جبری برای اثبات احکام ارائه دهید. آیا می‌توانید همین کار را برای یک رویه‌ی ریمانی فشرده با انحنای ثابت انجام دهید؟ به نظر شما روش‌های جبری در هندسه‌ی تحلیلی چه محدودیت‌هایی دارند؟ آیا این محدودیت‌ها قابل برطرف شدن هستند؟

۵-۲. تعقل و تفکر جبری

عقل ساختارشناس توانایی تشخیص ساختارهای مفهومی ثابت را دارد. ساختارهایی که در حال تحولند، برای عقل یک به یک قابل تشخیص نیستند. عقل ناچار است ساختارهای مورد مطالعه را چنان بررسی کند که آن ساختارها صلب به نظر برسند یا تنها ساختارهای صلب را مورد مطالعه قرار دهد. این معنی نمی‌دهد که خانواده‌ی ساختارها قابل مطالعه نیستند، بلکه عقل می‌تواند زمان را هم وارد کند و خانواده‌ی ساختارها را به عنوان یک ساختار کلی که

تک‌تک ساختارها را به عنوان زیرساختار دربردارد، در نظر بگیرد. این ناتوانی عقل چیزی شبیه ناتوانی مغز در درک خانواده‌ای پیوسته از مفاهیم است. اگر قرار باشد مغز ما خانواده‌ای پیوسته از مفاهیم را ادراک کند، راهی برای ادراک و تشخیص تک‌تک این مفاهیم نخواهد داشت، همان‌طور که روشی خداداد برای انتخاب نقطه‌ای از یک خط وجود ندارد.

اگر تاریخ علم جبر را در نظر بگیریم، خواهیم دید که مطالعه‌ی ساختارهای جبری صلب، موضوع این علم است. استدلال‌های جبر هیچ‌کدام بر خانواده‌ای از ساختارها بنا نشده است، در صورتی که امکان استدلال با خانواده‌ای از ساختارها وجود دارد. در سراسر یونان باستان تنها ساختارهای منفرد جبری مطالعه شده است. خانواده‌ی ساختارهای جبری، یک مفهوم مدرن اواخر قرن بیستمی است. هر چند خانواده‌ی اتحادهای جبری در یونان باستان مطرح بوده است، اما خانواده‌ای هندسی از ساختارهای هندسی که متناظر با معادلات جبری بوده‌اند، خانواده‌ای از ساختارهای جبری، به مفهوم جبری خانواده، محسوب نمی‌شود. این گرایش به بررسی ساختارهای صلب در تاریخ جبر تحت‌تأثیر عقل ساختارشناس به‌وجود آمده است. فراموش نکنید که فلسفه که یک فعالیت عقلانی است، همزمان با مفهوم نسبت که مفهومی جبری است، توسط تالس به وجود آمده است. هم‌چنین تأثیر آموزش ساختارهای جبری در رشد قوّه‌ی تعقل انکارناپذیراست.

برای این‌که درک بهتری از لایه‌ی تجرید تعقل پیدا کنیم، تاریخ تحول مفهوم ناوردا را مرور می‌کنیم. در زمان تالس ناورداها طول، مساحت یا حجم بودند و به ناورداهای عددی محدود می‌شدند. در کتاب اصول اقلیدس، هیچ ساختار جبری به عنوان ناوردا مطرح نشده است. اولین جایی که یک معادله به عنوان ناوردا مطرح می‌شود، قانون اهرم ارشمیدس است که از فیزیک سرچشمه گرفته است. سال‌ها معادلات برای جبری‌سازی مسائل به کار می‌رفته‌اند تا این‌که به عنوان ناوردا مطرح شوند. قرن هفدهم و آثار نیوتن شروع جدی کاربرد معادلات برای

مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی بوده است. در طول قرن هجدهم و نوزدهم معادلات دیفرانسیل نیز به عنوان ناوردا مطرح شده‌اند. با ظهور مفهوم گروه در قرن نوزدهم، ساختارهای جبری به عنوان ناوردا مطرح شدند. هم‌زمان ساختارهای عددی شکل گرفتند و با ساختارهای جبری درآمیختند. ارتباط هندسه‌ی جبری و جبر جابه‌جایی منجر به این شد که ساختارهای عددی نیز به عنوان ناوردا به کار روند. بعدها مجموعه‌ای از ساختارهای جبری که خود ساختارمند بودند، به عنوان ناوردا به کار رفت که آن را رسته نامیدند. رسته‌ها به عنوان ناوردا هم در ساختارهای جبری و هم در ساختارهای هندسی مطرح شدند. می‌بینیم که ابزار عقل ساختارشناس تجرید و تعمیم است که هر دو ادراکاتی فراتحولی هستند. با این حال عقل قائم به ذات نیست و تعقل مؤید به ادراکات لایه‌ی تجرید بالاتری است.

فعالیت / دبستان

رودخانه‌ای پرآب را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم حجم آب گذرنده از رودخانه در یک ثانیه را محاسبه کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟ وقتی رودخانه باریک‌تر می‌شود سرعت آب بیش‌تر می‌شود. دلیل این اتفاق را توضیح دهید. اگر عرض رودخانه در یک پیچ نصف شود، سرعت آب رودخانه در این قسمت چند برابر می‌شود؟ اگر عرض رودخانه دو برابر شود چه‌طور؟ وقتی عرض رودخانه در حال تغییر است، پس از گذر از قسمت باریک‌تر آیا همواره سرعت آب بیش‌تر خواهد ماند؟

فعالیت / راهنمایی

فرض کنید یک قایق در آب شناور است. مقدار فرورفتن قایق در آب چنان است که اگر آن ناحیه با آب پر شود، وزن آب لازم به اندازه‌ی وزن قایق باشد، به طوری که برای آب اطراف قایق فرقی نکند که در آن ناحیه قایق قرار بگیرد یا

آب. این را قانون ارشمیدس گویند. حال از این ایده استفاده کنید و سعی کنید نرخ تبدیل ریال به دلار را با کمک این مدل به دست آورید یا الگوریتمی برای محاسبه‌ی این نرخ تبدیل به دست دهید.

فعالیت /دبیرستان..

برای یک حکم جبری چندین استدلال مستقل ارائه دهید. از آن‌جا که استدلال برای احکام جبری معمولاً محاسباتی است، ارائه چندین استدلال برای یک حکم کار دشواری است. سپس از دانش‌آموزان بخواهید مؤلفه‌های اصلی هر اثبات را شناسایی کنند و آن مؤلفه‌ها را در هر یک از اثبات‌های دیگر بازشناسی کنند. چرا بعضی استدلال‌ها کوتاه و بعضی طولانی‌اند؟ آیا طول استدلال ناوردایی از آن حکم است؟

فعالیت / دانشگاه..

می‌خواهیم ساختاری عددی بسازیم که خواص از پیش تعیین شده داشته باشد یا ساختاری جبری بسازیم که ناورداهای از پیش تعیین شده داشته باشد. این کار درست شبیه حل معادله است، زیرا حل معادله به نوعی روند معکوس محاسبات است. فرض وجود جواب برای بعضی معادلات مانند $x^2+1=0$ با سایر ساختارهای عددی سازگار است. سعی کنید فرض وجود ساختارهای عددی یا جبری را نیز به همین روش به صورت اصل موضوعه‌ای نه ساختنی در کار با ساختارهای جبری دیگر به کار ببرید.

۶ـ۲. شهود و تفکر جبری

شهود، یک لایه‌ی تجرید ادراک هندسی است که از تعقل مجردتر است. تعقل که ساختارشناسی حقایق ریاضی است، به واسطه‌ی شهود فعال است و مؤیّد به آن است. شهود، ادراکی است که به واسطه‌ی نور ممکن می‌شود که در ریاضیات

می‌توان آن را نوعی تضاد دانست. در این نوع ادراک، اشیا و ساختارهای ریاضی را به واسطه‌ی ضدآنان می‌شناسند. حرکت و تغییر موضوع مورد مطالعه، جزء لاینفک قابل شناخت بودن توسط شهود است. منظور از این حرکت تغییر پیوسته نیست، بلکه منظور امکان مقایسه یک مفهوم با ضد آن است. مثلاً خاصیت و ساختاری که همه جا هست و هر جا به طور خدادادی وجود دارد، قابل شناسایی نیست. مثلاً این‌که هر چیز با خودش مساوی است، تنها یک قرارداد است و امکان ادراک درونی آن جز با ساختن یک کپی دیگر از شیء مورد مطالعه و مقایسه‌ی آن با خود اولیه‌اش ممکن نیست. این ادراک چیزی شبیه به این نکته است که تقارن را جز با شکستن تقارن نمی‌توان درک کرد. وقتی تقارن شکسته شد، می‌فهمیم که تقارنی وجود داشته است.

این‌که ساختارهای ریاضی تغییر و تحول داشته باشند، باعث می‌شود مفهوم ساختارهایی که ثابت می‌مانند، معنی پیدا کند. اگر همه‌ی ساختارها صلب باشند، ساختارها را نمی‌توان به ضدشان درک کرد. به عبارت دیگر، تقارنی که شکستن آن باعث ادراک می‌شود، حرکت در برابر سکون است. این یکی از معضلات باستانی فلسفی بوده است که اگر حرکت وجود دارد و شیء تغییر می‌کند، از کجا می‌فهمیم که این شیء همان شیء اولیه است که اکنون عوض شده و تغییر کرده است. این مشکل فلسفی را افلاطون با ابداع مفاهیم جوهر و عرض حل کرد که شیء متغیر جوهرش ثابت و عرضش متغیر است. صورت جدید این فرمول‌بندی توسط ملاصدرا ارائه شده که وجود، لایه‌های تجرید مختلفی دارد که بعضی از آن‌ها تغییر می‌کنند و بعضی ثابت هستند. همه‌ی لایه‌های تجرید می‌توانند تغییر کنند، اما لایه‌های بالاتر ثابت می‌مانند. از این‌جا همیشه می‌توان فهمید که این شیء همان شیء اولیه است. نکته این‌که بدون این تغییرها ادراک ساختارها غیرممکن است. به این، شهود به نور حرکت و تغییر گفته می‌شود. این‌که فرض می‌کنیم نور را می‌توان نوعی تضاد گرفت، ممکن است از نظر فلسفی بحث‌انگیز باشد؛ چرا که مفاهیم نور و وجود را در مراتبی نسبی فرض می‌کند.

حال منظورمان را از حرکت در این لایه‌ی تجرید به زبان جبری روشن‌تر خواهیم کرد. مثلاً مفهوم ساختار عددی و ساختار جبری را در نظر بگیرید. دو مصداق خاص آن‌ها را می‌توان حلقه‌های جابه‌جایی و ناجابه‌جایی گرفت. مفهوم جابه‌جایی بودن از آن‌جا قابل تشخیص است که ضد آن متصور است و مجموعه‌ی همه‌ی حلقه‌ها را می‌توان به دو دسته‌ی جابه‌جایی و ناجابه‌جایی افراز کرد. همین امکان را که یک حلقه که یک ساختار جبری است، بتواند جابه‌جایی یا ناجابه‌جایی باشد، حرکت می‌نامیم. هر چند که در لایه‌های تجرید ملموس‌تر می‌توان خانواده‌ای از حلقه‌های ناجابه‌جایی در نظر گرفت که به یک حلقه‌ی جابه‌جایی میل می‌کنند، منظور ما از حرکت در این لایه‌ی تجرید در نظر گرفتن خانواده‌ی ساختارهای جبری و میل کردن نیست. این ادراک منجر می‌شود که تعریفی جدید از یک مفهوم ارائه کنیم و آن افراز خانواده‌ای از اشیا به متناهی دسته است. می‌توانید به بخش مفاهیم جبری رجوع کنید و این تعریف را با سایر تعاریف ارائه شده مقایسه کنید.

فعالیت / دبستان..

برای شهودی کردن آموزش اعداد به دانش‌آموزان، از چینه استفاده کنید. مکعب‌های رنگی را به رنگ‌های زرد، سبز، نارنجی، قرمز و آبی که به ترتیب در یک ردیف پنج‌تایی، چهارتایی، ... یک مکعب مستطیل ساخته‌اند، چینه گویند. چینه‌ها باید چنان باشند که توسط دانش‌آموزان اول دبستان به راحتی قابل جابه‌جایی باشند. با این روش، عدد به مفهوم طول و هم عدد به عنوان مساحت و هم عدد ترتیبی و هم عدد اسمی، همه در کنار هم جای گرفته‌اند. پنج رنگ چینه‌ها اشاره به انگشتان دست دارد.

فعالیت / راهنمایی..

سعی کنید با کمک الگوهای هندسی برای $1 + 2 + \cdots + n$ فرمولی بیابید. از

یک مستطیل $n \times (n+1)$ استفاده کنید. حال از الگوهای هندسی کمک بگیرید و برای $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ فرمولی بیابید. این بار به یک الگوی هندسی سه بعدی احتیاج دارید. آیا همیشه می‌توان برای محاسبه‌ی $1^k + 2^k + \dots + n^k$ برای هر k ثابت مانند ۳، ۴، ۵ و... از ایده‌های هندسی کمک گرفت؟ تفکر جبری گاهی کمبودهای شهود هندسی را جبران می‌کند.

فعالیت / دبیرستان

نامساوی میانگین هندسی - حسابی را با کمک یک شکل هندسی قابل شهود کنید. حال سعی کنید سایر نامساوی‌های جبری را که می‌شناسید با تغییر متغیر یا محاسبات جبری به یک نامساوی تبدیل کنید که معنی هندسی داشته باشد. آیا هر نامساوی جبری قابل تبدیل به یک نامساوی هندسی است؟ اگر بخواهیم این فلسفه را بپذیریم، آیا ناچاریم مفهوم هندسی بودن یک نامساوی را تعمیم دهیم؟

فعالیت / دانشگاه

دگردیسی ساختارهای جبری، یک فضای هندسی، اما موضعی را به ساختارهای جبری نسبت می‌دهد. مفاهیم موضعی هندسه مثل فاصله، خمیدگی و مانند آن را برای خانواده‌ای از ساختارهای جبری تعریف کنید. با این کار اجازه داده‌اید تا شهود هندسی برای مطالعه‌ی ساختارهای جبری به کار رود. آیا می‌توانید حقایق سرتاسری هندسه را نیز به این چارچوب توسعه دهید؟ ساختارهای جبری صلب به شرطی در حوزه‌ی کارکرد شهود هندسی قرار خواهند گرفت که در خانواده‌ای از ساختارها که هندسه دارند، نشانده شوند. برای یک زیر خمینه‌ی گسسته از یک خمینه مفاهیم موضعی و سرتاسری هندسه را چگونه تعمیم می‌دهید؟

۷_۲. حقایق جبری

از همه‌ی لایه‌های تجرید ریاضی صحبت کردیم و پیوسته گفتیم که این‌ها تجلیات حقایق ریاضی هستند. حقایق ریاضی چیستند؟ اگر بشماریم با این لایه‌ی تجرید، لایه‌های تجرید ریاضی را به هفت قسمت تقسیم کرده‌ایم. باید بدانید که هر چند این تقسیم‌بندی هفت‌تایی معمول است، اما چیزی شبیه به تقسیم یک اکتاو به هفت نت موسیقی است و این تقسیم خداداد نیست و غیر آن نیز ممکن است. مثلاً افلاطون سه لایه‌ی تجرید ملموس، مثالی و عقلانی را در نظر می‌گرفت یا درموسیقی چینی یک اکتاو را به پنج نت تقسیم می‌کنند. راستش را بخواهید کسی نمی‌داند حقایق ریاضی چیستند. اما دلایل و تجربیات بسیاری چنین ایجاب می‌کنند که همیشه ادراکات ریاضی ما، تجلی چیزهای عمیق‌تری هستند. آن چیزهای عمیق‌تر را حقایق ریاضی می‌نامیم.

این‌که همیشه ادراکات ما تجلی ابعاد عمیق‌تری از حقیقت هستند، نکته‌ای است که قابل تعمیم است و در سطح بسیار گسترده‌ای صحیح است. به‌خصوص همین ادراک ما از لایه‌های تجرید مستثنا نیست. این هفت لایه‌ی تجرید که ساختیم، خود می‌تواند سطح ادراک ما قلمداد شود و برای آن باطنی و برای آن باطن، باطن دیگری همین‌طور تا هفت لایه تصور شود؛ همان‌طور که در موسیقی به یک اکتاو بالاتر می‌رویم و همه‌ی ساختارهای اکتاو پایین در اکتاو بالا هم مشاهده می‌شود. بنابراین این‌که حقایق پشت صحنه‌ی ریاضی چه چیزهایی هستند، به هفتمین لایه‌ی تجرید خلاصه نمی‌شود، بلکه این لایه‌های تجرید، همه بواطنی دارند که باید به نوبه‌ی خود ادراک شوند. هفتمین لایه‌ی تجرید در واقع چیزی است که ما متناظر ذات و ادراک ذاتی قرار می‌دهیم. بنابراین این روش مطالعه‌ی لایه‌های تجرید که ما در دستور کار قرار داده‌ایم، فرض می‌کند که نفس و قلب و روح و عقل و نور و ذات نسبی هستند و معنی مطلقی ندارند. این نکته نیز معرکهٔ آراء دانشمندان است و مورد اتفاق جمهور علما قرار نگرفته است.

هر چند همان‌طور که پیش از این گفتیم، حقایق ریاضی هندسی یا جبری

نیستند و هندسی یا جبری بودن دو بعد مختلف از یک حقیقت هستند. می‌توان حقیقت را به زبان جبری بررسی کرد، لذا صحبت از حقایق جبری معنی دارد. حال باید سؤال کرد که باور کردن وجود حقایق جبری و ارتباط بین لایه‌های تجرید به این صورتی که گفتیم، چه فوایدی در ادراک مفاهیم جبری دارد. مهم‌ترین نتیجه‌ای که این فرمالیسم در پژوهش حقایق جبری دارد، این است که تجلی حقایق جبری همگام با تکثر آن‌هاست. هرچه حقایق را مجردتر بررسی کنیم، وحدت بیش‌تری دارند و هرچه تجلیات ملموس‌تر آنان را در نظر بگیریم، کثرت آن بیش‌تر است. به‌خصوص اگر ساختار ریاضی واحدی تجلی دو ساختار مجردتر متمایز باشد، حتماً بین دو ساختار ربطی وجود دارد. بلکه دقیق‌تر حتماً هر دو ساختار تجلی ساختار مجردتر واحدی هستند. این نکته در بسیاری از صحنه‌های پژوهشی می‌تواند هدایت‌کننده‌ی خوبی به سوی حقایق جبری باشد. هر چه به لایه‌های مجردتر نزدیک شویم و هرچه حالت کلی‌تر و تعمیم‌یافته‌تر یک حکم را در نظر بگیریم، درخواهیم یافت که به کُنه و حقیقت آن حکم نزدیک‌تر شده‌ایم و رفتار مفاهیم آن را در برابر مفاهیم دیگر بهتر می‌توانیم توجیه کنیم.

فعالیت / دبستان ....

به جای آن که اعداد را به دسته‌های ده‌تایی، صدتایی و هزارتایی تقسیم کنیم و نمایش ده‌دهی اعداد را در نظر بگیریم، آن‌ها را به دسته‌های پنج‌تایی، بیست و پنج‌تایی و یکصد و بیست و پنج‌تایی تقسیم می‌کنیم. به همان روش قبلی می‌توان اعداد را در این نمایش جدید جمع کرد. دو عدد را در نظر بگیرید و در نمایش ده‌دهی و پنج‌پنجی به نمایش بگذارید. سپس حاصل‌جمع این دو عدد را در هر دوی این نمایش‌ها محاسبه و با هم مقایسه کنید. آیا دو حاصل‌جمع به دست آمده، برابرند؟ عدد ده چه برتری‌ای نسبت به عدد پنج دارد؟ چرا از مبنای ده برای محاسبات عددی استفاده می‌کنیم، نه از مبنای پنج؟ اگر هیچ‌کدام برتری ندارند، چرا از مبنای خاصی برای محاسبه استفاده می‌کنیم؟

فعالیت / راهنمایی

فرض کنید می‌خواهیم تعداد برگ‌های یک درخت را به طور تقریبی بشماریم. ناچاریم حجم تقریبی فضایی که شاخ و برگ آن را اشغال کرده‌اند، محاسبه کنیم و تعداد تقریبی برگ‌ها در واحد حجم را تخمین بزنیم. چرا شمارش به مفاهیم حجم و چگالی ارتباط پیدا می‌کند؟ حجم، مفهومی عددی است، اما نه گسسته، بلکه پیوسته. چگالی نیز همین‌طور. چرا برای محاسبه‌ی مفاهیم عددی گسسته به مفاهیم عددی پیوسته نیازمند می‌شویم؟ آیا تفکر پیوسته تنها حاصل تجرید ذهنی است؟

فعالیت / دبیرستان

چندجمله‌ای‌ها توابعی هستند که می‌توان آن‌ها را مانند اعداد جمع و تفریق کرد. اگر توابع گویا را که حاصل تقسیم چندجمله‌ای بر چند جمله‌ای هستند، در نظر بگیریم، حتّی ضرب و تقسیم آن‌ها نیز یک تابع گویا خواهد بود. آیا توابع گویا نیز عدد هستند؟ اگر نیستند چرا محاسبات عددی برای آن‌ها هم امکان‌پذیر است؟ اگر هستند چگونه می‌توان آن‌ها را به صورت هندسی مورد مطالعه قرار داد؟ آیا جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، توابع تعبیری هندسی دارند؟

فعالیت / دانشگاه

مفهوم خط در هندسه‌های اقلیدسی، کروی و هذلولوی، در ابعاد ۲، ۳ یا بالاتر و در جبر خطی، به نظر متفاوت می‌رسند. آیا می‌توانید تعریفی جبری از خط ارائه دهید که تمام مفاهیم خط را که ذکر آن‌ها آمد، دربربگیرد؟ برای ارائه‌ی این تعریف کلی، از مفاهیمی جدید استفاده خواهید کرد. آیا می‌توانستید از پیش حدس بزنید که برای ارائه تعریفی کلی از مفهوم خط به چنین مفاهیمی نیاز پیدا خواهد شد؟ تنوع پاسخ‌ها و مقایسه‌ی آن‌ها مورد تأکید است.

فصل ۳

نقش مختصات‌گذاری در حل مسئله

همان‌طور که تاکنون برای خواننده مشخص شده است، مختصات‌گذاری در این کتاب، معنی‌ای بسیار کلی‌تر از معنی سنتی آن دارد. در سطح دبستان مختصات‌گذاری به معنی عددمند کردن مسئله است. استفاده از چینه‌ها برای شمارش یا عددمند کردن طول، سطح و حجم، یا تبدیل کمیت‌های پیوسته به کمیت‌های گسسته با کمک انتخاب واحد، همه می‌توانند مختصات‌گذاری محسوب شوند. حتّی یاد گرفتن ساعت و تاریخ نیز نوعی عددمند کردن است و دانش‌آموزان می‌توانند تنوع مختصات‌گذاری را در همه‌ی این موارد تمرین کنند. همین مفاهیم ساده‌ی مختصات‌گذاری می‌تواند دانش‌آموزان را در حل مسائلی که به تفکر عددی مربوط می‌شوند، یاری کند.

در سطح راهنمایی، مختصات‌گذاری به معنی سنتی آن نزدیک است. دستگاه مختصات دکارتی به‌خصوص در صفحه و این‌که چرا خط و دایره را که ساده‌ترین اشکال هندسی هستند، می‌توان با معادلات جبری کاملاً معین کرد و این‌که چرا هندسه‌ی خط و دایره کاملاً به زبان معادلات قابل ترجمه است، همه در مختصات‌گذاری

هندسه‌ی اقلیدسی می‌گنجند. مختصات‌گذاری یک مسئله‌ی هندسه می‌تواند آن را به زبان جبری ترجمه کند و روش‌های جبری را برای به کار بردن در حل مسئله دردسترس قرار دهد.

مختصات‌گذاری در سطح دبیرستان شامل خلاقیت در مختصات‌گذاری نیز خواهد شد. برای این نوع خلاقیت نیز به تسلط بر انواع دستگاه‌های مختصات در دو بعد و سه بعد وجود دارد. در هر مسئله، این‌که چه نوع مختصاتی برای جبرسازی مسئله مناسب‌تر است و صورت جبری مسئله را ساده‌تر خواهد کرد، به حل مسئله و تعمیم آن کمک جدی می‌کند. پس در این سطح، این خود دستگاه‌های مختصات نیستند که اصالت دارند، بلکه تنها به عنوان زبانی برای جبری کردن مسئله به کار می‌روند. ممکن است مسئله با چندین نوع مختصات‌گذاری حل شود. پس مهم این است که دانش‌آموزان فراتر از زبان به کار رفته، مسئله را درک کنند و نقش کمک‌کننده‌ی یک زبان مناسب برای فهم یک حقیقت ریاضی را بشناسند.

در سطح دانشگاه نیز کلمه‌ی مختصات‌گذاری قابل تعمیم است. در این سطح می‌توان مختصات‌گذاری را با جبری‌سازی یکی گرفت. این‌که یک حقیقت را از زبان هندسی به زبان جبری ترجمه کنیم، جبری‌سازی نام دارد. این حقایق می‌توانند پیوسته یا گسسته باشند. آن‌چه اهمیت دارد، این است که مختصات‌گذاری یا جبری‌سازی یک حقیقت هندسی نسبت به وردش‌ها خوش‌رفتار باشد. نسبت دادن ناورداها که در رده‌بندی اشیای هندسی کمک می‌کنند، از جمله‌ی این نوع مختصات‌گذاری‌هاست؛ مثلاً یک نظریه‌ی هومولوژی یا کوهومولوژی به نوعی موجودات مورد مطالعه را مختصات‌گذاری می‌کند، اما تنها با تقریبی که با آن نظریه مشخص می‌شود. نظریه‌ی رسته‌ها نیز به نوعی مسئله‌ی مورد مطالعه را جبری‌سازی می‌کند. این‌که خانواده‌ای از موجودات جبری را در یک موجود جبری جهانی خلاصه کنیم، خود نوعی مختصات‌گذاری است. همه‌ی این مختصات‌گذاری‌ها می‌توانند در حل مسئله کمک کنند.

۱-۳. خلق زبان مناسب برای حل مسئله

یک جبردان در این نکته تخصص دارد که برای هر مسئله یک روش مختصات‌گذاری متناسب با آن مسئله ابداع کند. این مهارت حالت خاصی از این مهارت کلی ریاضیدان است که می‌تواند بفهمد هر مسئله را با چه روش تفکری باید حل کرد. مسلماً زبان مختصات‌گذاری مناسب هر مسئله یگانه نیست و هر مسئله را می توان به روش‌های مختلفی حل نمود.

بسیاری از مسائل هستند که بدون مختصات‌گذاری زبان مناسبی برای تفکر دقیق در مورد آنان وجود ندارد.

فعالیت / دبستان ....

فرض کنید با یک شیلنگ پلاستیکی مشغول آبیاری باغچه‌ی خانه‌تان هستید. اگر با انگشت خود قسمتی از سر شیلنگ را بپوشانید، آب قسمت‌های دورتر باغچه را نیز آبیاری خواهد کرد. با آزمایش نشان دهید نسبت قسمت پوشیده نشده از سر شیلنگ به کل مقطع آن متناسب است، با فاصله‌ای که شیلنگ می‌تواند آبیاری کند. آیا می‌توانید دلیلی برای تغییر برد آب شیلنگ ارائه دهید؟

فعالیت / راهنمایی ....

نقاط A و B با دو مسیر k و l به هم وصل شده است. فرض کنید دو نقطه‌ی متغیر x و y که با طنابی به طول r به هم وصل شده‌اند، می‌توانند چنان به ترتیب از روی مسیرهای k و l از A به B برسند که طناب پاره نشود. ثابت کنید به هر روش که دو استوانه به قطر r در دو جهت مختلف مسیرهای k و l را طی کنند، حتماً به هم برخورد می‌کنند و مانع عبور یکدیگر می‌شوند.

فعالیت / دبیرستان ....

n ماشین مسابقه در یک پیست دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند و با سرعت ثابت v

هر یک در جهتی دلخواه در حال حرکت‌اند. پیست تنها یک مسیر دارد و فرض کنید به محض آن‌که دو ماشین مسابقه به هم می‌رسند، بدون اتلاف وقت برمی‌گردند و در جهت مخالف به حرکت خود ادامه می‌دهند. ثابت کنید در هرحال زمانی مانند t وجود دارد که پس از طی این زمان همه‌ی ماشین‌ها درست به وضعیت اولیه‌ی خود بازگشته باشند.

فعالیت / دانشگاه ....

ثابت کنید هر نگاشت پیوسته از گوی به خودش نقطه‌ی ثابت دارد. اثبات‌های مختلفی که برای این حکم داده شده، جمع‌آوری کنید و مصداق مختصات‌گذاری در هر یک را تشخیص دهید.

۲ـ۳. برقراری ارتباط بین اجزا

مختصات‌گذاری به طور طبیعی خاستگاهی برای برقراری ارتباط بین اجزای مختلف مسئله ایجاد می‌کند. زیرا برقراری ارتباط بین اجزاء مسئله نیاز به زبان مشترکی بین این اجزاء دارد که مختصات‌گذاری این نیاز را برآورده می‌کند. گاهی برای برقراری ارتباط بین چند مسئله مختلف نیز ناچاریم مختصات‌گذاری جدیدی برای هر یک از مسائل ارائه کنیم به طوری که این مجموعه هماهنگ باشند و بتوان بین آن‌ها ارتباط برقرار نمود. حتی برای ارتباط برقرار کردن بین تئوری‌های مختلف به یک زبان مشترک نیاز هست.

فعالیت / دبستان ....

تعدادی میله‌ی باریک به اندازه‌های مختلف کوتاه و بلند را در نظر بگیرید. حال سعی کنید با انتخاب سه میله و در کنار هم قرار دادن آن‌ها، یک مثلث بسازید. آیا با هر انتخاب از میله‌ها می‌توان یک مثلث تشکیل داد؟ چگونه می‌توان قبل از کنار هم قرار دادن میله‌ها به این سؤال پاسخ گفت؟

فعالیت / راهنمایی ....

از یک پاره‌خط به طول واحد یک سوم آن را که درست در وسط قرار گرفته، حذف می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد هر یک از پاره‌خط‌های باقی‌مانده را چنین می‌کنیم؛ یعنی به اندازه‌ی یک سوم از وسط آن‌ها حذف می‌کنیم. این کار را بی‌نهایت مرحله ادامه می‌دهیم. در هر مرحله از طول پاره‌خط‌های باقی‌مانده کم کرده‌ایم. حساب کنید که در نهایت طول پاره‌خط‌های برداشته شده چه‌قدر است. برای محاسبه‌ی مجموع طول‌ها می‌توانید از روش‌های هندسی نیز کمک بگیرید. با کمک تشکیل معادله روش جبری نیز جواب‌گوست.

فعالیت /دبیرستان ....

سعی کنید با کمک بردارها احکام هندسی را ثابت کنید. مثلاً ثابت کنید سه میانه‌ی یک مثلث همرسند یا اقطار یک متوازی‌الاضلاع منصف‌اند. به کمک بردارها معادله‌ی خط و دایره را به دست دهید و از آن‌ها در اثبات احکام پیچیده‌تر کمک بگیرید. آیا می‌توان از بردارها به عنوان یک روش تحلیلی برای حل مسائل هندسه استفاده کرد؟

فعالیت / دانشگاه ....

آیا ممکن است موضعی‌سازی دو حلقه‌ی غیر ایزومرف حلقه‌ی یکسانی باشد؟ آیا می‌توانید مثالی بزنید که تنها برای یک ایده‌آل اول از دو حلقه این اتفاق بیفتد؟ آیا با داشتن دو حلقه‌ی موضعی می‌توان حلقه‌ای پیدا کرد که هر دوی این حلقه‌ها از موضعی‌سازی حلقه‌ی جدید به دست آید؟ مفاهیم موضعی و سرتاسری در هندسه و جبر را با هم مقایسه کنید.

۳ـ۳. مراحل مختصات‌گذاری و تشکیل معادله

بعضی اعتقاد دارند که حجم محاسبات لازم برای حل یک مسئله نوآوردایی وابسته

به آن مسئله است و مسائلی که راه‌حل‌هایی نسبتاً کوتاه‌تر از دیگر راه‌حل‌ها دارند، این امری تصنعی است و با بازگشت به مبانی می‌توان دید که واقعاً حجم محاسبات ناورداست. بعضی نیز اعتقاد دارند راه‌حل‌های کوتاه و بلند هر دو وجود دارند و ذهن برای کوتاه کردن راه‌حل‌ها مفهوم‌سازی می‌کند. در هر حال مقایسه‌ی راه‌حل‌های مختلف یک مسئله به ما کمک می‌کند تا نکات کلیدی پشت پرده‌ی آن‌ها را بهتر بشناسیم، چون این نکات در همه‌ی راه‌حل‌ها به نحوی خود را نشان می‌دهند.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید با کمک چینه‌ها مجموعی از اعداد دو رقمی را محاسبه کنند. استراتژی‌های محاسبه‌ی مختلف را مقایسه کنید و بگویید هر کدام در چه نوع محاسباتی کارآمدترند. آیا این استراتژی‌های مختلف بر تعاریف مختلفی از عدد تکیه می‌زنند؟ تنوع راه‌حل‌ها مورد تأکید است. کدام استراتژی‌ها مراحل محاسبه را کوتاه‌تر می‌کنند؟ چه مفاهیمی به کوتاه‌تر شدن راه‌حل‌ها کمک می‌کنند؟

فعالیت / راهنمایی ....

نشان دهید با انتخاب دستگاه مختصات مناسب معادله‌ی هر دایره می‌تواند به شکل $x^2+y^2=r^2$ و معادله‌ی هر خط می‌تواند به شکل $x=y$ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی دستگاه‌های مختصاتی که هر یک از دو معادله‌ی بالا را به دست می‌دهند، در نظر بگیرید و مدلی هندسی برای این مجموعه ارائه دهید و بگویید هر یک خانواده‌ای چند بعدی هستند؟

فعالیت /دبیرستان ....

برای سطح یک چنبره دستگاه مختصاتی ارائه دهید. آیا دستگاه‌های مختصاتی که می‌توان روی یک چنبره گذاشت، یگانه‌اند؟ در غیر این صورت، چندین مثال بزنید و ارتباط بین این دستگاه‌های مختصات را بررسی کنید. معادله‌ی خط در هر یک از

این مختصات‌ها چگونه شکلی می‌تواند باشد. ساده‌ترین شکل معادله‌ی خط کدام است؟

فعالیت / دانشگاه ....

دستگاه‌های مختصاتی را روی فضا ـ زمان اینشتین در نظر بگیرید که در معادله‌ی اینشتین متغیرها را جداسازی می‌کنند. تحقیق کنید که همه‌ی این دستگاه‌های مختصات به فضا ـ زمان مختلط توسعه می‌یابند.

۴ـ۳. مدل‌سازی جبری با روند معکوس

گاهی برای مدل‌سازی جبری ناچاریم برعکس فکر کنیم. مثلاً ممکن است فرض کنیم موجودی که می‌خواهیم مدل‌سازی کنیم یک عدد است یا این‌که یک معادله‌ی خاص جواب دارد. تجربه نشان داده است که چنین فرضیاتی در حل مسائل می‌تواند بسیار کارآمد باشد. این روش می‌تواند به ساختن مفاهیم و ساختارهای جدید ریاضی کمک نماید. یادآوری می‌کنیم که علم جبر با حل معادله آغاز شده است که خود ابتدا برای مدلسازی روند معکوس محاسبات عددی مطرح شده است.

فعالیت / دبستان ....

فرض کنید در یک آپارتمان زندگی می‌کنید که چندین طبقه‌ی پارکینگ زیرزمین دارد. طبقه‌ی همکف مسکونی نیست. فرض کنید تعداد طبقات آپارتمان و پارکینگ بی‌شمارند. از همکف شروع کنید و پنج طبقه بالا بروید. می‌توانید فرض کنید سوار آسانسور هستید. هفت طبقه پایین بیایید. در کدام طبقه هستید؟ سه طبقه پایین بروید و هفت طبقه بالا بروید. در کدام طبقه هستید؟ حرکت به سمت بالا را با اعداد مثبت و حرکت به سمت پایین را با اعداد منفی نام‌گذاری کنید. اعداد مثبت و منفی را چگونه جمع می‌کنید؟ چگونه تفریق می‌کنید؟

فعالیت/ راهنمایی ....

فرض وجود جواب برای معادلات $ax=b$ با ضرایب طبیعی منجر به تعریف اعداد گویای مثبت می‌شود. فرض وجود جواب برای معادلات $ax=b$ با ضرایب اعداد صحیح منجر به تعریف اعداد گویای مثبت یا منفی می‌شود. جمع و تفریق اعداد گویا و ضرب و تقسیم آن‌ها را برحسب معادلات بالا تعریف کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

فرض کنید معادلات درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ همه برای a و b و c گویا جواب دارند. جمع و تفریق چنین جواب‌هایی را چگونه تعریف می‌کنید. ضرب و تقسیم آن‌ها را چه‌طور؟ همه‌ی اعدادی که به دست می‌آیند را در نظر بگیرید. آیا با فرض وجود جواب برای یک معادله‌ای خاص $ax^2+bx+c=0$ می‌توان نتیجه گرفت همه‌ی معادلات بالا جواب دارند؟

فعالیت / دانشگاه ....

اعداد چهارگان را در نظر بگیرید. آیا می‌توان وجود اعداد چهارگان را برحسب وجود جواب‌هایی برای معادلات فرمول‌بندی کرد؟ توجه کنید که روند تاریخی ظهور اعداد چهارگان به ساختارهای عددی مربوط می‌شده است و به نظریه‌ی حل معادلات ربطی نداشته است.

فصل ۴

مختصات‌گذاری و آموزش جبر

همان‌طـور کـه تاکنون دریافته‌اید، آموزش جبر در این نوشـتـه بـه معنی آموزش تفکر جبری اسـت و جبر معنی‌ای بسـیار عام‌تر از معنی سـنتی آن دارد. سـؤال این کـه مختصات‌گـذاری به معنی عام آن که در فصل گذشـته تعریف شـد، چه خدمتی می‌تواند به آموزش تفکر جبری کند؟ چه روش‌های تدریسی را پیشنهاد می‌کند؟ چه روش‌هایـی بـرای تدوین محتوا و چینش آن را پیـش‌رو می‌نهد؟ چه امکاناتی را در اختیار دانش‌آموز برای یادگیری بهتر قرار می‌دهد؟

در سـطح دبسـتان مختصات‌گذاری چه به معنی عددمند کردن مسـئله یا موضوع مـورد مطالعـه و چه به معنی تفکر الگوریتمی که در جمع و تفریق و ضرب و تقسـیم مطرح است، حرف اول و آخر را در آموزش تفکر جبری می‌زند. در سطح راهنمایی مختصات‌گذاری در کنار اسـتدلال‌های سـاده و ملموس که همه‌ی اجزای اسـتدلال بتواننـد هم‌زمـان در معرض دید دانش‌آموز قرار گیرنـد، می‌تواند ابزار مفیدی برای آموزش تلقی شـود. در سـطح دبیرسـتان مهم‌ترین ابزار برای تربیت خلاقیت جبری

دانش‌آموزان خلاقیت در مختصات‌گذاری است. در سطح دانشگاه اگر بخواهیم مختصات‌گذاری را با جبری‌سازی یکی بگیریم، هم در ابعاد نظری نقش مهمی ایفا می‌کند؛ چرا که ابزارهای جبری برد تفکر را به طور جدی افزایش می‌دهند، و هم در ابعاد کاربردی؛ چرا که جبری‌سازی حقایق هندسی، آن‌ها را برای ارائه به کامپیوتر و برخورد نرم‌افزاری با آن آماده می‌کند.

در این فصل، ابتدا به دیدگاه‌های سنتی آموزش و نقش مختصات‌گذاری در آن‌ها خواهیم پرداخت. سپس دیدگاهی مدرن که از مختصات‌گذاری به روش مؤثرتری استفاده کند، معرفی خواهیم کرد. آن‌گاه کاربرد مختصات‌گذاری را در برنامه‌ی آموزش ریاضی مطالعه خواهیم کرد و در چارچوب جریان‌های مفهومی و مهارتی آن را مورد بررسی خواهیم کرد. سپس به نگرشی تاریخی نسبت به مختصات‌گذاری خواهیم پرداخت و آن را در خدمت استدلال و تحول مفهوم عدد قرار خواهیم داد.

یک مسئله‌ی اجرایی مهم در رابطه با کاربردهای عملی تفکر جبری و تفکر الگوریتمی دسترسی دانش‌آموزان و معلمان به کامپیوتر و ابزارهای محاسبه است. این‌که آیا تنها معلم دسترسی به این ابزارها دارد یا همه‌ی دانش‌آموزان؟ و این‌که آیا دانش‌آموزان امکانات لازم برای برنامه‌ریزی توسط کامپیوتر را دارند یا آموزش‌های لازم را دیده‌اند یا خیر؟ و سؤالاتی اجرایی مانند آن. از آن‌جا که در این کتاب، به مباحث نظری اقبال داریم، نه مشکلات اجرایی، فرض خواهیم کرد که همه‌ی این امکانات دردسترس معلمان و دانش‌آموزان قرار دارد و وظیفه‌ی بررسی امکانات موجود و برنامه‌ریزی مطابق با آن امکانات را به عهده‌ی برنامه‌ریزان آموزشی خواهیم گمارد.

۱ـ۴. آموزش سنتی و مختصات‌گذاری

روش سنتی آموزش جبر بر مختصات‌گذاری دکارتی تأکید دارد. در بعضی نظام‌های آموزشی مختصات قطبی نیز مطرح می‌شود. در هندسه‌ی سنتی نسبت همساز و نسبت ناهمساز و همین‌طور هندسه‌ی بردارها به عنوان روش‌های مختصات‌گذاری به‌کار می‌رود. مختصات‌گذاری روشی برای ترجمه‌ی احکام هندسی به جبری است و با این

کار احکام را در دسترس استدلال‌های جبری قرار می‌دهد. البته استدلال جبری تنها کاربرد مختصات‌گذاری نیست. گاهی مختصات‌گذاری می‌تواند برای کشف ایده‌های کلیدی کارآمد باشد.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید الگوریتم جمع اعداد چند رقمی را بررسی کنند و با کمک چینه بگویند چرا این الگوریتم پاسخ صحیح را به دست می‌دهد. همین کار را در مورد الگوریتم تفریق، ضرب و تقسیم انجام دهند.

فعالیت/ راهنمایی ....

در یک جاده دو ماشین پشت سر هم حرکت می‌کنند. ماشین جلویی با سرعت ۵ کیلومتر بر ساعت در حال حرکت است و ماشین عقبی که ۲ کیلومتر عقب‌تر است، با سرعت ۷ کیلومتر بر ساعت ماشین جلویی را تعقیب می‌کند. با رسم نمودار حرکت مسافت – زمان دو ماشین، لحظه‌ی به هم رسیدن ماشین‌ها را محاسبه کنید. حال مسئله را به زبان جبری ترجمه کنید و با استدلال جبری پاسخ گذشته را بیابید. حال با راه‌حل فیزیکی مقایسه کنید و بگویید چرا راه‌حل جبری آن را تأیید می‌کند.

فعالیت /دبیرستان...............................

معادله‌ی خط و دایره در مختصات دکارتی را در نظر بگیرید. همین‌طور معادله‌ی خط و کره در فضای سه بعدی را پیش‌رو داشته باشید. حال سعی کنید احکام هندسی در دو بعد و سه بعد را به کمک این معادلات اثبات کنید.

فعالیت / دانشگاه ....

در مسائل مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط PDE چند مختصات مختلف را در نظر بگیرید و PDE را با توجه به همه‌ی این دستگاه‌ها فرمول‌بندی کنید. آیا پیدا کردن

جواب همه‌ی این PDEها از یک درجه‌ی سادگی است؟ چرا دستگاه‌های مختصاتی که با تقارن مسئله هماهنگ‌اند، PDEهای ساده‌تری به دست می‌دهند؟ حال مسئله‌ی تغییر متغیر PDE را مستقل از تقارن هندسی وابسته به پدیده‌های طبیعی در نظر بگیرید. چگونه می‌توان تقارن‌های پنهان یک PDE را کشف کرد؟ چگونه می‌توان فهمید کدام تغییر متغیرها به دستگاه مختصاتی سه بعدی قابل وابسته شدن هستند؟

۲ـ۴. آموزش مدرن و مختصات‌گذاری

روش مدرن آموزش جبر بر تنوع مختصات‌گذاری تأکید دارد و هم‌چنین جبری‌سازی را به عنوان یک فلسفه‌ی کلی برای حل مسئله در نظر می‌گیرد. در حالت خاص عددمند کردن با تفکر الگوریتمی و استفاده و طراحی نرم‌افزارهای رایانه‌ای ارتباط پیدا می‌کند. تفکر الگوریتمی که خود جزئی از تفکر جبری محسوب می‌شود زمان را وارد فضای محاسبات جبری می‌کند. در ریاضیات آینده ساختارهای جبری در کنار پیچیدگی‌های محاسبه مورد مطالعه قرار خواهند گرفت و با این کارگویی ایده‌ی فضا ـ زمان در نسبیت از هندسه به جبر وارد شده است.

فعالیت / دبستان ....

با کمک چینه‌ها جمع کردن اعداد چند رقمی را بررسی کنید. حال سعی کنید الگوریتمی ارائه دهید که به کمک آن بتوانید اعداد چند رقمی را از سمت چپ جمع کنید، نه از سمت راست. الگوریتم خود را با الگوریتم قبلی در چند مثال خاص مقایسه کنید و صحت آن را آزمایش کنید.

فعالیت / راهنمایی ....

از سالنامه‌ی آمار کمک بگیرید. صادرات نفت ایران را در چند سال پیاپی مقایسه کنید. آن را روی نمودار بیاورید و نقاط نمودار را با بهترین خط ممکن تقریب بزنید و صادرات نفت در سال‌های آینده را پیش‌بینی کنید.

فعالیت /دبیرستان.........................

مسائل هندسه‌ی مسطحه را با کمک هندسه‌ی تحلیلی، اعداد مختلط و بردارها حل کنید و در هر مورد مقایسه کنید که کدام راه‌حل کوتاه‌تر است. حال سعی کنید روش مختصات‌گذاری دیگری برای حل جبری مسائل هندسه ارائه کنید. آیا روش شما به بعد سوم قابل تعمیم است؟

فعالیت / دانشگاه ....

برای هندسه‌های کروی و هذلولوی، دستگاه‌های مختصاتی‌ای معرفی کنید که در آن‌ها معادله‌ی خط و دایره ساده باشد. آیا این دستگاه‌های مختصات به سادگی قابل تعمیم به ابعاد بالاتر هستند؟ در غیر این صورت دستگاه‌های مختصاتی برای هندسه‌های کروی و هذلولوی n- بعدی ارائه کنید.

۳ـ۴. جریان‌های مفهومی و مهارتی

در روش برنامه‌ریزی درسی مهارت محور، این چینش مهارت‌ها و پیش‌مهارت‌ها هستند که بر نظام تدوین محتوا حکومت می‌کنند. جریان‌های مفهومی و مهارتی ابزاری هستند که کمک می‌کنند پیوستگی محتوای آموزشی در ذهن دانش‌آموز حفظ شود. یک جریان مهارتی مهم، جریان مهارتی مختصات‌گذاری است که لازم است با جریان‌های مفهومی و مهارتی دیگر گره بخورد. در این‌جا، مثال‌هایی از ارتباط جریان مهارتی مختصات‌گذاری با سایر جریان‌های مفهومی و مهارتی ارائه خواهیم کرد.

فعالیت / دبستان ....

با کمک فرش‌چینی با مربع‌هایی به ضلع 2^{-n} مفهومی از مساحت را پایه‌گذاری کنید. ابتدا با حدگیری ثابت کنید مساحت مستطیل از ضرب کردن طول در عرض آن به دست می‌آید.

فعالیت/ راهنمایی

مختصات دکارتی براساس شبکه‌ی مربعی در صفحه پایه‌گذاری شده است. دستگاه مختصاتی برای صفحه ارائه کنید که براساس شبکه‌ی مثلثی بنا شده باشد. توجه کنید که شبکه‌ی مثلثی، با تقسیم هر مثلث به چهار مثلث مساوی به شبکه‌ای ریزتر تقسیم خواهد شد، درست مانند شبکه‌ی مربعی.

فعالیت /دبیرستان

در ریاضیات دبیرستان معمولاً برای نمایش نمودار تابع از مختصات دکارتی استفاده می‌کنند. برای نمایش توابع متناوب از مختصات قطبی نیز می‌توان استفاده کرد. برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم و مینیموم،نقاط عطف و تقعر و تحدب تابع در این مختصات جدید چه پیشنهادی دارید. آیا این مفاهیم وابسته به مختصاتند یا مستقل از مختصات؟

فعالیت / دانشگاه

در معادلات دیفرانسیل تغییر متغیرهایی که متغیرها را جداسازی می‌کنند، در نظر بگیرید و سعی کنید تعبیری هندسی برای علت جداسازی متغیرها بیان کنید. تنوع روش‌های تغییر متغیر برای جداسازی مورد تأکید است.

۴ـ۴. تاریخ علم جبر

آشنایی با روند تاریخی پیدایش مفاهیم ریاضی به ما کمک خواهد کرد تا ارتباطات بین مفاهیم را بهتر درک کنیم. اطلاع از سیر تحول یک مفهوم نیز درک عمیق‌تری از آن مفهوم در اختیار ما خواهد گذاشت. حتّی می‌توان سعی کرد روند تاریخی دیگری برای پیدایش یک مفهوم تصور کرد که خلاقیت در کار با مفاهیم را افزایش خواهد داد.

فعالیت / دبستان ....

یکی از دستگاه‌های قدیمی برای نمایش اعداد دستگاه اعداد شصت شصتی است. در این دستگاه اعداد، نمایش اعداد چیزی شبیه درجه، دقیقه و ثانیه است. برای جمع و تفریق چنین اعدادی الگوریتمی ارائه دهید. این الگوریتم‌ها در محاسبات نجومی کاربرد داشته‌اند.

فعالیت/ راهنمایی ....

برای مشخص کردن موقعیت کشتی‌ها در دریا، دریانوردان از طول و عرض جغرافیایی استفاده می‌کردند. معادله‌ی دایره‌ی عظیمه در این دستگاه مختصات را بنویسید. آیا مشخص کردن معادله‌ی یک دایره روی سطح کره ممکن است؟ معادله‌ی کلی دایره را نسبت به این دستگاه مختصات به دست آورید.

فعالیت /دبیرستان ....

پیش از دکارت اعداد منفی معرفی نشده بودند و در محاسبات تنها از ضرایب مثبت استفاده می‌کرد. این روش، محاسبات را بسیار پیچیده می‌کرد. سعی کنید بدون کمک گرفتن از اعداد منفی، معادلات درجه‌ی دوم را رده‌بندی کنید و فرمولی برای ریشه‌های آن به دست آورید. در مورد وجود ریشه‌ها و تعداد آن‌ها بحث کنید.

فعالیت / دانشگاه ....

مطالعه‌ی رویه‌های ریمانی و میدان‌های توابع منجر به مطالعه‌ی میدان‌های اعداد شد؛ چرا که احکامی که در میدان‌های توابع با کمک ایده‌های هندسی به اثبات می‌رسیدند، قابل پیاده‌سازی در حالت میدان‌های اعداد بودند. آیا می‌توانید سیر تاریخی دیگری برای مطالعه‌ی میدان‌های اعداد پیشنهاد کنید؟

۵ـ۴. جبر ابزار استدلال

هر چند اولین بار این استدلال هندسی بود که ظهور پیدا کرد، اما پس از اصل موضوعه‌ای شدن استدلال، استدلال جبری از انعطاف بیش‌تری برخوردار بود؛ هم از لحاظ تعمیم‌پذیری و هم از لحاظ دقت. استدلال جبری از استدلال هندسی یقینی‌تر است و لذا می‌تواند در ساختارمند کردن ذهن دانش‌آموز در برابر شک و یقین بسیار مفید واقع شود. چرا که استدلال جبری با ساختارهایی سروکار دارد که به صورت اصل موضوعه‌ای تعریف می‌شوند. اما در هندسه ساختارها شهودی‌تر هستند.

فعالیت / دبستان ....

باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر عدد ۳ را در نظر بگیرید. نشان دهید جمع و تفریق و ضرب این باقی‌مانده‌ها خوش تعریف است. برای این ادعا استدلالی بیاورید. آیا اگر به جای عدد ۳ با عدد دیگری شروع می‌کردیم، باز هم خوش تعریفی محاسبات برقرار بود؟

فعالیت / راهنمایی ....

دو ماشین پشت سر هم حرکت می‌کنند. سرعت ماشین عقبی بیش‌تر از سرعت ماشین جلویی است. دقیق‌ترین استدلال را برای این‌که این دو ماشین به هم می‌رسند، ارائه کنید. اثبات هندسی، جبری و فیزیکی کدام‌یک دقیق‌ترند؟

فعالیت / دبیرستان ....

برای حل دستگاه نامعادلات روش‌های هندسی بسیار کارآمدند، به‌خصوص اگر تعداد نامعادلات زیاد باشد یا بعضی از نامعادلات از درجه‌ی دوم به بالا باشند. یک دستگاه نامعادلات در نظر بگیرید و سعی کنید بدون کمک گرفتن از رسم نمودار صرفاً با کمک استدلال‌های جبری همه‌ی جواب‌های دستگاه را به دست آورید.

فعالیت / دانشگاه ....

ارائه‌ی یک معادله برای مشخص کردن یک شیء هندسی، یک روش مشخص کردن آن با کمک ابزارهای کل‌نگر است. تمام روش‌هایی را که برای مشخص کردن یک فضای هندسی می‌شناسید و سرتاسری هستند نه موضعی فهرست کنید. آیا این روش‌ها می‌توانند ابزاری برای استدلال باشند؟ این استدلال‌ها در برابر کاربرد معادلات از دقت کم‌تر یا بیش‌تری برخوردارند؟

۶-۴. جبر و مفهوم اعداد

تاریخ علم جبر با تاریخ تحول مفهوم عدد پیوند خورده است. هر چه درک ما از مفهوم عدد عمیق‌تر شود، در جبر بیش‌تر به پیش رفته‌ایم. دستگاه‌های مختصات درکی ساختنی و ملموس از مفهوم عدد به دست می‌دهد، لذا ابزاری بسیار مناسب برای تربیت درک دانش‌آموزان از مفهوم عدد به‌خصوص در سنین پایین هستند. البته روش‌های دیگری نیز برای معرفی مفهوم عدد پیشنهاد شده است. عده‌ای نظریه‌ی مجموعه‌ها را مبنای کار قرار می‌دهند و عده‌ای اعتقاد دارند باید بر پیشینه‌ی دانش‌آموزان که از زندگی روزمره کسب شده است تکیه نمود تا تئوری‌های ریاضی.

فعالیت / دبستان ....

برای شمارش اشیا نمادهایی پیشنهاد کنید که بدون کمک گرفتن از اعداد بتوان فهمید که از بین دو مجموعه، تعداد اعضای کدام‌یک بیش‌تر است و این‌که آیا تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابرند؟

فعالیت / راهنمایی ....

یک متغیر را عدد فرض کنید. متغیرها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کنید و حاصل این محاسبات را نیز عدد فرض کنید و آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کنید. همه‌ی اعدادی را که به دست می‌آیند، مشخص کنید. شکل کلی

یک عدد را بنویسید. این فعالیت را با یک متغیر، دو متغیر و سه متغیر انجام دهید.

فعالیت /دبیرستان

ریشه‌ی n - ام یک عدد گویا را نیز عدد فرض کنید. این اعداد را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کنید و حاصل این محاسبات را نیز عدد فرض کنید و آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کنید. همین‌طور الی آخر. همه‌ی اعدادی را که به دست می‌آیند، مشخص کنید. حال همین فعالیت را در مورد اعداد مختلط انجام دهید و فرض کنید هر عدد گویا n ریشه‌ی n - ام دارد. آیا مجموعه‌ی اعدادی که به دست آورده‌اید، به سادگی از مجموعه‌ی اعداد بالا قابل ساختن هستند؟

فعالیت / دانشگاه

با استفاده از نظریه‌ی گالوا نشان دهید هر چند جمله‌ای دلخواه قابل حل شدن توسط رادیکال‌ها نیست. برای هر عدد n داده شده الگوریتمی ارائه دهید که تصمیم بگیرد آیا چند جمله‌ای‌های درجه‌ی n داده شده قابل حل شدن توسط رادیکال‌ها هستند یا خیر؟

فصل ۵

کاربردهای مختصات‌گذاری و تشکیل معادله

در این فصل و سه فصل آینده به مسائل عملی تشکیل معادله در سطح ریاضیات مدرسه خواهیم پرداخت و در دو فصل آخر به ابعاد فلسفی که بیش‌تر در ریاضیات دانشگاهی مصداق دارند، خواهیم پرداخت. هر چند در هر قسمت به مثال‌هایی برای دانش‌آموزان دبستان، راهنمایی و دبیرستان نیز اشاره خواهیم کرد. با این وصف محتوای این فصل و سه فصل آینده بسیار به معنی سنتی مختصات‌گذاری نزدیک خواهد بود که بر تشکیل معادله منطبق است. بعضی از سرفصل‌ها در هر سه مقطع دبستان، راهنمایی و دبیرستان مصداق پیدا می‌کنند و بعضی دیگر مانند «حل عددی معادلات و نامعادلات» تنها در بعضی رده‌های سنی می‌توانند معنی داشته باشند.

۱ـ۵. کاربرد اتحادهای جبری در محاسبات

محاسبات جبری با کمک اتحادهای جبری کوتاه و مختصر می‌شوند. اتحادهای جبری مانند اصول موضوعه در محاسبات به کار می‌روند؛ به طوری که محاسبات کم و

بیش به امری ماشینی و خودکار تبدیل می‌شود. این موجب شده است که نرم‌افزارهایی طراحی شوند که با الگوریتم‌هایی از پیش تعیین شده بسیاری از محاسبات را به انجام می‌رسانند.

فعالیت / دبستان ....

به جای مربع و دایره دو رقم از صفر تا نه قرار دهید و صحت تساوی زیر را بررسی کنید. تنوع عددگذاری مورد تأکید است.

$$\square\bigcirc \times \square\bigcirc = \square \times \square \times ۱۰۰ + ۲ \times \square \times \bigcirc \times ۱۰ + \bigcirc \times \bigcirc$$

آیا می‌توانید برای این همه تساوی مشابه دلیلی بیاورید؟

فعالیت/ راهنمایی ....

اگر دو چند جمله‌ای یک متغیره برای نامتناهی مقدار از متغیر با هم برابر باشند، آیا آن دو چند جمله‌ای با هم برابرند؟ اگر چند جمله‌ای‌ها دو متغیره باشند، چه‌طور؟

فعالیت /دبیرستان..............................

الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد آیا یک چند جمله‌ای چند متغیره فاکتوری خطی دارد یا خیر؟

۲ـ۵. حل عددی معادلات

روش سنّتی حل معادلات، حل عددی بوده است. تمام روش‌های تئوریک حل معادلات در روش‌های عددی تجلی می‌کنند. از این رو روش‌هایی که جواب‌های یک معادله را تقریب می‌زنند، از اهمیت بالایی برخوردارند. حل عددی معادلات در کاربرد، بسیار کارآمدتر از حل به کمک روش‌های جبری است. زیرا معادلاتی که توسط روش‌های جبری قابل حل نیستند و یا این که حل پیچیده‌ای دارند را می‌توان به کمک روش‌های عددی به سادگی حل نمود. هر چند روش‌های جبری نیز می‌توانند

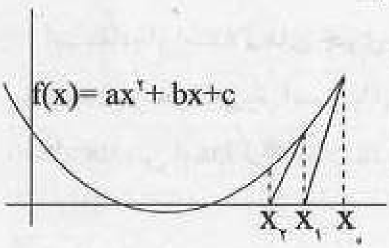
ابزاری برای حل عددی معادلات محسوب شوند.

فعالیت/ راهنمایی ....

با کمک اتحاد $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ الگوریتمی برای پیدا کردن جذر اعداد چند رقمی پیشنهاد کنید.

فعالیت/دبیرستان ....

روش هندسی زیر برای حل عددی معادلات درجه‌ی دوم توسط نیوتن پیشنهاد شده است. این روش را به زبان جبری ترجمه کنید:



از نقطه‌ای مانند x_0 شروع کنید. مماسی بر منحنی در نقطه‌ی $(x_0$ و $f(x_0))$ رسم کنید. حال همین کار را با نقطه $(x_1, f(x_1))$ انجام دهید تا نقطه ی x_2 بدست بیاید و الی آخر. دنباله‌ی نقاط x_1 و x_2 و x_3 و... به سرعت به سمت جواب معادلـه‌ی درجـه‌ی دوم حرکت می‌کنند. توجه کنید که این الگوریتم فقط وقتی کارآمد است که از نقطه‌ای غیر از نقطه‌ی بحرانی شروع کرده باشیم. اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه نداشته باشد، الگوریتم بالا چگونه دنباله‌ای به دست خواهد داد؟

۳_۵. حل عددی نامعادلات

همان‌طور که روش‌های عددی می‌توانند برای حل معادلات به کار بروند، برای حل نامعادلات نیز می‌توان از روش‌های عددی بهره جست. مختصات‌گذاری نیز کمک می‌کند تا نامعادلات با توجه به دیدگاه هندسی راحت‌تر حل شوند. روش‌های عددی برای محاسبات کامپیوتری نیز بسیار مناسب‌اند. زیرا الگوریتم‌هایی از پیش تعیین شده دارند. از این‌رو نرم‌افزارهایی برای حل عددی نامعادلات طراحی شده‌اند.

فعالیت/ راهنمایی ....

الگوریتمی برای حل عددی دستگاه نامعادلات خطی دو متغیره ارائه کنید. برای این کار از دستگاه مختصات دکارتی در صفحه استفاده کنید.

فعالیت/دبیرستان..

با کمک روش نیوتن و دستگاه مختصات دکارتی الگوریتمی برای حل عددی دستگاه نامعادلات درجه‌ی دوم دو متغیره ارائه کنید.

۴ـ۵. اثبات قضایا

استفاده از استدلال‌های جبری برای اثبات قضایا روشی الگوریتمی است و قابل پیاده شدن توسط کامپیوتر است. با این روش توانسته‌اند نرم‌افزارهایی بسازند که برای احکام هندسی استدلال ارائه دهند یا صحت یک حکم هندسی را تأیید کنند.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید برای احکام زیر استدلال بیاورند: مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است. مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است. مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی است فرد.

فعالیت/ راهنمایی ....

آیا می‌توانید برای قضیه‌ی فیثاغورس اثباتی توسط دستگاه‌های مختصات دکارتی ارائه دهید؟ برای فاصله‌ی دو نقطه از چه فرمولی بهره می‌برید؟

فعالیت/دبیرستان..

الگوریتمی طراحی کنید که به وسیله‌ی آن بتوان نرم‌افزاری ساخت که صحت یک حکم هندسی را تأیید کند.

۵ـ۵. کشف خواص جدید اشیای ریاضی

از آن‌جا که استدلال‌های جبری در برابر استدلال‌های هندسی به ظاهر تعمیم‌پذیرترند، برای درک این‌که چه خواصی از اشیای ریاضی تعمیم‌پذیرند، بسیار تناسب دارند. به‌علاوه استدلال‌های جبری ارتباط بین ساختارها را نیز بهتر آشکار می‌سازند.

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک آینه می‌توان تقارن محوری شکلی را بررسی کرد، اما در مورد تقارن مرکزی چنین نیست. نشان دهید به روش جبری می‌توان اشکال دارای محور تقارن و اشکال دارای مرکز تقارن را بازشناسی کرد. با کمک روش جبری مفاهیم تقارن محوری و مرکزی را به ابعاد بالا تعمیم دهید.

فعالیت /دبیرستان ....

اگر مکعب را یک مربع سه بعدی بگیریم، با کمک روش جبری یک مکعب n- بعدی را چگونه تعریف می‌کنید؟ آیا اقطار مکعب n- بعدی همرس‌اند؟ آیا اقطار یک مکعب n- بعدی منصف‌اند؟ آیا مکعب n- بعدی مرکز تقارن دارد؟ چه احکام دیگری در مورد مکعب را می‌توانید به مکعب n- بعدی تعمیم دهید؟ این احکام را به روش جبری اثبات کنید.

فصل ۶

مهارت‌های پایه‌ی مختصات‌گذاری و تشکیل معادله

مهارت عمده‌ای که مسائل زندگی روزمره را به زبان ریاضی ترجمه می‌کند، مهارت مدل‌سازی است. مدل‌سازی می‌تواند هندسی، جبری، آنالیزی یا گسسته باشد. مدل‌سازی آنالیزی خود نوعی مدل‌سازی جبری پیشرفته است و مدل‌سازی گسسته، صورت گسسته‌ی مدل‌سازی پیوسته است که همان مدل‌سازی هندسی است. با شناختن مهارت‌های پایه‌ی مدل‌سازی و ترکیب آن‌ها می‌توان مسائل متنوع زندگی روزمره را به زبان ریاضی ترجمه کرد و به کمک ابزارهای ریاضی آن مسائل را حل کرد. هرچند رگه‌هایی از تفکر جبری در کتاب اصول اقلیدس قابل مشاهده است و تشکیل معادله از مهارت‌های پایه‌ی حساب باستان بوده است، اما تفکر جبری به طور رسمی با تحقیقات دیوفانتوس که به حل معادلات چندجمله‌ای در اعداد گویا پرداخت شروع شد.

۱ـ۶. مدل‌سازی جبری

اگر به تاریخ ریاضیات نظر کنیم، شـاید بتوان گفت اولین جرقه‌های تفکر جبری وقتی پیدا شـده اسـت که قسـمتی از لوحه‌های گلی که مربوط به محاسبات بازرگانی می‌شده از بین می‌رفته و برای بازیابی اطلاعات، بازرگانان ناچار به حل معادله بوده‌اند. به جز بازرگانی، مسـائل مربوط به ارث نیز به تفکر جبری بسـیار خدمت کرده است. از این‌رو مسلمانان در تفکر جبری برای صدها سال پیشتاز بوده‌اند. تشکیل معادلات اولین قدم در مدل‌سازی جبری بوده است.

پس از معرفی دسـتگاه مختصات دکارتی، دکارت مدل‌سـازی جبری هندسـه‌ی اقلیدسـی را معرفی کرد که اثبات قضایای هندسـی را به تمرین‌های سـاده‌ای در جبر تبدیل کرد. دکارت و فرما به طور مسـتقل به این روش دسـت پیدا کردند. فرما سـعی کرد قضایای کتاب گمشـده‌ی آپولونیوس را به این روش به اثبات رسـاند. صورت قضایای کتاب مقاطع مخروطی آپولونیوس در بین نسخ خطی به جا مانده از مسلمانان یافت شده بود.

مرحله‌ی بعدی مدل‌سـازی جبری، تلاش برای حل معادلات به روش جبری بود که از مکتب ایتالیایی شـروع شـد و در فرانسـه ادامه یافت. تفکر جبری در ایتالیا به علت توسـعه‌ی بازرگانی بسـیار اهمیت یافته بود. توجه به تفکر جبری در ایتالیا پیش از دکارت اتفاق افتاد و سپس به فرانسه سرایت کرد. هر چند تحت تأثیر همین حرکت، دکارت مدل‌سـازی جبری خود را از هندسـه‌ی اقلیدسی ارائه کرد، اما جنبش تلاش برای حل جبری معادلات پس از دکارت میوه داد. این حرکت منجر به حل معادلات درجه‌ی سـه و درجه‌ی چهار شـد و در کنار همین محاسـبات برای اولین بار اعداد مختلط ظهور پیدا کردند.

در اوایل قرن نوزدهم تحقیقات آبل و گالوا منجر به امتناع حل معادلات درجه‌ی پنج کلی توسـط رادیکال‌ها شـد. آبل و گالوا مقدمه‌ی مطالعه‌ی میدان‌های توابع و میدان‌هـای اعـداد و در حالت کلی سـاختارهای عددی را فراهم کردند. به علاوه گالوا مفهوم گروه را بیرون کشید که به زودی برای مدل‌سازی جبری تقارن هندسی

به کار رفت.

در اواخر قرن نوزدهم کرونکر، ددکیند و وبر با مطالعه‌ی رویه‌های ریمانی به مفهوم میدان توابع دست یافتند. با تلاش‌های نتر کم‌کم ساختارهای عددی جای خود را به ساختارهای جبری دادند. به‌علاوه حلقه‌ی توابع گویا و میدان توابع گویا به عنوان مدل‌های جبری از رویه‌های ریمانی، توانمندی خود را به اثبات رساندند. این حرکت تلاش‌های جبردانان نیمه‌ی اول قرن بیستم را به خود اختصاص داد.

در نیمه‌ی دوم قرن بیستم مدل‌سازی جبری چنان حقانیت خود را به اثبات رسانیده بود که هندسه‌دانان باور داشتند که تمام حقایق هندسی قابل مدل‌سازی جبری است. جبرهای لی دیفرانسیل‌پذیر مدرج و جبرهای شرکت‌پذیر از مدرن‌ترین ابزارهای جبری هستند که برای مدل‌سازی جبری حقایق هندسی به کار رفته‌اند. این تلاش‌ها در جهت جبری‌سازی هندسه به جدیت تا به امروز ادامه داشته است.

۲ـ۶. مدل‌سازی آنالیزی

هر چند اولین بار ایده‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها توسط لایبنیتز مطرح شده بود، اما مدل‌سازی آنالیزی پدیده‌های طبیعی اولین بار توسط نیوتن انجام پذیرفت. معرفی مشتق به عنوان یک مدل‌سازی آنالیزی از نرخ تغییر کمیت‌هایی که در پدیده‌های طبیعی ظاهر می‌شوند، آغاز مدل‌سازی آنالیز بود. این‌که پدیده‌های طبیعی را توسط معادلات دیفرانسیلی مدل‌سازی کنند، توسط خود نیوتن باب شد، اما سراسر قرن هجدهم ریاضی‌دانان را به خود مشغول داشت. ناگفته نماند که لایبنیتز و نیوتن هر دو در ابداع حسابان از یادداشت‌های ایزاک بارو استاد نیوتن بهره گرفته بودند و هرگز در جدال خود بر سر تقدم بر اختراع حسابان به آن اقرار نکردند.

ابتدا برنولی‌ها در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط معادلات دیفرانسیل و حل آن‌ها پیشگام بودند و پس از آن‌ها اویلر بر آن‌ها پیشی گرفت و تردست‌ترین محقق

در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل شد. مهم‌ترین تحقیقات در زمینه‌ی مکانیک سیالات را هم او بود که پایه‌گذاری کرد. در مسئله‌ی سه جسم با روش‌های عددی به جواب‌های نسبتاً دقیقی دست یافت. در آموزش ریاضی نیز اویلر پیشگام بود. روش تحقیق او چنین بود که ابتدا در مورد یک مسئله مقاله‌ای اصلی می‌نوشت که در آن شاخه‌های مختلفی از آن موضوع را از هم شناسایی می‌کرد. سپس در مورد هر یک از این موضوعات مقاله‌ای می‌نوشت. آن‌گاه برای ده تا دوازده سال موضوع را رها می‌کرد تا دوباره به آن بازگردد. پس از نوشتن مقاله‌ای اصلی تحقیقات در آن شاخه را بازنویسی و خلاصه می‌کرد و شاخه‌های جدید از آن موضوع را معین می‌کرد. سپس در هر یک از این شاخه‌ها مقاله‌ای تحقیقی می‌نوشت. همین بازنویسی‌ها منجر به تأثیرگذاری او در مسائل آموزشی شد. اکثر روش‌های آموزشی و نمادگذاری‌های حسابان از اویلر به جا مانده است.

صورت پیشرفته‌ی مدل‌سازی هندسی با مدل‌سازی آنالیزی ترکیب شد. ایده‌های ریمان در مدل‌سازی فضای هندسی که از مفهوم فضا نشأت گرفته بود و برپایه‌ی محاسبات گاوس در مورد رویه‌ها بنا شده بود، مفهوم متریک و ژئودزیک را دربرداشت که مفاهیمی آنالیزی بودند. سرآخر هم فضا ـ زمانِ اینشتین مدل‌سازی آنالیزی ـ هندسی را به کمال خود رساند. از سوی دیگر، فضاهای هیلبرت توسط فون نویمان به عنوان مدلی برای مکانیک کوانتوم پیشنهاد شد که از مدل‌های دیگر موفق‌تر بود. تلاش برای به هم پیوستن مدل‌های مکانیک کوانتوم و فضا ـ زمان اینشتین تا امروز فیزیک‌دانان را مشغول نگه داشته است.

می‌توان گفت که مدل‌سازی آنالیزی صورت پیشرفته‌ی مدل‌سازی جبری است. در مدل‌سازی جبری از چند جمله‌ای‌های متناهی استفاده می‌شود. و در مدل‌سازی آنالیزی از سری‌های نامتناهی. تمام ایده‌های آنالیز قابل پیاده‌سازی در مدل‌های متناهی هستند. تعمیم مدل‌های جبری به مدل‌های آنالیزی منجر شد که دامنه‌ی توابعی که در حسابان به کار می‌رفتند، توسعه پیدا کند و این فرمول‌بندی مدرن حسابان در قرن نوزدهم را ممکن ساخت.

۳ـ۶. مدل‌های ترکیبی جبری

گاهی برای مدل‌سازی جبری پدیده‌های پیچیده، لازم است مدل‌های ساده‌ی جبری را ترکیب کنیم. مهارت ترکیب مدل‌های جبری به ما کمک می‌کند تا پدیده‌های پیچیده‌تر را مدل‌سازی کنیم. این مهارت شبیه مهارت تجزیه‌ی مسئله به مسائل ساده‌تر است. چرا که باید پدیده‌ی پیچیده را به پدیده‌های ساده‌تری تجزیه کرد که هر کدام با مدل‌های ساده‌ی جبری قابل مدلسازی باشند.

فعالیت /دبیرستان..

هر یک از فضاهای هندسی زیر را مختصات‌گذاری کنید.

۱ـ زیرمجموعه‌ی کرانداری از صفحه

۲ـ چنبره

۳ـ استوانه‌ی نامتناهی

۴ـ استوانه‌ی توپر نامتناهی

۵ـ کره

۶ـ مخروط ناقص

۷ـ مخروط کامل

۸ـ بیضی گون

۹ـ سهمی گون

۱۰ـ هذلولی گون

۱۱ـ صفحات متقاطع

فصل ۷

دستگاه‌های مختصات مهم

آن‌چـه در تاریـخ اولیه‌ی جبر موردنظـر جبردانان بوده اسـت، مختصات‌گذاری به معنی دکارتی آن اسـت. به کمک این مختصات‌گذاری تفکر جبری و محاسـبات جبری معنی پیدا می‌کند. در سـطح دبسـتان، راهنمایی و دبیرستان با همین تعریف از مختصات‌گذاری سـروکار داریم، اما در سـطح دانشـگاه منظور از مختصات‌گذاری، جبری‌سـازی توسـط یک سـاختار جبری اسـت. ناورداهای عددی جای خود را به ناورداهای جبری می‌دهند و سـاختارهای جبری هسـتند که به جای اعداد موضوع محاسـبه قرار می‌گیرند. در این‌جا مدل‌سـازی یک تئوری ریاضی توسط یک تئوری دیگر مطرح می‌شود که نوعی مدل‌سازی درون ریاضی است و باعث برقراری ارتباط بین این تئوری‌ها می‌شود. مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی در سطح دانشگاه در رشته‌ی ریاضیات کاربردی و فیزیک مطرح می‌شود.

۱ـ۷. دستگاه‌های مختصات فاصله‌ای

دستگاه‌های مختصات فاصله‌ای بر مبنای فاصله‌ی بین نقاط، فضای موردنظر را پارامتریزه می‌کنند و از روش‌های دیگر مانند پارامتریزه‌سازی به کمک زاویه استفاده نمی‌کنند. دستگاه‌های مختصات فاصله‌ای بسیار شبیه دستگاه‌های دکارتی هستند.

فعالیت / دبیرستان ....

در فضاهای زیر همه‌ی دستگاه‌های فاصله‌ای ممکن را به دست آورید و بررسی کنید کدام‌ها پارامتریزه‌سازی یک به یکی به دست می‌دهند. در هر دستگاه مختصات می‌توان از فاصله تا یک خط یا یک دایره برای پارامتریزه‌سازی به‌کار رود.

۱ـ خط

۲ـ صفحه

۳ـ استوانه

۴ـ چنبره

۵ـ دایره

۶ـ کره

۲ـ۷. دستگاه‌های مختصات ترکیبی

اگر بتوانیم با خط و دایره هر دو یک فضای هندسی را پارامتریزه کنیم، دستگاه مختصات حاصل را یک دستگاه مختصات ترکیبی می‌گوییم. منظور این است که متغیرهای پارامتر روی خط یا روی دایره تعریف شده باشند. این دستگاه‌های مختصات لزوماً برپایه‌ی مفهوم فاصله بنا نمی‌شوند. این دستگاه‌ها را از روی خم‌هایی که با ثابت گرفتن یک یا چند پارامتر به دست می‌آید، رده‌بندی می‌کنند.

فعالیت /دبیرستان ....

همه‌ی دستگاه‌های مختصات روی صفحه را بیابید که خم‌های پارامتر ثابت آن‌ها

زوج اشکال زیر باشند:

۱ـ خط و خط

۲ـ خط و سهمی

۳ـ خط و دایره

۴ـ خط و بیضی

۵ـ دایره و دایره

همه‌ی دستگاه‌های مختصات روی استوانه را بیابید که خم‌های پارامتر ثابت آن‌ها زوج اشکال زیر باشند:

۱ـ خط و دایره

۲ـ خط و بیضی

۳ـ بیضی و بیضی

همه‌ی دستگاه‌های مختصات روی مخروط کامل را بیابید که خم‌های پارامتر ثابت آن‌ها زوج اشکال زیر باشند:

۱ـ خط و دایره

۲ـ خط و بیضی

۳ـ دایره و هذلولی

۴ـ خط و سهمی

همه‌ی دستگاه‌های مختصات روی کره را بیابید که خم‌های پارامتر ثابت آن‌ها زوج اشکال زیر باشند:

۱ـ دایره و دایره

۳ـ۷. دستگاه‌های مختصات گسسته

دستگاه‌های مختصات پیوسته برای فضاهای پیوسته به کار می‌روند و دستگاه‌های مختصات گسسته برای فضاهای گسسته. فضاهای گسسته در ریاضیات به طور طبیعی ظاهر می‌شوند؛ چرا که بسیاری از اشیای ریاضی صلب هستند و فضای مدولی آن‌ها

گسسته است. اما غالباً این فضاهای گسسته قابل نشاندن به طور طبیعی در یک فضای پیوسته هستند.

فعالیت / دانشگاه ....

نقاط صحیح المختصات در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. می‌توان آن را به عنوان مدول روی $\mathbb{Z}$ با $\mathbb{Z}^n$ یکی گرفت و با این کار دستگاه مختصاتی روی این نقاط را به دست داد. همه‌ی دستگاه‌های مختصات گسسته روی شبکه‌ی نقاط صحیح المختصات $\mathbb{R}^n$ را به دست آورید.

فصل ۸

روش‌های حل مسائل با تفکر جبری

ترجمه‌ی مسائل به زبان معادلات شاخه‌ای خاص از جبر است که عمدتاً از مختصات‌گذاری دکارتی کمک می‌گیرد. مانند همه سنت‌های مسئله، به مرور تکنیک‌های خاصی برای حل این‌گونه مسائل دسته‌بندی شده‌اند و استراتژی‌های خاصی برای تفکر در مورد این مسائل شناخته شده‌اند. هر چند مسائل تشکیل معادله بخشی کاملاً سنتی از علم جبر را تشکیل می‌دهند، اما زیبایی مسائل مطرح شده در این شاخه موجب شد که نگاه فلسفی و آموزشی خود را به کناری بنهیم و با پیروی و تبعیت کردن از جبردانان سنتی، به حل و بحث این‌گونه مسائل بپردازیم. احتمالاً محتویات این فصل به علت تطابق با سنت برای معلمان کهنه‌کار و باتجربه، شیرین‌ترین در بین همه‌ی فصول خواهد بود.

سبک تألیف این فصل با سایر فصول متفاوت خواهد بود. سعی می‌کنیم ایده‌های آموزشی خود را در قالب کلاس درس واقعی پیاده کنیم. محتوای این فصل از مقاله، از شوئنفلد با عنوان «حل مسئله در برنامه‌ی درسی ریاضیات» گرفته شده است. او

که یکی از تأثیرگذارترین متخصصان آموزشی ریاضی در عصر ماست، دیدگاه‌های آموزشی خود را در مورد کلاس درس و روش تدریس چنین بیان کرده است:

بنابر اعتقاد ما، به طور خلاصه وظیفه‌ی اولیه‌ی معلمان ریاضی، آموزش تفکر به دانش‌آموز است. این فرایند تفکر شامل: پرسشگری و یافتن قلب محتوای مطلب ریاضی است و این که دانش‌آموزان بیش‌تر از این که ایده‌ها را طوطی‌وار تکرار کنند، بتوانند آن‌ها را به کار گیرند. چنان که هالموس در مقاله‌ی «قلب ریاضیات» می‌گوید: «حل مسائل، بخش اصلی از هر زندگی پر معنی است. قسمت قابل ملاحظه‌ای از زندگی حرفه‌ای تکنسین‌ها، مهندسین، دانشمندان و... وابسته به حل مسائل ریاضی است. وظیفه‌ی همه‌ی معلمان خصوصاً معلمان ریاضی این است که دانش‌آموزان را بیش‌تر از حقایق (یا مفاهیم)، با مسائل مواجه کنند.»

«رویکرد مسئله‌ای» در آموزش ریاضیات برای همه‌ی دانش‌آموزان ارزشمند است: کسانی که برای این رویکرد ارزش قائل هستند، کسانی که از آن استفاده می‌کنند و کسانی که با آن زندگی می‌کنند. در آموزش ریاضیات، هر رویکردی را که حالت پرسشگری و آمادگی ذهنی را در دانش‌آموز پرورش می‌دهد و او را به طور فعال در فرایند انجام دادن ریاضیات به کار می‌گیرد، مغتنم می‌شماریم و نیز استفاده از «رویکرد مسئله محور» قابل ارائه در یک درس استاندارد را که شامل مشارکت دانش‌آموزان در بحث، حل و ارائه‌ی حل مسئله باشد، تشویق می‌کنیم. به همین منظور، باید مباحث حل مسئله را که در پایه‌های مختلف گسترش یافته‌اند، به صورت منظم در یک برنامه‌ی درسی استاندارد بگنجانیم. با کمک درس‌های حل مسئله که یا بر بعضی از مطالب و موضوعات خاص متمرکز شده یا دامنه‌ای کلی از مباحث حل مسئله را پوشش می‌دهند، می‌توان روح پژوهش ریاضی را به طور اساسی در دانش‌آموزان تقویت کرد. به منظور رواج التزام به آموزش از طریق حل مسئله پیشنهاد می‌شود که کتاب‌های حل مسئله که در همه‌ی سطوح گسترش یافته‌اند، به طور وسیعی منتشر شوند.

هیچ راه منحصر به فردی برای آموزش حل مسئله وجود ندارد و باید با بی‌پروایی اعتراف کرد که تعداد راه‌های عملی آموزش تفکر ریاضی، به تعداد معلمان با استعداد

است. علاوه بر این، روش‌های اجرای کلاسی وابسته به ویژگی‌های شخصی معلمان دارد. روشی که برای یک معلم کار می‌کند، برای دیگری باید اصلاح شود تا به راحتی بتواند آن را مورد استفاده قرار دهد.

یک تفاوت بزرگ بین اجرای مباحث ریاضی ما معلمان و نگرش دانش‌آموزان به آن‌ها وجود دارد و آن این که در جریان فرایند کشف، انجام دادن ریاضیات امری حیاتی است، بدین جهت که فهم اشیا و دستگاه‌های خاص ریاضی را به دنبال دارد. ابتدا با یک ناحیه (از ریاضیات) آشنا می‌شویم؛ در حال انجام دادن ریاضیات، شهود ما گسترش می‌یابد؛ شک می‌کنیم و درستی بعضی چیزها را حدس می‌زنیم؛ آن را با مثال‌های مختلف آزمایش کرده، به مثال نقض‌ها توجه کرده و سعی می‌کنیم پیشنهادهایی ارائه دهیم که درستی حدس را به اثبات برساند؛ وقتی تصور می‌کنیم که می‌دانیم چه چیزی (در راستای اثبات حدسمان) کار می‌کند، برای اثبات آن تلاش می‌کنیم. این تلاش ممکن است موفقیت‌آمیز باشد یا نباشد؛ ممکن است هر تعدادی شروع اشتباه، شکست، صرف هزینه و اصلاحات به‌وجود آید. اما ناگهان نتیجه با پشتکار و بخت و اقبال مانند آبشار به پایین می‌ریزد. کمی آزمایش کردن می‌تواند به اندازه‌ی کافی لذت‌بخش و مهیج باشد. ما قلمروهای ناشناخته را به تصویر کشیده‌ایم و خود را در این فرایندها غنی و پربار کرده‌ایم.

متأسفانه دانش‌آموزان ما به‌ندرت معتقدند که ریاضیات می‌تواند شبیه چنین چیزی باشد. آن‌ها به طور عجیب و مهیبی قربانی کارکشتگی و مهارت ما معلمان می‌شوند زیرا مطالب زیادی وجود دارد که آن‌ها باید یاد بگیرند. ما نتایج اکتشافات ریاضی را به طور سازمان‌دهی شده در اختیار آنان قرار می‌دهیم. البته آنان می‌توانند تسلط بیش‌تری بر این مطالب پیدا کنند، اما این نوع تسلط و مهارت می‌تواند نتایج ناخوشایندی به همراه داشته باشد. دانش آموزان فکر می‌کنند تمام ریاضیات شناخته شده است و مانند دستور زبان لاتین باید با تمرین کردن یاد گرفته شود. جز احساس رضایت‌مندی از انجام این تمرین‌ها هیچ هیجان دیگری وجود ندارد. به هنگام برخورد با مشکلات در ریاضیاتی که برای ما ساده است، آن‌ها برای برطرف کردن مشکل، احساس عدم

صلاحیـت می‌کننـد. ایده‌هـای ما را در اختیار ندارند و بـرای فهمیدن مطالب جدید ریاضی باید تلاش و ستیز بیش‌تری داشته باشند. مهم‌تر این که، به این باور نرسیده‌اند که فهمیدن ریاضیات، یعنی پرسـیدن سـؤال‌های مناسـب تا لحظه‌ای که مطالب برای آن‌ها با معنی شوند و درک گردند؛ بلکه فکر می‌کنند که فهمیدن ریاضیات به معنی این است که کارهایی را که دیگران نشان داده‌اند، بدون علاقه بازسازی کنند.

تأکیـد مـا بر این اسـت که مـا می‌توانیم و باید بـه دانش‌آمـوزان تجربه‌ی انجام ریاضیات را آن‌گونه که می‌دانیم، عرضه کنیم. این مطلب که دانش‌آموزان نمی‌توانند به نمودارهایی که به فهم خودشان از مسئله کمک می‌کند و هم‌چنین آزمایش حالت‌های خاص و اسـتراتژی‌هایی نظیر این‌ها تکیه کنند، نگران‌کننده اسـت. نگران‌کننده‌تر این کـه دانش‌آمـوزان واقعاً بـه ندرت می‌فهمند که می‌توانند تفکر خود را تماشـا کنند و می‌توانند در اجرای حل مسـئله، با برگشت روی شکست‌ها و موفقیت‌های خودشان پیشرفت کنند. به نظر می‌رسد آن‌چه که در زمینه‌ی ورزش کاملاً طبیعی جلوه می‌کند، در زمینه‌ی تعلیم ذهن اشـخاص کاملاً ناآشناسـت. به دلیل این که در زمینه‌ی ورزش، عمل و آموزش و یادگیری تجسـم آشـکار دارد، ولی تعلیم ذهن تجسم آشکار ندارد. به عنوان هشـداری در سـاده‌نگری به این مطلب، خوب اسـت بپرسـیم چیزی که ما می‌خواهیم دانش‌آموزان از آموزه‌های خود استخراج کنند، چیست؟

خدمت واقعی ما به دانش‌آموزان این اسـت که برای آن‌ها مهارت‌های تفکری را که بعد از پایان امتحان نهایی بتوانند به کار گیرند، فراهم کنیم. بدون شـک ریاضیات می‌توانـد برای این منظور به عنوان یک وسـیله‌ی ایده‌آل خدمت کند. برای یادگیری چیزی که ما به آن «فهمیدن» می‌گوییم، نظام بهتری وجود ندارد. تفکر ریاضی منطقی و دقیق اسـت و شگردهای مورداستفاده‌ی ما در حمله به مسئله‌ها، عموماً کاربردپذیر اسـت. اما دانش‌آموزان احتمالاً نمی‌توانند به احساسـی در مورد فهمیدن برسـند و هم‌چنین نمی‌توانند از شگردهای تفکر بدون این که خودشان آن‌ها را به وجود آورده باشند، استفاده کنند. بعید است آن‌ها تفکر ریاضی‌شان را بعد از آموزش توسعه دهند، مگـر این که ما به عنوان یک تسـهیل‌کننده در انجـام دادن ریاضی آن‌ها خدمت کرده

باشـیم که البته بر این کار توانابیم. بعضی از کارهایی که در درس حل مسـئله می‌توان انجام داد و هم‌چنین دلایل انجام آن‌ها در ادامه خواهد آمد.

دانش‌آموزان ریاضیات را با انجام دادن یاد می‌گیرند، نه با نگاه کردن. در درس‌های حل مسئله در چندین ساختار کلاسی متفاوت، دانش‌آموزان به فعالیت و درگیر شدن با مسـئله‌ها تشـویق می‌شوند. حضور معلم در کلاس به عنوان متکلم وحده به حداقل ممکن کاهش می‌یابد؛ حتّی اگر بخواهد ایده‌ی خاصی را آموزش دهد. این کار بسیار قدرتمندتر خواهد بود، اگر دانش‌آموزان با مسـئله دسـت و پنجه نرم کرده و شکست خورده باشـند. روی هم رفته شـاید ۱۰٪ وقت کلاس به صحبت‌های معلم اختصاص داده می‌شـود و شـاید اختصاص دادن ۵٪ الی ۱۰٪ دیگر به حل مسئله‌ی جدید توسط معلم پای تخته کافی باشـد. می‌توان باقی‌مانده‌ی وقت کلاس را با اسـلوب‌های زیر هدایت کرد:

الف) بحث «خود را بیازماییم»هایی که در خانه انجام شده است: $\frac{۱}{۳}$ وقت کلاس را بـه حـل خـود را بیازماییم‌ها اختصاص دهید. اگر دانش‌آمـوزی خود را بیازماییم مربوطه را حل کرده اسـت، او پای تخته راه‌حل خود را ارائه می‌کند. کلاس می‌تواند دو نوع سؤال مطرح کند.

۱ـ در مورد صحت جواب‌ها و این که چرا باید این راه‌حل را بپذیرند.

۲ـ در مورد این که این راه‌حل از کجا آمده اسـت؟ چه چیزی حل‌کننده را به این ایده‌ها هدایت کرده است و چرا؟

اگر مسـئله حل نشده باشـد، مدت کمی دانش‌آموزان به صورت گروهی روی آن کار می‌کننـد یـا می‌توان با راهنمایی یا بـدون راهنمایی آن را دوباره به عنوان تکلیف شب در نظر گرفت.

ب) تشـکیل گروه‌های کوچک حل مسئله برای بحث مسائل جدید: در انجام یک فعالیـت تقریبـاً نیمی از وقت آن به کار گروهـی در گروه‌های کوچک اختصاص داده می‌شود. بحث در مورد طبیعت مسئله شروع خوبی است. در این حین که دانش‌آموزان مشـغول کارند، معلم بین گروه‌ها قدم می‌زند و سـعی می‌کند نقش یک مشاور را بازی

کند. این مشاور قرار نیست که مطمئن شود که همه‌ی گروه‌ها به جواب می‌رسند، بلکه قرار است مطمئن شود که گروه‌ها پیشرفت معقولی دارند. اگر گروهی کارش را خوب انجام داده است، معلم می‌تواند از کنار گروه بدون هیچ راهنمایی بگذرد یا می‌تواند بپرسد که چه دلیلی برای روشی که در پیش گرفته‌اند، دارند. معلم باید مطمئن شود که دانش‌آموزان می‌توانند:

۱ـ با دقت بگویند که مشغول چه محاسباتی هستند.

۲ـ دلیل پرداختن به این محاسبات را بگویند.

۳ـ بگویند از حاصل این محاسبات چه استفاده‌ای خواهند کرد.

این تأکید بر روند کشف و ارزشیابی آن، دانش‌آموزان را از اسیر شدن در حلقه‌های تودرتو نجات می‌دهد. اگر دانش‌آموزان مشکل داشته باشند یا معلم به آن‌ها راهنمایی می‌کند و یا آن‌ها را به لیست استراتژی‌ها متوجه می‌کند و یا توجه آن‌ها را به مسائلی که قبلاً حل شده، معطوف می‌دارد. ایده‌ی کلی این است که معلم کم‌ترین کمک را به دانش‌آموزان بدهد، اما آن‌قدر که برای پیشرفت گروه کافی باشد.

توجه داشته باشید که وقت کلاس بسیار ارزشمند است و کار گروهی در گروه‌های کوچک فعالیتی بسیار زمان‌گیر است. پس باید در محدود کردن آن دقت کرد. می‌توان دلایل زیر را برای لزوم کار گروهی ارائه کرد:

۱ـ این ساختار کلاس به معلم یک فرصت استثنایی می‌دهد تا مستقیماً در روند حل مسئله‌ی دانش‌آموزان دخالت کند، نه این که با محصول نهایی حل مسئله مواجه شود. اهرم اصلی هدایت دانش‌آموزان برای یادگیری استراتژی‌های تفکر همین فرصت است.

۲ـ حل مسئله در گروه، فراشناخت را تقویت می‌کند. یک دانش‌آموز هنگام حل مسئله، اولین استراتژی معقول برای حل مسئله را پیش می‌گیرد. اما در گروه دو یا سه استراتژی مطرح می‌شود و دانش‌آموزان ناچارند در مورد انتخاب استراتژی مناسب بحث و تصمیم‌گیری کنند. این فرایند استراتژی‌های تفکر را در ذهن دانش‌آموزان نهادینه می‌کند. به زودی دانش‌آموزان به طور فردی با چند پیشنهاد

مختلف برای حل مسئله شروع و بین آن‌ها بهترین را انتخاب می‌کنند.

پ) همه‌ی کلاس با هم روی مسئله کار می‌کنند: بعد از این که گروه‌های کوچک با مسئله آشنا شدند و کمی روی آن فکر کردند، می‌توان این تجربه را پایه‌ای برای حل مسئله توسط کل کلاس قرار داد. دانش‌آموزان برای حل مسئله پیشنهادهایی می‌کنند و معلم به عنوان مشاور نقش بازی می‌کند و پای تخته پیشنهادها را می‌نویسد و اجرا می‌کند. نیمه‌ی باقی‌مانده از وقتی که به یک فعالیت اختصاص داده می‌شود، باید این‌گونه به اجرا گذاشته شود.

۱ـ۸. استفاده از تغییر متغیر

قسمت مشکل آموزش مهارت‌های تفکر ریاضی این است که ما فراموش کرده‌ایم که ریاضیات را خیلی خوب می‌دانیم (به‌ویژه وقتی ما ریاضیات مقدماتی تدریس می‌کنیم) و وقتی با ریاضیات سروکار داریم، احتیاجی به فکر کردن نداریم و آن‌ها را به طور خودکار انجام می‌دهیم. ما در اکثر مسائلی که در کلاس مطرح می‌شوند، راه مستقیمی که ما را به حل مسئله نزدیک کند، می‌دانیم، ولی دانش‌آموز نمی‌داند و صرف نشان دادن راه‌حل مستقیم مسئله به دانش‌آموزان، در دوری گزیدن آن‌ها از همه‌ی رویکردهای اشتباهی که در تلاش‌های خود دارند، کمکی نمی‌کند. به همین دلیل، ما باید برخی از فکرهایمان را بشکافیم تا دانش‌آموز بتواند آن را دنبال کند. روش‌هایی برای انجام این کار وجود دارد. مثلاً، **حرکت در مسیر فرایند کشف براساس حرکت «گام به گام»** (حتّی وقتی که شما جواب را می‌دانید).

به عنوان مثال، مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید: $P(x)$ و $Q(x)$ را دو چند جمله‌ای با ضرایب وارونه بگیرید.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

به طوری که $a_0\neq 0$ و $a_n\neq 0$ رابطه‌ی بین ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ چیست؟ ادعای خود را ثابت کنید.

شـما در برخورد با مسـئله‌ای شـبیه بـه این چه می‌کنید؟ روش کلـی برای یافتن ریشه‌های یک چند جمله‌ای در دست نداریم. وضعیت در مورد مقایسه‌ی ریشه‌های دو تـا چنـد جمله‌ای بدتر نیز هسـت. احتمالاً بهترین کار در این لحظه، مشـاهده‌ی چند مثال سـاده اسـت. شاید بتوانیم با این مثال‌ها شهود و دامنه‌ی دیدمان را گسترش دهیم. به جای این که یک زوج چند جمله‌ای دلخواه در نظر بگیریم، یک جفت چند جملـه‌ای درجـه‌ی دوم در نظر می‌گیریم. در این حالت حداقل می‌توانیم آن‌ها را حل کنیـم. هـرگاه $P(x)=ax^2+bx+c$ و $Q(x)=cx^2+bx+a$ ریشـه‌ها بـه ترتیب: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ هسـتند. چون این دو کسر صورت‌های یکسانی دارند، یقیناً الهام‌بخش خواهد بود. واقعاً چیزی که تعمیم یابد یا بتوانیم آن را به پیش ببریـم، نمی‌بینیـم. این مطلب را در مدت یک یا دو دقیقه به دسـت خواهیم آورد، اما باید چند مثال دیگر را نیز بررسی کنیم.

حالت خطی را در نظر می‌گیریم. اگر $P(x)=ax+b$ و $Q(x)=bx+a$ ریشه‌ها بـه ترتیـب $-\frac{b}{a}$ و $-\frac{a}{b}$ هسـتند که وارون یکدیگرند، ولـی جذابیتی ندارد. به چند جمله‌ای‌های مربعی برگردیم. هنوز به اندازه‌ی کافی احسـاس این را که می‌خواهیم چه بکنیم نداریم. باید مثال‌های بیش‌تری را بررسی کنیم. یک ایده‌ی زیرکانه، انتخاب چندجمله‌ای‌هایی اسـت که بتوانیم آن‌ها را تجزیه کنیم. در این صورت دسترسـی به ریشه‌ها آسان خواهد بود. وضعیت در مورد چندجمله‌ای ساده‌ای مثل $(x+2)\ (x+3)$ چگونه خواهد بود؟

داریم $P(x)=x^2+5x+6$ و $Q(x)=6x^2+5x+1$؛ $Q(x)=(2x+1)\ (3x+1)$. ریشه‌ها به ترتیب -3، -2 و $-\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{2}$ هستند که متناظراً وارون یکدیگرند. در مورد $P(x)=(3x+5)\ (2x-7)=6x^2-11x-35$ چه می‌توان گفت. می‌دانیم که ریشه‌های آن $\frac{7}{2}$ و $-\frac{5}{3}$ هسـتند. $Q(x)=-35x^2-11x+6=-(5x+3)\ (7x-2)$ و ریشـه‌ها $\frac{7}{2}$ و $-\frac{5}{3}$ هسـتند که متناظراً معکوس ریشـه‌های $P(x)$ هستند. این دیگر اتفاقی نیست. اما هنوز بهتر است به تجزیه‌پذیرها نگاه کنیم. فرض کنید:

$P(x)=(ax+b)\ (cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ در این صورت

$$Q(x) = bdx^2 + (ad + bc)x + ac = (bx + a)(dx + c)$$

و ریشه‌ها به ترتیب $-\frac{b}{a}$ ، $-\frac{d}{c}$ ، $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{c}{d}$ هستند. دو مرتبه این روش کار می‌کند و حدس می‌زنیم که تعمیم پیدا می‌کند. در این‌جا دو راه برای ادامه دادن وجود دارد. در حالت کلی حدس می‌زنیم که ریشه‌های $P(x)$ وارون ریشه‌های $Q(x)$ است و در صورتی که هنوز مطمئن نشده باشیم، باید با یک یا دو چندجمله‌ای تجزیه‌پذیر از درجه‌ی سه را امتحان کنیم. اینک می‌توان در جهت تعمیم استدلال فوق تلاش کرد، ولی کاملاً سرراست نیست. هر چندجمله‌ای نمی‌تواند به عوامل اول تفکیک شود. در این‌جا می‌توان توقف کرد و عبارت‌بندی جدیدی از حدس بالا مطرح نمود: فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب معکوس باشند. ثابت کنید ریشه‌های آن‌ها وارون یکدیگرند.

اجازه دهید از منظری که مسئله می‌طلبد، نگاه کنیم؛ معنی این که بعضی مقادیر مانند r ریشه‌ی $P(x)$ است، چیست؟ یعنی $P(r) = 0$. اکنون حدس می‌زنیم که وارون r که عدد $\frac{1}{r}$ است، به عنوان ریشه‌ی مفروض Q است؛ یعنی $Q(\frac{1}{r}) = 0$. اجازه دهید به حالت درجه‌ی دوم برگردیم و ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. هرگاه $P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ اگر r ریشه‌ای از $P(x)$ باشد، یعنی: $P(r) = ar^2 + br + c = 0$، اکنون $Q(\frac{1}{r})$ چیست؟

$$Q(\frac{1}{r}) = c\,(\frac{1}{r})^2 + b\,(\frac{1}{r}) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{p(r)}{r^2} = 0$$

بنابراین،روش فوق کار می‌کند و این بحث تعمیم‌پذیر است. اکنون می‌توانیم برهان را بیان کنیم.

قضیه: فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ مانند فوق باشند، در این صورت ریشه‌های $Q(x)$ وارون ریشه‌های $P(x)$ است.

برهان: فرض کنید r ریشه‌ای از $P(x)$ باشد، در این صورت $P(r) = 0$ مشاهده کنید که $r \neq 0$ چرا که $a_0 \neq 0$ علاوه بر این:

$$Q(\frac{1}{r}) = a_0(\frac{1}{r})^n + a_1(\frac{1}{r})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\frac{1}{r}) + a_n =$$

$$\frac{1}{r^n}(a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-1} r^2) = \frac{P(r)}{r^n} = 0$$

بنابراین، $\frac{1}{r}$ ریشه $Q(x)$ است.

به عکس فرض کنید s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد، بنابر تقارن داریم $P(\frac{1}{s})=0$ و این برهان قضیه را تمام می‌کند.

اینک زمان کالبدشکافی مسئله رسیده است. مشاهده کنید که برهان مانند یک مبحث ریاضی کلاسیک مختصر و رسمی است و نتایج فرایند فکر را نمایش می‌دهد. اما برهان مسئله از کجا الهام گرفته شد؟ اگر شما به شیوه‌ای که بحث شد، نظر افکنید، خواهید دید که دو کشف مهم وجود داشته است. اولین پیشرفتی که همراه با فهم مسئله انجام داده‌ایم،دریافت احساسی از مسئله بود. بیان مسئله در کلی‌ترین حالت، کار کوچکی برای ما بود. کاری که ما انجام دادیم، آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان بود، به‌ویژه این که اولین توجه ما به حالت‌های خاص چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۲، بینش و آگاهی زیادی را تأمین نکرد. ما می‌بایست حالات خاص بیش‌تری را بررسی می‌کردیم. در این راه به مشاهده‌ی یک‌سری مثال‌های سرراست که برای محاسبه ساده هستند، به منظور کشف بعضی از الگوها پرداختیم. خوشبختانه قادر بودیم که الگو را تعمیم دهیم. در این حالت برای در اختیار داشتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های تجزیه‌پذیر را اختیار کردیم. به طور بدیهی حالات متفاوت و پیش‌آمدهای متفاوت، ما را به انتخاب‌های متفاوت هدایت خواهد کرد. تدبیر مذکور به ما اجازه داد تا حدس خود را بسازیم.

پیشرفت دوم بعد از این که حدسمان را ساختیم، حاصل شد. اگرچه برای برقراری حکم چند ایده داشتیم، ولی بحث آشفته به نظر می‌رسید و ما برای بازنگری مسئله توقف کردیم. کاری که در آن‌جا انجام دادیم، مهم است؛ اما اغلب از آن چشم‌پوشی می‌شود. به شرایط مسئله برگشتیم، آن‌ها را کشف کردیم و آن‌ها را به منظور حس ارتباطشان با نتایج مورد نظرمان مشاهده کردیم. ممکن است سؤالاتی از قبیل r ریشه‌ی $P(x)$ است، یعنی چه؟ وارون r چیست و معنی این که $\frac{1}{r}$ ریشه ی $Q(x)$ است، چیست؟ اغلب به طور انفرادی ساده به نظر برسد، اما این سؤالات توجه ما را به خیلی چیزهایی که جواب را در اختیار ما گذاشت، جلب کرد. روشن کردن چنین

فرایندهایی دو کار انجام می‌دهد:

۱ـ از ریاضیات راززدایی کرده و آن را در دسترس قرار می‌دهد. وقتی دانش‌آموز ببیند که این ایده از کجا آمده است، دیگر مانند شعبده‌بازی به نظر نمی‌رسد.

۲ـ تدابیر مورد تأکید در فوق، قابل تعمیم بوده و در هر جای دیگر مفید هستند.

آموزش کیفیت به‌کارگیری آن‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مسئله حل‌کن‌های بهتری بشوند.

نقطه‌ی ضعف بحث فوق، این است که نمایش هنوز یک‌طرفه است. معلم هنوز در حال توضیح این مطلب است که او چگونه به مسئله نزدیک می‌شود. اگر حل کردن مسئله یک تجربه شخصی است، دانش‌آموز نیازمند است که شخصاً با مسئله درگیر شده باشد. این مطلب معلمان را به راه دیگر خدمت‌گذاری به عنوان الگو و نقش‌آفرین هدایت می‌کند.

۲ـ۸. استفاده از فرمول‌های مشابه برای ایده گرفتن

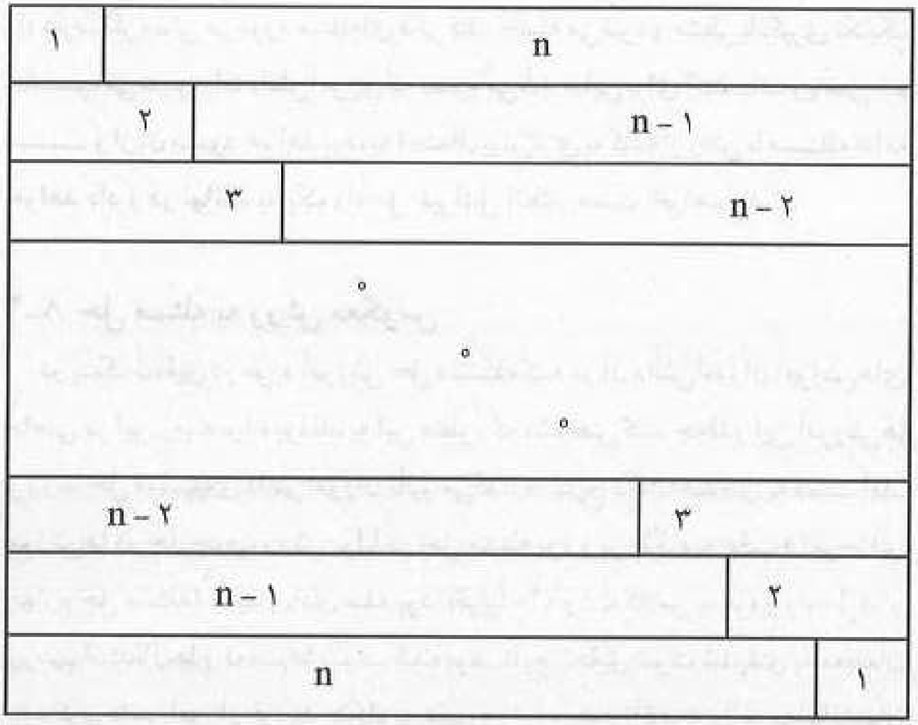
روش‌های دیگری برای کاربرد حل مسئله در کلاس درس وجود دارد: حل مسئله‌ها همراه دانش‌آموزان با استفاده از ایده‌های آنان. ایده مطرح در این جا، حل مسئله‌ها با کمک یکدیگر است و معلم به عنوان هماهنگ‌کننده و تنظیم‌دهنده‌ی ایده‌ها و یک رفیق شفیق، سؤال‌های مهم را ایجاد و همه چیز را در مسیر درست هدایت می‌کند. او مستقیماً جواب‌ها را به دست نمی‌دهد، بلکه دانش‌آموز را در جهت بهترین استفاده از منابع در دسترس خود یاری می‌کند. معلم باید جزوه‌ای مشتمل بر مسئله‌ها داشته باشد و کلاس را به بحث روی یکی از آن‌ها متمرکز کند. سؤالاتی که توسط معلم مطرح می‌شوند، نوعاً این‌گونه‌اند:

آیا کسی پیشنهادی دارد؟ دیگران چه‌طور؟ در این مورد چه فکری می‌کنید؟ بسیار خوب، ما این‌ها را به عنوان ایده‌های احتمالی داریم. کدام‌یک را باید انجام دهیم؟ آیا ندای معقولی به گوش می‌رسد؟ آیا روزنه‌ی امیدی هست؟ آیا در این مورد باید تلاش کنیم؟ شما فکر می‌کنید چه چیزی جایگزین مناسب‌تری است؟ چیزی را فراموش

نکرده‌ایم؟ پنج دقیقه است که داریم همین کار را می‌کنیم، آیا شما مطمئن هستید که حقیقتاً مسئله را به قدر کافی فهمیده‌ایم؟ چه چیزی را باید در نظر می‌گرفتیم؟ شما با مسئله‌ای که ما در حال حل کردن آن هستیم، چه‌طور برخورد می‌کنید؟ آیا کشفی در ذهن ما صورت گرفته؟ و غیره. با پشتکار معلم، این سؤال‌ها نهایتاً طبیعت ثانویه دانش‌آموز خواهد شد. یاد می‌گیرد که خود او هم از این سؤالات بپرسد. بدین ترتیب می‌توان در اواسط سال تحصیلی از آن‌ها پرسید چه سؤالاتی می‌خواهم از شما بپرسم؟ و آن‌ها معمولاً در پایان قادر خواهند بود که بگویند که آن‌ها حقیقتاً می‌خواهند خودشان از خودشان سؤال بپرسند.

ایده‌ی دیگر آوردن معلم روی صحنه در حال حل مسئله‌های جدید است. آموزش حل مسئله، به دلیل عدم وجود اسلوب خاص، برای دانش‌آموزان درسی پردردسر و سنگین است. دقیقاً وقتی به مسئله‌ای فکر می‌کنند، مسئله‌ی دیگری را فراموش می‌کنند و مسائل جدید آن‌ها را در یک دور بسته می‌اندازد. به منظور دادن یک استراحت کوتاه به دانش‌آموزان و هم‌چنین برای این که آن‌ها معلم را در وضعیتی مشابه خود ببینند، باید به آن‌ها اجازه بدهیم که مسئله‌هایی را مشابه آن‌چه برایشان طرح می‌کنیم، برای ما طرح کنند. به این ترتیب که کلاس با هر سؤالی شروع می‌شود و اگر مسئله‌ای داشته باشند، معلم با صدای بلند روی تخته سیاه (کنایه از طرز رفتاری که مراحل حل مسئله را برجسته و مشاهده‌پذیر کند) روی مسئله کار کند. بهره و ثمره‌ی آن‌ها از این روش، این است که معلم را در حال به‌کارگیری استراتژی‌ها مشاهده می‌کنند.

معلم به عنوان پرورش‌دهنده هم می‌تواند نقش ایفا کند. بعضی از همکاران، ریاضیات را برای دانش‌آموزان خود به عنوان یک «ورزش» توصیف می‌کنند. البته منظور آن‌ها این است که دانش‌آموز می‌بایست درگیر انجام دادن ریاضیات شود. یعنی این که دانش‌آموز خارج از گود نمی‌تواند به ارزش ریاضی پی ببرد. دیدگاه دیگری در شبیه‌سازی تعلیم و تعلم ریاضیات به ورزش موجود است. معلم به جای ایفای نقش مربی یا پرورش‌دهنده، معمولاً نقش توزیع‌کننده‌ی دانش را در حین اجرای درس و آموزش متن و پیشبرد کلاس ایفا می‌کند، زیرا در اکثر روش‌های آموزش، توانایی تعلیم



که به‌طور نمادین می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود.

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$s = n + (n-1) + (n-2) \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2s = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ بار}}$$

۳. به عنوان حکمی که صحت آن توسط استقرا ثابت می‌شود.

۴. به عنوان حالت خاص یک معادله‌ی تفاضلی.

می‌توان به دانستن یکی از این ابعاد خرسند بود، اما هر کدام از این ابعاد تفکر دارای ریشه‌ی متفاوتی است و می‌تواند به طرق متمایزی تعمیم داده شود. در حل یک مسئله‌ی جدید هر کدام از این دیدگاه‌ها ممکن است کلید راه‌حل مسئله باشد. به‌علاوه، علم به این که مسائل می‌توانند از چندین روش حل شوند، بر روش‌های حل مسئله‌ی دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد. دانش‌آموزی که فکر می‌کند هر مسئله یک

راه دارد، اگر مدتی در مورد مسئله‌ای فکر کند، خسته می‌شود و منتظر یادگیری تکنیک مناسب می‌شود. اما دانش‌آموزی که تصور می‌کند جایی برای اکتشاف ریاضی هم هست و از آن سود خواهد برد، به احتمال بیش‌تری به کلنجار رفتن با مسئله ادامه خواهد داد و در نهایت به یک راه‌حل غیرقابل انتظار دست خواهد یافت.

۴ـ۸ حل مسئله به روش معکوس

در یک تحقیق در مورد آموزش حل مسئله که در آن دانش‌آموزان آموزش‌های خاصی در این زمینه دیده بودند، به این منظور که مشخص کنند چه‌قدر این آموزش‌ها بر روند حل مسئله‌ی دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد، نتایج تکان‌دهنده‌ای به دست آمد. آموزش‌ها در چارچوب روش پولیا در حل مسئله بود و بر «نگاه به عقب» (مرحله‌ی چهارم حل مسئله) تأکید زیادی شده بود. تقریباً ۴۰٪ وقت کلاس به مرور راه‌حل‌ها و بررسی استدلال‌ها و تعمیم‌ها صرف شده بود. نتایج تحقیق شوک شدیدی به محققان وارد کرد. دانش‌آموزان فرایند «نگاه به عقب» را با وجود تأکید شدید معلمانشان کاملاً فراموش کرده بودند. بعد از بررسی نوارهای ویدئویی، دلیل این امر آشکار گردید. معمولاً معلمان بعد از حل یک مسئله کنار می‌رفتند و چیزی شبیه این می‌گفتند که «حال بیاییم نگاهی دوباره به راه‌حل داشته باشیم و ببینیم از آن‌چه می‌توان آموخت.» آن‌چه منظور معلمان بود، روشن است و مرحله‌ی مهمی از حل مسئله محسوب می‌شود؛ یعنی، بررسی صحت جواب، بررسی استدلال‌ها، جست‌وجو برای جایگزین‌ها، بررسی در نمایش‌های نمادین مختلف، استفاده از نتایج و روش‌های مسائل دیگر و... که همه کمک می‌کنند مسئله را بهتر بفهمیم، اما آن‌چه دانش‌آموزان دیدند، این بود که معلم در حال مرور پاسخ است. آن‌ها احساس می‌کردند که اگر پاسخ را فهمیده‌اند، نیازی به توجه دوباره ندارند. اگر نکته‌ها را، هرقدر هم به نظر ما بدیهی باشند، به دقت و روشنی و به مراتب بازگو نکنیم، امکان دارد که به آن توجه نشود. بنابراین:

۱ـ به آنان بگویید که می‌خواهید چه به آنان بگویید.

ما در مهارت‌های پهلوانی بسیار پیشرفته‌تر از مهارت‌های عقلانی است. نقشه‌ی یک تربیت عقلانی برای اکتشاف بسیار باارزش‌تر است. عمل تعلیم یک مهارت سرراست ورزشی مانند سرو در تنیس یا پرتاب خطا در بسکتبال را در نظر بگیرید. آن مربی که می‌گوید: «ببینید این حرکت را چگونه انجام می‌دهم، پس خودتان آن را تمرین کنید.» خیلی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. با این روش، ورزشکار برای مدت طولانی مشغول نخواهد شد. البته فرایند اجرا شده، به طور قطعه به قطعه نمایش و توضیح داده می‌شود. او می‌گوید چگونه باید ایستاد، وضعیت دست چگونه باید باشد و... ورزشکاران نیز به‌طور کلی هر کدام از قسمت‌های تکلیف را به موازات بیان مربی انجام می‌دهند. هم‌چنین هر کدام از ورزشکاران برای تمرین آموخته‌های خود به صحنه فرستاده می‌شوند، اما مربی سریعاً به اصلاح حرکت آن‌ها و بیان جزئیات بیش‌تر مراحل انجام فعالیت برمی‌گردد: «شانه‌هایتان باید پایین باشد، شما نباید برای پرتاب خیلی خیز بردارید و...» اگر اجرا ناقص باشد، معمولاً مربی و بازیکن، فیلم حرکت کُند ورزشکار را در حال انجام عمل خواسته شده از ویدئو مورد بازبینی قرار می‌دهند تا بتوانند نکات ظریف مورد استفاده‌ی ورزشکار را که در پیشرفت وی مؤثر هستند، شناسایی و تفکیک کنند. این دیدگاه از تربیت باید با آموزش آن‌چه که مهارت‌های پایه یا رویه‌های استاندارد نامیده می‌شود، همراه باشد. اما مربیان کارهای مهم‌تری هم انجام می‌دهند. قسمت اعظم کار مربیان، تربیت ورزشکاران برای اتخاذ تصمیم‌های هوشمندانه در طی بازی است.

در یک آزمون تکنیک‌های انتگرال‌گیری از ۱۷۸ دانش‌آموز ۴۴ نفر انتگرال $\int \frac{x\,dx}{x^2-9}$ را با روش تجزیه‌ی کسرها و ۱۷ دانش‌آموز دیگر با جای‌گذاری $x=3\sin\theta$ به دست آوردند. اما هر دوی این روش‌ها وقت بسیار زیادی می‌گیرد. یک ملاحظه‌ی مختصر نشان می‌دهد که مسئله می‌تواند با جای‌گذاری بسیار مقدماتی‌تر $u=x^2-9$ حل شود.

قسمتی از یک نصیحت استاندارد که میانبری مجازی در همه‌ی محتواست، می‌گوید: «تا موقعی که به عدم وجود یک روش جایگزین ساده اطمینان حاصل

نکرده‌ایم، هیچ کار سختی را انجام ندهیم». این یکی از نصیحت‌هایی است که مربی باید بپذیرد. همین نکته به عنوان راهی ارزشمندتر از ارائه‌ی «مستقیم» حل مسئله به دانش‌آموز تلقی می‌شود.

۳ـ۸. کاربرد معادلات در ترجمه‌ی مسئله به زبان‌های مختلف

از آن‌جا که بیش‌تر مسائلی که ما در کلاس حل می‌کنیم بسیار ساده هستند، معمولاً به اولین راه‌حلی که توسط تکنیک‌های آموزش داده شده به دانش‌آموزان قابل اجراست، اکتفا می‌کنیم و پس از حل یک مسئله، به دنبال مسئله‌ی دیگری می‌رویم و دانش‌آموزان با این تصور که ما یک راه‌حل مناسب برای حل مسئله را ارائه کرده‌ایم، تنها گذاشته می‌شوند. اما این یک توهّم است. مثلاً راه‌حل‌های پیشنهادی که برای قضیه‌ی فیثاغورس می‌شناسیم را در نظر بگیرید و این که اگر یکی از ما راه‌حل جدیدی به دست بیاورد، چه‌قدر خوشحال خواهد شد. به این نکته توجه داشته باشید که درک بهتر یک حقیقت ریاضی، یعنی برقرار کردن ارتباطات بیش‌تر و بیش‌تر با سایر مفاهیم ریاضی. برای مثال می‌توان به مجموع $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ به زبان چندین نمایش فکر کرد:

۱. حاصل جمع $\frac{n}{2}$ زوج که هر کدام مجموع $n+1$ دارند.

$$\underbrace{1+2+\underbrace{\underbrace{3+\cdots+(n-2)}_{}+(n-1)}_{}+n}_{n+1}$$

۲. به صورت تصویری به عنوان نصف یک مستطیل $n\times(n-1)$

۲ـ آن را بگویید.
۳ـ به آنان بگویید که چه چیز را به آنان گفته بودید.
نیازی نیست که تأکید کنیم این قوانین را نباید به‌طور خشک اجرا کرد؛ به‌خصوص در درسی که قرار است نتایج را دانش‌آموزان خودشان کشف کنند. اما این ضرری ندارد که مطمئن شویم آن‌ها این کشف را واقعاً انجام داده‌اند. پس آن‌قدر به آنان نکته‌های مهم را تأکید کنید که در صورت دانش‌آموزان نشانه‌ی رضایت را مشاهده کنید. همان‌جا دست نگه دارید. اگر بیش از اندازه تکرار کنید، اثر معکوس خواهد داشت.

۸ـ۵ استفاده از دستگاه‌های مختصات

درباره‌ی کاربرد دستگاه‌های مختصات در حل مسئله تاکنون مثال‌های زیادی آورده‌ایم. اکثر مسائل با این روش حل‌پذیر می‌شوند، اما معمولاً راه‌حل‌های طولانی و طاقت‌فرسا در این روش بسیار مشاهده می‌شوند.
مسائل ساده و ابتدایی می‌توانند بسیار آموزنده و مبارزه‌طلب باشند. اگر ما دانش‌آموزان را چنان تربیت کنیم که مسائل مبارزه‌طلب و مشکل را بتوانند حل کنند، آن‌گاه دانش‌آموزان به این گرایش خواهند داشت که مسائل را مشکل ببینند. از طرف دیگر، مسائل ساده اگر خارج از محتوای مربوطه مطرح شوند، می‌توانند بسیار هم مبارزه‌طلب باشند. برای مثال، خیلی از مسائلی که دانش‌آموزان در دبیرستان به راحتی حل می‌کنند، در دانشگاه به سادگی نمی‌توانند حل کنند؛ چون در این صورت مسائل خارج از محتوای مربوطه مطرح شده‌اند و دانش‌آموزان را با ابزارها و سلاح‌های خودشان تنها گذاشته‌ایم.
از طرف دیگر، متأسفانه یکی از نتایج مخرب روش تدریس ما این است که ریاضیات باید ساده باشد. دانش‌آموزان چنین فکر می‌کنند که روانی حل تمارین کتاب و آسانی درک سخنرانی‌های معلم به این معنی است که کشف و انجام دادن ریاضی باید فرایندی ساده و مستقیم باشد. برای این که نکته روشن‌تر شود، به این سؤال پاسخ

دهید: تا به حال چند مسئله در کلاس برای دانش‌آموزان مطرح کرده‌اید که حل آن بیش از ۱۵ دقیقه طول کشیده باشد؟ آن‌ها این تصور را پیدا می‌کنند که همه‌ی مسئله‌ها باید در عرض نیم‌ساعت یا یک ساعت حل شوند، بعضی تصور می‌کنند که اگر یک مسئله نتواند در عرض یک ساعت توسط آنان حل شود، هرگز حل نخواهد شد. آنان که ساعت‌ها، روزها، هفته‌ها و ماه‌ها را صرف درک بهتر یک مسئله کرده‌اند، می‌دانند که این تصور چه‌قدر اشتباه است. دانش‌آموزان باید بفهمند که:

۱ـ کارِ گل در بسیاری از موارد لازم است.

۲ـ زمان‌های طولانی کشف و بررسی برای درک درست مسئله لازم است.

فصل ۹

تربیت تفکر جبری ریاضی‌دانان

در تمدن غرب که مرکز رشد و توسعه‌ی علوم مدرن محسوب می‌شود، به سرچشمه‌های الهی علوم توجه نمی‌شود، در صورتی که در فلسفه‌ی اسلامی همه‌ی علوم به توحید مهار می‌شوند و شناخت با توجه به ارتباط بین درجات هستی ممکن می‌شود. هر چند پس از تقدس‌زدایی علوم جدید در اوایل قرن بیستم، گرایش‌های بازگشت به سنت متافیزیک در غرب مشاهده می‌شود، با این حال هنوز انسان‌شناسی غربی سطحی‌تر از این است که بتواند تبیین کند علوم مختلف در کمال انسان چه نقشی دارند، یا این‌که ظهور آنان نشانگر چه کمالاتی از انسان است، یا این‌که به چه جنبه‌هایی از عظمت هستی اشاره می‌کنند و یا این‌که هر یک درباره‌ی خالق چه می‌گویند؟

آن‌چه مورد تأکید ماست، این که مراتب عالیه‌ی شناخت بر مراتب عالیه علوم تطابق دارند. هر یک از علوم، یکی از ابعاد شناخت ما ولذا یکی از ابعاد هستی را معرفی می‌کنند. هر یک از علوم باید چنان مطالعه شود که روشن شود درباره‌ی

هستی چه می‌گویند. هماهنگی علوم، هماهنگی ابعاد شناخت و هماهنگی ابعاد هستی همه یک چیزند. همان‌طور که علوم دارای مراتبی هستند، پس ادراک و شناخت آدمی نیز دارای مراتبی است، پس هستی دارای مراتبی است. مراتب عالیه‌ی علوم، مراتب نزدیک به حکمت الهی هستند. البته نظر به مراتب عالیه‌ی علوم یعنی نظر به همه‌ی مراتب علوم، نه فقط مراتب بسیار مجرد. بنابراین علوم گواه مراتب هستی هستند، چون خود موجی از عالم غیب‌اند. علم، شناخت و هستی، همه تجلی اسماء و صفات الهی هستند. همه‌ی این تجلیات هم‌آهنگ و هم‌آوا هستند و نقل از صاحب تجلی می‌کنند. کارآمدی علوم، گواه بر این است که تجلیاتی از اسماء و صفات الهی هستند. هم‌چنین هماهنگی علوم بر این گواه است. علوم ریاضی که در ذهن خانه گرفته‌اند، با علوم تجربی که در طبیعت خانه دارند، هماهنگ‌اند. همه‌ی علوم موردنیاز بشرند و مهار شده به توحیدند، یعنی با هم هماهنگ هستند. لذا علومی که در فرهنگ‌ها و تمدن‌های مختلف توسعه پیدا کرده‌اند، می‌توانند هم‌زبان و هماهنگ فهمیده شوند.

مراتب یک علم را می‌توان از دوری و نزدیکی به مشرق و مبدأ تجلیات یا مغرب و مقصد تجلیات شناخت و مرتب کرد و علوم نیز مانند اسماء،حرکت نزولی و صعودی دارند. نازل می‌شوند و سپس عروج می‌کنند. نزول علوم در عالم خلقت و عروج علوم درون انسان است. هر علمی یک جهان‌بینی علمی دارد. و همه‌ی این جهان‌بینی‌ها با یک جهان‌بینی سرتاسری هماهنگ‌اند. تقسیم‌بندی علوم باید متناسب با تجلیات و نظام آن‌ها صورت بگیرد تا سرچشمه‌های علوم در علوم الهی روشن و آشکار باشد. اما سرچشمه‌ها در زمینه‌های فکری و فلسفی غرب گم شده است. دلیل این غفلت این است که دانشمندان بزرگ، شاگردانی تربیت نکردند تا تجربه‌ی متافیزیک آنان را سینه به سینه انتقال دهند. در غرب سعی کردند زبان علمی را مستقل از شخصیت علمی عالمان بنا کنند و این، ابعاد انسانی علم را محدود کرد.

در شرق، همه‌ی ابعاد علم در خدمت همه‌ی ابعاد انسان تصور می‌شد. به

این سؤال که آیا انسان قادر است تمام مراتب هستی را ادراک کند، پاسخ مثبت داده شد و وحی طلایه‌دار ارتباط انسان با حقیقت دانسته می‌شد. این سنت که توسط ادیان الهی پایه‌گذاری شده بود، تا به امروز پایدار مانده است. امروز هم فیلسوفان اسلامی معتقدند وجود ذهنی اگر با سایر مراتب وجود و حقیقت در انسان هماهنگ و همگام باشد، یک وجود حقیقی است، نه اعتباری. انسان می‌تواند حقیقت را از درون بچشد. علم و متافیزیک در برابر حقیقت، آشتی ابدی دارند. مسلماً با چنین دیدگاهی نسبت به علوم شخصیت علمی دانشمندان اسلامی با دانشمندان غربی تفاوت خواهد داشت.

در فلسفه‌ی اسلامی، هدف عمده‌ی آموزش ریاضی این است که تفکر ریاضی مقدمه‌ای برای ادراک معنویات شود. در تحقیقات ریاضی به دنبال حقایق فرامثالی و فراذهنی هستیم، نه این‌که تنها به ساختارهای باطنی ریاضیات دست پیدا کنیم؛ چرا که چنین ساختارهایی دردسترس فلسفه هم قرار دارند، بلکه می‌خواهیم ساختارهای باطنی را چنان بشناسیم که رابطه‌ی تجلیات آن‌ها را در لایه‌های تجرید مختلف درک کنیم. برای این کار به شناخت همه‌ی ابعاد حقیقت ریاضی احتیاج داریم. ادعای تحقیق ریاضی و کشف ارتباط ریاضیات و حقیقت، بدون این‌که ابعاد متافیزیک در ریاضیات دیده شود یا تجلی کند، ادعای پوچی است. ریاضیات باید به ما کمک کند معنویات را بهتر درک کنیم. چنین ریاضیاتی است که می‌تواند تکیه‌گاه سایر علوم تجربی باشد و از آن به حکمت وسطی تعبیر شود.

شکی نیست که ریاضیات با شناخت مجردات ربط مستقیم دارد. هر چه ساختارهای ادراکی ما برای شناخت مجردات آمادگی بیش‌تری داشته باشند و تناسب بیش‌تری پیدا کنند، درک ریاضیات و توسعه‌ی ریاضیات برای آن‌ها آسان‌تر خواهد بود. آن‌چه اثبات آن مشکل است، طرف دیگر این تأثیرگذاری است. آیا پیشرفت ادراک ریاضی موجب تکامل ساختارهای شناختی در درک کل مجردات خواهد شد؟ بدون شک باید برای توانایی‌های آموزشی ریاضیات

حدی قائل شد. این‌که بخواهیم گفته‌ی گالیله را که ریاضیات زبان طبیعت است به ماوراءالطبیعه نیز توسعه دهیم، بدون دلایل کافی نظری تندروانه است. اما تأثیر مثبت آموزش ریاضی در درک مجردات قابل انکار نیست.

تربیت ریاضی‌دانانی که مهارت‌های تفکر ریاضی را به درک معنویات توسعه داده باشند، هدفی بلند است که باید از سنین پایین تخم استعداد آن در وجود دانش‌آموزان کاشته شود. چنین دانش‌آموزانی با نگاه دیگری به علم و ارتباط آن با دین تربیت می‌شوند تا هم‌نشینی ادراکات علمی آن‌ها با باورهای معنوی آنان تضمین شود. تنها جهان‌بینی صحیحی در برابر حقیقت می‌تواند دانش‌آموزان را برای درک لایه‌های تجرید علم و هماهنگی آن با لایه‌های تجرید شناخت انسانی آماده کند. هدف ما در این فصل،این است که این جهان‌بینی را با یک زبان جبری در چارچوب ادراکات ریاضی معرفی کنیم. این کار را چنان انجام خواهیم داد که قابل پیاده‌سازی در صحنه‌ی آموزش باشد و معلم را در برآورده کردن اهداف تربیتی خود یاری برساند.

سر آخر این‌که دیدگاه جبری چه ربطی با معنویات می‌تواند داشته باشد؟ هر دیدگاه جبری را می‌توان معادل تفکر نمادین گرفت که به ارتباط بین بود و نمود و چگونگی آن تکیه می‌زند. در نگاهی که لایه‌های تجرید ملموس‌تر به عنوان نمادی حقیقی برای لایه‌های تجرید مجردتر تصور می‌شوند، می‌توان از تجلی و تجرید صحبت کرد. درک ساختار ارتباطی بین لایه‌های تجرید مختلف از طریق تجلی و تجرید در چارچوب تفکر نمادین دیدگاه جبری می‌گنجد. در این فصل سعی خواهیم کرد این دیدگاه‌ها را مشروح‌تر مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت /دبستان...

در یک صفحه‌ی چهارخانه‌ی مقوایی، پنج مربع همسایه را در نظر بگیرید که هر مربع در یک ضلع با سایر مربع‌ها که به هم متصل‌اند، اشتراک داشته باشد. به چند صورت این کار ممکن است. همه‌ی اشکال ممکن را با قیچی جدا کنید و

با کمک آن‌ها مانند یک پازل مستطیلی بسازید. این مستطیل چه ابعادی می‌تواند داشته باشد؟ برای هر یک از این مستطیل‌ها به چند روش می‌توان پازل را با کمک همه‌ی قطعات بریده شده ساخت؟

فعالیت / راهنمایی...

یک شکل هندسی متشکل از خطوط را در نظر بگیرید که در یک مسئله‌ی هندسه ظاهر شده باشد. مثلاً شکل قضیه‌ی تالس را در نظر بگیرید. حال همه‌ی خط‌های موجود در شکل را به محورهای اعداد تبدیل کنید. واحد و مبدأ هر محور را چنان بگیرید که در محل‌های تقاطع خطوط، عددی که همه‌ی این محورهای اعداد به این تقاطع نسبت می‌دهند، یکسان باشد. آیا این کار را می‌توان برای هر الگویی از خطوط انجام داد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

فعالیت / دبیرستان...

اعداد چهارگان اعدادی به شکل $a + bi + cj + dk$ هستند که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی و i، j و k بردارهای موهومی هستند که این‌طور ضرب می‌شوند: $ij=k$ و $jk=i$ و $ki=j$ و $ji=-k$ و $kj=-i$ و $ik=-j$ و $i^2=j^2=k^2=-1$. این اعداد تعمیمی از دستگاه اعداد مختلط محسوب می‌شوند که ضرب آن‌ها جابه‌جایی نیست. همان‌طور که با کمک اعداد مختلط معادله‌ی خط، دایره و مانند آن را برای حل مسائل هندسه‌ی مسطحه به کار می‌بریم، از اعداد چهارگان کمک بگیرید و مسائل هندسه‌ی فضایی را حل کنید.

فعالیت / دانشگاه...

با ساختارهای هندسی خود متشابه آشنا هستید. ساختارهای جبری خودمتشابه را چگونه تعریف می‌کنید؟

مرفیسم بین ساختارهای جبری خود متشابه را چگونه تعریف می‌کنید؟ آیا

مجموعه همه‌ی مرفیسم‌های خودمتشابه بین دو ساختار خودمتشابه، ساختاری جبری خواهد داشت؟ آیا این ساختار جبری خودمتشابه خواهد بود؟ آیا می‌توان ساختارهای خودمتشّابه را موضعی‌سازی کرد؟ آیا این ساختارهای موضعی خودمتشابه خواهند بود؟ آیا می‌توانید به اشیای هندسی خودمتشابه، ناورداهای جبری خودمتشابه نسبت دهید؟

۱ـ۹. جبر و مفهوم عدد

مفهوم عدد یکی از قدیمی‌ترین و ریشه‌دارترین مفاهیم ریاضی است. اولین بار فیثاغورس استدلال را در شناخت اعداد وارد کرد. اقلیدس دیدگاه اصل موضوعه‌ای را وارد اعداد کرد. دیوفانتوس تئوری حل معادله را بنیان‌گذاری کرد. حل هندسی معادلات از اقلیدس تا خیام توسعه پیدا کرد و حل جبری معادلات از دیوفانتوس تا کاردانو تعمیم یافت حل جبری معادلات درجه‌ی پنجم با شکست مواجه شد. این کشف آبل و گالوا بود. به زودی نظریه‌ی گالوا نشان داد که حل معادله‌ی دلخواه به روش جبری یا هندسی در حالت کلی ممتنع است و شرط لازم و کافی برای حل‌پذیری یک معادله را ارائه کرد. حاصل تحقیقات آبل و گالوا منجر به معرفی میدان‌های توابع و میدان‌های اعداد و سرآخر منجر به مفهوم ساختار عددی شد. ساختارهای عددی کم‌کم به عنوان ناوردا به کار رفتند و مفهوم عدد به مفهوم ناوردا و سپس به ساختارهای جبری توسعه یافت. ساده‌ترین ساختار جبری که همان گروه باشد، توسط گالوا مطرح شده بود. حتّی امروز هم مفهوم عدد در بستر تحقیقات ریاضی دستخوش تحول است. اشیای جهانی گروتندیک به وایلز کمک کردند تا مفهوم شمارش را به کمک این اشیا تعمیم دهد و در اثبات آخرین قضیه‌ی فرما به کار بندد.

هر چند تاریخ شکوفایی فیزیک به معنی مدرن و تاریخ شکوفایی ریاضیات به معنی مدرن هم‌آوا و هم‌آهنگ بوده‌اند، اما مبانی فکری و منطقی ریاضیات باستان بسیار استوارتر از مبانی باستانی فیزیک است. بنابراین متافیزیک در تاریخ

ریاضیات را باید در دیدگاه‌های فلسفی و مکاتب تاریخی ریاضیات جست‌وجو کرد. ریشه‌های توجه به متافیزیک در ریاضیات باستان به مُثُل افلاطون بازمی‌گردد. افلاطون تفکرات توحیدی داشته است. هرچند تفکرات فلسفی او به فیثاغورس بازمی‌گردد که گویا به فلسفه‌های ثنوی گرایش داشته است. فیثاغورس خود فینیقی بوده، اما فلسفه‌ی او ترکیبی از فلسفه‌های فینیقی، بابلی، مصری و ایرانی است. مثلاً ایده‌ی ثنویت را هنگام اسارت در بابل از زرتشتیان گرفت. زرتشت تلاش کرد تا کثرت خدایان مردم پیش از خود را با کمک ایده‌ی ثنویت با پیروزی نهایی اهورامزدا بر اهریمن به تفکر توحیدی نزدیک کند.

افلاطون و فیثاغورس از زمره‌ی اساس‌گرایان محسوب می‌شوند که اعتقاد داشتند ریاضیات دارای اساس‌های محکم و استوار و مستقل از انسان‌هاست. پس از قرون وسطا لایبنیتز، اسپینوزا، دکارت، کانت و در اوایل قرن بیستم فرگه، هیلبرت و براوئر مهم‌ترین اساس‌گرایان بودند که ریاضیات را فوق انسانی، انتزاعی، ایده‌آل، خطاناپذیر، ازلی، فناناپذیر، جاودانه و کشف‌شدنی می‌پنداشتند. در مکتب فیثاغورس خداشناسی با ریاضیات پیوند خورد و فلسفه‌ی اخلاقی و روحانی یونان را پدید آورد. سپس افلاطون ایده‌ی مُثُل را مطرح کرد که برطبق آن موجودات ریاضی واقعی هستند و مستقل از ذهن ما عینیت خارجی دارند، ولی متعلق به عالم ظاهر نیستند، بلکه در عالم مُثُل زندگی می‌کنند. بعدها اساس‌گرایان در عقاید خود تعدیل پیدا کردند. منطق‌گرایی که واضعان آن فرگه، وایتهد و راسل بودند بر این استوار شد که ریاضیات منطق محض است. از دیدگاه ایشان ریاضیات از پاره‌ای از اصول منطقی که از آن‌ها قضایایی استنتاج می‌شود، تشکیل شده که می‌توان آن‌ها را در استنتاج‌های بعدی به کار گرفت. منطق بدون آن‌که محتوا داشته باشد، یک قالب صرف است و ریاضیات هم از هرگونه محتوای مادی تهی است و قالبی خشک و خالی دارد. تعبیرات فیزیکی و مادی که از اعداد و مفاهیم هندسه می‌شناسیم، مربوط به ریاضی نیست. سرانجام تز منطق‌گرایان توسط راسل به شکست انجامید. اساس‌گرایان از پا نایستادند و صورت‌گرایی

هیلبرت و شـــهودگرایی براوئر را برای نجات اســاس‌گرایی مطرح کردند.

هیلبرت با الهام گرفتن از کانت، برنامه‌ی اصل موضوعه‌ای‌سازی تمام ریاضیات را تنظیـم کـرد. به عقیده‌ی او آن‌چه در اسـتنتاج‌های منطقی و احکام مرکب منطق مفروض است، در فرضیات اولیه‌ی تفکر در ذهن آدمی وجود دارد. ریاضی‌دان از پیش در ذهن خود اشیای غیرمنطقی معینی را از طریق حدس فلسفی درک می‌کند. در صورت‌گرایی، ریاضیات چیزی جز یک دسـتگاه صوری فرامنطقی نیست. یک دسـتگاه صوری از یک زبان رسـمی که گردایه‌ای از نهادها و زبان‌هاسـت، همراه با گردایه‌ای از احکام یا اصول تشـکیل شـده اسـت که در یک دستگاه استنتاجی زندگـی می‌کنند. برنامه‌ی هیلبرت با قضیـه‌ی ناتمامیت گودل از هـم فروپاشـید.

شــهودگرایی دیگـر راه‌حلـی بود که برای نجات اسـاس‌گرایی ارائه شـد. در شـهودگرایی نقش تعقل و حدس فلسـفی نقشی اساسـی است. کشف حقایقی که مسـتقل از اندیشــه هسـتند، حاصل این کُنش فلسفی اسـت. حتّی فلسفه‌ی کانت نیـز بـه نوعی بر شــهود متکی بـود که می‌گفـت بزرگ‌ترین عـدد و حداکثر طول نمی‌تواند وجود داشـته باشـد، چون عدد بعدی بزرگ‌تر و ادامه‌ی خط طولانی‌تر اسـت. کرونکر نیز از شــهودگرایان بود. او اعداد طبیعی را آفریده‌ی خدا و بقیه‌ی اعداد را سـاخته‌ی ذهن بشر می‌دانست. شـیوه‌ی افراطی وایراشتراوس در دقت را نمی‌پسـندید و کارکانتور روی اعداد ترانسـفینی را ریاضیات نمی‌دانسـت. او به ریاضیات سـاختنی و معیارهایی که با آن‌ها بتوان با طی مراحل متناهی اشـیای مـورد بحـث را معین کرد، اعتقاد داشـت. براوئر ریاضیات سـاختنی را به عنوان فلسـفه‌ای مسـتقل بنا کرد. از دیدگاه براوئر ریاضیات باید مبتنی بر فرایند ساختن باشـد و با لزوم پذیرش شــهود پی‌ریزی شـود. قابلیت پذیرش مفاهیم ریاضی، نه با تجربه یا منطق، بلکه براسـاس شـهود تعیین می‌شود. شهود در برابر ادراک علّی قرار دارد. زبان ریاضی هم به قلمرو ریاضیات متعلق نیست، بلکه به قلمرو ادراک علّی تعلق دارد.

انســان‌گرایی از ارسـطو شـاگرد افلاطون شـروع شد. از انسـان‌گرایان مدرن

می‌توان از ویتگنشتاین، پوپر و لاکاتوش نام برد. ارسطو اعتقاد داشت ریاضیات فعالیتی بشری است که به کلیات معلوم که توسط عقل ادراک می‌شوند، تعلق می‌گیرد. ارسطو جدایی کلیات از محسوسات را تنها در ذهن قائل بود، نه در خارج. این که ذهن از اشیا و محسوسات یک صورت مجرد می‌سازد که ساخته‌ی خود اوست. لایه‌های تجرید علم از نظر پوپر جهان مادی، عالم آگاهی، و سپس سنت‌ها، زبان‌ها، نظریه‌ها و نهادهای اجتماعی هستند. بین این لایه‌ها از پایین به بالا ارتباط برقرار می‌شود. در فیزیک ابتدا نظریات ارسطو حکومت داشت، ولی سرانجام با نزدیک شدن آن به ریاضی صورت افلاطونی به خود گرفت. در ریاضیات ابتدا نظریات افلاطون حکومت داشت، ولی بعد تئوری‌های آموزشی نظریات ارسطو را دوباره زنده کردند.

باید توجه داشت که جز نوافلاطونیان کسی به لایه‌های متعدد تجرید ادراک انسانی اعتقاد نداشت و حداکثر دو لایه‌ی تجرید جسد و ذهن موردتوجه فلاسفه‌ی ریاضی بود. در صورتی که قائل شدن به لایه‌های تجرید برای هستی انسان و ساختارشناختی او و برای جهان هستی، راه بسیار معقولی برای به هم پیوستن فلسفه‌های افلاطونی اساس‌گرا و فلسفه‌های ارسطویی انسان‌گرا بود. در فصل‌های آینده نشان خواهیم داد که بسنده کردن به لایه‌های تجرید جسد و ذهن در فلسفه‌های غربی ناشی از تأکید به وجود ذهنی ریاضیات بوده است. در صورتی که تأکید به وجود علمی منجر به نیاز به تمام لایه‌های تجرید علم می‌شد.

فعالیت / دبستان..

از دانش‌آموزان بخواهید به مجموعه‌های با تعداد عضوهای کم شیئی نسبت دهند که تعداد اعضای آن مجموعه‌ها به خوبی در آن شیء قابل مشاهده باشد. مثلاً به مجموعه‌های یک عضوی یک لامپ و به مجموعه‌های دو عضوی یک عینک را نسبت دهند. با این کار به اعداد کم‌تر از ده اشیائی را متناظر کرده‌اند که

یادآور آن اعداد هستند. این می‌تواند مرحله‌ای از تجرید مفهوم عدد باشد.

فعالیت/راهنمایی..

از سالنامه‌ی آمار کمک بگیرید و نمودار ستونی جمعیت، واردات، صادرات، تورم، زاد و ولد و مانند آن را برحسب زمان استخراج کنید. سپس این نمودارها را مقایسه کنید و سعی کنید توجیهاتی برای شباهت‌ها و عدم شباهت‌های این نمودارها پیدا کنید. حال با توجه به این نمودارها رفتار یک متغیر جدید را حدس بزنید. سپس به سالنامه‌ی آمار مراجعه و حدس خود را با داده‌های واقعی مقایسه کنید.

فعالیت/دبیرستان..

یک پدیده‌ی طبیعی را مدل‌سازی کنید. نمودار ستونی مربوط به یک متغیر را به انتخاب خودتان رسم کنید. سپس نقاط به دست آمده را با بهترین خط تقریب بزنید. حال سعی کنید یک نمودار درجه‌ی دوم پیدا کنید که بهترین تقریب برای نقاط مشخص شده باشد. برای این کار چه روشی را پیشنهاد می‌کنید؟ برای پیدا کردن یک تقریب درجه‌ی سوم چه‌طور؟ آیا در عمل این نمودارها کدام به شکل نمودار ستونی شبیه‌ترند؟ پدیده‌ی مورد مطالعه‌ی شما پدیده‌ای خطی است یا غیرخطی؟

فعالیت / دانشگاه..

در علم اقتصاد نیاز دارند تابع مطلوبیت را مدل‌سازی کنند. این تابع مقادیر عددی نمی‌پذیرد، اما مقادیری که می‌پذیرد یک مجموعه‌ی مرتب را تشکیل می‌دهند. تاکنون برای محاسبه با چنین توابعی حساب دیفرانسیل و انتگرال مناسبی تعریف نشده است. سعی کنید چنین حسابی را برای توابع مطلوبیت بسازید.

۲_۹. نمادهای حقیقی و اعتباری

آیا لایه‌های کثیر شناخت و لایه‌های کثیر هستی به طور یگانه و از پیش تعیین شده‌ای شکل می‌گیرند؟ آیا مراحل شناخت و درجات کمال آن ساختاری جهانی دارند؟ آیا ممکن است در نژادهای مختلف یا در تمدن‌های مختلف این کثرت و وحدت شناخت صورت‌های متفاوتی بپذیرد؟ اگر این‌طور نیست و این ساختار جهانی است، می‌تواند تعریفی از انسان بدهد که بر ساختارشناختی او استوار باشد؛ یعنی که انسان چیزی است که همه‌ی لایه‌های هستی او و لایه‌های معرفتی و شناخت او کامل باشد.

اما لایه‌های تجرید علوم در وجود ذهنی همه حقیقی نیستند، بلکه لایه‌های اعتباری هم وجود دارند؛ هرچند انسان یک نماد حقیقی از خداوند است و ساختارشناختی او از مراتب نمادین حقیقی تشکیل شده است، با این حال مراتب نمادین علوم در ذهن انسان بعضی حقیقی و بعضی اعتباری هستند. این مراتب نمادین حقیقی علم هستند که باید شناخته شوند و اصالت دارند. هستی نمادین علم، ساختار نمادین حقیقی علم و ارتباط بین این نمادهاست؛ چرا که نمادهای اعتباری، محدود به وجود ذهنی هستند و خارج از ذهن بشر معنی ندارند.

شناخت ساختار نمادین علوم احتیاج به تزکیه و تخصص دارد تا دانشمند بتواند نمادهای حقیقی و اعتباری را از هم تشخیص بدهد. ذهن که خاستگاه تفکر و ادراک انسانی است، خاستگاه وهم و نمادهای اعتباری هم هست. در رابطه با نمادهای حقیقی و اعتباری، توجه به نکاتی ضروری است. این‌که از به‌کارگیری نمادهای اعتباری در براهین عقلی پرهیز کنیم و توجه کنیم که نماد اعتباری از قلمرو اعتبار معتبران تجاوز نمی‌کند و با اختلاف اعتبار دگرگون می‌شود. این‌که ممکن است نمادهای اعتباری برای دو معنی متضاد توسط دو گروه مختلف به کار روند. اعتقاد به نمادهای حقیقی مستلزم اذعان به حقیقت یا حقایق برتری است که ضمن تجرید به امور متکثره محدود به آن نیستند. برای درک حقایق نمادین علم باید از چنگ اسطوره‌های دروغین که داعیه‌ی حقیقت دارند، خلاص شد.

اسطوره که سراب است،در دامن شرک پرورش یافته و با حقیقت که با توحید عجین است، هم‌نشین نیست.

مبانی فکری قوانین و تئوری‌ها توسط فرضیات پایه‌گذاری می‌شود. قوانین علمی باید مطابق خارجی قابل شهود داشته باشند و برحسب زبان فرضیات، تعریف دقیق و علمی بپذیرند و صدق و کذب آنان قابل ادراک باشد. فرضیات می‌توانند درباب حقیقی بودن ارتباط برخی بود و نمودها باشند. مثلاً یک فرضیه می‌تواند این باشد که برخی نمادها حقیقی باشند؛ چرا که تا وقتی همه‌ی لایه‌های تجرید را نشناخته‌ایم، چگونه بفهمیم که نمادی حقیقی است یا اعتباری؟ یک فرضیه می‌تواند از چند فرضیه با سطوح تجرید مختلف تشکیل شده باشد که در طول هم قرار دارند. در زبان فرضیات ممکن است از نمادهای اعتباری استفاده شود، اما محتوای نمادین حقیقی فرضیات باید کاملاً مشخص باشند. فرضیات باید چنان پی‌ریزی شوند که راه را برای صورتبندی قوانین و تئوری‌ها هموار سازند. بنابراین تا آن‌جا که ممکن است، باید ساده باشند. این، هم با مبانی زیباشناختی علوم هماهنگی دارد و هم این فرضیات ساده هستند که کاربردهای بسیاری دارند و هم تأثیرات فرضیات ساده بر چگونگی قوانین و تئوری‌ها قابل بررسی خواهد بود. لایه‌های تجرید فرضیات در وجود علمی و وجود ذهنی هر دو باید مورد توجه باشند. توجه صرف به لایه‌های تجرید علم در وجود ذهنی منجر به گمراهی خواهد شد.

این‌که چه انواعی از شهود در دسترس است، به ما خواهد گفت که چه انواعی از قوانین حقیقت را می‌توان فرمول‌بندی کرد. قوانین باید چنان پی‌ریزی شوند که قابل ابطال باشند. ممکن است قوانینی به روابط نمادین لایه‌های تجرید مربوط شوند و ممکن است قوانینی در چند لایه‌ی تجرید مختلف فرمول‌بندی شوند؛ به طوری که بین آن‌ها ارتباط نمادین وجود داشته باشد. اگر قوانین در یک لایه‌ی تجرید فرمول‌بندی شوند،علم حاصل از آنان نمی‌تواند باعث عروج و کمال معرفتی عالم شود.

تئوری‌ها باید کل نظام ادراکی یک علم را دربربگیرند، نه فقط لایه‌های تجرید خاصی از آن را. این تئوری‌ها می‌توانند از نوع مدل‌های مماثلت باشند که بخشی از یک علم را مثلاً به انسان تشبیه می‌کنند. می‌توانستند از نوع مدل‌های ساده‌کننده باشند که برای درک تقریبی ساختار یک علم به کار می‌روند. تئوری‌ها نمی‌توانند از نوع مدل‌های مکانیکی باشند، چه تمام لایه‌های تجرید حقیقت در چنین مدلی وارد نمی‌شوند. قوانین و تئوری‌ها باید قدرت تبیین و پیش‌بینی مشهودات را بدهند؛ حتّی اگر این مشهودات تکرارپذیر نباشند. این تئوری‌ها به تعبیری همان فضاهای حقیقی یا اعتباری هستند که می‌توان مسائل را در چارچوب آن‌ها مورد مطالعه قرار داد. حوزه‌ی تئوری‌ها عام‌ترند و حوزه‌ی قوانین خاص‌تر و زبان تئوری‌ها مجردتر از زبان قوانین است.

دانشمندان بسیاری به وجود حقیقت اعتراف دارند. در زمان نیوتن دانشمندان اعتقاد داشتند که با کشف قوانین فیزیک و سایر علوم تجربی، از رموز هستی پرده برمی‌دارند تا این‌که اینشتین ادعا کرد که این‌ها همه مدل‌هایی هستند که با آن‌ها حقیقت را تقریب می‌زنیم و به آن نزدیک می‌شویم. هر دو متفکر به وجود حقیقت اذعان دارند. حتّی تفکرات فلسفی فیزیک‌دانان برای کشف فرمول‌بندی‌های ریاضی مناسب‌تر برای تئوری‌های جدید فیزیک، دلیل بر این است که موضوع مورد مطالعه‌ی خود را عقلمند می‌دانند و برای آن باطنی قائل‌اند که قابل کشف و ادراک است و سعی می‌کنند هم با روش‌های علمی و هم با روش‌های فلسفی به آن دست یابند.

گستره‌ی حقیقت، تمام هستی است و تمام هستی مسخر ساختارشناختی انسان است. ارتباط انسان با خداوند دلیل بر این است که تمام لایه‌های تجرید هستی در ساختار ادراکی وجود دارد. به عبارت دیگر، انسان در هستی ناقص نیست. این‌که چه گستره‌ای از حقیقت در فرضیات، قانون‌ها و تئوری‌های معنوی دانشمندان بگنجد، بستگی به پیشرفت علوم و سطح تفکر بشری و تربیت معنوی دانشمندان یک عصر دارد. متأسفانه در عصر ما آن‌چه جمهور دانشمندان به آن

دسترسی داشته‌اند، بسیار عمیق نیست. حتّی به‌ندرت به پشت صحنه‌ی مفاهیم توجه می‌شود. دیدگاه توحیدی به گستره‌ی حقیقت نشان می‌دهد که هر چند در عوالم کثرت ممکن است بعضی علوم نامربوط به نظر برسند، اما هرچه به عمق باطن آن‌ها نزدیک‌تر شویم، ارتباط بین این علوم آشکارتر می‌شود.

منظور از کمال انسان، این است که گستره‌ی حقیقت با تمام روابط نمادین آن در ساختار ادراک انسان نقش بندد؛ یعنی انسان به ساختاری شناختی دست پیدا کند که برای شناخت همه‌ی هستی مناسب باشد. این همان قرب به پروردگار است و عبادت همان حرکت به سوی این کمال است. می‌بینیم که دیدگاه مناسبی به علوم می‌تواند کسب دانش را در همسایگی کسب کمالات معنوی قرار دهد.

فعالیت/دبستان..

فرض کنید مجموعه‌ای از پنج سیب را در نظر گرفته‌ایم و می‌خواهیم اعضای آن را بشماریم. از سیب اول شروع به شمارش می‌کنیم: ۱، ۲، ۳ ... در این صورت ما ترتیب خاصی از سیب‌ها را در نظر گرفته‌ایم. تعداد کل ترتیب‌ها $5\times4\times3\times2\times1$ برابر است با ۱۲۰ ترتیب که در هر یک از آن‌ها تعداد کل سیب‌ها عدد ثابت ۵ است. در حالت کلی اگر n سیب داشته باشیم، $n!=n\times\cdots\times2\times1$ ترتیب متصور است که قرار است همه‌ی آن‌ها حاصل شمارش n را به دست دهد. اما به زودی $n!$ از تعداد ذرات کل عالم هستی که در دیدرس ما هستند، بزرگ‌تر می‌شود. از کجا بدانیم تعداد اعضای یک مجموعه مستقل از ترتیب انتخابی از اعضای آن است؟

فعالیت/راهنمایی..

فیزیک‌دانان تعداد همه‌ی ذرات عالم را که در دیدرس ما هستند، تخمین می‌زنند. با این وصف، عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ وجود نخواهد داشت. حتّی جمع و ضرب اعداد طبیعی تنها برای بازه‌های خاصی قابل تعریف خواهند

بود. یک تئوری از اعداد بسازید که در آن بزرگ‌ترین عدد متصور یک عدد متناهی باشد. سپس تئوری دیگری از اعداد بسازید که در آن اعداد به دلخواه بزرگ معنی دارند، اما اعداد بزرگ تنها به طور تقریبی قابل مطالعه هستند.

فعالیت/دبیرستان

فرض کنید که فوتون‌ها داده‌ها را از هر ستاره‌ای به سایر اجرام آسمانی انتقال می‌دهند. مثلاً انواری را که از ستارگان به زمین می‌رسند، داده‌هایی فرض کنید و انواری را که از زمین به خارج فرستاده می‌شوند نیز داده‌هایی در نظر بگیرید. حال یک مدل اطلاعاتی از جهان خلقت به دست دهید. حال با کمک مفهوم عدد یک مدل داده‌ای از فضا را معرفی کنید.

فعالیت / دانشگاه

دیکشنری یا لغتنامه‌ی بین میدان‌های توابع و میدان‌های اعداد را در نظر بگیرید. به نظر شما دلیل این همه شباهت بین این دو تئوری چیست؟ آیا آن‌ها حالت‌های خاص مختلفی از یک تئوری کلی‌تر هستند؟ آیا حقیقت باطنی مشترکی منجر به این شباهت‌ها شده است؟ آیا تابع یک عدد است؟ آیا دلیلی فلسفی بر این مدّعا وجود دارد؟

۳ـ۹. حقایق جبری ظاهری و باطنی

ارتباط بین ظاهر و باطن، ارتباط بین بود و نمود است. ارتباط بین حقیقت و نمادهای آن، همان چیزی است که از آن به علیّت تعبیر می‌شود. علیّت در فلسفه‌ی غرب در عرض یک لایه‌ی تجرید مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ در صورتی که در فلسفه‌ی شرق علیّت یک رابطه‌ی طولی است. چنین دیدگاهی به اصل علیّت، منجر به روش علمی متفاوتی خواهد شد. هم علوم در جهت وجود علمی رشد خواهند کرد و هم تصویر آن‌ها در وجود ذهنی رشد خواهد کرد. در واقع علیّت

فلسفه‌ی غرب، تصویر و تجلی علیّت فلسفه در وجود ذهنی است. در علیّت نمادین حقیقی خطا راه ندارد، اما در علیّت وجود ذهنی وهم راه دارد. در فلسفه‌ی شرق مسئله‌ی وجود در علیّت، تنها موضوع مورد مطالعه است، در حالی که علیّت نمادین تمام ابعاد حقیقت را دربرمی‌گیرد و به مسئله وجود تمرکز ندارد.

در فلسفه‌ی قدسی، معلول تجلی علت است. در واقع معلول و علت هر دو تجلیاتی از علل عمیق‌ترند. اگر معلول از چند دلیل یا از ترکیب آن‌ها نتیجه شود، این دلایل خود در طول یکدیگر قرار گرفته‌اند و بعضی علت دیگری هستند. بین فرضیاتی که در لایه‌های تجرید فرمول‌بندی می‌شوند، باید رابطه‌ی علیّت برقرار باشد. در مورد قوانین و تئوری‌ها هم چنین است. لغتنامه و دیکشنری بین بعضی تئوری‌ها هم با این رابطه‌ی علیّت قابل توجیه است.

برای درک تفاوت بین علم جبر ظاهری که لایه‌های تجرید عرضی حقیقت را مورد مطالعه قرار می‌دهد و علم جبر باطنی که به مطالعه‌ی لایه‌های تجرید طولی تأکید دارد، باید وجود علمی و ذهنی را در برابر یکدیگر بشناسیم. وجود علمی در سراسر هستی عالم گسترده است،ولی وجود ذهنی در نفس عالم گسترده شده است. مراتب هستی وجود علمی و وجود ذهنی مساوق هستند، اما مراتب وجود علمی طولی و مراتب وجود ذهنی عرضی است. در علوم تجربی و ریاضیات که ذومراتب هستند، تنها مراتب عرضی شناخت نمایان می‌شود و کار عالم موحد این است که مراتب طولی این علوم را کشف کند. با این حال وجود علمی و وجود ذهنی هر دو حقیقی هستند؛ به این معنی که مراتب هستی حقیقت در آن‌ها نمایان است. حقیقی بودن وجود ذهنی وابسته و سوار بر حقیقی بودن وجود علمی است. حقیقی بودن وجود علمی از طریق مجاری شناخت مساوق با خود حقیقت است. اگر بتوانیم همه‌ی مجاری شناخت را هم‌زمان برای ادراک حقیقت بگشاییم، قادر خواهیم بود حقیقت را از درون بچشیم. معادلاً همه‌ی لایه‌های تجرید وجود ذهنی حقیقت نیز بر ما آشکار خواهند شد. پس عدم درک ما از برخی لایه‌های تجرید، به خاطر عدم کمال است.

این دیدگاه‌ها منجر به نگاهی انسانی به علم می‌شوند که در آن علوم واقعیت‌های عینی هستند، نه ذهنی و نه مادی، بلکه مثالی و عقلانی مطابق با عالم ماده؛ یعنی هم فعالیتی بشری هستند، هم پدیده‌ای اجتماعی، هم بخشی از فرهنگ بشری و هم درگیر با تاریخ و هم قابل درک و فهمیدنی هستند. در عین حال، خارج از همه‌ی اذهان وجود دارند. همان‌طور که برای ادراک انسان، لایه‌های تجرید مختلفی قائل می‌شویم، برای کل جهان هستی نیز چنین لایه‌های تجریدی معنی دارند و به‌خصوص برای علوم نیز این لایه‌های تجرید مستقل از بشر متصورند. این‌گونه خاستگاهی برای علم مستقل از بشر معنی پیدا می‌کند.

فعالیت / دبستان..

مصداق‌های عدد ۱ در اطراف ما فراوان‌اند: مفاهیم وحدت، تساوی، اتحاد و مانند آن. از مصداق‌های عدد ۲ مفاهیم ازواج، تقارن آینه‌ای، چشم‌ها، گوش‌ها، دست‌ها، پاها و مانند آن را می‌توان نام برد. از دانش‌آموزان بخواهید در اطراف خود بگردند و مصداق‌های اعداد کوچک را پیدا کنند. ممکن است این مصداق‌ها طبیعی باشند یا از ماوراءالطبیعه سرچشمه گرفته شده باشند.

فعالیت / راهنمایی..

آیا اعداد طبیعی در طبیعت یافت می‌شوند یا این‌که نتیجه‌ی ایده‌آل‌سازی ذهن ما هستند؟ اگر از ذهن ما می‌آیند، چرا همه‌ی این ایده‌آل‌سازی‌ها با هم هماهنگ‌اند و در کنار هم علم حساب را می‌سازند؟ از دانش‌آموزان بخواهید با الهام گرفتن از طبیعت، روش دیگری برای شمارش را معرفی کنند و با ایده‌آل‌سازی، مفهوم جدیدی از عدد ارائه دهند که برای شمارش بتواند مفید باشد.

فعالیت / دبیرستان..

حساب اعداد صحیح یا اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. اگر جای اعداد مثبت

و منفی را عوض کنیم، در جمع و تفریق این اعداد تأثیری نخواهد داشت. این به خاطر تقارن اصول موضوعه‌ی حساب نسبت به مفاهیم مثبت و منفی است. آیا این بدین معنی است که اعداد مثبت و منفی بر هم منطبق‌اند؟ آیا ساختار اصول موضوعه مجردتر از ساختار احکام حساب است و احکام اصول موضوعه در علم حساب تجلی می‌کنند؟ یا این‌که احکام علم حساب و اصول موضوعه‌ی آن، از یک درجه‌ی تجرید هستند؟

فعالیت / دانشگاه ....

شباهت میدان توابع و میدان‌های اعداد را در نظر بگیرید. آیا این بدین معنی است که این ساختارهای عددی تجلی باطن مشترکی هستند؟ یا این‌که حالت خاص ساختاری عددی به معنی‌ای کلی‌تر هستند؟ در وجود علمی و وجود ذهنی به هر دوی این سؤال‌ها پاسخ دهید. اگر جواب مثبت است، آن ساختار باطنی یا آن ساختار کلی‌تر را بسازید. تنوع پاسخ‌ها مورد تأکید است.

۴ـ۹. عدد زبان ریاضیات

علم قدسی که معلوم عالم هستی است، دارای همان مراتب شناختی است که انسان و هستی او را دربرمی‌گیرد. هر یک از لایه‌های تجرید مثل حس، مثال و عقل هم در حالت کبیر مصداق دارد و هم در عالم صغیر. هر یک از مراتب شناخت در عالم صغیر، دریچه‌ای است به این مرتبه در عالم کبیر. از این‌رو علم قدسی هم دردسترس بشر است و هم مستقل از بشر. این دریچه‌های شناختی را مجاری شناخت نامیده‌اند. انسان به مجاری شناخت می‌شناسد و این مجاری شناخت با مراتب هستی او مساوق است. ریاضیات که علمی قدسی است، در همه‌ی لایه‌های تجرید شناخت گسترده شده است. عدد که زبان ریاضی است، باید در تمام این لایه‌های تجرید معنی پیدا کند. برای شناخت ساختار ادراک انسانی و مجاری شناخت او که ما را در شناختن لایه‌های تجرید مفهوم عدد یاری خواهد

رساند، لازم است که انسان و لایه‌های تجرید هستی او را بشناسیم.

در مورد لایه‌های تجرید هستی انسان، تئوری‌های گوناگونی ارائه شده که هر کدام تنها رنگی از حقیقت را دربردارند. مثلاً عمده‌ی فلسفه‌های غربی، انسان را متشکل از ذهن و جسد می‌دانند. در بعضی فلسفه‌های شناخت شرقی، لایه‌های تجرید شناخت را تجربه، مثال و عقل می‌دانند که مساوق با آن لایه‌های هستی انسان را حس و قلب و عقل در نظر می‌گیرند. در بعضی فلسفه‌های شناخت شرقی جسد، نفس، قلب، روح، عقل، نور و هویت را لایه‌های هستی می‌گیرند که هماهنگ با آن در بعضی نظریه‌های عرفانی برای نفس هفت لایه‌ی تجرید در نظر می‌گیرند که مساوق با لایه‌های تجرید برای شناخت ذهنی است. برای سادگی، تئوری حس، قلب و عقل را در نظر می‌گیریم. تئوری‌های مشابه، به همین سیاق قابل بررسی هستند.

ادراکات قلبی بدون ما به ازای حسی ممکن نیست و ادراکات عقلی بدون ما به ازای قلبی ممکن نیست. مخروط ادراکات در عالم نفس کثیر و در عالم عقل، وحدت بیش‌تری دارد. مخروط عوامل در عالم نفس، تنگ‌تر و در عالم عقل، گشایش بیش‌تری دارد. محسوسات، الهامات صادقانه و معقولات ارتباط متقابل دارند. عدد باید در این سه عالم مصداق داشته باشد.

عالم حس، تکرارپذیر، پیش‌بینی‌پذیر و تجربه‌پذیر است و در بستر زمان جریان دارد. محسوسات از قوانین علمی پیروی می‌کنند. قوانین بعضی بر صدق تأکید دارند و بعضی بر کارآمدی و این که ابزاری هستند برای استنباط. قوانین به تبیین و پیش‌بینی کمک می‌کنند. مفاهیم، زبان خاص علم را تشکیل می‌دهند. تئوری‌ها در این لایه‌ی تجرید، نظامی از قوانین است که بعضی تجربی هستند. عدد در عالم حس یک مفهوم است که از مصداق‌های ملموس تجرید شده است.

عالم الهام نه تکرارپذیر است، نه پیش‌بینی‌پذیر و نه تجربه‌پذیر. این بدان معنی نیست که تکرار، پیش‌بینی و تجربه غیرممکن است، بلکه ارادی نیست. عالم

الهام در بستر باطن زمان ـ که دهر نام دارد ـ جاری است. الهامات از قوانین ماوراءالطبیعه پیروی می‌کنند. مفاهیمی که در این لایه‌ی تجرید مورد نظرند نیز ماوراءالطبیعه‌اند؛ مانند زهد، حکمت، تقوا، ایمان و مانند آن. درک ما از مفاهیم دست‌خوش تقلب و دگرگونی است. به این معنی هر یک از این مفاهیم نیز ذومراتب هستند. تأکیدات قوانین ماوراءالطبیعه ممکن است عبادی، کاربردی یا شناختی باشند. بسیاری از قوانین در احادیث وارد شده‌اند. مثلاً این‌که از آثار زهد، حکمت است. تئوری‌ها نظامی از قوانین ماوراءالطبیعه و غیر آن هستند. به عنوان مثال، حدیث جنود عقل و جهل، یک تئوری قلبی است. عدد در عالم قلب معنی است، نه مفهوم. اما این معانی در مفهوم عدد و روابط عددی نیز تجلی می‌کنند. این معانی قوانینی هستند که بر تقلب مفهوم عدد حکومت می‌کنند.

عالم عقل همیشه حاضر است و نیاز به تکرارپذیری ندارد و نه نیاز به پیش‌بینی. عالم عقل به طور مستقیم و حضوری دردسترس است و نیازی به تجربه ندارد. عالم عقل در بستر باطن دهر که سرمد نام دارد، جاری است. معقولات از قوانین عالم عقل تبعیت می‌کنند. بسیاری از مفاهیم عقلانی مثل مفاهیم فلسفی، بر مسئله‌ی وجود تأکید دارند. تأکیدات قوانین عقلی معمولاً ساختاری است. اتحاد عاقل و معقول و اتحاد عالم و معلوم، مثال‌هایی از قوانین عقلی هستند. تئوری‌ها نظامی از قوانین عقلی هستند؛ مانند فلسفه‌ی ابن‌سینا یا فلسفه‌ی ملاصدرا. عقل به این معنی با شهود عقلانی هم‌نشین است. عدد در عالم عقل، همان ساختار است. نظامی که بر ساختارها حکومت می‌کند، بر معانی عالم قلب و بر مفاهیم عالم حس تجلی می‌کند.

در مدل شناختی حس، قلب و عقل، علم قدسی علمی است که همه‌ی این مراتب را دارا باشد. مفاهیم آن، قوانین آن و تئوری‌های آن همه‌ی این مراتب را دارا باشند. علم قدسی علم عقلانی است، به این معنی که مرتبه‌ی عقل و همه‌ی مراتب پایین‌تر را داراست. مراتب نمادین علم قدسی نیز با مراتب نمادین جهان هستی و مراتب نمادین هستی انسان و مراتب نهادین نفس او تطابق دارد. حال ببینیم در چنین مدلی

از علم قدسی ریاضیات، لایه‌های تجرید عدد چه ارتباطی با هم دارند.

مفهوم عدد در کنار اشیا و مفاهیم ریاضی در لایه‌ی تجرید حس قرار می‌گیرند. قلب خاستگاه تغییر و تحول مفاهیم است و عقل خاستگاه ساختارهای ریاضی است. اشیا و مفاهیم ریاضی حاصل تفکرند که با لایه‌ی شناختی حس مطابقت دارد. تغییر و تقلب مفاهیم حاصل الهام‌اند که با قلب تطابق دارد. معانی اعداد از جمله‌ی این الهامات‌اند. ساختارهای عالم عقل نیز حاصل عقل ساختارشناسند. تجلّی ساختارهای عقلانی در وجود ذهنی، همان چیزی است که به آن ساختار ریاضی می‌گویند. این سه لایه‌ی تجرید با هم ارتباط دارند. لایه‌های مجردتر بر لایه‌های ملموس‌تر تجلی می‌کنند. مثلاً ساختارهای ریاضی در اشیا و مفاهیم ریاضی تجلی می‌کنند و بر آن‌ها حکومت دارند، و هم الهامات ریاضی از این ساختارها تبعیت می‌کنند. همه‌ی لایه‌های تجرید ریاضی در وجود ذهنی، تجلّی لایه‌های تجرید ریاضیات در وجود علمی است.

درست است که علوم از ریاضیات، فیزیک و شیمی و طب گرفته تا جغرافیا، علم‌النفس، جامعه‌شناسی و معماری و هنر، همه در چارچوب علم قدسی می‌گنجند، اما نگاه علم قدسی به تأکیدات این علوم و تقسیم‌بندی‌ها و تعاریف آن‌ها متفاوت است. مثلاً معماری در غرب مدرن، بدون هویت و بی‌جهان‌بینی است بلکه سعی می‌کند خود را به جهان‌بینی‌های مختلف بیاویزد تا روح پیدا کند. اما در معماری اسلامی، هویت توحیدی برای این علم وجود دارد. معماری، هنر طراحی محلِ زندگی انسانی موحد است که نگاه خاصی به زندگی، طبیعت و عالم معنا دارد. اگر علوم را چنان بازسازی و تقسیم‌بندی کنیم که با ساختار لایه‌های تجرید آن‌ها هماهنگ باشد، هم‌نشینی و مساوقت علوم آشکارتر خواهد شد.

در این چینش جدید و معنایی علوم، هنر قدسی نیز جای خود را باز می‌کند و خلاقیت معنوی در این بازسازی اهمیت پیدا می‌کند. این‌جاست که دامنه‌ی هنر نیز چنان توسعه پیدا می‌کند که در علوم قدسی جذب می‌شود؛ چرا که هدفدار و هماهنگ با همان جهان‌بینی است و از باطن جدا نیست و تجلیات هستی نمادین

در آن آشکار است.

فعالیت /دبستان..

از دانش‌آموزان بخواهید یک مربع وفقی بسازند. مربع وفقی را به عنوان یک ساختمان عددی معرفی کنید. از مربع وفقی ۲×۲ شروع کنید و به سمت مربع‌های وفقی بزرگ‌تر بروید. روش ساختن مربع وفقی را نیز به دانش‌آموزان بیاموزید. تنوع پاسخ‌ها در هر مورد، مورد تأکید است. از دانش‌آموزان بخواهید کاشی‌کاری‌هایی بسازند که در آن تنها از یک نوع کاشی استفاده شده باشد. کاشی‌کاری را به عنوان یک ساختار هندسی معرفی کنید.

فعالیت /راهنمایی..

در مساجد مختلف جست‌وجو کنید و مدل‌هایی را که در آن‌ها از یک نوع کاشی برای فرش کردن سطحی به کار گرفته شده، در دفتر خود ثبت کنید. حال این کاشی‌کاری‌ها را با هم مقایسه کنید و ببینید در هر یک هر کاشی چند همسایه دارد. آیا می‌توان این کاشی‌کاری‌ها را به طور پیوسته به یکدیگر تبدیل کرد؟ حداکثر چند کاشی‌کاری می‌توان ساخت که دو بدو متمایز باشند؟

فعالیت /دبیرستان..

نامساوی حسابی - هندسی را به دو روش هندسی و جبری ثابت کنید و سعی کنید مراحل اثبات هندسی را بر مراحل اثبات جبری منطبق کنید. سعی کنید همین کار را برای سایر نامساوی‌های معروف انجام دهید. آیا جبر بستر مناسب‌تری برای تعمیم نامساوی‌هاست یا هندسه؟ آیا هندسه بستر مناسب‌تری برای کشف نامساوی‌هاست یا جبر؟ آیا اثبات هندسی یک حکم جبری یگانه است؟ آیا می‌توانید مراحل مختلف دو اثبات هندسی برای یک حکم جبری را بر هم منطبق کنید؟

فعالیت / دانشگاه ....

ساختارهای جبری و ساختارهای هندسی را می‌توان در چارچوب نظریه‌ی رسته‌ها مطالعه کرد. در نظریه‌ی رسته‌ها بر شناخت جمعی یک ساختار تأکید می‌شود. مثلاً سعی می‌کنند یک ساختار را برحسب همه‌ی مرفیسم‌های آن به دسته‌ای از ساختارها به طور یگانه مشخص کنند. این روش را برای ساختارهای هندسی نیز به کار ببرید؛ یعنی سعی کنید اشیایی هندسی را برحسب مرفیسم‌های آن‌ها به خانواده‌ای از اشیای هندسی رده‌بندی کنید.

۹ـ۵. ریاضی‌دان موحد و وحدت‌بخشی تفکر ریاضی

انسان، علوم قدسی و جهان امکان، همه از دیدگاه موحد نمادهای حقیقی ذاتی هستند. هرچه یک موجود کامل‌تر باشد، نمادی کامل‌تر است تا برسد به انسان کامل. حجاب کثرت ما را از شهود حقیقت و نظام توحیدی حاکم بر آن بازمی‌دارد و زمینه‌ی وسوسه‌ی وهم بیرونی و درونی را فراهم می‌کند. وحدت مجاری شناخت در انسان موحد، منجر می‌شود که انسان با دریچه‌ی یگانه‌ای به جهان هستی متصل شود، لذا ادراک او جزئی از حقیقت خواهد بود. انسان موحد حقیقت‌شناس و حقیقت‌بین است و حجاب‌های طبیعت برای او مانع از شهود عالم معنا نمی‌شود. معنویت و باطن هم‌نشین با عالم طبیعت و ظاهر است، اما شناخت آن چشم معنوی و بصیرت انسان موحد را می‌طلبد. این دیدگاه معنوی منجر به نگاه دیگری به علوم طبیعی و ریاضی و تأکیداتی متفاوت خواهد شد. انسان موحد علوم را طور دیگری دسته‌بندی می‌کند. بنابراین دانشمندان موحد باید علوم را بازسازی و بازنویسی کنند و با چهره‌ای جدید و مطابق با معنویت به نمایش گذارند.

حال سعی می‌کنیم وحدت مجاری شناخت را که یکی از مراتب کمال است، روشن‌تر بیان کنیم. درک نظام توحیدی حقیقت به واسطه‌ی یک توحید درونی در ساختارشناختی ممکن است. این توحید درونی با وحدت یافتن لایه‌های

هستی انسان و جهان خلقت توأم است؛ یعنی پس از وحدت ساختارشناختی، هستی انسان و جهان خلقت نیز توحیدی ادراک می‌شوند. این‌که پس از وحدت مجاری شناخت، هستی انسان جزئی متصل به هستی جهان خلقت است و این‌که مرتبه‌ای از تکامل ساختار ادراکی ما وحدت مجاری شناخت است، دلیلی است بر این‌که مرتبه‌ای از تکامل علوم، وحدت علوم است. برای این‌که علوم مختلف بتوانند وحدت پیدا کنند، باید ابتدا مبانی آن‌ها متحد شوند. ریاضیات ابزار اصلی برقراری وحدت بین مبانی علوم است. در واقع هر علمی در تقسیم‌بندی دانشمند موحد، به یک دریچه‌ی شناختی متناظر می‌شود و وحدت علوم در واقع وحدت دیدگاه ما نسبت به جهان خلقت است و این حاصل وحدت مجاری شناخت است.

آیا لایه‌ی تجرید ریاضیات هم سطح سایر علومی است که باید با آن‌ها متحد شود یا مجردتر از آن‌ها است؟ افلاطون از ریاضیات به عنوان حکمت وسطی تعبیر می‌کرد و آن را هم‌نشین با حکمت اولی که شامل الهیات می‌شد، می‌دانست و مجردتر از علوم تجربی. ریاضیات توسط گالیله به عنوان زبان مشترک علوم تجربی و زبان شناخت طبیعت محترم شناخته شد. اما آن‌چه افلاطون و گالیله ریاضیات می‌دانستند، کمی با آن‌چه امروز ریاضیات خوانده می‌شود، متفاوت است. به تعبیر امروزی لایه‌های تجرید ریاضیات عرضی است و در وجود ذهنی گسترده شده است. پس فقط می‌تواند مایه‌ی وحدت مبانی علوم در وجود ذهنی باشد. اما آن‌چه وظیفه‌ی دانشمند موحد است، شناخت لایه‌های تجرید ریاضیات در وجود علمی است تا بتوان در وجود علمی به علوم انسانی، تجربی و ریاضی وحدت داد. چنین وحدتی وحدت حقیقی علوم است. بدون وحدت در وجود علمی، وحدت در وجود ذهنی غیرممکن است، چون دومی سوار بر اولی است. پس سؤال کلیدی این است که باطن ریاضیات چیست؟ پشت صحنه‌ی مفاهیم ریاضی را با چه زبانی باید مطالعه کرد؟ مفاهیم ریاضی تنها لباس حقیقت هستند، نه زبان حقیقت.

حال ببینیم ریاضی‌دان موحد چه نقشی را می‌تواند ایفا کند. دانشمند موحد دارای ساختاری ادراکی است که هم با پیچیدگی‌ها و معضلات علمی هماهنگ است و هم به خاطر وحدت‌شناختی،علم انسان موحد یکپارچه و هدفدار است. روش علمی دانشمند موحد غنای لازم برای بررسی همه‌ی مسائل مربوط به انسان را داراست و همه‌ی نیازهای شناختی او را برآورده می‌کند. ملاک‌های او برای تشخیص حق از باطل و دسترسی به حقیقت کامل است. علم او در اخلاق او، نوشتن او، مطالعه‌ی او و روش‌های یادگیری او همه تأثیر می‌گذارد. انسان موحد دارای جهان‌بینی و انسان‌شناسی خاصی است. دارای علم‌شناسی و حقیقت‌شناسی خاصی است. دارای تاریخ‌شناسی و جامعه‌شناسی خاصی است. دارای هنرشناسی و زیبایی‌شناسی خاصی است. دارای دین‌شناسی و تمدن‌شناسی خاصی است. و در نهایت او دارای دیدگاه خاصی نسبت به خیر و اخلاق است.

ریاضی‌دان موحد در جبر به دنبال وحدت‌بخشی ساختارهاست. هر مسئله‌ای در ساختار خاص خود باید مطالعه شود. ریاضی‌دان باید ساختار طبیعی مسئله را کشف کند و به زبان آن ساختار، در جهت حل مسئله تلاش کند. کل ریاضیات نیز ساختاری دارد. ساختار ریاضیات در وجود ذهنی، یک تجلی ساختار آن در وجود علمی است. وحدت مجاری شناخت در ساختار ادراکی ریاضی‌دانان موحد، منجر به این خواهد شد که نظام تجلیات بین لایه‌های تجرید ریاضی، ساختاری توحیدی پیدا کند. هر چه به لایه‌های مجردتر برویم، وحدت ساختارها آشکار خواهد شد. سرآخر مصداق توحیدی آن بر ریاضی‌دان موحد کشف خواهد شد و این همان چیزی است که در قرآن به آن عدد گفته شده است. در قرآن چنین آمده است که: کل شیء احصیناه عددا. این درک عمیقی از مفهوم عدد به دست خواهد داد. عرفای اسلامی در مورد معانی باطنی این آیه داد سخن داده‌اند. در این موارد احادیثی هم وارد شده است. یکی از مصداق‌های مهم تأثیرگذاری تفکر ریاضی بر درک مفاهیم معنوی، همین مورد است. با کمک مفهوم عدد ریاضیات،

با بسیاری از علوم تجربی و انسانی پیوند خواهد خورد؛ چرا که عدد در همه‌ی این علوم تجلی کرده است.

در برابر جبر که بر عدد استوار شده است، هندسه بر قدر تکیه می‌زند. عرفای اسلامی از ابن‌سینا و ابن‌عربی گرفته تا ملاصدرا در مورد سرّ قدر داد سخن داده‌اند. در این مورد احادیث بسیاری وارد شده است. این‌جا علم هندسه نیز با بسیاری از علوم تجربی و انسانی پیوند خواهد خورد؛ چرا که قدر در همه‌ی این علوم تجلی کرده است. سؤال این‌که مفهوم عدد و مفهوم قدر چه ارتباطی دارند؟ درک این ارتباط به ما خواهد آموخت که چرا تفکر هندسی و تفکر جبری هم‌چون دو رودخانه‌ی موازی در ریاضیات بستری همواره جریان داشته‌اند.

فعالیت/دبستان

دو عدد یک رقمی را در نظر بگیرید. سپس یک الگوی کاشی‌کاری بسازید که این دو عدد را به هم مربوط کند. یک کاشی در نظر بگیرید که از چند مربع همسایه از یک شبکه‌ی مربعی تشکیل شده است. آیا با هر الگوی تشکیل شده از سه مربع، می‌توان صفحه را فرش کرد؟ چهار مربع چه‌طور؟ پنج مربع چه‌طور؟ همین سؤال را در یک شبکه از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع پاسخ دهید.

فعالیت/راهنمایی

چه طول‌هایی را می‌توان با کاغذ وتا با کمک تعدادی کاغذ مربع شکل به طول واحد رسم کرد؟ اگر طولی قابل رسم با خط‌کش و پرگار باشد، آیا لزوماً قابل رسم با کاغذ وتاست؟ به عکس چه‌طور؟ آیا اگر طولی قابل رسم با کاغذ وتا باشد، آیا قابل رسم با خط‌کش و پرگار است؟ به نظر شما استفاده از کاغذ وتا راحت‌تر است یا خط‌کش و پرگار؟ ابزاری دیگر برای ساختن و رسم اعداد پیشنهاد کنید و با کاغذ وتا، و خط‌کش و پرگار مقایسه کنید.

فعالیت /دبیرستان

فرض کنید نمای مقابل، سمت راست و از بالای شکلی داده شده باشد. حجم آن شکل را محاسبه کنید. آیا شکل به طور یگانه از این سه نما به دست می‌آید؟ آیا می‌توان شرایطی ساده‌کننده قرارداد تا این حکم درست باشد؟ چه شرایطی لازم است تا حجم به طور یگانه به دست آید؟ چند مثال عملی را امتحان کنید و از آن‌ها برای پاسخ به سؤال‌های بالا کمک بگیرید.

فعالیت / دانشگاه

هندسه‌ی جبری شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن احکام هم تعبیر هندسی و هم تعبیر جبری دارند. بدین‌وسیله می‌توان یک حقیقت ریاضی را فراتر از زبان جبر و هندسه شناخت. شاخه‌هایی از ریاضیات را بیابید که در آن‌ها ترجمه‌ی بین دو زبان مستقل ممکن باشد. در هر مورد تفاوت‌های این دو زبان و شباهت‌های آن‌ها را توصیف کنید و تأثیرات این شباهت‌ها و تفاوت‌ها را در رسیدن به حقیقت پشت صحنه بررسی کنید.

فصل ۱۰

جبر و مراتب تجلیات حقیقت

تشریح این‌که شاخه‌ی جبر دقیقاً شامل چه مباحثی است، کار بسیار مشکلی است. اگر بخواهیم تفکر نمادین را کاملاً با تفکر جبری یکی بگیریم، بخش عظیمی از منطق و استدلال ریاضی را شامل خواهد شد. معمول نیست این قسمت‌های ریاضیات را جزو جبر بدانند. ناچاریم تاریخ جبر را مرور کنیم تا اهم مباحث جبری روشن شود و سپس به لایه‌های تجرید علم جبر خواهیم پرداخت.

جبر مدرن در قرن نوزدهم شکل گرفت. در واقع، تولد جبر با ظهور نظریه‌ی گالوا رقم خورد. پیش از آن تلاش‌های جبردانان همه در حل معادلات خلاصه می‌شد. از زمان ویت دانسته شده بود که ضرایب چندجمله‌ای توابع متقارنی از ریشه‌ها هستند. وارینگ در ۱۷۶۲ م ثابت کرد تمام توابع متقارن از ریشه‌ها را می‌توان به شکل تابعی از ضرایب چندجمله‌ای نوشت. واندرموند در ۱۷۷۰ م روش‌های به دست آمده برای حل معادلات درجه‌ی سه و چهار را بازنویسی کرد و حدس زد که معادلات درجه‌ی n نیز ریشه‌هایی رادیکالی به شکل خاصی دارد که ریشه‌های n ـ ام واحد

در آن وارد می‌شوند. این ایده‌ها توسط لاگرانژ هم در مقاله‌ای به تاریخ ۱۷۷۱ م ظاهر می‌شوند. در همان سال مالفاتی معادله‌ای نوشت که در آن سعی کرد این ایده‌ها را برای حل معادلات درجه‌ی پنج دقیق‌تر کند. در هر دو مقالات لاگرانژ و مالفاتی ایده‌ی جایگشت‌های ریشه‌ها که در اثبات آبل و گالوا ظاهر شدند، مورد توجه قرار گرفته بود. روفینی شاگرد لاگرانژ چندین مقاله مبنی بر این‌که معادلات درجه‌ی پنج با رادیکال‌ها حل‌پذیر نیستند، نوشت. البته او فرض کرده بود که رادیکال‌های لازم برای حل معادله همیشه به شکل توابعی گویا از ریشه‌های معادله و ریشه‌های واحد هستند. آبل با اثبات این فرض برهان روفینی را کامل کرد. او در ۲۲ سالگی اثبات خود را منتشر کرد و تا مرگ زودهنگامش در ۲۷ سالگی چندین دسته از معادلات از درجه‌ی دلخواه را ارائه کرد که توسط رادیکال‌ها حل‌پذیر هستند. در همین سال (۱۸۲۹م) گالوا مقاله‌ی خود را به آکادمی علوم پاریس ارائه کرد که داستانی شنیدنی دارد.

آبل اثبات خود را جزئی از نظریه‌ی توابع می‌دید. آبل خود را دنباله‌روی کوشی و یک آنالیزدان می‌دانست. برخلاف آبل، گالوا یک نظریه اعداددان بود. در مورد حل معادلات با کسرهای مسلسل، مقاله‌ای در ۱۷ سالگی نوشت که ادامه‌ی کارهای لاگرانژ واویلر بود. در ۱۸ سالگی دو مقاله در مورد نظریه‌ی معادلات به آکادمی پاریس داد که هر دو را کوشی گم کرد. در ۱۹ سالگی مقاله‌ی دیگری به آکادمی ارائه کرد که این‌بار منشی دقیق آکادمی فوریه مسئول رسیدگی به آن شد، اما او نیز قبل از مطالعه‌ی مقاله فوت کرد. در همان سال ۱۸۳۰ مقاله‌ای در یک مجله چاپ کرد که در آن نتایجی بدون اثبات آمده بود. در مقاله‌ی دیگری که همان‌سال ارائه شد، میدان‌های متناهی را معرفی کرد. در ۲۰ سالگی صورت کامل‌تری از نظریه‌ی خود را برای آکادمی می‌فرستد، اما پواسون در گزارش خود می‌نویسد که آن را نفهمیده است. سرانجام گالوا در نامه‌ای که شب قبل از مرگش در ۲۰ سالگی می‌نویسد، تئوری خود را به طور خلاصه شرح می‌دهد. روش حل مسئله‌ی گالوا بسیار شبیه آبل است، جز این که گالوا به دقت ساختارهای ریاضی میدان و گروه را که در اثبات ظاهر می‌شوند، بیرون می‌کشد.

این صحنه در تاریخ ریاضی بسیار اتفاق می‌افتد که مکاشفاتی که سد بزرگی در

آنان بخواهید با کمک خط‌کش مساحت تقریبی آن‌ها را محاسبه کنند و تخمین بزنند محاسباتشان چه‌قدر به جواب واقعی نزدیک است.

فعالیت / راهنمایی

پیش از حل هر مسئله، استراتژی‌های حمله به مسئله را فهرست کنید و تصمیم بگیرید کدام استراتژی‌ها برای حل مسئله و رسیدن به هدف نهایی آن مناسب‌ترند و کدام استراتژی‌ها برای درک بهتر ارتباطات ریاضی مسئله مناسب‌ترند. برای انتخاب خود از استراتژی حمله به مسئله دلیل بیاورید و برای رد استراتژی‌های دیگر نیز دلیل بیاورید. سپس قسمت‌هایی را که احتمالاً در اجرای استراتژی به مشکلاتی برخواهید خورد، از پیش حدس بزنید.

فعالیت / دبیرستان

معادلات خط و دایره را به زبان بردارها بیان و سعی کنید مسائل هندسه را به زبان بردارها ترجمه و حل کنید. آیا معنی فیزیکی بردارها در حل مسئله نقشی به عهده داشته‌اند؟ آیا حرکت می‌تواند به این روش وارد هندسه شود؟ همین مسائل را به کمک اعداد مختلط و هندسه‌ی تحلیلی حل کنید و با راه‌حل برداری مقایسه کنید. کدام راه‌حل‌ها کوتاه‌ترند؟ برای مشاهده‌ی شما چه دلایلی متصور است؟

فعالیت / دانشگاه

این یک قاعده‌ی کلی است که ناورداهای سرتاسری از برهم نهی ناورداهای موضعی به دست می‌آیند. مصداق‌های مختلف موضعی‌سازی در جبر را در نظر بگیرید و از برهم نهی ناورداهای موضعی، ناورداهایی سرتاسری به دست آورید. حال سعی کنید مدل‌های جبری دیگری ارائه دهید که گذر از موضعی به سرتاسری در آن‌ها پیاده شوند.

۱ـ۱۰. لایه‌های تجرید تجلیات حقیقت

در وجود علمی، اســتدلال یعنی شناخت قوانین حاکم بر لایه‌های تجرید مختلف ریاضــی. اســتدلال همــه‌ی لایه‌های هســتی موضــوع آن و همه‌ی ابعــاد حقیقت را دربرمی‌گیرد. در هر یک از لایه‌های تجرید، استدلال معنی خاصی به خود می‌گیرد که بین این مصداق‌های متفاوت اســتدلالی ارتباط نمادین برقرار اســت. هرگونه ادراک مقیّد که مدرک آن پیش از آن مورد هدف قرار می‌گیرد و ارتباط بین پدیده‌ها را شامل می‌شود، نوعی استدلال محسوب نمی‌شود. این استدلال تعریفی ذاتی دارد و وابسته به جهان‌بینی علمی مشاهده‌گر نیست.

بــرای درک چیســتی اســتدلال در لایه‌های تجرید مختلف، باید نــوع ارتباط بین موجودات در این لایه‌های تجرید را بشناسیم و طبیعت قوانین حاکم بر چنین ارتباطاتی را کشــف کنیم. از آن‌جا که در وجود ذهنی وهم راه دارد، تمام معانی اســتدلال که در زبان رایج به کار می‌رود، در ذات خود نقص دارد، اما،اســتدلال حقیقی در نوع خود کامل اســت و در تعریف آن نقصی ذاتی وارد نیســت. استدلال حقیقی لایه‌های باطنی سمع است، همان‌طور که شهود حقیقی از لایه‌های باطنی بصر تشکیل شده است. لذا ادراک شهودی و برهانی هر دو غیرمستقیم هستند و در برابر ادراک مستقیم قرار دارند که در آن ادراک، عینی و یقینی اســت و از لایه‌های باطنی لمس و بویایی و چشــایی تشکیل شده است.

تقابل شــهود و برهان، باطن تقابل بصر و ســمع اســت. مشهود به واسطه‌ی نور و برهان به واســطه ندا ادراک می‌کنند. در فلســفه‌ی متعالیه‌ی ملاصدرا تأکید بر شهود و برهان هر دو هست. برهان از فلسفه‌ی ابن‌سینا و شهود از فلسفه‌ی ابن‌عربی و فلسفه‌ی ســهروردی گرفته شده است. همان‌طور که نور لایه‌های تجرید دارد، ندا هم لایه‌های تجرید دارد که متفاوت با نور اســت. گاهی شــهود پیشــگام است و برهان را به دنبال خود می‌کشــد و بالا می‌برد و گاهی برهان پیشــگام است و شهود را بالا می‌برد. شهود و برهان موهوبی مکاشفه و وحی نام دارند که در آن مشاهده کننده و تعقل‌کننده فاعل نیست. اما مشاهده و تعقل ارادی هم ممکن است همان‌طور که دیدن و شنیدن ارادی

راه پیشرفت علم را کنار می‌زنند، به این سادگی‌ها توسط دیگران قابل فهم نیستند. چند سالی طول می‌کشد تا همکاری محققان منجر به فهم ایده‌های نو در ریاضیات شود. مثال‌های مهم این اتفاق، تحقیقات اینشتین در نسبیت و تحقیقات ویتن و وفا در نظریه‌ی ریسمان‌ها هستند. ساختار ادراکی این ریاضی‌دانان صف‌شکن از عصر و زمانه‌ی خودشان پیش‌رفته است.

با بررسی داستان تولد جبر مدرن می‌توان گفت که جبر تجلی ساختارهای مجرد ریاضی است. چنین تعریفی از جبر به سرعت این علم را با تمام شاخه‌های ریاضیات پیوند می‌دهد؛ چراکه ریاضیات از ساختارها تشکیل شده است. لذا برنامه‌ی جبری‌سازی ریاضیات مطرح می‌شود که در آن سعی می‌شود همه‌ی مسئله‌های ریاضی به زبان جبر ترجمه شود و سپس با کمک جبر حل آن مسائل به دست بیاید. ایده‌ی جبری‌سازی اولین بار توسط دکارت ارائه شد که با دستگاه مختصات خود هندسه‌ی اقلیدسی را جبری‌سازی کرد. برنامه‌ی جبری‌سازی یکی از مهم‌ترین برنامه‌های تحقیقاتی در ریاضیات قرن ۲۰ بود. هر چند در زمان دکارت علم جبر چیزی جز زبان معادلات نبود، اما در قرن ۱۹ به ساختارهای عددی و در قرن ۲۰ به ساختارهای جبری تعمیم پیدا کرد.

مسیر تکامل و شکل‌گیری علم جبر از معادلات چندجمله‌ای به میدان‌های عددی و میدان‌های توابع که ساختارهای عددی هستند و از ساختارهای عددی به ساختارهای جبری و بعد به رسته‌ها و از آن‌جا به اپرادها و سپس دگردیسی ساختارهای جبری روی اپرادها گذشته است. تفکر نمادین همواره به سمت لایه‌های مجردتر پیش می‌رود، اما این لایه‌های تجرید همه از جنس مفاهیم هستند، لذا همه در وجود ذهنی زندگی می‌کنند. هرچند وجود ذهنی تنها یک تصویر از وجود علمی است، با این حال درک روابط تجلی و عروج در وجود ذهنی، به درک تجلی و عروج در وجود علمی کمک خواهد کرد.

رابطه‌ی عروج بین لایه‌های تجرید به راحتی با بررسی تاریخ علم جبر فهمیده خواهد شد؛ چراکه شکل‌گیری پی‌درپی لایه‌های مجردتر از لایه‌های ملموس‌تر، همین

عروج را توصیف می‌کند. می توان گفت در وجود ذهنی عروج چیزی جز تعمیم نیست. رابطه‌ی تجلی در وجود ذهنی، اندکی مصنوعی به نظر می‌رسد؛ چرا که تخصیص به نظر نوعی تجلی نمی‌رسد. مثلاً چگونه ممکن است لایه‌های مجردتر قوانین حاکم بر لایه‌های ملموس‌تر را تعیین کنند، در حالی که پس از آن‌ها به‌وجود آمده‌اند؟ پاسخ این است که شکل‌گیری علم در وجود ذهنی، یک تجلی و تصویری از وجود علمی است. در وجود علمی، لایه‌های تجرید مختلف به طور هماهنگ وجود دارند و شکل‌گیری آنان در بستر زمان انجام نمی‌گیرد.

محاسبات جبری از مهم‌ترین مهارت‌های تحقیق در ریاضی است که با لایه‌های مختلف تجرد و ارتباط آنان مستقیماً درگیر است. هر چند استدلال به طور معمول در وجود ذهنی به کار می‌رود، اما کاملان در ریاضیات و فلسفه قادرند استدلال را در وجود علمی و هم در عالم عقل به کار ببرند. استدلال عقلانی امری ذهنی و وابسته به تفکر نیست، بلکه پدیده‌ای عقلانی است که با اتحاد با معقولات ممکن می‌شود. ساختارهایی که در عالم عقل شناخته می‌شوند، در عالم ذهن و هم در سایر لایه‌های تجرید تجلی می‌کنند و وجود علمی ریاضیات را می‌سازند؛ هرچند این ساختارها خود تجلی انواری هستند که خود تصویری از حقیقت پشت صحنه‌ی ریاضیات هستند. دست‌یابی به درک عمیقی از محاسبات جبری، در مورد لایه‌های تجریدی که از ذهن مجردترند، ناگفته‌های بسیاری می‌تواند داشته باشد.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید محاسبات عددی را به طور تقریبی انجام دهند و حاصل را با محاسبات دقیق مقایسه کنند. سپس تفاوت این دو را در نظر بگیرید. حال از آن‌ها بخواهید تا تصمیم بگیرند که در کدام یک از اعمال جمع و تفریق، ضرب و تقسیم بیش از همه محاسبات تقریبی و دقیق فاصله دارند. همین فعالیت را درباره‌ی محاسبات طول‌ها و مساحت‌ها در اشکال ساده‌ی هندسی تکرار کنید و مساحت تقریبی را با مساحت دقیق مقایسه کنید. حال اشکالی را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از

ممکن است.

همه‌ی لایه‌های تجرید استدلال و برهان باید در آموزش مورد تأکید قرار بگیرند. در صحنه‌ی آموزش استدلال نباید بار گرانی از اسرار و ابهام را حمل کند. هر یک از فلسفه‌های ریاضی روی بعضی از ابعاد استدلال تکیه دارند که می‌توانند در آموزش مورد توجه قرار گیرند. در سبک‌های آموزشی مختلف، دو مؤلفه‌ی شهود و استدلال به روش‌های مختلفی در کنار هم قرار می‌گیرند. در نظام‌های آموزش غربی از استدلال شروع می‌کنند و به سمت شهود می‌روند و در نظام‌های آموزش شرقی از شهود شروع می‌کنند و درس را به استدلال ختم می‌کنند. در یک سیستم آموزشی باید حرکت از شهود به استدلال و از استدلال به شهود هر دو موجود باشند. این‌که کدامیک از دو سیستم شهود / استدلال / شهود یا استدلال / شهود / استدلال به کار رود، بستگی به محتوای آموزش دارد. مهم است که دانش‌آموزان معلم را درگیر با شهود و استدلال ببینند تا از او الگوبرداری کنند. بنابراین معلم باید مدارج شهود و استدلال را خود احراز کرده باشد.

فعالیت / دبستان ....

اتحادهای ساده‌ی جبری یک متغیره را عددگذاری کنید و جدولی از تساوی‌ها تشکیل دهید. از دانش‌آموزان بخواهید تساوی‌ها را تحقیق کنند و سپس همه‌ی آن‌ها را در یک فرمول خلاصه کنند. حال اتحادهای ساده‌ی جبری دو متغیره را با اعداد متفاوت عددگذاری کنید و جدولی از تساوی‌ها تشکیل دهید. از دانش‌آموزان بخواهید این جدول را نیز در فرمول ساده‌ای خلاصه کنند.

فعالیت / راهنمایی ....

احکام جبری را با بررسی و اثبات حالت‌های خاص مهم بیازمایید و با استدلال جبری نیز به اثبات برسانید. سعی کنید حکم جبری را به یک حکم هندسی ترجمه کنید و برای آن استدلالی هندسی بیاورید. به نظر شما کدام روش یقینی‌تر است؟ کدام روش برای تعمیم حکم مناسب‌تر است؟ کدام روش برای درک کُنه ریاضی

مسئله مناسب‌تر است؟ آیا بررسی حالت‌های خاص به پیدا کردن استدلال جبری کمک می‌کند؟ آیا در کنار هم قرار دادن استدلال‌های هندسی و جبری برای درک کُنه ریاضی مسئله از در نظر گرفتن تک‌تک آن‌ها کارآمدتر است؟

فعالیت / دبیرستان

از اتحادهای شمارشی شروع کنید و سعی کنید تعبیر احتمالاتی از آن‌ها بیابید. حال از تعبیرهای احتمالاتی شروع کنید و سعی کنید اتحادهای شمارشی را نتیجه بگیرید. همین اتحادها را با روش‌های جبری به اثبات رسانید. استدلال جبری را با تعابیر احتمالاتی مقایسه کنید و بگویید کدام یقینی‌تر هستند؟

فعالیت / دانشگاه

حکمی را در هندسه‌ی جبری در نظر بگیرید که دو تعمیم مستقل دارد. مثلاً قضیه‌ی ریمان ـ رخ هم به روش گروتندیک و هم به روش ایتا و سینگر قابل تعمیم است. تفکر در چارچوب لایه‌های تجرید نتیجه می‌دهد که باید بتوان حکمی کلی‌تر پیدا کرد که هر دوی این تعمیم‌ها حالت خاص آن حکم کلی باشند. مثلاً تعمیمی از ریمان ـ رخ هست که هم تعمیم گروتندیک و هم تعمیم ایتا را به دست می‌دهد. این حکم کلی را در چند مصداق مختلف به محک آزمایش بگذارید.

۲ـ۱۰. مصداق‌های تجلی و نمادهای حقیقی در جبر

اگر بخواهیم مثال‌هایی مجردتر از استدلال ریاضی‌دانان ارائه کنیم، باید به ریاضیات ساختنی اشاره کنیم. به دست دادن الگوریتم‌هایی که تشخیص دهند دو ساختار ایزومرفند یا نه، و الگوریتم‌هایی برای محاسبه‌ی ناورداها نیز مثال‌هایی برای لایه‌های مجرد استدلال‌اند که از ذهن مجردترند. از استدلال‌های مهمی که فیزیک‌دانان در آن مهارت دارند، پیدا کردن و درست کردن ساختارهایی ریاضی است که خواصی از پیش

تعیین شده دارند. تشخیص وهم کاذب و خالص کردن استدلال، منجر به استدلالی می‌شود که با شهود هماهنگ است. هر استدلالی شهودپذیر نیست. استدلال باید چنان باشد که ساختار موضوع مورد مطالعه را آشکار کند. این نشان می‌دهد که هر شهود و استدلالی با لایه‌های تجرید تطابق ندارد. شهود خالص و برهان سلیم است که باطن معنوی مسائل مورد بحث را آشکار می‌کند.

در عمل هم ریاضی‌دانان این‌طور تجربه می‌کنند که هر استدلالی راهگشا به فهم یک حکم نیست. بسیاری از استدلال‌ها هسته‌ی اصلی حکم را پنهان می‌کنند. به همین دلیل بسیار پیش می‌آید که بازنویسی یک استدلال با فرمول‌بندی یا تنظیم آن با نظم جدید گره‌ی درک یک حکم را باز کند و زمینه را برای تعمیم و شناخت کُنه حکم فراهم آورد. هماهنگی استدلال با شهود یکی از محک‌های استدلال راهنماست. استدلال کور شهودپذیر نیست. در تاریخ ریاضیات، مثال‌هایی هست که بازسازی یک اثبات باعث شکوفایی یک شاخه‌ی اصلی ریاضیات شده است. یکی از محک‌های استدلال راهنما، زیبایی و سادگی آن است. برای احکامی زیبا که استدلال زیبا برای آن‌ها پیدا نشده، پیوسته تلاش می‌شود تا استدلالی که زیبایی آن هماهنگ با آن حکم باشد به دست بیاید.

تعمیم و تخصیص احکام ریاضی بین لایه‌های تجرید وجود ذهنی ریاضی ارتباط برقرار می‌کند. اما این تعمیم و تخصیص وجود ذهنی، تجلی و تصویر نفسانی چه حقایقی در لایه‌های هستی حقیقی ریاضی است؟ تجرید و تجلی همان ارتباط نمادین از پایین به بالا و از بالا به پایین، یعنی عروج و تجلی هستند که در نفس و وجود ذهنی به صورت تعمیم و تخصیص دیده می‌شوند. تجرید یک توانایی عقلانی است و تجلی یک توانایی قلبی است، هرچند در همه‌ی لایه‌های تجرید هستی معنی پیدا می‌کند. تشخیص این‌که حکمی حالت خاص یک حکم دیگر است یا این‌که استدلالی تجلی استدلال دیگری است، موضوع شهود است، نه استدلال. به عبارت دیگر، تجلی و عروج بین استدلال‌های با درجه‌ی تجرّد مختلف، امری است که مستقل از اراده‌ی عالم صورت می‌گیرد. شهود تجلی بین دو استدلال در دو لایه‌ی تجرید مختلف، چیزی

مانند انطباق دو تصویر کپی‌برداری شده از یک اصل است که با برهم نهی اجزای متناظر، به نظر می‌رسد که هر دو از روی شیء مشترکی کپی‌برداری شده‌اند.

با این وصف، فرق بین شهود و استدلال این است که استدلال از آن‌جا که جزءنگر است، افقی است و رابطه‌ی بین موجودات در یک لایه‌ی تجرید را بررسی می‌کند، اما شهود از آن‌جا که سرتاسری است و کل‌نگر است، هم عمودی و هم افقی است؛ یعنی هم در یک لایه‌ی تجرید خاص شهود کلیات ممکن است و هم شهود هم زمان چند لایه‌ی تجرید مختلف با یکدیگر. این نکته بسیار مهم است؛ چرا که به ما می‌گوید مفاهیم پیوستگی و گسستگی ریشه در ساختار عرضی و طولی یا به عبارت دیگر افقی و عمودی حقیقت دارند.

فعالیت / دبستان ....

عددی دو رقمی بیابید که چهار برابر مجموع ارقام آن عدد باشد. معماهایی مانند این برای دانش‌آموزان مطرح کنید و از آن‌ها بخواهید جوابی برای آن بیابند. سپس از آن‌ها بخواهید همه‌ی جواب‌های ممکن را پیدا کنند. سپس از آن‌ها بخواهید توضیح دهند چگونه مطمئن می‌شوند که همه‌ی جواب‌ها را یافته‌اند؟ حال از دانش‌آموزان بخواهید از روی اعداد داده شده معماهایی بسازند و سپس همه‌ی جواب‌های معما را پیدا کنند. تنوع پاسخ‌ها مورد تأکید است.

فعالیت / راهنمایی ....

در اطراف خود بگردید و مصداق‌های قضیه‌ی فیثاغورس را بیابید. آیا قضیه‌ی فیثاغورس با قوانین فیزیکی که می‌شناسید، ارتباط دارد؟ آیا در شاخه‌های درختان مصداقی از قضیه‌ی فیثاغورس می‌شناسید؟ قضیه‌ی فیثاغورس بر مفهوم تعامد استوار شده است. در اطراف خود بگردید و مصداق‌های مفهوم تعامد را بیابید، آیا تعامد با قوانین فیزیکی که می‌شناسید، ارتباط دارد؟

فعالیت / دبیرستان ....

پیش از حل یک مسئله‌ی جبر حدس بزنید که احتمالاً از چه مفاهیمی و از چه احکام جبری استفاده خواهید کرد؟ حال مسئله را حل کنید و با حدس‌های خود مقایسه کنید. حال سعی کنید از روی سایر حدس‌هایی که زده‌اید، اثباتی دیگر برای آن حکم ارائه دهید. به نظر شما چرا در اثبات احکام جبری، تنوع روش‌های استدلال ممکن است؟ چرا همه‌ی روش‌های استدلال به یک نتیجه می‌رسند و با هم تناقض ندارند؟

فعالیت / دانشگاه ....

برای فضا ـ زمان دستگاه مختصاتی معرفی کنید که متغیرها را در معادله‌ی اینشتین جداسازی کنند. همه‌ی این دستگاه‌های مختصات از صورت مختلط‌سازی شده‌ی فضا ـ زمان می‌آیند، در صورتی که در نسبیت فضا ـ زمان مختلط تعبیر فیزیکی ندارد. چگونه ممکن است ساختارهای ریاضی فضا ـ زمان مختلط به درک بهتر فضا ـ زمان حقیقی کمک کنند؟

۳ـ۱۰. انواع تجلی

کمال شهود تجلیات، این است که همه‌ی تجلیات یک حقیقت در لایه‌های تجرید مختلف بر هم و بر حقیقت منطبق شوند. در این‌جا شهود همه‌ی لایه‌های تجرید و شهود همه‌ی انواع تجلیات که بین لایه‌های تجرید برقرارند، لازم می‌شود که کامل‌ترین نوع شهود است. این انواع شهود همه هم‌آوا و هم‌آهنگ باید انجام بگیرد که این احاطه به ابعاد مختلف لایه‌های تجرید هستی، یک توانایی ذاتی یا هویتی است و فقط برای انسان در بین همه‌ی مخلوقات ممکن است. ارتباط بین مشهودات تنها رابطه‌ی بین تجلیات نیست که هنگام شهود واقع می‌شود. شاهد هم لایه‌های تجرید مختلفی دارد. اگر دو لایه‌ی تجرید در شاهد مشاهداتی داشته باشند، بین این مشاهدات هم رابطه‌ی تجلی برقرار است؛ یعنی یک شهود می‌تواند تجلی شهود دیگری باشد. حتّی ممکن

است هم شاهد و هم شهود، تجلیات شاهد و مشهود مجردتری باشند. بنابراین شاهد دارای لایه‌های تجرید مختلف و مشهود دارای لایه‌های تجرید مختلف است و شهود بین همه‌ی این لایه‌ها ممکن است اتفاق بیفتد.

وقتی شاهد به وحدت مجاری شناخت برسد، لایه‌های تجرید هستی شاهد بر هم منطبق می‌شوند و همین‌طور انواع مختلف شهود بر هم منطبق می‌شوند و چون عالم موحد حقیقت بین است، لایه‌های تجرید هستی مشهود نیز برهم و بر حقیقت منطبق می‌شوند. پس در ادراک دانشمند موحد، شاهد یک چیز است و مشهود یک چیز. دانشمند موحد از این ساختار توحیدی ادراکات کمک می‌گیرد تا حقایق را بهتر بشناسد و توسعه‌ی علم به واسطه‌ی این کمک ادراکی برای او سهل‌تر صورت می‌پذیرد.

شهود به واسطه‌ی نور است. همان‌طور که دیدن چشم سر به واسطه‌ی نور است، در هر لایه‌ی تجرید شهود، شاهد، مشهود را به نوری می‌بیند. درجات تجرید این نورها خود متفاوت‌اند. لایه‌های تجرید نور با لایه‌های تجرید هستی انسان و جهان خلقت منطبق‌اند. هر شهودی از جنس نوری است که به واسطه‌ی آن شهود می‌شود. این نور باید مجردتر از لایه‌ی تجرید شهودکننده و هم موضوع شهود باشد. بهتر بگوییم، نور باید لطیف‌تر از شاهد و مشهود باشد.

همان‌طور که نور ابزار شهود است، ندا ابزار سمع و بواطن سمع که استدلال است، می‌باشد. همان‌طور که شهود می‌تواند ارتباطات تجرید و تجلی را درک کند، استدلال نیز این توانایی را دارد. اما استدلال در هر لایه‌ی تجرید درکی جزئی دارد و تنها می‌تواند انطباق این ادراکات جزئی را بفهمد. شباهت شهود و استدلال اتحاد بین شاهد و مشهود است که بر اتحاد بین عاقل و معقول انطباق دارد. برتری مشاهدات در برابر استدلال‌ها این است که ابزاری دوربردتر و سریع‌الوصول‌تر به حقیقت است، اما استدلال کندتر و برای ادراک ناشناخته‌ها کم‌ظرفیت‌تر است. با این حال، شهود و استدلال در درک حقیقت مکمل یکدیگرند، همچون سمع و بصر که یکدیگر را کامل می‌کنند.

در لایه‌های تجرید جسد، نفس، قلب، روح، عقل، نور و ذات تجلیات انوار توحیدی هم ظهور دارند. لایه‌های تجرید نور و کثرت انوار در طی این تجلیات، همان چیزی است که به آن مجاری شناخت گفتیم. لایه‌های تجرید ندا نیز با همان مجاری شناخت قابل انطباق هستند. همه‌ی تجلیات انوار در اختیار هر شاهدی نیستند. بسیاری از تجلیات در لایه‌های تجرید بالا در ورای حجاب‌هایی هستند که از دید شاهد به دورند. خرق این حجاب‌هاست که مشاهدات مجردتر را ممکن می‌سازد. خرق حجاب‌های حقیقت به واسطه‌ی تزکیه ممکن است. پس هر شهودی نتیجه‌ی خرق حجابی است و آن در اثر تزکیه‌ی خاصی برای شاهد ممکن است. از این لحاظ است که شهود آموزش‌دادنی است. در واقع تزکیه است که آموزش‌دادنی است و شهود بواطن حقیقت نتیجه‌ی آن است.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید مراحل حل یک مسئله‌ی عددی و روند حل مسئله را یادداشت کنند. سپس بعضی داده‌ها را از روی کاغذ پاک کنید و از دیگر دانش‌آموزان بخواهید آن داده‌ها را بازسازی کنند. گاهی تنها یک روش برای بازسازی ممکن است و گاهی چندین روش امکان‌پذیر است. از دانش‌آموزان بخواهید بین این دو حالت تمایز قائل شوند.

فعالیت / راهنمایی ....

مقادیر یک چندجمله‌ای را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید. اگر درجه‌ی چندجمله‌ای داده شده باشد، چند مقدار برای مشخص کردن چندجمله‌ای به طور یگانه لازم است. اگر تعداد مقادیر یکی کم‌تر از مقدار کمینه‌ی فوق‌الذکر باشد، همه‌ی جواب‌های ممکن را چه‌طور می‌توان به دست آورد؟ اگر تعداد مقادیر بیش‌تر از مقدار کمینه‌ی فوق‌الذکر باشد، درباره‌ی درجه‌ی چندجمله‌ای چه می‌توان گفت؟

فعالیت / دبیرستان ....

حکمی جبری را با کمک استقراء به اثبات رسانده‌ایم. آیا از روی چنین اثباتی می‌توان در مورد درجه‌ی سختی این حکم سخنی به میان آورد؟ حال برای این حکم اثباتی جبری به دست دهید و سعی کنید در مورد درجه‌ی سختی این حکم قضاوت کنید. حال تعبیری هندسی از این حکم جبری ارائه کنید و استدلالی هندسی برای آن بیابید. حال در مورد درجه‌ی سختی این حکم چه می‌توان گفت؟

فعالیت / دانشگاه ....

اصل موضوع توازی در سه هندسه‌ی اقلیدسی، کروی و هذلولوی موجب فرمول‌بندی علم مثلثات در چارچوب این سه هندسه می‌شود. اما فرمول‌های مثلثاتی حل مثلث در این سه هندسه بسیار به هم شبیه‌اند. بنابراین اصل موضوع توازی همچون نوری است که علم مثلثات پنهان در اصول موضوعه‌ی دیگر را آشکار می‌کند. مثال‌هایی شبیه این در تفکر جبری اصل موضوعه‌ای ارائه دهید.

۴ـ۱۰. عروج و کمال

از آن‌جا که ساختار لایه‌های تجرید هستی علم شبیه ساختار لایه‌های تجرید هستی انسان است، می‌توان لایه‌های تجرید علم را با مدلی انسانی مطالعه کرد؛ یعنی برای علم، جسد، نفس، قلب، روح، عقل، نور و هویت قائل شد و برای انوار علم همین لایه‌ها را و برای مدارج شهود همین لایه‌ها را و برای حجاب‌های حقیقت همین لایه‌ها را به رسمیت شناخت یا حداقل از زبان آن‌ها برای توصیف مدارج هستی استفاده کرد. از آن‌جا که انسان به لایه‌های تجرید هستی خود دسترسی مستقیم‌تری دارد تا لایه‌های تجرید هستی حقیقتی که مورد مطالعه قرار می‌دهد، بنابراین به کار بردن زبان لایه‌های تجرید ادراک انسانی، به شناخت حقیقت کمک می‌کند. ممکن است کسی ادعا کند که این نقص شناخت حقیقت است که برای آن ساختاری مشابه ساختار لایه‌های تجرید انسان قائل شویم، بلکه باید حقیقت را آن‌طور که هست، شناخت، نه

آن‌طور که ذهن ما شکل گرفته است. پاسخ این است که انسان و جهان خلقت، هر دو تجلیات کامل اسماء الهی هستند و لایه‌های تجرید هستی بین تمام مخلوقات جهان خلقت که درجه‌ی تجرید آن‌ها کامل است، یکسان است یا لااقل فرض ما این است که باور داشتن توحید چنین نتیجه‌ای می‌دهد. حال به معرفی یک‌یک لایه‌های تجرید نور در این مدل انسانی خواهیم پرداخت.

نور حدس، همچون جرقه‌ای در تاریکی است که راه را به شاهد نشان می‌دهد تا به کدام‌سو حرکت کند. نور حدس نصیب کسی است که احترام به معلم را مشی خود قرار می‌دهد و در برابر معلم خضوع و تواضع می‌کند. چنین کسی حجاب علم را کنار می‌زند و مقام معلم را بالاتر از مقام علم می‌داند و نور حدس نصیب او می‌شود. نور حدس از انوار مادی است، نه انوار معنوی. شاید حتّی بتوان روند حدس زدن را برپایه‌ی آن‌چه در مغز دانشمند می‌گذرد، توضیح داد. مثلاً در روان‌شناسی ریاضی اعتقاد دارند ذهن به طور ناخودآگاه پس از این‌که دانشمند ناخودآگاه خود را درگیر مسئله می‌کند، به حدس و آزمایش می‌پردازد و همه‌ی حالت‌هایی را که ممکن است ایده‌های مربوط به مسئله کنار هم قرار بگیرند، بررسی می‌کند و خیلی وقت‌ها به همین روش راه‌حل را پیدا می‌کند و به خودآگاه تحویل می‌دهد. این برپایه‌ی باور دانشمند است که او از مفاهیم علمی بالاتر است و می‌تواند مفهوم خلق کند و علم را پیش ببرد و اسیر ساختار علم نیست. کسی که می‌فهمد عالم بالاتر از علم است، در برابر معلمان خضوع می‌کند. چنین دانشمندی کمال هم که پیدا می‌کند، این خصلت در او باقی می‌ماند، چون عالم بر علم محیط نیست، اما مقام بالاتری دارد.

نور وجدان، نوری است که اطراف عالم را روشن می‌کند تا راه را از بیراه تشخیص دهد و در راه درست قدم بردارد. نور وجدان همچون چراغی است که در دست عالم است تا در ظلمت جهل گمراه نشود. نور وجدان نصیب عالمی است که حقیقت‌جو است. حقیقت‌جویی او حجاب باطن را کنار می‌زند تا حق آشکار شود. نور وجدان از انوار برزخی است و در عالم نفس است. شاید بتوان نور وجدان را برپایه‌ی تفکرات و احساسات دانشمند توضیح داد. این‌که به تفکر توصیه می‌شود، برای این است که

تفکر چراغی است که روشنگر است. به نور وجدان که نفسانی است، می‌توان هم جسد را شناخت و هم نفس را، هم عالم ماده و هم عالم ذهن را. اما به نور جسد فقط می‌توان عالم ماده را شناخت، نه عالم ذهن را، چون نور شهود باید از مشهود مجردتر باشد. پس به نور حدس نمی‌توان فهمید در فکر کسی چه چیزی می‌گذرد. دانشمندی که باطن را محک حقیقت می‌داند، ملاکی دارد که حق را از باطل جدا می‌کند، لذا حجاب باطل را کنار می‌زند، چون باطل ظاهر و باطن ندارد.

نور الهام، تصویری از حقیقت را در قلب شاهد به جای می‌گذارد تا با آن ارتباط درونی برقرار کند. نور الهام نصیب عالمی است که صداقت پیشه باشد. صداقت آینه‌ی دل را صافی می‌کند و حجاب کذب را کنار می‌زند تا عالم اوهام صادقه را از کاذبه بازشناسد. نور الهام از انوار قلبی است و شهود با الهام از توانایی‌های دل است. نور الهام را باید بتوان برپایه‌ی محبت دانشمند به حقیقتی که مورد مطالعه‌ی اوست، توضیح داد. این‌که به پاک کردن دل از محبت غیرخدا توصیه می‌شود، برای این است که قلب پاک و صافی شود و آمادگی دریافت تجلیات را به دست آورد. به نور الهام می‌توان هم جسد را شناخت، هم نفس را و هم قلب را. پس می‌توان علوم طبیعی را به الهام توسعه داد و هم علوم انسانی که به نفس‌شناسی می‌پردازند و هم علوم قلبی را که حق را از باطل تشخیص می‌دهند. قلب خاستگاه درک باطن زمان است؛ چرا که خاستگاه درک باطن حرکت است. حقایق حرکت باطنی دارند، اما کذب حرکت باطنی ندارد، یعنی تجلی و تجرید ندارد ولذا نور الهام کذب را بازمی‌شناسد.

نور زکات، علم عالم را تزکیه می‌کند و آن را از ناخالصی‌های وهم پاک می‌کند تا گمراه‌کننده نباشد. نور زکات نصیب عالمی است که زکات علم خود را می‌پردازد. عالم چون به خلق خدا خدمت می‌کند، حجاب خودبینی را کنار می‌زند و به نوری دست می‌یابد که شهود او را خالص می‌کند. نور زکات از انوار روحانی است. نور زکات را باید بتوان از ابعاد حیات شاهد شناخت و توضیح داد. این‌که به ایمان توصیه می‌شود، برای این است که روح ایمان تزکیه می‌کند. حیات ایمانی و ایمان به خداوند و رسول، شناخت دانشمند را از وهم پاک و زکّی می‌نماید. چرا که وهم که

حقیقت نیست، حیات ندارد. وهم زنده نیست. حیات ایمانی با وهم ناسازگار است. نور زکات حیات‌شناس است و هم روح را می‌بیند و روحانیات را، وهم قلب و نفس و جسد را. چرا که حیات در قلب و نفس و جسد تجلیاتی دارد. نور زکات حجاب حیات خود دانشمند را کنار می‌زند که آن همان حجاب خودبینی است. نور زکات حیات حقیقت را مشهود می‌کند؛ چرا که حقیقت زنده است و حرکت آن به خاطر همین حیات حقیقت است. همین حیات است که تزکیه می‌کند، چون می‌باید زکی باشد وگرنه حیات او فاسد می‌شود. به نور زکات، حیات باطن زمان آشکار می‌شود، چرا که حرکت باطنی حیات دارد و زنده است.

نور اطمینان، علم عالم را استوار می‌کند و آن را در عالم ماندگار می‌گرداند تا دستخوش فراموشی نشود. نور اطمینان نصیب عالمی است که هنگام علم‌اندوزی و حقیقت‌جویی به یاد خداست و ذکر خداوند حجاب غفلت را کنار می‌زند و علم عالم چنان استوار می‌شود که فراموشی در آن راه ندارد. نور اطمینان از انوار عقلانی است و شهود به نور اطمینان از قوای عقل است. نور اطمینان را باید بتوان برپایه‌ی تعقلات دانشمند توضیح داد. این‌که به تعقل توصیه می‌شود، برای این است که عالم عقل استوارتر از عالم متغیر پایین است. اگر ادراکات دانشمند به عالم عقل ارتقا داده شود، ابدی می‌شود، و فراتر از حیات علمی او خواهد بود. به نور اطمینان هم معقولات قابل مشاهده‌اند، هم روح، قلب، نفس و جسد، و این همه صورتی عقلانی دارند که به آن درک می شوند. به نور اطمینان ورای حیات را می‌توان مشاهده کرد. روح برای درک حقایق به آن‌ها توجه می‌کند و عقل فرای توجه است، لذا بری از غفلت است. لذا نور اطمینان با کنار رفتن حجاب غفلت به دست می‌آید. پس عالمی که به نور اطمینان شهود می‌کند، علم او استوار است و منزه از غفلت. به نور عقل، دهر که باطن زمان است، ادراک می‌شود و این‌که چرا حیات زمان تجلی دهر است. شهود به نور اطمینان، به دانشمند آرامش و اطمینان درونی نسبت به درک حقیقت می‌دهد.

نور رضا قسمت عالم از علم را برایش روشن می‌کند تا او روزی خود را بداند و برای دستیابی به آن تلاش کند. نور رضا نصیب عالمی است که علم‌اندوزی او و

اکتشافات علمی او فقط به خاطر خداست. خلوص نیت او حجاب دنیا را کنار می‌زند، پس او قسمت خود را می‌بیند. نور رضا از عالم عقل مجردتر است و از جنس عالم انوار است. پس دانشمندانی که وجودشان نورانی است، نور رضا از جنس همین نورانیت ایشان است که به آن دیگران را هدایت می‌کنند. به نور رضا هم انوار وجود دانشمندان و هم انوار وجود مبارک معصومین را می‌توان دید و هم عقل، روح، قلب، نفس و جسد را می‌توان مشاهده کرد. دانشمندی که علم خود را خالص برای خدا می‌خواهد، به قضای الهی خشنود است و چون دنیا را طلب نمی‌کند و آخرت را می‌خواهد، هرگز دانستن قضای الهی او را مکدّر نمی‌کند. چون علم دانشمند برای خدا خالص شد، زنجیرهای دنیا را پاره کرده، حجاب دنیا را خرق نموده،پس غیب را می‌بیند و هم نصیب خود از علم را می‌بیند. به آن نصیب راضی است و در راه به دست آوردن روزی خود تلاش می‌کند. دانشمند به نور رضا باطن دهر را می‌بیند که سرمد نام دارد و به زندگی سرمدی دست می‌یابد.

نور قرب، عالم را به حقیقت خود متصل می‌کند تا او حقیقت را از درون بچشد و از درون درک کند. نور قرب نصیب عالمی است که خود را برای خدا خالص کرده است و این خلوص او حجاب منیّت او را کنار می‌زند. چون منیّت از دل بیرون رفت، معشوق بر آن مستولی خواهد شد تا عالمِ حقیقت را از درون بچشد و با آن ارتباط مستقیم برقرار کند. دانشمندی که همه‌ی هستی خود را برای خدا خالص کرده، خود را از منیّت پاک می‌کند و رفع حجاب منیّت، آخرین مرز بین عالم و حقیقت را کنار می‌زند و این تازه آغاز راه شناخت حقیقت است. پس از این، شناخت از ورای مجاری شناخت و ساختارهای شناختی است. پس از این شناخت درونی و از کُنه ذات است. آری مخلوق، سیر و سلوک شناخت خالق خود را چنین آغاز می‌کند. خوشا به حال عالمی که این‌ها اوصاف او باشند. پرداختن به این سیر و سفر الهی در حد توان نویسنده و در سعه‌ی این کتاب نمی‌گنجد.

امیدواریم اهدافی که در تألیف این کتاب موردنظر داشته‌ایم، به یاری خداوند برآورده شود. پس به او توکل می‌کنیم که او ولیّ توفیق است.

۸۵ و
ناشر
برگزیده سالهای
۸۴،۸۳،۷۹،۷۵،۷۳

$a^2+2ab+b^2$

این مجموعه با هدف توسعه و بسط دانش پایه‌ی ریاضی مورد نیاز معلمان دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی تهیه شده است. ویژگی مهم این مجموعه، موضوعی بودن مطالب هر جلد است. به عبارت دیگر، هر کتاب از این مجموعه فقط به یک موضوع ریاضی می‌پردازد، فارغ از آن که این مفاهیم و دروس درحال حاضر در چه پایه‌ای تدریس می‌شوند. برای مثال، موضوع «عدد و عددنویسی» عنوان یکی از کتاب‌های این مجموعه است. این کتاب، نگاه جامعی به این موضوع خواهد داشت، اگر چه مفاهیم مربوط به آن، سال های اول ابتدایی تا پایان دوره ی راهنمایی را شامل می شود.

9789640800324

1976001022000
۲۲۰۰۰ ریال - کد ۱۶۷۶/۱