ترسیم های هندسی

مقدمه‌ای بر آموزش تفکر هندسی

آرش رستگار

قابل استفاده‌ی:

- معلمان دوره‌ی ابتدایی
- دبیران ریاضی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی
- دانش آموزان مستعد دوره‌ی راهنمایی
- دانش آموزان اول دبیرستان
- دانشجویان مراکز تربیت معلم

۳
مجموعه‌ی کتاب های
دانش پایه‌ی ریاضی

بسم الله الرحمن الرحیم

از سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی

«آموزش معلمان»

ترسیم‌های هندسی

مقدمه‌ای بر آموزش تفکر هندسی

مؤلف: آرش رستگار

سرشناسه: رستگار، آرش
عنوان و نام پدیدآور: ترسیم‌های هندسی مقدمه‌ای بر آموزش تفکر هندسی/ نگارنده آرش رستگار.
مشخصات نشر: تهران: مدرسه، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری : ۱۷۶ ص.
فروست: سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی آموزش معلمان.
شابک: ۵-۰۰۱۹-۰۸-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
موضوع: هندسه ترسیمی.
موضوع: هندسه.
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۷ ۴ ت ۵ ر / ۵۰۱ QA
رده‌بندی دیویی: ۵۱۶/۶
شماره کتابشناسی ملی: ۱۲۱۷۵۷۱

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش وپرورش

ترسیم‌های هندسی ـ مقدمه‌ای بر آموزش تفکر هندسی
(از سری کتاب‌های دانش پایه‌ی ریاضی ـ آموزش معلمان)
مولف: آرش رستگار
طرح جلد: کاظم طلایی
طراح گرافیک: علی ابوالحسنی
چاپ اول: ۱۳۸۷
تیراژ: ۲۲۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
قیمت: ۲۳۰۰۰ ریال

شابک ۵ - ۰۰۱۹ - ۰۸ - ۹۶۴ - ۹۷۸
ISBN 978-964-08-0019-5

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹ - ۸۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۸۹۰۳۸۰۹

خواننده محترم، با سلام و احترام؛ ضمن تشکر از شما، خواهشمند است هرگونه نظر، انتقاد و پیشنهاد خود را در مورد این کتاب یا دیگر کتاب‌های انتشارات مدرسه از طریق پیام‌نگار (ایمیل) **madreseh@madresehpublications.com** یا از طریق صندوق‌پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ ارائه فرمایید. هم‌چنین می‌توانید کتاب‌های ما را از طریق پایگاه اینترنتی **www.madresehpublications.com** ثبت و سفارش دهید تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پاسخ لازم یا کتاب مورد نظر خود را دریافت کنید.

مقدمه

برای این‌که معلمی موفق باشیم، علاوه بر دانش حرفه‌ای، به دانش موضوعی نیز نیاز داریم. دانش حرفه‌ای آگاهی داشتن از شیوه‌های آموزش، اهداف، روش‌های ارزش‌یابی، دیدگاه‌ها، شناخت دانش‌آموز از نظر توانایی و مهارتی و ... است. در این خصوص، با وجود تدوین کتاب‌های تألیف شده‌ی مؤلفان کتب درسی و تعدادی کتاب ترجمه شده به عنوان منبعی مناسب برای معلم و نیز وجود دوره‌های آموزش ضمن خدمت و تولید مجلات مخصوص معلمان و دانشجویان تربیت معلم، نیاز کم‌تری برای تولید یک مجموعه‌ی آموزشی احساس می‌شود.

اما در خصوص دانش موضوعی و مورد نیاز معلمان کار کم‌تری صورت گرفته است. اغلب معلمان دوره‌ی ابتدایی با توجه به نوع کاری که انجام می‌دهند کم‌کم از دانش‌های موضوعی که پیش از این با آن‌ها سر و کار داشته‌اند، دور می‌شوند و کم‌تر به تقویت خود در این زمینه فکر می‌کنند. معلمان محترم دوره‌ی راهنمایی نیز با همین مشکل مواجه می‌شوند، یا در بعضی موارد، رشته‌ی تحصیلی آن‌ها مرتبط با موضوعی که تدریس می‌کنند نیست.

با عنایت به موارد فوق، تولید مجموعه‌ای که صرفاً به بیان دانش موضوعی به جهت تقویت بنیه‌ی علمی معلمان بپردازد، بیش از پیش احساس می‌شود؛ به خصوص برای درس ریاضی که از دروس محوری دوره‌های ابتدایی و راهنمایی است و اغلب معلمان از نظر دانش موضوعی، نیاز تقویت خود را درک کرده‌اند. از طرفی دانشجویان تربیت معلم، که فارغ‌التحصیل شده و قصد دارند به امر آموزش بپردازند، به مرور و در جریان تدریس، احساس می‌کنند که باید بعضی از مفاهیم و موضوعات را دوباره بازنگری کنند.

این مجموعه با هدف توسعه و بسط دانش پایه‌ی ریاضیِ مورد نیاز معلمان دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی تهیه شده است. ویژگی مهم این مجموعه، موضوعی بودن مطالب هر جلد است. به عبارت دیگر، هر کتاب از این مجموعه فقط به یک موضوع ریاضی می‌پردازد، فارغ از آن‌که این مفاهیم و دروس در حال حاضر در چه پایه‌ای تدریس می‌شوند. برای مثال، موضوع «عدد و عددنویسی» عنوان یکی از کتاب‌های این مجموعه است. این کتاب، نگاه جامعی به این موضوع خواهد داشت، اگر چه مفاهیم مربوط به آن، سال‌های اول ابتدایی تا پایان دوره‌ی راهنمایی را شامل می‌شود.

امیدواریم این حرکت باعث رشد توانایی‌های علمی معلمان محترم و در نتیجه، اعتلای آموزش ریاضی در کشور باشد.

در پایان از همه‌ی مؤلفان محترم که در تدوین این مجموعه همکاری داشته‌اند و هم‌چنین از مسئولان انتشارات مدرسه که زمینه‌ی تولید آن را فراهم کرده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

خسرو داودی - دبیر مجموعه

ستایش‌نامه

ستـــایش می‌کنم خدایی را که آفریدگان را از هیچ پدید آورد. الگویی نداشـــت تا به کاربرد، و نه مقیاســـی از آفریننده‌ای پیش از خود تا بدان دســـتور کار کند؛ و آفریدگان اعتراف دارند بدین حقیقت که سراســـر ناتوان‌اند و نیازمند و حقیر؛ و اوســـت که باید بر آنان رحمت آورد، و به قدرت خود برپایشـــان دارد. به ما آن نشـــان داد که دیدیم، به حکم ضرورت آشـــکار اســـت که این نشانه‌ها بر شناخت او دلیلی استوار است، و در آن‌چه آفریده، آثار صنعت و نشانه‌های حکمت او پدیدار است؛ چنان‌که هرچه آفریده او را برهانی است، و بر قدرت و حکمت او نشانی؛ وگرچه آفریده‌ای باشد خاموش، بر تدبیر او گویاست، و بر وجود پدید آورنده دلیلی رساست.

سخنی با خوانندگان

خوانـــنده‌ی عزیـــز و گرامی! فرض بنده‌ی ناتوان در این نوشـــته، چنین اســـت که خواننده هم‌چون راقم این سطور، به ریاضیات هم به عنوان یک هنر، و هم یک ابزار در خدمت بشر و هم به عنوان علمی شریف که در الهیات ریشه دارد و در تمام علوم بشـــری کاربرد و حضوری تعیین‌کننده دارد، ارادت داشـــته و عشق می‌ورزد و آموزش ریاضیات را نه تنها اهرمی مؤثر برای رشد تفکر، بلکه وسیله‌ای برای تعالی انسان از طریق ترقی ســـاختارهای شـــناختی و معرفتی او می‌داند که بدون تکیه بر معارف الهی و علوم توحیدی هرگز میسّر نخواهد شد.

دوســـت محتـــرم و بزرگوار! ایـــن بنده‌ی نیازمند، چنین پنداشـــته که آن بزرگوار از اهمیت نقشی که ریاضیات در تربیت نسل آینده‌ی فرزندان میهنمان ایفا خواهد کرد، به خوبی آگاه اســـت و می‌داند اگر نســـلی خلاق و توانا تربیت شـــود که به اخلاق و معارف الهی مســـلح نباشـــد، به سادگی تمدن ما را از راه راست منحرف خواهد کرد و به بیراهه خواهد کشانید، و این‌که اخلاق و معارف باید در دل علم آموزش داده شود، نه این‌که از بیرون اثرگذاری کند.

معلـــم دانـــا و متعالی! این بنده‌ی حقیر تصور می‌کنـــد که مخاطب این کتاب، معلم

مجاهدی است که پرچم توحید در یک دست و سلاح قلم در دست دیگر دارد تا به جنگ جهل و نادانی و عقب‌افتادگی برود و نور دانش را در قلب‌های عزیز فرزندان میهنمان استوار کند. باشد که خداوند نامتان بلند کند و خبر مجاهدت‌هایتان را بر همه‌ی مؤمنان آشکار کند و با پیامبران محشورتان فرماید و نزد خود قرارگاهی مخصوصتان در نظر بگیرد تا در آن جاودانه سکنی گزینید.

مقدمه در باب ریاضیات و آموزش آن

هدف ما این است که علم ریاضیات را چنان آموزش دهیم که از آن منافع مادی و معنوی هر دو حاصل شود. اشیای ریاضی که مجرداتی ساخته‌ی ذهن انسانی هستند، همان ارتباطی را با مصداق‌های واقعی خود دارند که ظاهر با باطن یا نماد با حقیقت دارد. همه‌ی این مخلوقات ذهنی با یکدیگر ارتباطی حقیقی دارند. تعمیم و تخصیص که از انواع ارتباطات است، به تجرید و تجلّی یا عروج و نزول شباهت دارد. از این‌رو زبان ریاضیات مانند زبان حقیقت زبانی لایه‌لایه است. درک زبان ریاضی مانند درک زبان معنویات، دارای سطوح مختلف توانایی مجرد ذهنی است و هر کس به تناسب ذهن خود قادر خواهد بود بعضی از تجلیات حقایق مورد بحث را ادراک کند. زبان ریاضیات به علت دقت مستتر در آن و رابطه‌ی معین بین اجزای آن در تربیت ساختار ذهنی تواناست و به علت لایه‌لایه بودن برای تربیت ساختارهای شناختی و معرفتی مناسب است. مسائل واقعی که در ارتباط با حقایق باطنی انسانی نیز هستند، زمینه‌ی مناسب برای آموزش اخلاق و معارف الهی در دل ریاضیات را فراهم خواهند آورد و دانش‌آموزان را به علمی معنوی تجهیز خواهند کرد.

مقدمه در باب هندسه

هندسه و حساب دو شاهراه موازی در ریاضیات هستند که در سراسر تاریخ این علم، جریان‌های فکری مختلف را دربرگرفته‌اند. علم هندسه که همراه با فلسفه نزد تالس، حکیم فینیقی‌الاصل، متولد شد، مادر علم اعداد محسوب می‌شود که نزد حکیم

فینیقی‌الاصل فیثاغورس شکل داده شد. لذا تفکر هندسی که شهودی و فلسفی است، بر تفکر جبری که دقیق و نمادین است، تقدّم دارد. این بدان معنی نیست که تفکر هندسی نادقیق است و برای دقیق کردن یک مفهوم ریاضی حتماً باید جبری‌سازی کرد، بلکه بدین معنی است که مدل‌سازی هندسی یک مسئله بر مدل‌سازی جبری آن تقدم دارد. حقیقت هندسه با واژه‌ی قرآنی قدر قرابت دارد و این در احادیث وارد شده است.

کتاب «ترسیم‌های هندسی» یک برادر دوقلو دارد به نام «جبر و معادله» که در آن دو سعی شده است تا توازی داستان هندسه و جبر هم در بستر تاریخ، هم در بستر فلسفه‌ی علم و هم در بستر آموزش به نمایش گذاشته شود.

مقدمه در سبک نگارش

از آن‌جا که مخاطبان این کتاب معلمانی فرهیخته و درس‌آموخته‌اند، نگارنده در مباحث ریاضی نزد ایشان حرفی نو برای گفتن ندارد. لذا تأکید بر مبانی فلسفی ریاضیات و نکات آموزش ریاضی، اهم محتوای کتاب را تشکیل خواهد داد. در مباحث فلسفی بر پشتوانه‌های فرهنگ ریاضی در تمدن بشری تأکید خواهیم کرد و در آموزش ریاضی نگاهی به مباحث انسان‌شناسی خواهیم داشت. این رویکرد به‌ناچار اختصار بسیار را ایجاب می‌کند، چرا که پرگویی در مباحث فلسفی و انسان‌شناسی در حد این نگارنده نیست. برای جبران اختصار بدنه‌ی اصلی کتاب، مثال‌هایی ملموس در سطح ریاضیات دبستان، راهنمایی و دبیرستان خواهیم آورد و اگر عمق مباحث اجازه دهد، مثال‌هایی هم در سطح ریاضیات دانشگاهی ضمیمه خواهیم کرد تا دیدگاه‌های فلسفی و انسان‌شناسانه در محک عمل خود را به نمایش بگذارند و خواننده‌ی حکیم در صحنه‌ی منصفانه‌ی رد و قبول این دیدگاه‌ها قرار گیرد؛ با این وصف تمنا دارم تا وقتی که دیدگاهی را در عمل نسنجیده‌اند، به آن دل نسپارند که حکیمان هرگز چنین نمی‌کنند.

فهرست تفصیلی

تقدیم به همه‌ی بچه‌های عزیزم، بچه‌های ایران، چه آن‌ها که هستند و چه آن‌ها که نیستند اما بعداً هست خواهند شد.

فهرست اجمالی

فصل ۱

هندسه چیست؟

در واقع این سؤالی است که قرار است خواننده پس از مطالعه‌ی این کتاب، به‌خصوص بخش‌های پایانی، قادر به پاسخ‌گویی به آن باشد، اما درک بشر از علم هندسه همگام با تکامل تمدن‌های بشری دست‌خوش تغییر و تحول بوده است. مسلماً پاسخی که علمای اعصار مختلف به این سؤال داده‌اند، یکسان نیست. این تحولات به خاطر اختلاف دیدگاه‌های دانشمندان نیست، بلکه درک بشر از علم هندسه در بستر تاریخ علم تکامل یافته است. تالس و اقلیدس در مورد هندسه یکسان نمی‌اندیشیدند و ارشمیدس و پاپوس هم یک دیدگاه نداشتند. خیام و خواجه نصیرالدین درک همسنگی از هندسه نداشتند و گاوس و ریمان هم در برابر هندسه آرای متفاوتی داشتند. هم‌چنین است تفاوت دیدگاه‌های کلاین و پوانکاره یا فرمول‌بندی‌های اینشتین و گروموف که تأکیدات یکسانی در علم هندسه ندارند. ولی این همه یک سیر تاریخی و یک مسیر تکامل برای درک بشر از علم هندسه بوده است و بی‌شک در این‌جا ثابت نخواهد ماند و پیش‌تر خواهد رفت.

هر چند نمی‌توان آینده‌ی علم هندسه را پیش‌بینی کرد، اما می‌توان در مورد جهت‌گیری‌های هندسه در آینده حرف‌های دقیقی زد؛ همان‌طور که گذشته و تاریخ یک علم هم پیش از وقوع قابل پیش‌بینی نبوده، اما جنس تحولات و ابعاد فلسفی درگیر در آن علم که از تاریخ آن قابل استخراج است، همه در نطفه‌ی آن علم قابل بازشناسی است. علم هندسه نیز از این قاعده مستثنا نیست و اگر بخواهیم درکی سرتاسری و فلسفی از تاریخ تحول مفاهیم این علم داشته باشیم، می‌توانیم به شرایط و چگونگی تولد این علم و جایگاه اولیه‌ی آن نظر کنیم و پدران و فرزندان آن را بشناسیم تا مرز توانایی‌های معرفتی این علم را پیش‌بینی کنیم.

به عقیده‌ی ارسطو تالس بنیانگذار حکمت یونان بوده است. قراین حکم می‌کند که او دولتمرد، بازرگانی ثروتمند، مهندس، ریاضی‌دان و اخترشناس بوده و در سال ۶۴۰ قبل از میلاد مسیح متولد شده است و از تبار فینیقی بوده است. یونانیان اعتقاد داشتند که ریاضیات را تالس از مصر به یونان آورده است، اما در واقع به عنوان یک علم واضع آن بوده است. مبانی هندسه‌ی یونان از زمان تالس شکل گرفته است. این‌که قطر دایره را دو نیمه می‌کند، زوایای مثلث متساوی‌الساقین برابرند، محاط در نیم‌دایره قائمه است، زوایای متقابل به رأس برابرند، دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین برابرند و هم‌چنین مفهوم نسبت همه از تالس است. معلوم نیست احکام نسبت داده شده به تالس توسط او به مفهوم اقلیدسی به اثبات رسیده باشد. آن‌چه مشخص است، این است که تالس نجوم را از موهومات شرقی پیراست و فلسفه و در دل آن هندسه را بنیان‌گذاری کرد و با این کار پدر علم یونانی شد. زندگی تالس به سفر بین اقوام مختلف گذشت تا با افکار و ایده‌های مذهبی آنان آشنا شود. از دیدگاه او علم وجهی از فلسفه بود و برای رهایی از تفکرات کلی و دور از تجربه می‌کوشید، هم‌چنان که فلسفه وجهی از دین بود که برای جدایی از اساطیر و مجازگویی تلاش می‌کرد. فلسفه‌ی تالس چنین بود که گناهان آدمی از مقتضیات عصر اویند، اما فضائل از ذات او تراوش می‌کنند. او خلقت را از آب می‌دانست و از این لحاظ که همه چیز را به یک مبدأ برمی‌گرداند، فلسفه‌ی او حائز اهمیت است. به اعتقاد او همه‌ی ذرات جاندارند. از تالس پرسیدند

چه کاری بسیار دشوار است؟ گفت: خود را شناختن. گفتند: خدا چیست؟ گفت: نه آغاز دارد، نه انجام. گفتند: تمام تقوا چیست؟ گفت: آن‌چه در دیگران عیب می‌شماریم، خود نکنیم. قرائن نشان می‌دهد که تالس یکتاپرست بوده است.

تالس از نجوم بابلی و مصری اطلاع داشته، لذا نجوم بابلی را فینیقیان به یونان آوردند. در سال ۶۰۰ قبل از میلاد وقوع خورشیدگرفتگی را پیش‌بینی کرد. در سال ۵۴۶ ق.م. کورش لیدیا را گرفت و بعد شهرهای یونیا را که تالس در آن می‌زیست، به شاهنشاهی ایران ضمیمه کرد. اما بابلیان از نجوم چه می‌دانستند؟ تمدن بابلی یکی از دو سرچشمه‌ی شکوفایی تمدن در کنار تمدن چین باستان بود که تقریباً به‌طور مستقل پاگرفتند. بابلیان با خط میخی بر روی لوحه‌های گلی می‌نوشتند و ریاضیات را برای بازرگانی به کار می‌بردند. در تمدن بابلی ریاضیات همراه دین، مقدمات نجوم را پدید آورد. تقسیم دایره به ۳۶۰ درجه، سال به ۳۶۰ روز و دستگاه شمار ۶۰گانی که بعد مبنای دستگاه‌شمار دوازده‌گانی را پدید آورد، از ابتکارات بابلیان است. منجمان بابلی نقشه‌ی مدار خورشید و ماه را رسم کردند و به ارتباط آن با خسوف و کسوف توجه کردند. خط سیر سیارات را به دست آوردند و به اختلاف ستاره‌ی ثابت و سیار توجه کردند. زمان را با ساعت آبی و شاخص آفتابی اندازه‌گیری کردند. سال را به ۱۲ ماه تقسیم کردند که برای هماهنگی با فصول، ماه سیزدهمی به آن افزودند؛ هم‌چنان که امروزه در چین رایج است. شبانه‌روز را به ۱۲ ساعت ۳۰ دقیقه‌ای تقسیم کردند. علم بابلی در تصرف کاهنان بود و از آن برای مصارف دینی استفاده می‌کردند. بابلیان با دین تمدن خود را شکل دادند و در برابر سختی‌ها پایداری کردند، اما بعد که به رفاه رسیدند، از دین دور شدند و مقاومت خود را از دست دادند. این مایه‌ی سرنگونی تمدن آن‌ها شد. برای بابلیان دایره مفهومی آسمانی و خط مفهومی زمینی بود. هندسه را برای محاسبه‌ی حجم و سطح، مسّاحی و نجوم به کار می‌بردند.

هندسه در میان مصریان نیز وضعی شبیه بابلیان داشت، اما اندکی پیشرفته‌تر بود. برای مثال فرمول‌هایی که برای محاسبه‌ی حجم به کار می‌بردند، برخلاف بابلیان همه صحیح بودند. جداول بسیاری که از رصدها به‌دست آمده بود، سؤالاتی را مطرح

می‌کرد که باید به آن پاسخ داده می‌شد. برای مثال، بعضی ستارگان دایره‌ی کامل را با سرعت ثابتی می‌پیمودند. هر روز خورشید مقدار کمی از ستارگان عقب می‌ماند. مدار خورشید با تناوب یک‌ساله به شمال و جنوب می‌رفت. مسیر خورشید دایره‌ی بزرگی بود که در کره‌ی سماوی ثابت بود. ماه مقدار بیش‌تری از خورشید عقب می‌ماند و هر ۲۹ یا ۳۰ روز خورشید از ماه می‌گذشت. مسیر ماه همان مسیر خورشید بود، اما بالا و پایین می‌رفت. اگر ماه در حالت کامل این مسیر را قطع می‌کرد، خورشیدگرفتگی می‌شد. پنج ستاره‌ی درخشان‌تر از حد معمول حرکت نامنظمی داشتند که تقریباً همان مسیر خورشید و ماه بود، اما منظم نمی‌چرخیدند و گاهی ناگهان برمی‌گشتند و کج می‌رفتند. این سؤالات مقدمات شکل‌گیری علم هندسه را فراهم کردند.

همان‌طور که هندسه به معنی یک علم در زمان تالس شکل گرفت، اما محاسبات هندسی پیش از آن سابقه داشت. حساب توسط فیثاغورس پایه‌گذاری شد؛ هرچند که محاسبات عددی و حتّی حل معادله پیش از فیثاغورس بسیار رواج داشت. هم‌نشینی هندسه و حساب، موجب شکل‌گیری علم جبر شد و این توالی تفکر هندسی و جبری را تجسّد بخشید. سال‌ها طول کشید تا استدلال هندسی شکل گرفت. افلاطون و سپس ارسطو در این میان نقش مهمی ایفا کردند. تفکر اصل موضوعه‌ای از تئوری‌های ارسطو درباره‌ی مبانی علم سرچشمه گرفت. درباره‌ی مفهوم توازی نیز ارسطو آرای جالبی دارد که سرآخر منجر به اصل پنجم اقلیدس شد. در آکادمی افلاطون و مدرسه‌ی ارسطو ریاضی‌دانان بزرگی تربیت شدند که بعد در همان مدارس به آموزش ریاضیات مشغول شدند و مکتب ریاضیات یونان را پایه‌ریزی کردند. از زمان افلاطون به آثار تربیتی آموزش هندسه توجه بسیار کردند و هندسه را منحصر به کاربرد نمی‌دانستند. تأثیرات بسیار موفق آموزش هندسه، در نظم بخشیدن به فکر دانش‌آموزان منجر شده است که از زمان اقلیدس تاکنون هندسه‌ی اقلیدسی جزء لاینفک اکثر نظام‌های آموزشی موفق بوده است.

فعالیت / دبستان ....

اشکال ساده‌ی هندسی مانند مربع، مستطیل، مثلث قائم‌الزاویه، ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع و لوزی را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم مربعی بسازیم. با کنار هم گذاشتن دو یا چند شکل از اشکال بالا مربعی بسازید. این فعالیت را برای هر یک از اشکال بالا تکرار کنید. سپس هر یک از اشکال بالا را به ترکیبی از اشکال ساده افراز کنید. تنوع جواب‌ها مورد تأکید است.

با کمک این فعالیت‌ها یک تئوری مساحت بسازید. مجموعه‌ی همه‌ی این فعالیت‌ها به چه تعریفی از علم هندسه اشاره می‌کنند؟

فعالیت / راهنمایی ....

برای قضیه‌ی فیثاغورس و سایر روابط طولی در مسئله‌ی قائم‌الزاویه، اثباتی هندسی ارائه کنید. سپس قانون کسینوس‌ها را برای مثلثی با رأس نیم قائمه، ثلث قائمه و دو ثلث قائمه برای دانش‌آموزان بنویسید و از آن‌ها بخواهید برای این فرمول‌ها اثباتی هندسی ارائه دهند. حال از دانش‌آموزان بخواهید مجموعه‌ی این فرمول‌ها را در کنار هم قرار دهند و سعی کنند آن‌ها را برای مثلثی با زاویه‌ی رأس دلخواه تعمیم دهند. این فعالیت دانش‌آموزان را به چه تعریفی از هندسه راهنمایی می‌کند؟

فعالیت / دبیرستان ....

یک مثلث را با داشتن چه اجزایی می‌توان به طور یگانه تعیین کرد؟ به مجموعه‌ی نتایجی که در این چارچوب می‌گنجند، روش‌های حل مثلث می‌گویند. حل مثلث در زمین‌سنجی کاربردهای فراوان دارد. از دانش‌آموزان بخواهید مسائلی کاربردی که به حل مثلث منجر می‌شوند مطرح کنند و با کمک حل مثلث به روش مثلثاتی الگوریتمی برای حل مسئله‌ای که پیدا کرده‌اند، به‌دست دهند. تنوع مسائل مورد تأکید است. این فعالیت چه تعریفی از هندسه را پیش‌رو می‌آورد؟

فعالیت / دانشگاه ....

قضیه‌ی فیثاغورس و روابط مثلثاتی را در هندسه‌های اقلیدسی، کروی و هذلولوی کنار هم بنویسید و شباهت‌های آن‌ها را بررسی کنید. به نظر می‌رسد اصل توازی در هر سه هندسه به فرمول‌های مشابهی رهنمون می‌شود، اما بدون اصل توازی نمی‌توان روابط مثلثاتی در این هندسه‌ها را نوشت. به نظر می‌رسد که این اصل هم‌چون چراغی است که ساختار پشت صحنه‌ی چهار اصل دیگر را به نمایش می‌گذارد؛ ساختاری که بین هر سه هندسه کم و بیش مشترک است. شباهت فرمول‌های مثلثاتی در این سه هندسه ما را به سوی چه تعریفی از هندسه رهنمون می‌کند؟

۱-۱. کتاب اصول اقلیدس و ترسیم‌های هندسی

هر علاقه‌مند به ریاضیات باید بداند که کتاب اصول اقلیدس مهم‌ترین اثر ریاضی ولذا مهم‌ترین اثر در تمام علوم برگرفته از علم یونانی است؛ بعد از کتب آسمانی، پرخواننده‌ترین کتاب بوده است و اکثر ریاضی‌دانان بزرگ اسلامی بر آن شرح نوشته‌اند. سبک نگارش کتاب اختصار در عین کمال دقت است و روش اصل موضوعه‌ای مهم‌ترین ابزار اقلیدس در این راه است. روش اصل موضوعه‌ای هم‌چنین مقدمات ظهور دقت ریاضی اقلیدسی پیش از او در مکتب ریاضیات یونان شکل گرفته بود. او قضایای پراکنده‌ی بزرگان پیش از خود را جمع کرد و بسیاری از این نتایج را به کمال رساند و بعضی را که با دقت کمی اثبات شده بود، مستحکم‌تر کرد و این کار را چنان هنرمندانه انجام داد که کتاب او همواره مهم‌ترین کتاب ریاضی بوده است و به گمان قوی چنین نیز خواهد ماند. به توصیه‌ی اینشتین هرکس می‌خواهد ریاضی‌دان بزرگی شود، حتماً باید اصول اقلیدس را بخواند.

در مورد زمان دقیق تولد و مرگ اقلیدس، اطلاعات دقیقی دردسترس نیست، اما قرائن نشان می‌دهد بین شاگردان افلاطون و ارشمیدس ارتباط برقرار کرده است. لذا دوران شکوفایی او چیزی حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد بوده است. او در اسکندریه تدریس می‌کرده و بنیان‌گذار مدرسه‌ی بزرگ اسکندریه محسوب می‌شود. پیش از

او نیز کتاب‌هایی با نام «اصول» نوشته شده بود، اما کتاب او از همه کامل‌تر است و معیارهایی محکم برای دقت در استدلال را پایه‌گذاری می‌کند. گامی قطعی در هندسی کردن ریاضیات برداشت و صورت استدلال هندسی را بر همه‌ی ریاضیات تحمیل کرد. این روش بر پرینسیپیای نیوتن، نقد خرد محض کانت و اخلاق اسپینوزا تأثیر گذاشت و مدت دو هزار سال هسته‌ی ریاضیات محض را تشکیل داد. اقلیدس شخصیتی دائرةالمعارفی داشت و تسلط او بر شاخه‌های مختلف ریاضی، نقش تعیین‌کننده‌ای در فرهنگ ریاضی و جهت‌گیری ریاضی ایفا کرد. اما محتویات اصول به‌هیچ‌وجه تمام ریاضیات یونان را شامل نمی‌شود، بلکه هسته‌ی اصلی آن را شکل می‌دهد. او چندین کتاب درسی دیگر نیز نوشته که فقط بعضی به جای مانده است. این کتاب‌ها در زمینه‌های هندسه، نورشناسی، اخترشناسی، موسیقی و مکانیک هستند. کتاب گمشده‌ی اقلیدس درباب مقاطع مخروطی خلاصه‌ی مطالعات منایخموس، آریستانوس و دیگران در رشته‌ی مخروطات است. کشفیات اقلیدس نظریه‌ی پرتابه‌ها را پیش راند و مکانیک، دریانوردی و نجوم را ترقی داد.

باید متذکر شد که به جز روش استدلالی که در کتاب اقلیدس آمده است، روش‌های استدلال دیگری نیز از یونان باستان تاکنون معمول بوده است، اما از آن‌جا که در استاندارد دقت ریاضی قابل مقایسه با اصول اقلیدس نبوده‌اند یا به مرور فراموش شده‌اند و یا مانند روش بی‌نهایت کوچک‌های لایبنیتز قبول عام نیافته‌اند و یا به طور پنهانی توسط ریاضی‌دانان بزرگ برای کشف قضایای مهم به کار می‌روند و سپس سعی می‌کنند این قضایا را به روش اقلیدس به اثبات رسانند تا جمهور ریاضی‌دانان آن را مورد پذیرش قرار دهند، از این‌رو یک تأثیر مخرب کتاب اصول اقلیدس، ثبت نشدن روند تفکر ریاضی‌دانان و مکاشفاتی است که به اکتشاف صورت قضایا منجر شده‌اند. لازم است بدانید که اکثر ریاضی‌دانان اسلامی از این عیب مبرّا بوده‌اند، اما پس از قرون وسطا بازگشت به اقلیدس، استانداردهای نگارش ریاضیات در جهان را به عقب بازگرداند.

ترسیم‌های هندسی در کتاب اصول اقلیدس بسیار مورد تأکیدند. پس از هر حکمی

روش رسم شکل آن حکم توسط خط‌کش و پرگار بیان شده است. جالب این‌جاست که سیستم ارجاعات ترسیمات عیناً مطابق با سیستم ارجاعات احکام است. باید متذکر شد که ابزارهای ترسیم در زمان اقلیدس محدود به خط‌کش و پرگار نبوده است، بلکه اقلیدس خود این محدودیت را پذیرفته است و سعی دارد همان روش اصل موضوعه‌ای در استدلال را در ترسیم نیز به کار برد. بنابراین کتاب اقلیدس دو بُعد نظری و عملی دارد که بُعد نظری احکام آن و بعد عملی ترسیم‌های آن را دربر می‌گیرد. در واقع، اثبات یک حکم برای اقلیدس، اثبات وجود و ترسیم شکل آن، روش ساخت آن حکم محسوب می‌شود.

رسم شکل، کتاب اصول را از مجموعه‌ای از استدلال‌های منطقی به مجموعه‌ای از احکام در مورد اشیای ملموس و قابل مشاهده بدل می‌کند. در واقع، همین رسم‌پذیری هندسه است که ذات آن را شکل می‌دهد و ساختار منطقی احکام هندسی به سراسر ریاضیات قابل تعمیم است و این همان نقشی است که کتاب اصول اقلیدس به‌عهده گرفته است و اهمیت آن به همین دلیل است. سؤال این که آیا روش‌های دیگری برای ملموس‌سازی و قابل شهود کردن احکام منطقی هندسه‌ی اقلیدسی وجود دارد؟ برای مثال، آیا اشکال مربع، مثلث، دایره و مانند آن به عنوان اشیای مجرد ریاضی ظهور هندسی و ملموس دیگری نیز دارند؟ این‌که آیا احکام هندسی به روش یگانه‌ای رسم‌پذیرند، سؤال دیگری پیش‌رو می‌نهد که ترسیم یعنی چه؟ و این‌که آیا سؤال ترسیم یعنی چه، سؤالی موازی و هم‌پایه است با اینکه، هندسه چیست؟ این نگرش به مسئله‌ی ترسیم، عنوان کتاب را در بستری بسیار وسیع‌تر از آن‌چه موردنظر هندسه‌ی اقلیدسی است، قرار می‌دهد. همین‌طور عکس این سؤال را می‌توان پرسید و آن این‌که، آیا این اشکال و نمودارها می‌توانند ملموس شده و هندسی‌سازی شده‌ی احکام منطقی دیگری تصور شوند؟ به عبارت دیگر، این مدل‌های هندسی برای درک چه مسائل دیگری می‌توانند مفید واقع شوند؟ این نگاه به مسئله‌ی ترسیم، هندسه را در جایگاهی قرار می‌دهد که نمایشگاه احکام ریاضیات عمیق‌تر انگاشته شود. این دو دیدگاه هیچ‌کدام در کتاب اصول مورد توجه قرار نگرفته‌اند، اما در رویکرد

ما به مسئله‌ی ترسیم اهمیت دارند. نزد ما ترسیم وجه و صورت علم هندسه است و ارتباط ذهن ما با مفاهیم هندسی، از طریق اشکال و تصاویر صورت می‌پذیرد. به عبارت دیگر، اشکال و تصاویر، زبان تفکر هندسی محسوب می شوند، همان‌طور که نمادهای جبری برای انتقال مفاهیم جبری به کار می‌روند.

با این وصف، در کتاب اصول اقلیدس، نمودارها و تصاویر برای انتقال احکام جبری هم به کار رفته‌اند. نمایش هندسی اتحادهای جبری و حل تصویری معادلات درجه‌ی یک و درجه‌ی دو به کمک روش‌های هندسی، دو نمونه‌ی عمده هستند که از بنیان‌های اولیه‌ی علم جبر محسوب می‌شوند. مفهوم متغیر از همین نگاه هندسی به عدد متولد شده است. این مثال‌ها دلیل دیگری بر تقدم مدل‌سازی هندسی بر مدل‌سازی جبری اقامه می‌کنند. لذا نگاه ساختارگرایانه به ترسیم‌های هندسی، به دریافت‌های نگاه ساختارگرایانه به مفاهیم جبری چیزی می‌افزاید. علم هندسه‌ی جبری ادامه‌ی طبیعی بر هم‌کنش این دو است و به نوعی توسعه‌ی طبیعی هندسه‌ی اقلیدسی محسوب می‌شود.

فعالیت / دبستان ....

اشکال ساده‌ی هندسی با اندازه‌های مختلف را در قطعات پلاستیکی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید با خط کشیدن دور این قطعات، شکل آن‌ها را رسم کنند. سپس از آن‌ها بخواهید با کمک این ترسیم‌ها منظره‌ای را نقاشی کنند. می‌توان از خط‌کش‌هایی که این اشکال از درون آن‌ها حذف شده نیز برای نقاشی استفاده کرد. سپس قطعات تانگرام را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید اشکالی از پیش تعیین شده را با کنار هم گذاشتن این قطعات بسازند.

فعالیت/ راهنمایی ....

چند معادله‌ی جبری ساده را به روش هندسی برای دانش‌آموزان اثبات کنید. سپس معادلات جبری دیگری در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید به روش

هندسی اثباتی برای آنان بیابند. حال اشکالی هندسی را که به طور منظم به اشکالی ساده تجزیه شده‌اند، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آنان بخواهید معادله‌ای جبری بیابند که توسط شکل داده شده قابل اثبات باشد.

فعالیت /دبیرستان..............................

از دانش‌آموزان بخواهید الگوریتمی هندسی ارائه دهند که به‌وسیله‌ی آن بتوان با کمک خط‌کش و پرگار معادلات درجه‌ی دوم را حل کرد. دانش‌آموزان را متوجه کنید که از آن‌جا که طول‌های هندسی همه مثبت هستند، ابتدا باید انواع معادلات درجه‌ی دوم با ضرایب مثبت را رده‌بندی کنند. توجه کنید که ممکن است ضرایب مثبت در دو طرف تساوی یک معادله ظاهر شوند. این همان روشی است که اقلیدس و خیام به حل هندسی معادلات می‌پرداخته‌اند.

فعالیت / دانشگاه ....

چند مسئله‌ی ترسیم به‌وسیله‌ی خط‌کش و پرگار روی کره در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید. سپس از آن‌ها بخواهید مسائلی کاربردی بیابند که با رسم توسط خط‌کش و پرگار روی کره‌ی جغرافیای قابل حل باشند. در هندسه‌ی هذلولوی مرکز دایره در نقطه‌ای واقع می‌شود که با تصویری که ما از هندسه‌ی مسطحه داریم، به‌هیچ‌وجه هماهنگ نیست. از دانش‌آموزان بخواهید ابزاری بسازند که دایره‌ای به مرکز داده شده در هندسه‌ی هذلولوی رسم کند. برای رسم خط و دایره روی مخروط نیز ایده‌ای ارائه دهید. توجه کنید که مخروط سطحی با خمیدگی صفر است و تمام قضایای هندسه‌ی مسطحه روی سطح مخروط نیز صحیح‌اند.

۲-۱. ریاضیات ساختارگرا

ساختارگرایی یک مفهوم قرن بیستمی است، اما قدمت آن به کتاب اصول اقلیدس بازمی‌گردد. تأکید کتاب اصول بر ساختارگرایی این‌طور اعمال شده که همه‌ی اشکال

هندسی مورد بحث توسط یک الگوریتم متناهی به کمک خط‌کش و پرگار تولید می‌شوند. در اوایل قرن بیستم درپی برنامه‌ی فرگه برای بیان ریاضیات به زبان منطق که آرزوی دیرینه‌ی لایبنیتز بود و سرانجام نیز با کشف پارادوکس راسل به شکست انجامید، تأکید بر ریاضیات ساختارگرا اوج گرفت. منظور از ریاضیات ساختارگرا ریاضیاتی است که در آن تمام استدلال‌ها و ساختارهای ریاضی توسط الگوریتم‌های متناهی قابل حصول باشند. این تأکید بر متناهی برای فرار از تناقضاتی بود که در کار با ریاضیات نامتناهی پیش‌رو بود. سرانجام مفهوم ساختارگرایی از طریق زبان‌شناسی وارد علوم انسانی شد و به یکی از پرکاربردترین مفاهیم شناختی تبدیل شد.

دو جریان عمده‌ی ساختارگرایی، تحت پرچم صورت‌گرایی هیلبرت و شهودگرایی براوئر شکل گرفتند. صورت‌گرایی و شهودگرایی هر دو از فلسفه‌های اساس‌گرا محسوب می‌شود، برخلاف فلسفه‌های نیمه‌ی دوم قرن بیستم که بیش‌تر انسان‌گرا هستند تا اساس‌گرا. صورت‌گرایی و شهودگرایی هر دو در پاسخ به شکست برنامه‌ی فرگه به‌وجود آمد که سعی کرد تمام ریاضیات را بر اصل عدم تناقض و تحویل گزاره‌ها به گزاره‌های بدیهی منطقی استوار کند. هدف منطق این است که نشان دهد همه‌ی ریاضیات تعریف‌پذیر براساس تعداد کمی مفاهیم منطقی است و همه‌ی گزاره‌ها توسط تعداد کمی اصول منطقی اثبات‌پذیر است و منطق باید این کار را با استانداردهای بالای دقت و یقین ریاضی انجام دهد. این در واقع قدمی بعد از هندسی‌سازی اقلیدس بود که سعی می‌کرد به منطق حاکم بر استدلال‌های ریاضی، جایگاهی فراتر از ریاضیات بدهد که هرگز عملی نشد، بلکه منطق به شاخه‌ای همسنگ سایر شاخه‌های ریاضیات تبدیل شد.

هیلبرت از فلسفه‌ی کانت بهره گرفت و صورت‌گرایی را بنیان‌گذاری کرد. روش هیلبرت اصل موضوعه‌سازی و ارائه‌ی یک مدل است که اصول موضوعه در آن سازگار باشند و این آغاز برنامه‌ی حسابی‌سازی ریاضیات است. هیلبرت ابتدا باید سازگاری علم حساب را ثابت می‌کرد تا به کمک حساب مدل‌هایی برای تمام ریاضیات به‌خصوص برای هندسه ارائه می‌کرد. برای این کار هیلبرت بر روش‌های متناهی تکیه

می‌کند، چه این روش‌ها تناقضی را به‌وجود نمی‌آورد. پس مسئله‌ی اصلی، بازسازی حساب با روش‌های متناهی است. به‌عبارت دیگر، هدف ارائه‌ی یک فرمول‌بندی متناهی از حساب است که هر گزاره‌ی قابل اثبات در آن صحیح باشد و هر گزاره‌ی صحیحی را بتوان با آن فرمول‌بندی به اثبات رساند و این آغاز صورت‌گرایی است. فرمول‌بندی حساب باید در یک فراتئوری صورت می‌گرفت که در آن قواعدی برای فرمول ساختن و گزاره پیشنهاد کردن وجود داشته باشد. سازگار بودن صوری این فراتئوری معادل سازگار بودن منطقی تئوری حساب خواهد بود. از آن‌جا که این تئوری صوری بر خود استوار است نه بر علم حساب، خود می‌تواند موضوع علم ریاضی دانسته شود. این تفکر موجب افراط در فلسفه صورت‌گرایی شد که ریاضیات را چیزی جز تئوری‌های صوری نمی‌دانست. صورت‌گرایی افراطی حتّی انکار می‌کند که ریاضیات ممکن است قابل استنتاج از منطق باشد. سرانجام ناتمامیت گودل نقشه‌ی هیلبرت را نقش بر آب کرد.

هیلبرت اصل موضوعه‌سازی مدون را در خدمت صورت‌گرایی خود قرار داد. استاندارد بالای استدلال کتاب اصول اقلیدس، منجر شد که لباچفسکی، بولیایی و پیش از آنان گاوس فقط با استدلال محض، هندسه‌ی جدیدی بنا کنند که آن را هندسه‌ی نااقلیدسی نامیدند. اصل موضوعه‌سازی هندسه‌ی تصویری توسط پاش نیز بر ظهور این تفکر جدید بی‌تأثیر نبود.

سرآخر، هیلبرت در کتاب «اصول هندسه» چندین اصل به اصول موضوعه‌ی پنجگانه‌ی اقلیدس افزود و برنامه‌ی اصل موضوعه‌سازی اقلیدس را به پایان رساند. تنها چیزی که باقی می‌ماند، ارائه‌ی مدلی سازگار برای این اصول موضوعه‌ی توسعه‌یافته بود که بسیاری از اصول آن بیش از دو هزار سال از چشمان تیزبین هندسه‌دانان پنهان مانده بود. همان‌طور که گفتیم یافتن چنین مدلی منجر به برنامه‌ی حسابی‌سازی ریاضیات شد.

شهودگرایی براوئر رقیب صورت‌گرایی هیلبرت محسوب می‌شود. تز شهودگرایان این است که ریاضیات اگر درست انجام شود، یک فعالیت مستقل و قائم به ذات

است. روش‌های ریاضی نه می‌توانند و نه نیازی دارند که از حمایت منطق‌دانان و صورت‌گرایان برخوردار شوند. این نیاز فقط در جاهایی احساس می‌شود که ریاضیات به درستی انجام نمی‌شود. براوئر نیز مانند هیلبرت تحت تأثیر کانت بود، اما جهت دیگری را برگزیده بود. ریاضیات شهودگرایان از اشیا و ساختارهای شهودی تشکیل شده که به‌طور درونی ادراک می‌شوند و با فراریاضی صورت‌گرایان تفاوت دارد. نقطه‌ی مشترک شهودگرایان و صورت‌گرایان این است که درک مستقیم بی‌نهایت، نه با تجربه ممکن است و نه با شهود درونی. لذا شهودگرایان هم به ریاضیات متناهی تأکید دارند و ساختارگرا محسوب می‌شوند. تفکر متناهی برای شهودگرایان بسیار سرسختانه‌تر از صورت‌گرایان است؛ چرا که آنان فقط در ساختارهای صوری فراریاضی به تناهی تأکید دارند. تأکید براوئر این است که ریاضیات واقعی، ریاضیات شهودی است و مستقل از زبان و منطق سوار بر مفهوم درونی از زمان انجام می‌شود و زبان تنها یک ابزار برای بیان ریاضیات است. پس کار شهودگرا این است که ریاضیات را در محیط شهود محض می‌سازد، آن‌گاه به دقت آنان را بیان می‌کند، چنان‌که دیگران هم بتوانند همین عمل را به طور دقیق در دامنه‌ی شهود خود کامل کنند. کار شهود ساختن مفاهیم ریاضی است، نه این‌که به ما اطمینان دهد که چنین مفاهیمی وجود دارند. لذا از دیدگاه شهودگرایان قضایای وجودی جایی در ریاضیات ندارند. شهودگرایان به خاطر تأکید بر ساختارگرایی برهان خلف را نیز نمی‌پذیرند و با این کار استدلال‌هایی را که بی‌نهایت مرحله دارند، از ریاضیات خارج می‌کنند. شکست برنامه‌ی براوئر در این‌جا بود که نتوانست تمام ریاضیات را زیر چتر این تفکر متناهی افراطی بگنجاند.

هرچند شهودگرایی برهان خلف را که در هندسه‌ی اقلیدسی بسیار اهمیت دارد، نمی‌پذیرد، اما با تفکر هندسی که تفکری تصویری است، هماهنگی بسیاری دارد. از طرف دیگر، اصل موضوعه‌سازی صورت‌گرایان، پایه‌های منطقی هندسه را محکم‌تر از همیشه کرد. می‌بینیم که هر دو جبهه‌ی ساختارگرایان به هندسه‌ی اقلیدسی کمک می‌کنند، اما هر یک به بعدی از آن. دیدگاه آموزشی نیوتن نیز شایان ذکر است که

پیش از همه‌ی این فیلسوفان تفکری ساختارگرا داشته است. از دیدگاه نیوتن رسم با خط‌کش و پرگار ابزاری برای آزمایش و کشف احکام هندسی است و همسنگ تجربه در روش علمی است. آموزش هندسه بدون کمک ترسیم که نقش تجربه را ایفا می‌کند، مانند آموزش علوم طبیعی بدون تجربه‌ی صحّت تئوری‌های آن است.

فعالیت / دبستان ....

به دانش‌آموزان بیاموزید با طنابی که طول‌های مساوی روی آن گره خورده است، با کمک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ زاویه‌ی قائمه بسازند. از آنان بخواهید که با تاکردن کاغذ زاویه‌ی قائمه بسازند. سپس از آن‌ها بخواهید روش‌هایی برای ساختن زاویه‌ی قائمه ارائه دهند. هم‌چنین محک‌هایی برای این‌که آیا زاویه‌ی داده شده، قائمه است، ارائه دهند. برای زاویه‌های نیم قائمه، ثلث قائمه و دو ثلث قائمه همین فعالیت را تکرار کنید.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید که از الگوی سازنده‌ی یک هواپیمای مقوایی استفاده کنند و با کمک خط‌کش و پرگار درست عین همان الگو را روی مقوایی رسم کنند و سپس دور آن را قیچی کرده، هواپیما بسازند. حال از دانش‌آموزان بخواهید هواپیمایی درست دو برابر هواپیمای قبلی رسم کنند و سپس دور آن را قیچی کرده روی هم سوار کنند. سپس از دانش‌آموزان بپرسید که آیا می‌توانند برای هر عدد داده شده هواپیمایی همان‌قدر بزرگ‌تر با خط کش و پرگار و قیچی بسازند؟ سپس آن‌ها را به این ایده راهنمایی کنید که بعضی طول‌ها توسط خط‌کش و پرگار رسم‌پذیر نیستند.

فعالیت /دبیرستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید اثبات‌هایی را که در کتاب هندسه‌ی آنان با کمک برهان خلف آمده، بررسی کنند و ببینند آیا می‌توان اثباتی بدون برهان خلف از آن احکام

ارائه داد. سپس از دانش‌آموزان بخواهید در کتاب‌های درسی دیگر اثبات‌هایی را که با کمک برهان خلف کامل شده، مشخص نمایند و سعی کنند بگویند برهان خلف برای کدام‌یک از این برهان‌ها به نظر احرازناپذیر است.

فعالیت / دانشگاه ....

از آن‌جا که چشم بشر تنها می‌تواند بر روی یک نقطه تمرکز کند، مفهوم نقطه در اصول موضوعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی، یا اصول تعمیم داده شده‌ی هیلبرت، بسیار اهمیت یافته است. فرض کنید موجودی چنان خلق شده است که تنها می‌تواند بر خط تمرکز کند. برای چنین موجودی اصول موضوعه‌ی هندسه را چگونه می‌نویسید؟ اگر به جای طول پاره‌خط اندازه‌ی زوایا قابل اندازه‌گیری باشد، روی فرمول‌های روابط طولی چه تأثیری خواهد داشت؟ ترسیم با خط‌کش و پرگار باید با ترسیم توسط چه ابزارهایی جایگزین شود؟

۳-۱. تفکر پیوسته

تفکر پیوسته با مفهوم حرکت عجین شده است. این‌که بتوان موضوع مورد مطالعه را در حالت حرکت بررسی کرد یا از حرکت آن در مطالعه‌ی موضوع مورد نظر استفاده کرد، تفکر پیوسته خوانده می‌شود. هر چند حرکت یکی از مسائل اساسی فلسفه‌ی یونان است که از زمان پارمنیدس و دموکریتوس ـ که بسیار پیش از افلاطون می‌زیسته‌اند ـ مطرح بوده است، اما ایده‌ی حرکت توسط خیام وارد ریاضی شده است. او اولین کسی است که محور اعداد را به عنوان مدلی برای زمان در نظر گرفت و مفهوم عدد متغیر را با تناظر با حرکت نقطه روی محور تعریف کرد. پس از خیام و ظهور مفهوم متغیر، علم حل معادلات معنی دیگری به خود گرفت؛ چرا که با حرکت مربوط می‌شد و به مجهول‌یابی منحصر نمی‌شد. هم او کسی است که به حل کامل معادلات درجه‌ی سه توسط مقاطع مخروطی موفق شد. اگر اندکی بیش‌تر تلاش می‌کرد، حل معادلات درجه‌ی چهار توسط مقاطع مخروطی نیز برای او ممکن بود.

اما قرن‌ها طول کشید تا دانستند حل معادلات درجه‌ی سه و چهار به روش هندسی در یک درجه‌ی سختی قرار دارند.

تفکر پیوسته در کتاب اصول اقلیدس دیده نمی‌شود. برای مثال تمام اشکال مورد بحث اقلیدس، اشکالی صلب و غیرقابل حرکت دادن هستند، حتی در آثار هندسی ارشمیدس نیز حرکت وارد نشده است. حرکت از طریق مکانیک و احتمالاً با تنوع ابزارهای رسم مانند بیضی‌کش که صلب نیستند، وارد هندسه شده است. توجه کنید که هندسی‌سازی مکانیک در قانون اهرم‌ها از بزرگ‌ترین موفقیت‌های ارشمیدس محسوب می‌شود. او قوانینی در کار با قرقره‌ها نیز کشف کرد که در برنامه‌ی هندسه‌سازی او می‌گنجد؛ هر چند قرقره توسط افلاطون اختراع شده است.

نزاع پارمنیدس و دموکریتوس بر سر این بود که آیا حرکت وجود دارد یا خیر؟ هر چند حرکت در زندگی روزمره مشهود است، سؤال فلسفی این بود که اگر حرکت معنی دارد، پس شیء تغییر یافته با شیء اولیّه متفاوت است. در این صورت از کجا بفهمیم که این شیء همان شیء اولیه است که دست‌خوش تحول شده است. برای پاسخ به این سؤال فلسفی، افلاطون مفهوم جوهر و عرض را به‌وجود آورد که می‌گفت موجود متحرک و متغیر در ابعادی ثابت و در ابعادی متغیر است. این‌که ما می‌فهمیم در شیئی تغییری عارض شده و این همان شیء اولی است، به خاطر جوهر شیء است که ثابت مانده است. از دیدگاه افلاطون جوهر و عرض در دولایه‌ی تجرید متفاوت معنی می‌پذیرند و مفهوم جوهر مجردتر از مفهوم عرض است.

درک رابطه‌ی جوهر و عرض، رابطه‌ی بود و نمود، رابطه‌ی ظاهر و باطن و رابطه‌ی علت و معلول قرن‌ها مورد بحث قرار گرفت و معرکه‌ی آرای مخالفان بود تا این‌که در عصر کانت فیلسوفان غربی از درک آن ناامید شدند و به عجز خود اعتراف کردند و در عصر ملاصدرا با تعمیم آن به مفهوم حرکت جوهری، بسیاری از اختلافات با پاسخ قانع‌کننده‌ای مواجه شدند. خلاصه‌ی نظریات ملاصدرا آن‌طور که در سطح درک نگارنده می‌گنجد، چنین است که وجود، چندین لایه‌ی تجرید متفاوت دارد و حرکت در همه‌ی این لایه‌های تجرید ممکن است. وقتی تغییری در موجودی روی می‌دهد،

در بعضی از لایه‌های تجرید وجود، تغییر حاصل می‌شود و در بعضی دیگر سکون و ثبوت ملاحظه می‌شود. این درک لایه‌لایه از وجود با ساختار لایه‌لایه‌ی ریاضیات و ارتباط نمادین بین این لایه‌ها هماهنگی بسیاری دارد. از این‌رو آموزش ریاضیات در آماده‌سازی ساختار معرفتی برای شناخت معنویات بسیار کارآمد است. با توجه به این تشابه ساختاری، مفهوم حرکت در ریاضیات بسیار مجردتر از حرکت فیزیکی یا تصویری خواهد بود و درکی که از علم هندسه داریم، باید به این درجه از تجرید رسیده باشد که همه‌ی لایه‌های تجرید را دربربگیرد.

حرکت پیوسته در هندسه‌ی اقلیدسی، می‌تواند به صورت حرکت پیوسته‌ی اشکال هندسی معنی پیدا کند. مثلاً برای پیدا کردن مکان‌های هندسی به ایده‌ی حرکت پیوسته نیاز داریم. برای بررسی یک حکم در حالات تکینه نیز گاهی به حرکت پیوسته نیاز پیدا خواهد شد. در اکثر اوقات به جای این‌که حرکت یک شکل لازم باشد، خانواده‌ی اشکال کفایت می‌کند. در حالت مکان‌های هندسی نیز همین‌طور است و این بسیار کمک می‌کند تا بتوان ایده‌ی حرکت را از هندسه به جبر توسعه داد.

حرکت، آن‌طور که مشهود است، با ایده‌ی زمان عجین می‌شود و درک حرکت بدون درک صحیحی از فضا ـ زمان میسّر نمی‌شود. حرکت در جهان لایه‌لایه‌ی ملاصدرا در هر لایه‌ی تجرید، مفهومی از زمان را به‌دست می‌دهد که بین این مفاهیم زمان رابطه‌ی تجلی برقرار است. این مفاهیم زمان در هر لایه‌ی تجرید، نامی مخصوص به خود دارند. دهر و سرمد از این دست هستند تا زمانی که درک روشنی از این‌که لایه‌های تجرید ریاضیات کدام هستند، نداریم، درک صحیحی از این‌که حرکت در ریاضیات به چه معنی است، نخواهیم داشت. به‌ناچار ایده‌ی خانواده‌ی اشکال را به جبر توسعه می‌دهیم.

در جبر، خانواده‌ی ساختارهای عددی یا حتّی خانواده‌ی ساختارهای مجردتر مطرح هستند. در خانواده‌ی ساختارهای عددی، مفهوم میدان را جایگزین زمان می‌کنند و در خانواده‌ی ساختارهای مجردتر، از شیئی جهانی و خاصیت جهانی برای تعریف خانواده کمک می‌گیرند. اگر بتوانیم تصوری از حرکت در این حالات

تعمیم‌یافته به‌دست آوریم، موفق به هندسی‌سازی مفهوم خانواده شده‌ایم. معمولاً وقتی با میدان تمامی اعداد حقیقی کار می‌کنیم، تصور هندسی کار ساده‌ای است و در سایر حالات غیرممکن می‌کند.

تلاش‌های بسیار برای مدل‌سازی ریاضی حرکت پیوسته، سرانجام در نیمه‌ی دوم قرن نوزدهم به نتیجه رسیدند. برش‌های ددکینه و دنباله‌های کوشی، دو روش برای تولید اعداد حقیقی از روی اعداد گویا هستند. به زودی روشن شد که کامل‌سازی‌های دیگری نیز از اعداد گویا وجود دارند که در اصل ارشمیدس صدق نمی‌کنند. اصل ارشمیدس مربوط به میدان‌های مرتب می‌شود و کامل‌سازی‌های دیگر اعداد گویا میدان‌هایی مرتب نیستند. به ازای هر عدد اول p یک‌چنین کامل‌سازی غیرارشمیدسی قابل ساختن است و به آن میدان اعداد p- گون می‌گویند. اعداد حقیقی متناظر با عدد اوّل ∞ خواهد بود! هنوز فیزیک‌دانان موفق نشده‌اند تا میدان اعدادی حقیقی را به عنوان مدلی برای زمان با میدان اعداد p- گون جایگزین کنند، اما در بسیاری از فرمول‌بندی‌های فیزیکی مانند مکانیک کوانتومی، توانسته‌اند اعداد حقیقی را با مشابه p- گون آن جایگزین کنند و همان نتایج فیزیکی را بگیرند.

انجام دادن هندسه‌ی اقلیدسی روی صفحه‌ی p-گون نیز خالی از لطف نیست. هندسه‌ی خط p- گون بسیار عجیب است. گوی حول یک نقطه، اجتماع مجزایی از گوی‌های کوچک‌تر است، به طوری که تعداد این گوی‌های کوچک متناهی هستند. چنین حکمی در مورد محور اعداد حقیقی برقرار نیست. همان‌طور که میدان اعداد حقیقی بستار جبری دارد که آن را میدان اعداد مختلط می‌نامند، میدان‌های p- گون نیز دارای بستار جبری هستند که کامل‌سازی آن‌ها هندسه‌ای به زیبایی اعداد مختلط دارد. این کامل‌سازی‌ها را اعداد مختلط p- گون می‌نامند. درک حرکت پیوسته با زمان مختلط یا زمان مختلط p-گون نیز به هندسه‌سازی ساختارهای حسابی کمک می‌کنند.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید با مقوا و دکمه‌ی قابلمه‌ای عروسک‌هایی بسازند که دست‌ها و پاهای آن‌ها قابل حرکت کردن باشد. می‌توان ابتدا تصویر هر یک از اجزا را روی مقوا کشید و از دانش‌آموزان خواهش کرد تا دور آن را قیچی نمایند و با دکمه‌ی قابلمه‌ای به هم متصل کنند. سپس ساختارهای ساده‌ای با نوارهای مقوایی و لولاهایی که با دکمه‌ی قابلمه‌ای درست شده‌اند، بسازید و از دانش‌آموزان بخواهید مکان هندسی یکی از رأس‌ها را با مداد رسم کنند. حال با حرکت پیوسته لوزی را به مربع و متوازی‌الاضلاع را به مستطیل تبدیل کنید.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید با کمک چرخ‌دنده و تسمه و ابزارهای مشابه آن، دستگاهی طراحی کنند که حرکت دورانی را به حرکت دورانی حول محوری عمود بر محور اول تبدیل کنند. هم‌چنین دستگاهی طراحی کنند که حرکت دورانی را به حرکت مستقیم‌الخط رفت و برگشتی تبدیل کند. به‌علاوه دستگاهی بسازند که حرکت رفت و برگشتی مستقیم‌الخط را به چنین حرکتی در جهتی عمود بر جهت اول تبدیل کند.

فعالیت /دبیرستان...

ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید برای مثلث متساوی‌الاضلاع ثابت کنند سه میانه همرسند. سپس یک رأس را روی یک ضلع حرکت دهید و با کمک قضیه‌ی تالس همرسی میانه‌ها را برای تمام مثلث‌هایی که تشکیل می‌شوند، ثابت کنید. حال از دانش‌آموزان بخواهید حکم همرسی میانه‌ها را به همین روش با حرکت پیوسته‌ی مثلث‌ها به اثبات رسانند. بعد از این‌که دانش‌آموزان مفهوم اثبات توسط حرکت پیوسته را دریافتند، از آن‌ها بخواهید احکام دیگری را به دلخواه خود از همین روش اثبات کنند. تنوع پاسخ‌ها مورد تأکید است.

فعالیت / دانشگاه ....

به جای صفحه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}^2$، صفحه‌ی اعداد p-گون Q_p^2 را در نظر بگیرید و مفاهیم خط و دایره را در این صفحه تعریف کنید. سپس سعی کنید ببینید چه احکامی از هندسه‌ی اقلیدسی در Q_p^2 برقرارند و چه احکامی برقرار نیستند؟ در مورد حل معادلات چندجمله‌ای در Q_p چه می‌توان گفت؟ در مورد حل معادلات دیفرانسیل روی Q_p چه می‌توان گفت؟

۴-۱. تفکر تصویری

این‌که هندسه چیست، عمیقاً با تفکر تصویری گره خورده است. شاید بهتر باشد تفکر تصویری را به اضدادش معرفی کرد. تفکر تصویری در برابر تفکر کلامی و تفکر دست ورزانه قرار می‌گیرد. تفکر کلامی، تفکری مرحله به مرحله، قراردادی و قابل تقسیم به اجزاست. کسانی که کلامی فکر می‌کنند، ساختمانی را در ذهن خود مرحله به مرحله می‌سازند و روندی منطقی را پله به پله طی می‌کنند تا به مقصد برسند. تفکر دست ورزانه تفکری عملی و تجربی است. کسانی که دست ورزانه فکر می‌کنند، برای تفکر نیازمند به ابزار دست‌ورزی هستند. تفکر تصویری، تفکری کل‌نگر، شهودی و بصری است. کسانی که تصویری فکر می‌کنند، هنگام تفکر تابلویی را در ذهن خود می‌سازند که وقتی کامل شد، ادراک تصویری ممکن خواهد بود. ادراک تصویری، ادراکی دفعی و ناگهانی است و از مفاهیم سرتاسری و کل‌نگرانه شکل گرفته است.

درک چیستی تفکر تصویری با مفهوم ترسیم هندسی گره خورده است. ترسیم عملی است که یک حقیقت ریاضی را برای تفکر تصویری مهیا می‌سازد. در واقع، ترسیم تصویرساز است. ترسیم‌های هندسی روش‌های هندسی‌سازی مسائل هستند. طبیعت هر مسئله‌ای ایجاب می‌کند که طور خاصی هندسی‌سازی شود. به عبارت دیگر، هر مسئله‌ای، هندسه‌ای طبیعی و مخصوص به خود دارد. این نقش هندسه‌دان است که هندسه‌ی طبیعی مسائل را کشف و با این کار تصویرسازی کند و مسئله را برای تفکر تصویری مهیا کند.

تقابل تفکر تصویری و تفکر جبری از تجلیات تقابل شـــهود و عقل اســـت. شهود کل‌نگر و عقل ساختارساز، دو بعد معرفتی انسان هستند که یکدیگر را کامل می‌کنند. شهود به نور ادراک می‌کند و عقل به ساختار، لذا شهود از عقل مجردتر است. از این‌رو تفکر تصویری از تفکر جبری مجردتر می‌باشد و هندسی‌سازی مسئله بر جبری‌سازی آن مقدم است. از این‌رو، تفکر جبری در بستر تاریخ باید زودتر از تفکر هندسی شکل گرفته باشد و باید ارتباط با کلام بر ارتباط با تصویر تقدم داشته باشد.

همان‌طور که ســـاختار ابزار عقل است و انسان ساختارساز است، نور ابزار شهود اســـت و انســـان باید بتواند خالق انوار باشـــد. این حقیقت که هندسه‌دان هندسه‌ساز اســـت، تجلی همین خلق انوار اســـت. هندسه‌دان می‌تواند به تفکر تصویری معنی‌ای جدید ببخشد؛ معنی‌ای که پیش از آن متصور نبوده است. به همین دلیل است که علم هندســـه همواره رو به کمال می‌رود و مفهوم فضای هندســـی در تاریخ علم، پیوســـته پیچیده‌تر و غنی‌تر می‌شود. با کمال یافتن درک ما از هندسه و فضای هندسی، درک ما از طبیعت اطرافمان بیش‌تر خواهد شـــد و مفاهیم فیزیکی را عمیق‌تر خواهیم فهمید و این به مثابه‌ی نوری است که هندسه‌دان خالق آن بوده است.

برای مثال، خلق اشیای مجرد خط و دایره که هرگز به طور مطلق در طبیعت یافت نمی‌شـــوند، به عنوان مدل‌هایی برای حرکت مســـتقیم‌الخط و دورانی که حتماً قبل از تالس انجام شـــده اســـت، خود یک نوع هندسی‌سازی اســـت. هندسی‌سازی حرکت ســـتارگان در آسمان منجر به هندسه‌ی اقلیدسی شد. هندسی‌سازی اصول موضوعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی، منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی گردید. هندسی‌سازی مفهوم فضا، منجر به مکانیک نیوتنی و هندسی‌ســـازی فضا – زمان، منجر به مکانیک نســـبیتی شد. هندسه، قبل و بعد از نسبیت، قبل و بعد از مکانیک نیوتنی قبل و بعد از هندسه‌های نااقلیدسی، معانی متفاوتی داشته است. تفکر تصویری بعد از نسبیت، فضای در حال دگرگونی را هم می‌پوشـــاند؛ تفکر تصویری بعد از مکانیک نیوتنی، دینامیک اجســـام متحرک را نیز در خود وارد می‌کند؛ تفکر تصویری بعد از هندســـه‌های نااقلیدســـی، مفهوم مدل را نیز در خود می‌گنجاند؛ و تفکر تصویری بعد از هندســـه‌ی اقلیدســـی به

دقت ریاضی مزیّن می‌شود.

سؤال این‌که آیا می‌توان یک حقیقت ریاضی را به چند روش مختلف هندسی‌سازی کرد؟ به عبارت دیگر، آیا ممکن است چند نوع تفکر تصویری برای درک موضوع واحدی ارائه شود؟ مثال‌هایی بسیار ساده نشان می‌دهند که این کار ممکن است. مثلاً هندسی‌سازی اتحادهای جبری به‌هیچ‌وجه یکتا نیستند. این نشان می‌دهد که علم هندسه که سنگ‌بنای ریاضیات و فلسفه محسوب می‌شود، علمی ذاتی و از پیش تعیین شده نیست و تأیید می‌کند که علم هندسه نوعی مدل‌سازی است که مسئله را برای تفکر تصویری مهیا می‌کند. ممکن است هندسه طور دیگری شکل می‌گرفت و تاریخ تکامل و هم محصول نهایی آن با آن‌چه واقع شده، متفاوت می‌بود. این نکته راهنماست به این‌که ریاضیات علمی ذاتی نیست و روند شکل‌گیری آن وابسته به تمدن‌هایی است که در آن‌ها شکل می‌گیرد.

آن‌چه در ریاضیات اصالت دارد و ذاتی است، ساختارهای شناختی انسانی است که به چنین علمی منجر می‌شوند. مثلاً تفکر تصویری از چه ساختارهای شناختی انسانی نتیجه می‌شود؟ تفکر تصویری از این‌جا ناشی می‌شود که انسان موجودی است که ظاهر و باطن آن به بصر و بصیرت مزیّن شده است. پس ارتباط برقرار کردن انسان با تصاویر، لایه‌های تجرید متفاوتی دارد و با هر کدام از لایه‌های تجرید مفهومی از هندسه متناظر می‌شود و بین این علوم بصری رابطه‌ی تجلی برقرار است. این‌که تفکر تصویری ذاتی انسان است، بدین معنی است که ریاضیات به هر شکلی که تحول پیدا می‌کرد و به هر ثمره‌ای که ختم می‌شد، شاهراه تفکر تصویری و علم هندسه به همین معنی که ما می‌شناسیم، در آن به‌وجود می‌آمد. به عبارت دیگر، هر چند علم هندسه ذاتی و از پیش تعیین شده نیست، اما تعریف آن ذاتی و از پیش معلوم است و این به خاطر ساختارشناختی انسانی است که از پیش تعیین شده است.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید همیشه در محاسبات عددی شکل بکشند؛ حتّی اگر لازم

باشد نقاشی کنند.

اگر ممکن است محاسبات خود را با چند روش به انجام برسانند و این روش‌ها را در شکل خود منعکس کنند. نقاشی‌های آنان را با تصاویر واقعی مقایسه کنید و از آن‌ها بخواهید مکان نسبی اشیا را مقایسه کنند و بگویند که آیا هر شیئی در جای درستی نقاشی شده است یا خیر؟

فعالیت / راهنمایی ....

احکام هندسی را که هنوز دانش‌آموزان قادر به اثبات آن‌ها نیستند، به آنان ارائه کنید و بخواهید با رسم شکل‌های دقیق توسط خط‌کش و پرگار برای چند شکل مختلف، صحت یا عدم صحت این احکام را حدس بزنند.

در هر مورد تعداد پاسخ‌های مثبت و منفی را با نمودار ستونی نمایش دهید و ببینید که آیا اکثر افراد به پاسخ صحیح رسیده‌اند یا خیر. سعی کنید احکام مطرح شده به اندازه‌ی کافی به سادگی قابل رسم باشند که جواب مثبت بگیرید.

فعالیت / دبیرستان ....

فرض کنید مورچه‌ای روی سطح یک مکعب از یک رأس به رأس روبه‌روی قطری در حال حرکت است. کوتاه‌ترین مسیر را برای او تعیین کنید. همین مسئله را برای یک مکعب مستطیل، منشور، هرم و احجام افلاطونی منتظم حل کنید. حال یک میز بیلیارد در نظر بگیرید. کوتاه‌ترین مسیری که توپ از یک نقطه‌ی دلخواه به نقطه‌ی دیگری پس از برخورد با لبه‌های میز می‌تواند طی کند، چگونه پیدا کنیم؟ کوتاه‌ترین مسیر نوری که نور در یک تالار آینه از یک نقطه به نقطه‌ی دیگری پس از برخورد و انعکاس از آینه‌ها می‌تواند طی کند، چگونه پیدا کنیم؟ مثال‌هایی از یک تالار آینه در نظر بگیرید که به شکل مکعب مستطیل نباشد و مسئله را برای این مثال‌ها نیز حل کنید.

فعالیت / دانشگاه ....

یک معادله‌ی چندجمله‌ای در نظر بگیرید. آیا ریشه‌ها تابعی پیوسته از ضرایب هستند؟ آیا با تغییرات کوچک ضرایب، ریشه‌ها نیز تغییرات کوچک می‌کنند؟ حال جواب‌های یک معادله‌ی دیفرانسیل را در نظر بگیرید. آیا جواب‌ها تابعی پیوسته از ضرایب هستند؟ آیا با تغییرات کوچک ضرایب جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل نیز تغییرات کوچک می‌کنند؟ برای درک هندسه‌ی تغییرات ریشه‌های یک چندجمله‌ای، مدلی بسازید. برای درک تغییرات جواب‌های یک معادله‌ی دیفرانسیل، چه مدل هندسی معرفی می‌کنید؟

۵-۱. استدلال و پیچیدگی هندسی

چنان‌که دیدیم علم هندسه ذاتی و از پیش تعیین شده نیست، اما این‌که هندسه چیست، ذاتی است و به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد. ساختار استدلال در هندسه‌ی اقلیدسی که مطمئناً در زمان تالس شکل نگرفته بود و به مرور کامل شد، از همین ابعاد ذاتی هندسه است که به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد. این‌که استدلال چیست و چگونه ما را به حقیقت رهنمون می‌کند؟ و این‌که چرا یقین هندسی با استدلال تأمین می‌شود؟ و این‌که چرا استدلال ما را به احکام متناقض نمی‌رساند؟ سؤالاتی است که در چارچوب شناخت‌شناسی می‌گنجد. اقلیدس کسی بود که ساختار استدلالی هندسه را به تمام ریاضیات توسعه داد و یک استاندارد ماندگار از دقت ریاضی به جای گذاشت. این تأییدی است بر این‌که ساختار استدلالی هندسه فراهندسی است و به ساختارشناختی انسانی بازمی‌گردد.

در جهت فرمول‌بندی تفکر منطقی مستقل از ریاضیات، تلاش‌هایی صورت گرفته است. شاید بتوان گفت که مهم‌ترین نقش در این راه توسط فرگه ایفا شد. هرچند فلسفه‌ی ریاضی قبل از فرگه و پس از آن، صورت کاملاً متفاوتی دارد و ریاضی‌دانان فیلسوف و فیلسوفان ریاضی‌دان به این نتیجه می‌رسند که شاخه‌ای جدید به نام منطق را پایه‌گذاری کنند تا یکسری مشکلات در مبانی ریاضی را حل کند، با وجود

این‌که منطق و ریاضیات مسیر تکامل مستقلی را پیموده‌اند، صحیح نیست اگر داستان فلسفه‌ی ریاضی قبل از فرگه و بعد از آن را یک داستان پیوسته ندانیم. هرچند در زبان و ابزارهای فلسفه، انقلابی به‌پا شد، اما هرگز نمی‌توان گفت که نقش فلسفه‌ی ریاضی پس از فرگه تغییر پیدا کرده است. لذا داستان فلسفه‌های ریاضی را از یونان باستان دنبال می‌کنیم.

از دیدگاه افلاطون مهم‌ترین مسئله‌ی فلسفه تشخیص حقیقت از نمود است؛ حقیقتی که تغییرناپذیر است. محک حقیقت ریاضی از دید او، دقت ریاضی و استقلال از زمان است. فلسفه‌ی ریاضی ارسطو در تقابل با فلسفه‌ی افلاطون شکل گرفت. او به‌هیچ‌وجه برای شیئی حاصل تجرید، وجودی مستقل قائل نبود. بنابراین دایره باید در همان چیزی باشد که از آن تجرید شده یا به تعداد موضوع تجرید دایره داریم. ارسطو به جای تجرید، مفهوم کلاس اشیا را جایگزین کرد. هم‌چنین بین اصول اولیه‌ی مشترک بین همه‌ی علوم، اصولی که ریاضی‌دانان صحت آن را فرض می‌کنند، تعاریفی که فرض نمی‌کنند آن‌چه تعریف می‌کنند وجود دارد، و فرضیات وجودی تمایز قائل شد.

لایبنیتز مانند افلاطون و ارسطو فیلسوف بود. دکترین منطقی و متافیزیکی او بسیار شبیه ارسطوست. در منطق ارسطویی هر گزاره قابل تحویل به شکل موضوع محور است و در متافیزیک ارسطویی، جهان از جوهرهایی همراه با عرض تشکیل شده است. این منطق و متافیزیک تطابق دارند. در منطق لایبنیتزی محمول هر گزاره مشمول در موضوع است و در متافیزیک او جهان از موضوعات یا مونادهایی مستقل که نمی‌توانند ارتباط برقرار کنند، تشکیل شده است. این منطق و متافیزیک از یکدیگر جدایی‌ناپذیرند. از دیدگاه لایبنیتز حقیقت با استدلال عجین است و غیرآن ممکن نیست، اما واقعیت‌ها ممکن است وارونه باشند. اصل عدم تناقض و اصل عدم وقوع بدون دلیل کافی، مبنای منطق استدلالی لایبنیتز را تشکیل می‌دهند. در فلسفه‌ی او حقیقت است که مورد بررسی قرار می‌گیرد، نه واقعیت. نظر او درباره‌ی ریاضیات متفاوت با نظر افلاطون و ارسطوست. از گزاره‌های ریاضی درباره‌ی اشیای خاص

ایده‌آل‌سازی شده سخن نمی‌گویند، بلکه این گزاره‌ها صحیح هستند چون انکار آن‌ها از لحاظ منطقی غیرممکن است. لایبنیتز تأثیرگذارترین فرد بر منطق فرگه بود. هرچند فرگه و پیروانش هرگز موفق نشدند که ریاضیات را کاملاً بر منطق استوار کنند و در نهایت کُنه استدلال بشری ناشناخته ماند. این برنامه‌ای بود که توسط لایبنیتز طراحی شده بوده و شکست آن پیروان کانت را در صدر فلسفه‌ی ریاضی قرار داد. هرچند کانت قبل از نوشتن «نقد خرد محض» بسیار تحت‌تأثیر لایبنیتز بود، اما پس از دوازده سال کار روی دکترین خود، فلسفه‌ای کاملاً مستقل بنا کرد که در شناخت استدلال هندسی بسیار راهگشاست. او به فرق بزرگ ریاضیات و فلسفه‌ی اولی پی برد. این‌که موضوعات ریاضی همه درون ذهنی هستند، اما جسم و جان چون مخلوق ذهن نیستند، به برهان عقلی حقیقتشان به‌دست نمی‌آید.

کانت دو وجه متمایز را که در فلسفه‌ی لایبنیتز درهم آمیخته‌اند، جدا می‌کند: یکی تمایز قضایای تحلیلی و ترکیبی، و دیگری تمایز میان قضایای پیشینی و تجربی. تحلیلی یعنی از تعاریف درونی مفاهیم نتیجه شود و ترکیبی غیر آن است. همه‌ی قضایایی که تنها از راه تجربه به آن علم داریم، ترکیبی هستند، اما برخلاف لایبنیتز و دیگران، کانت نمی‌پذیرد که همه‌ی قضایای ترکیبی تجربی هستند. هیوم ثابت کرده بود که قانون علیت تحلیلی نیست و کانت ادعا کرد که ترکیبی است، اما علم به آن به طریق پیشینی حاصل می‌شود. قضیه‌ی پیشینی قضیه‌ای است که ممکن است توسط تجربه استخراج شود، اما بعد معلوم می‌شود که مبنایی فراتر از تجربه دارد. از نظر کانت همه‌ی قضایای ریاضی محض به این معنی پیشینی است. اما چگونه حکم ترکیبی ممکن است پیشینی باشد؟ این همان مسئله‌ای است که دوازده سال روی آن کار کرد. سرآخر فلسفه‌ی کانت به این‌جا می‌رسد که معرفت از حدود تجربه فراتر نمی‌رود و این حدود را دقیقاً تعیین می‌کند و با این کار انقلابی کوپرنیکی در فلسفه به‌وجود می‌آورد.

از دیدگاه کانت، دنیای خارج فقط مایه‌ی احساس می‌شود، اما دستگاه ذهنی، آن را در زمان و مکان تقسیم می‌کند و تصوراتی را که ادراکاتی تجربی هستند، فراهم

می‌کند. کانت می‌گوید زمان و مکان تصور نیستند، بلکه اشکالی از «دید» هستند، اما تصورات پیشینی هم وجود دارند که همان مقولات دوازده‌گانه‌ی منطق قیاسی ارسطو هستند. بخش اعظم کتاب «نقد خرد محض» به خطاهایی می‌پردازد که از انطباق دادن زمان و مکان بر آنچه به تجربه درنمی‌آید، حادث می‌شود. کانت معتقد است که موضوعات بلاواسطه، بعضی از موجودات خارجی و بعضی از دستگاه ادراکی ما ناشی می‌شوند. جزء منبعث از ذهن ما وابسته به تجربه نیست و پیشینی است. جزء منبعث از موجود خارجی را احساس می‌نامد که دو صورت دارد: زمان و مکان، یکی مربوط به حس درونی و دیگری مربوط به حس بیرونی.

برای اثبات این ادعا که زمان و مکان پیشینی هستند، کانت دو نوع برهان می‌آورد؛ یکی برهان مابعدالطبیعی که از ماهیت زمان و مکان گرفته شده است و دیگری برهان معرفت‌شناختی که از امکان ریاضیات محض استفاده می‌کند. برهان درباره‌ی مکان از هندسه گرفته شده است و در برهان زمان حساب جای هندسه را می‌گیرد، زیرا هنگام عمل شمارش زمان مصرف می‌شود! کانت عقیده دارد که علم ما به هندسه‌ی اقلیدسی پیشینی است، هرچند این هندسه ترکیبی است؛ یعنی از منطق محض قابل استنتاج نیست. براهین هندسه متکی به شکل هستند و این تصورات مربوط به اشکال از پیش در ذهن ما کاشته شده‌اند.

نظریات کانت نتیجه می‌دهند که پیچیدگی یک حکم هندسی با پیچیدگی برهان آن نسبت مستقیم دارد. حتّی می‌توان حقیقت هندسی را از روی خواص برهان آن توصیف کرد. چنین باوری کُنه ذات هندسه را کاملاً دردسترس ذهن ما قرار می‌دهد، چرا که استدلال دقیقاً همان زبانی است که ذهن ما متوجه می‌شود. به‌طور خلاصه اگر می‌خواهید بدانید که هندسه چیست، کافی است بفهمید که استدلال هندسی چیست. اما از آن‌جا که ما به چیستی استدلال هندسی علم حضوری داریم، شناخت آن از شناخت هندسه بیش‌تر دردسترس ما قرار دارد.

فعالیت / دبستان ....

اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و... را اعداد فرد و اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ و... را اعداد زوج بنامید. از دانش‌آموزان بخواهید در مورد اعداد زوج و فرد بحث کنند و برای آن‌ها تعریفی ارائه کنند. سپس سعی کنند با کمک تعریفی که پیدا کرده‌اند، ثابت کنند مجموع دو عدد زوج، یک عدد زوج و مجموع دو عدد فرد، یک عدد زوج و مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.

فعالیت/ راهنمایی ....

اشکال متشابهی را رسم کنید و نسبت طول‌های متناظر بین دو شکل را نسبت تشابه بنامید. با رسم ارتفاع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌توان آن را به دو مثلث متشابه افراز کرد که مجموع نسبت‌های تشابه آن‌ها با مثلث اصلی یک می‌شود. چند شکل دیگر هندسی بسازید که به متناهی کپی از اشکال متشابه افراز شوند. برای هر کدام از این افرازها، جمع نسبت‌های تشابه برابر یک است. حال فرض کنید جمع دو نسبت یک باشد. آیا لزوماً شکلی وجود دارد که به دو کپی مشابه خود با آن دو نسبت تشابه افراز شود؟ در مورد جمع چند نسبت چه‌طور؟

فعالیت /دبیرستان ....

جبر گزاره‌ها را با کمک جداول درستی و نادرستی به دانش‌آموزان بیاموزید. حال فرض کنید اطلاعاتی به زبان احتمالات در مورد درستی یا نادرستی ارزش گزاره‌ها داشته باشیم. از روی این داده‌ها و با کمک حساب احتمالات می‌توان احتمال درستی یا نادرستی یک جمله ترکیبی را از روی جملات ساده یا برعکس محاسبه کرد. چنین مسئله‌ای طراحی کنید و با تغییرات در احتمال درستی یا نادرستی‌های داده شده، تغییرات احتمال نهایی را بررسی کنید. آیا عدد نهایی همیشه تابعی خطی از داده‌های اولیه است؟

فعالیت / دانشگاه

موجوداتی ترکیباتی در نظر بگیرید که در هر مرحله برطبق الگوریتمی تحول پیدا می‌کنند و به موجود جدیدی تبدیل می‌شوند. سپس مخروط آینده ـ گذشته‌ی این موجودات را در نظر بگیرید و بررسی کنید که چه موجوداتی آینده‌شان با گذشته‌شان اشتراک دارد. برای این کار لازم است الگوریتم تحول برای آینده‌ی یک موجود، تنوعی قائل باشد. حال در مورد هندسه‌ی فضا ـ زمان برای دنیایی که این موجودات در آن زندگی می‌کنند، بحث کنید. چه احکامی قابل اثبات‌اند. تنوع الگوریتم‌ها و تنوع احکام قابل اثبات در این فضا ـ زمان‌ها مورد تأکیدند.

فصل ۲

لایه‌های تجرید هندسه و علم ترسیم

دیدیم که برخلاف افلاطون، انسان‌شناسی ارسطو و سایر فیلسوفان شهیر متأخر، انسان را متشکل از جسم و جان می‌داند. تئوری‌های شناخت در این فلسفه‌ها ناچارند همه‌ی ادراکات انسانی را با همین دو بُعد انسان تبیین کنند. از طرفی انسان‌شناسی فیلسوفان اسلامی هم‌چون افلاطون، انسان را موجودی با چندین لایه‌ی تجرید مرتبط می‌شناسد و این در شناخت‌شناسی اسلامی نتایج تعیین‌کننده‌ای دارد. لایه‌های تجرید علم ریاضیات، تأییدی است بر کثرت لایه‌های تجرید شناختی انسان ولذا تأییدی است بر انسان‌شناسی اسلامی. چنین دیدگاهی نسبت به انسان، ایجاب می‌کند که فلسفه‌ی ریاضی راهی بسیار متفاوت با نظریات لایبنیتز، کانت و پیروانشان در پیش بگیرد.

در این نگاه جدید به فلسفه‌ی علم، ساختار علوم چه از لحاظ نظام لایه‌های تجرید، چه از لحاظ ابعاد اجتماعی انقلاب‌های علمی و چه از دیدگاه تاریخ علم، بسیار شبیه ساختارهای شناختی انسان است. شباهت ساختار علم و ساختار عالم در علوم

مجردتر مثل ریاضیات و فلسفه آشکارتر است. حتّی ساختار علم بر ساختارشناختی متعلم تأثیرگذار است. به‌علاوه ساختار معرفتی عالم در ساختارشناختی تحقیقات علمی او منعکس می‌شود. می‌بینیم که شباهت ساختار علم و عالم تمام ابعاد را دربرمی‌گیرد. حتّی در فلسفه‌ی اسلامی به اتحاد عالم و معلوم اعتقاد دارند.

هم‌نشینی عالم و علم در شرق، همیشه آشکارا مورد توجه بوده است. شخصیت عالم در شرق هم‌نشین تئوری‌های عملی او بوده و روند کشف حقیقت، همواره در کنار علم تدریس می‌شده است. علومی که توسط مسلمانان به‌وجود آمده، سرشار از نشانه‌های تربیت عقلانی و معنوی ایشان است. فلسفه‌ی علم در کنار علم تدریس می‌شده و به همین دلیل دانشمندان شاگردان بسیاری داشتند که از سبک و روش و دیدگاه‌های استادشان پیروی می‌کردند و این باعث پیشرفت و توسعه‌ی علوم بود.

این انسان‌شناسی موجب می‌شود در تحقیقات علمی به تفاوت‌های نژادی، تفاوت‌های مدرسه‌ی علمی و هم تفاوت‌های فردی بسیار توجه شود. حتّی امروزه بسیاری از ریاضی‌دانان اعتقاد دارند که نژادهای مختلف مهارت‌های متفاوتی در تحقیقات علمی دارند: ژاپنی‌ها در محاسبات، ایرانیان در جبر، نژادهای لاتین در هندسه، روس‌ها در ریاضی ـ فیزیک، کشورهای اروپای شرقی در ترکیبیات، انگلیسی‌ها در ریاضیات کاربردی، آلمانی‌ها در فلسفه و... مهارت خود را به نمایش گذاشته‌اند. شاید اگر بسیاری از علوم مدرن در شرق توسعه می‌یافتند، صورت ظاهری دیگری داشتند. مثلاً ممکن بود شرقی‌ها برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی از مدل‌های ریاضی دیگری کمک می‌گرفتند و حداقل پنهان‌سازی نقش عالم در علم مورد تأکید قرار نمی‌گرفت.

در علم مدرن سعی دارند به علم چهره‌ای مستقل از تمدن‌ها و فرهنگ‌ها بدهند، تا چه رسد به این‌که به نقش ماوراءالطبیعه در شکل‌گیری تفکر علمی اقرار کنند. حتّی عالمان سعی می‌کنند روند کشف را نیز پنهان کنند تا هیچ اثری از شخصیت عالم باقی نماند. این‌که سبک تألیف مقالات علمی همه یکدست و یکپارچه است، گواهی بر این مدعاست. گرایش به اصل موضوعه‌ای کردن ریاضیات توسط هیلبرت و شاگردانش در اوایل قرن بیستم و سپس توسط گروه بورباکی، افراطی‌ترین اقدامات در جهت

پنهان‌سازی نقش عالم است. هرچند یک علم مجردتر باشد، بر روند پنهان‌سازی نقش عالم بیش‌تر تأکید می‌شود. در ریاضیات و فلسفه، بیش از همه چنین حرکتی آشکار است.

انسان‌شناسی اسلامی نتایج مهمی در فلسفه‌ی علم دارد. برای مثال، تاریخ رشد تفکر علمی را می‌توان با شناخت شخصیت‌های علمی برجسته که در آن تأثیرگذار بوده‌اند، مطالعه کرد؛ چرا که این شخصیت‌ها خلاصه و عصاره‌ی اوضاع علمی زمان خود بوده‌اند و یا نقش شخصیت‌های علمی در تاریخ رشد تفکر علمی، مشابه نقش شخصیت‌های یادگیری درون ذهن متعلم است و هر متعلم متناسب با توانایی این شخصیت‌های یادگیری، می‌تواند در علوم عمیق شود. مهم‌ترین نتیجه این‌که، شناخت لایه‌های تجرید هستی انسان، به شناخت لایه‌های تجرید علم کمک خواهند کرد.

نگاهی انسانی به علم نتیجه می‌دهد که علوم واقعیت‌های عینی هستند؛ نه ذهنی و نه مادی، بلکه مثالی و عقلانی، اما مطابق با عالم ماده. یعنی علم، هم فعالیتی بشری است و هم پدیده‌ای اجتماعی و هم بخشی از فرهنگ بشری است و هم درگیر با تاریخ و هم قابل درک و فهمیدنی است و در عین حال، خارج از همه‌ی اذهان وجود دارد. همان‌طور که برای ادراک انسان لایه‌های تجرید مختلف مثل برزخ و عقل قائل می‌شویم، می‌توان برای جهان خلقت نیز عالم برزخ و عالم عقل را مستقل از بشر قائل شد و این‌گونه خاستگاهی برای علم مستقل از بشر معنی خواهد داشت.

بنابراین، ساختار علوم و ساختار معرفتی جهان هستی در ساختار ادراک انسانی خلاصه شده است. ارتباط ساختار علم و ساختار ادراک انسانی باید بررسی شود تا رابطه‌ی عالم و علم و رابطه‌ی متعلم و علم شناخته شود. علم و ادراک انسانی هر دو ذومراتب هستند و با تمام لایه‌های هستی خود ارتباط برقرار می‌کنند. همان‌طور که دو انسان بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند، علم بر نظام شناختی عالم و نظام شناختی عالم بر علم تأثیر می‌گذارند.

سرآخر این‌که مراتب تشکیل لایه‌های تجرید هستی انسان، مطابق با مراحل شکل‌گیری لایه‌های شناخت اوست. بنابر انسان‌شناسی و شناخت‌شناسی مطرح شده،

این دو مطابق‌اند با مراتب شکل‌گیری لایه‌های تجرید علم که به راحتی قابل بازشناسی از تاریخ آن علم نیز هست. این روشی عملی به‌دست می‌دهد که لایه‌های تجرید علوم بازشناسی شوند و ارتباط بین این لایه‌های تجرید مورد بررسی قرار گیرند.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید الگوریتم‌های جمع و تفریق که در محاسبات پولی در جامعه رواج دارد، جمع‌آوری کنند، الگوریتم‌های مناطق مختلف شهر را با هم مقایسه کنند و در صورت ممکن الگوریتم‌های شهرهای مختلف را مقایسه کنند و تفاوت‌های فرهنگی مردم را در محاسبه کردن به کمک اسکناس مورد بررسی قرار دهند.

فعالیت/ راهنمایی ....

مصریان برای مسّاحی نواحی اطراف نیل به هندسه نیاز داشتند. بابلیان برای نجوم و پیشگویی‌های فصلی به هندسه علاقه‌مند شدند و هندیان برای ساختن آتشکده‌های هم مساحت به هندسه پرداختند. از دانش‌آموزان بخواهید از بین چندین حکم هندسی تصمیم بگیرند که کدام‌ها بیش‌تر مورد نیاز تمدن مصر، کدام‌ها مورد نیاز تمدن بابل و کدام‌ها مورد نیاز تمدن هند بوده است. چرا این نیازهای مستقل توسط علم مشترکی برآورده می‌شوند؟

فعالیت /دبیرستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید پس از حل هر مسئله‌ای، روند تفکر خود را یادداشت کنند و بنویسند در طی مراحل حل مسئله چه تصمیم‌گیری‌هایی انجام داده‌اند. پس از این‌که آموختند چگونه روند تفکر خود را با جزئیات بنویسند، از آنان بخواهید روند تفکر خود را کنترل کنند. استراتژی‌های حل مسئله را فهرست کنند و استراتژی مناسب را انتخاب کنند. سپس از دانش‌آموزان بخواهید شخصیت حل مسئله‌ی خود را با دوستانشان مقایسه کنند و بگویند هرکدام برای حل چگونه مسائلی مناسب‌اند.

فعالیت / دانشگاه ....

در مورد مکاتب ریاضی در کشورهای مختلف تحقیق کنید و ببینید چه کشورهایی در چه شاخه‌هایی از ریاضیات صاحب مکتب هستند. سپس نژادهای مشابه را مقایسه کنید و ببینید آیا ریاضیاتی که در آن صاحب مکتب هستند، بین آن‌ها مشترک است؟ سپس نژادهای مختلف را مقایسه کنید و توانایی‌های ریاضی هر یک را به طور تقریبی تعیین کنید. سپس بررسی کنید که آیا این توانایی‌ها با فرهنگ قومی یا عوامل جغرافیایی ارتباطی داشته‌اند یا خیر؟ آن‌گاه فرض کنید یک مکتب ریاضی در محملی غیر از محمل واقعی خود توسعه می‌یافت. بررسی کنید که توسعه و تکامل این مکتب در کشور جدید، احتمالاً چه تفاوت‌هایی با توسعه‌ی آن در محمل واقعی خود می‌داشت.

۱-۲. اشیای هندسی

نقطه چیست؟ خط چیست؟ دایره چیست؟ بیضی چیست؟... آیا این اشیای مجرد ریاضی در طبیعت پیدا می‌شوند؟ آیا این اشیای هندسی از ایده‌آل‌سازی مفاهیم و اشکال روزمره به دست آمده‌اند؟ آیا از یک درجه‌ی تجرید هستند؟ آیا این اشیا وجود دارند؟ اگر وجود دارند، آیا ساختنی هستند؟ آیا می‌توان آن‌ها را در مفهوم یگانه‌ای متحد کرد؟ چه ساختارهایی با این اشیا قابل ساختن هستند؟ این ساختارها از چه درجه‌ای از پیچیدگی برخوردارند؟ آیا این اشیا را می‌توان به‌طور پیوسته تغییر داد، به طوری که از همان جنس بمانند؟ صلب هستند یا قابل دگردیسی؟ آیا می‌توان خانواده‌ای از این اشیا را مطالعه کرد؟ آیا می‌توان این اشیا را به صورت مکان هندسی تعریف کرد؟ آیا این اشیای هندسی رسم‌پذیرند؟ آیا می‌توان ابزارهایی ساخت که به کمک آن‌ها بتوان این اشیا را رسم کرد؟ آیا چنین ابزارهایی تنوع دارند؟

بسیاری از اشیای هندسی قبل از تالس تعریف شده‌اند و برای مدل‌سازی هندسی حرکت ستارگان یا مدل‌سازی هندسی سطوح و احجام برای بازرگانی به کار می‌رفته‌اند. چنین نیست که این اشیا هیچ‌گونه ظهوری در طبیعت نداشته باشند. مثلاً دایره در

خورشـید و ماه و گیاهان مشـاهده شـده بود یا خط در افق، پرتو نور و طناب کشـیده شـده، دردسترس ذهن بشر بوده اسـت. اما این‌طور نیست که ذهن با این اشیا منفعل برخورد کرده باشد، بلکه با ایده‌آل‌سازی، اشکال موردنظر را قابل بیان به زبانی دقیق و یقینـی کرده‌انـد. از خصوصیات زبان ریاضی، کمال سـادگی و اسـتدلال‌پذیری آن است. هم‌چنین به اندازه‌ی کافی با مصداق‌های روزمره اشکال قرابت داشتن، موجب کاربردپذیری این ایده‌آل‌سـازی‌ها شـده اسـت. عمل تجرید اشـیای هندسی توسط ایده‌آل‌سازی، به لایه‌های تجرید ریاضیات نیز اشاره می‌کند. دایره‌ی اقلیدسی مجردتر از دایره‌ی ملموس است لذا زبان دایره‌ی اقلیدسی باید از زبان روزمره مجردتر باشد. به همین دلیل، ریاضیات زبانی جهانی است که فراتر از فرهنگ‌ها و تمدن‌هاست.

این مفاهیم ایده‌آل‌سازی شده از درجات تجرید مختلفی هستند. مثلاً خط از نقطه مجردتر اسـت، هم به خاطر مفهوم بی‌نهایت و هم به خاطر حرکت پیوسـته. دایره از خط مجردتر است، چون برای انطباق دوایر نیاز به تشابه داریم، اما هر دو خطی بر هم منطبق‌اند. بیضی از دایره مجردتر است، چرا که برای انطباق بیضی‌ها به نگاشت‌های خطی نیاز داریم. به عنوان مکان هندسـی همه از یک درجه‌ی تجرید هسـتند، چرا که خم‌هـای درجه‌ی یک و دو هسـتند. سـهمی و هذلولی به خاطـر مفهوم بی‌نهایت، از بیضی و دایره مجردتر هسـتند، اما به عنوان مکان هندسـی همه خم‌های درجه‌ی دو هسـتند. در هندسـه‌ی تصویری که نقاط در بی‌نهایت را وارد کار می‌کنیم، خط و دایره و بیضی و سهمی و هذلولی، همه موجوداتی متناهی هستند. درجه‌ی این خم‌ها خود محکی برای پیچیدگی اسـت. هندسـه‌ی خم‌های درجه‌ی دوم از هندسـه‌ی خم‌های درجه‌ی یک پیچیده‌تر است و درجه‌ی سه از درجه‌ی دو پیچیده‌تر. تبدیلات هندسی به ما اجازه می‌دهند بسـیاری از اشـیا را که با هم یکی نیسـتند، یکی بگیریم. این یکی گرفتن دسـته‌ای از اشـیای هندسی، همان چیزی اسـت که مفهوم‌سازی می‌کند. مثلاً مقاطع مخروطی ناتکین با تبدیل سهمی، بیضی و هذلولی به یکدیگر توسط تبدیلات تصویری، مفهوم یکدستی پیدا می‌کنند.

خط مفهومی صلب اسـت. هر دو خط قابل انطباق‌اند. بنابراین هر خانواده‌ای از

خطوط، خانواده‌ای از اشـــیای هندســـی قابل انطباق است. اما خانواده‌ای از مثلث‌ها یا خانواده‌ای از دوایر، لزوماً این‌طور نیســـتند. برای مثال دوایری که در دســـته‌ی دوایر ظاهر می‌شـــوند، با هم برابر نیســـتند و خانواده‌ای از مثلث‌ها با قاعده‌ی ثابت اعضای غیرقابل انطباق دارند. در هندســـه‌ی سه بعدی خانواده‌ی خطوط اهمیت پیدا می‌کند. رویه‌هایی که قابل پوشـــاندن توسط خانواده‌ای از خطوط هستند، رویه‌های خط‌کشی شـــده نـــام دارنـــد. هم‌چنین خانواده‌ای از بیضی‌ها می‌تواند به یک ســـهمی میل کند یا خانواده‌ای از مقاطع مخروطی ناتکین می‌تواند به یک مقطع مخروطی تکین میل کند که اجتماع دو خط اســـت. بنابراین خانواده‌ی اشـــیا به طور طبیعی اشیای همجنس را در یک دسته قرار می‌دهند. حالت‌های حدی همیشه حالت‌های خاص جالبی هستند که به درک موضوع مورد مطالعه کمک می‌کنند.

خط، دایره، بیضی، سهمی و هذلولی همه از خانواده‌ای از نقاط به دست می‌آیند. پـــس می‌تـــوان آن‌ها را به عنوان مکان هندســـی نقاط در نظر گرفـــت. هر کدام از این اشـــکال چندین نمایش مکان هندســـی دارند. مهم‌ترین روش نمایش این اشـــکال به صورت مکان هندسی مشخص کردن این اشکال با معادلات جبری است. مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله‌ی خطی یک خط را مشخص می‌کنند و مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم یک مقطع مخروطی ناتکین یا تکین را به دســـت می‌دهند. این نکته‌ای بســـیار مهم اســـت که همه‌ی اشـــیای هندسه‌ی اقلیدســـی قابل نمایش به صورت مکان هندســـی هســـتند. در بسیاری از شـــاخه‌های علم هندسه، چنین حکمی برقرار نیست و این روش‌های کار با این اشیای هندسی را محدود می‌کند.

این‌که اشیای هندسی در هندسه‌ی اقلیدسی قابل نمایش به صورت مکان هندسی هســـتند، دقیقاً همان چیزی اســـت که این اشیا را رســـم‌پذیر می‌کند. تنوع نمایش این اشـــیا به صورت مکان هندســـی، تنوع ابزارهای رســـم را نتیجه می‌دهد. سؤال این‌که رســـم‌پذیری در شـــاخه‌های هندسه که هر شـــیء لزوماً قابل نمایش به صورت مکان هندســـی نیســـت، چگونه باید تعریف شـــود؟ آیا این یک سؤال عملی است یا سؤالی اســـت که به فلســـفه‌ی ســـاختارگرایی مربوط می‌شود؟ مســـلماً نگاهی عمل‌گرایانه به

رسم‌پذیری در تمام شاخه‌های هندسه‌ی مدرن ممکن نیست. نگاهی ساختارگرایانه به مسئله‌ی رسم‌پذیری قابل توسعه به سراسر علم هندسه است، اما نتایج چنین تأکیدی باید نقادانه مورد بررسی قرار گیرد.

اشیای هندسی و اشکالی که از ترکیب آن‌ها به دست می‌آیند، ملموس‌ترین لایه‌ی تجرید علم هندسه به حساب می‌آیند. اشکال مجسم‌ترین مصادیق حقایق هندسی محسوب می‌شوند. از تشکیل دسته‌های اشیای هندسی و ترکیبات آن‌ها مفاهیم تجرید می‌شوند که لایه‌ای مجردتر از اشیای هندسی است. مفاهیم به زبان ذهن و اشیا به زبان ابزارهای رسم هستند و تجرد مفاهیم در برابر اشکال مشابه، تجرد ذهن در برابر جسم است.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید داستانی بنویسند که شخصیت‌های اصلی آن اعداد یک رقمی باشند، به طوری که حقایق حسابی در طول داستان به کار روند و معنی جدیدی بیابند. سپس از آنان بخواهید داستانی بسازند که اشکال ساده‌ی هندسی مثل مربع، دایره، مثلث و مانند آن شخصیت‌های اصلی باشند و ارتباط بین این اشکال در داستان وارد شده باشند. آن‌گاه از دانش‌آموزان بخواهید با خط، نقطه و پاره‌خط و نیم‌خط داستانی بسازند و ارتباط بین این‌ها را نیز در داستان وارد کنند.

فعالیت/ راهنمایی ....

نقاطی با مختصات صحیح در صفحه را در نظر بگیرید. می‌توانید این نقاط را با یک جدول با نامتناهی سطر و ستون معرفی کنید. چندضلعی‌هایی را در نظر بگیرید که رئوس آن روی این نقاط واقع باشند: مثلث، مستطیل، ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع، لوزی و مانند آن. لزومی ندارد اضلاع این چندضلعی‌ها موازی سطرها یا ستون‌ها باشند. در مورد هر شکل تعداد رئوس، تعداد نقاط جدول داخل چندضلعی و تعداد نقاط جدول روی اضلاع را بشمارید. سعی کنید مساحت چندضلعی را از روی این اعداد

به دست آورید. فرمولی کلی حدس بزنید و سعی کنید آن را ثابت کنید. آیا این فرمول با فرمول‌های مساحت اشکالی مانند مثلث، مستطیل، ذوزنقه، ... شباهت دارد؟

فعالیت / دبیرستان ....

فاصله‌ی دو نقطه روی کره را طول کوتاه‌ترین دایره‌ی عظیمه واصل بین آنان بگیرید. یک بیضی روی کره را مجموعه‌ی نقاطی بگیرید که مجموع فواصل آن‌ها روی کره از دو نقطه‌ی ثابت مقداری مفروض باشد. نشان دهید بیضی یک مقطع مخروطی روی کره است. تمام مقاطع مخروطی روی کره را شناسایی کنید.

فعالیت / دانشگاه ....

یک واریته جبری دلخواه را در نظر بگیرید. آیا می‌توان این واریته را به عنوان یک فضای مدولی یا به زبان ساده‌تر به عنوان یک مکان هندسی در نظر گرفت. مرفیسم بین واریته‌های جبری ممکن است از ساختارهای مدولی آن‌ها ناشی شده باشد. آیا هر مرفیسمی قابل نمایش به صورت یک مرفیسم فضاهای مدولی است؟

با داشتن مرفیسمی بین واریته‌های جبری، آیا می‌توان ساختاری مدولی روی واریته‌ها گذاشت؛ به طوری که این مرفیسم به طور طبیعی از مرفیسم فضاهای مدولی به دست آید؟ پس از پاسخ به این پرسش‌ها تصمیم بگیرید که آیا فضاهای مدولی به عنوان دیدگاهی برای درک مفهوم فضا غنای لازم را دارند؟

۲-۲. مفاهیم هندسی

مفهوم چیست؟ این سؤالی است که برای پاسخ به آن بسیار تلاش شده است، اما هنوز کسی به پاسخ نهایی دست نیافته است. بسیاری تلاش کرده‌اند که با کمک علم زیست‌شناسی مفهوم را شناسایی کنند. بسیاری با روان‌شناسی ذهن و بسیاری از طریق تئوری‌های آموزش به این مسئله حمله کرده‌اند. شاید نتوان به این سادگی مفهوم را تعریف کرد، اما چیزی که می‌توان شناخت، درجه‌ی تجرید مفاهیم است.

مفهوم از جنس تفکر است، لذا نفسانی و برزخی است. از این لحاظ از لایه‌ی تجرید اشیا مجردتر است. اگر کسی بتواند روند تفکر را برحسب مفاهیم بشناسد، کار مهمی انجام داده است. به‌خصوص، درک روند تفکر ریاضی برحسب مفاهیم ریاضی بسیار مفید خواهد بود. این‌که ذهن چه اعمالی را بر مفاهیم انجام می‌دهد تا جریان تفکر شکل بگیرد، به ما کمک خواهد کرد علم ریاضیات را بهتر بشناسیم و حدود آن‌ها بهتر تعیین نماییم.

مفاهیم چگونه در ذهن شکل می‌گیرند؟ عده‌ای اعتقاد دارند ذهن برای صرفه‌جویی در حفظ داده‌ها مفاهیم را خلق می‌کند، لذا مفاهیم وجودی مستقل از ذهن ندارند و بسته به اعمالی که ذهن درگیر آن‌هاست، ممکن است مفاهیم متفاوتی در ذهن ایجاد شود. اگر مفاهیم اذهان بسیار شبیه هم هستند، این به خاطر شباهت اعمالی است که اذهان با آن‌ها درگیر می‌شوند. عده‌ای مفاهیم را نیز نتیجه‌ی ایده‌آل‌سازی می‌دانند. عده‌ای مانند افلاطون به وجود عالمی به نام عالم مُثُل معتقدند که مفاهیم مستقلاً در آن‌جا زندگی می‌کنند و از آن‌جا در ذهن ما متجلی می‌شوند. عده‌ای نیز به ابعاد زبان‌شناسانه‌ی شکل‌گیری مفاهیم تأکید می‌کنند و اعتقاد دارند هرگز یک مفهوم بدون این‌که با کلام متناظر شود، شکل نمی‌گیرد و معنی را در بطن کلمه می‌دانند.

در هنگام تفکر، چه اعمالی بر سر مفاهیم به اجرا درمی‌آید؟ ذهن متفکر بین مفاهیم ارتباط برقرار می‌کند. شبکه‌های ارتباطی مفاهیم را در نظر می‌گیرد؛ ساختارهای این شبکه را مقایسه می‌کند؛ مفاهیم را با هم متناظر می‌کند یا از هم تشخیص می‌دهد؛ مفاهیم را تعمیم می‌دهد و تخصیص می‌کند؛ مفاهیم را مقایسه می‌کند و بر هم منطبق می‌کند؛ مفاهیم را دگرگون می‌کند و بازسازی می‌کند؛ شبکه‌های مفهومی را مستقل از تشخیص مفاهیم آن بازشناسی می‌کند و مانند آن. می‌بینیم که تفکر را نمی‌توان برحسب مفاهیم تعریف کرد. دلیل آن این است که چیزی بالاتر بر آن حکومت می‌کند و حیات تفکر از لایه‌ی تجرید مجردتری می‌آید. همان‌طور که حیات جسد با لایه‌های مجردتر نفس و روح قابل توصیف است، حیات نفس و امور نفسانی نیز به لایه‌های تجرید بالاتر مربوط می‌شود. خاستگاه تقلب مفاهیم قلب است. حیات تفکر

از سیطره‌ی قلب بر نفس نتیجه می‌شود و حیات قلب از سیطره‌ی روح بر آن.

چه چیز باعث می‌شود یک مفهوم را هندسی بدانیم؟ فلسفه‌ی کانت هندسه را با مفهوم مکان متناظر می‌کند و حساب را با مفهوم زمان. به عبارت دیگر، آن‌چه هندسی بودن یک مفهوم را تضمین می‌کند، ارتباط آن با مفهوم فضاست که به نوبه‌ی خود شهود را در کار می‌آورد. مفهوم هندسی یک مفهوم بصری است، لذا با ادراکات موضعی و سرتاسری در ارتباط است. ارتباط بین مفاهیم هندسی نیز با مفهوم فضا درگیر است و شبکه‌ی ارتباطات مفاهیم هندسی درک ما از فضا را غنی‌تر می‌کند. شاید بتوان گفت درک ما از فضا چیزی جز شبکه‌ی ارتباطات مفاهیم هندسی نیست. بنابراین، مفهومی هندسی است که در شبکه‌ای از مفاهیم هندسی که با مفهومی از فضا در ارتباط است، شرکت می‌جوید.

نکته‌ی جالب این‌جاست که هویت یک مفهوم با شبکه‌ی مفاهیمی که با آن در ارتباط است، شکل می‌گیرد. اگر شبکه‌های مفهومی شبیه به هم را دارای هویتی مستقل از مصداق خاص مفاهیم آن بدانیم، هندسی بودن یک مفهوم تابعی از ساختار شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با آن مفهوم خاص خواهد بود. پس این سؤال مطرح می‌شود که شبکه‌ی مفاهیم هندسی به خاطر چه ساختاری، هندسی یا غیرهندسی دانسته می‌شود؟ به عبارت دیگر، آیا می‌توان هندسی بودن یک مفهوم را کاملاً به زبان ساختار شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با آن و مستقل از مصداق خاص آن مفهوم تعریف کرد؟ این‌که هر شبکه را وقتی هندسی بدانیم که با شبکه ای از مفاهیم هندسی همریخت باشد، پاسخی قابل قبول است؟ اگر تعریفی غیر از این داشته باشیم، آیا هرگز شهود در تفکر هندسی حضوری قطعی خواهد داشت؟ در این صورت باید بتوان تفکر شهودی را کاملاً برحسب شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با هم تعریف کرد که تجریدی بسیار ناملموس و دور از ذهن است.

اگر بخواهیم نقادانه به فلسفه‌ی کانت بنگریم، باید مبانی آن را زیر سؤال ببریم. آیا زمان هرگز در شبکه‌ی ارتباطی مفاهیم هندسی وارد می‌شود؟ آیا هرگز زمان به درک ما از فضا کمک می‌کند؟ آیا فضا ــ زمان دارای هندسه است؟ در این صورت هندسه‌ی

فضا ـ زمان مفهوم هندسی را فراتر از فضا می‌داند یا این‌که هندسه‌ی فضا ـ زمان به درک جدیدی از فضا می‌رسد که فضای صلب که به طور سنتی در هندسه موردتوجه بود، دیگر برای درک این مفهوم جدید از فضا کفایت نمی‌کند. جالب است بدانید که در زبان چینی جهان هستی را فضا ـ زمان می‌گویند و این به دوران ماقبل تاریخ بازمی‌گردد و نشان می‌دهد که فضا ـ زمان ایده‌ی چندان جدیدی هم نیست.

سرآخر می‌توان نتیجه گرفت که تکامل علم هندسه و عمق مفاهیم هندسی، همگام با تکامل درک ما از مفهوم فضای فیزیکی است که خود مستقیماً با شهود فیزیکی در ارتباط است. آرزوی دیرینه‌ی فیزیک این است که همه‌ی مفاهیم فیزیکی را به زبان هندسه ترجمه کند و برای این کار نیازمند غنی کردن مفهوم فضاست. می‌توان گفت که همه‌ی انقلاب‌های مهم در علم هندسه، از درکی از فضا ناشی شده‌اند که ریشه در پیشرفت های علم فیزیک داشته است. با این حساب باید گفت که فیزیک، مادر هندسه است. اگر سلسله‌ی دلایلی را که باعث می‌شود مفهومی هندسی انگاشته شود، دنبال کنیم، سرآخر به سرچشمه‌ای در علم فیزیک خواهیم رسید.

فعالیت / دبستان

حالات تساوی دو مربع، دو مثلث متساوی‌الاضلاع، دو مستطیل، دو لوزی، دو متوازی‌الاضلاع و دو ذوزنقه و دو دایره را استخراج کنید، بدون این‌که از مفهوم زاویه کمک بگیرید. مثلاً این‌که اگر قطرهای متناظر دو لوزی برابر باشند، دو لوزی با یکدیگر برابرند. حال اشکالی را در نظر بگیرید که حالات تساوی آن‌ها تنها با مقایسه کردن یک طول مشخص می‌شود. سپس مفهوم تشابه را استخراج کنید.

فعالیت / راهنمایی

تشابه دو مثلث را چگونه تعریف می‌کنید؟ تشابه دو چندضلعی را چه‌طور؟ تشابه دو مکعب مستطیل را چه‌طور تعریف می‌کنید؟ تشابه دو چندوجهی را چه‌طور؟ تشابه دو دایره یا دو کره را چه‌طور تعریف می‌کنید؟

حال دو عکس با اندازه‌های مختلف از یک شیء را در نظر بگیرید. این دو عکس متشابه‌اند. این نکته را چگونه به زبان ریاضی بیان می‌کنید؟ حال تعریفی کلی از تشابه برای دو شکل دلخواه یا برای دو جسم دلخواه ارائه کنید.

فعالیت / دبیرستان

فرض کنید مساحت یک مستطیل را طول ضرب در عرض آن تعریف کنیم. مساحت اشکال هندسی ساده را با متناهی مرحله به محاسبه‌ی مساحت مستطیل بازگردانید. آیا این کار برای دایره هم ممکن است؟ فرض کنید حجم یک مکعب مستطیل را طول ضرب در عرض ضرب در ارتفاع تعریف کنیم. مساحت احجام هندسی ساده را با متناهی مرحله به محاسبه‌ی حجم مکعب مستطیل بازگردانید. آیا این کار برای کره، مخروط و استوانه هم ممکن است؟ حال اصل کاوالیری را فرض کنید. یعنی فرض کنید دو جسم که مساحت هر مقطعشان مساوی باشد، دارای حجم برابر هستند یا دو شکل که طول هر مقطعشان برابر باشد، مساحت برابر دارند. آیا اکنون مساحت دایره و حجم کره، مخروط و استوانه با متناهی مرحله قابل محاسبه‌اند؟

فعالیت / دانشگاه

مساحت مثلث در هندسه‌ی کروی و هندسه‌ی هذلولوی برحسب زوایای آن قابل محاسبه است. با به دست آوردن مساحت مثلث، فرمولی برای مساحت چندضلعی‌ها به دست دهید که با متناهی مرحله به مساحت مثلث‌ها تحویل شود. آیا مساحت دایره در هندسه‌ی کروی یا هندسه‌ی هذلولوی قابل تحویل در متناهی مرحله به مساحت مثلث است؟ عدد π، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را در هندسه‌ی کروی و هندسه‌ی هذلولوی محاسبه کنید و نشان دهید یک ناورد است که وابسته به خمیدگی فضاست. مفهوم تشابه در این دو هندسه را بررسی کنید و حالات تشابه دو مثلث را رده‌بندی کنید.

۳-۲. تقلب و دگرگونی مفاهیم هندسی

تاریخ تحول مفاهیم هندسی قابل مطالعه است؛ چرا که مفاهیم هندسی در بستر تاریخ علم ریاضیات تحول می‌یابند و صورت اولیه‌ی خود را حفظ نمی‌کنند. مثلاً مفهوم خط از هندسه‌ی اقلیدسی در صفحه تا هندسه‌ی فضایی و از آن‌جا تا هندسه‌های کروی و هذلولوی تحول پیدا می‌کند. در دستگاه اصل موضوعه‌ای هیلبرت چیزی است و در هندسه دیفرانسیل چیز دیگری است. در هندسه‌ی مختلط موجودی متفاوت با ظهور آن در جبر خطی است. این رودخانه‌ی مفاهیم که در بستر زمان جاری است، سرچشمه‌ی یکسانی دارند و آن، همان مفهوم خط است که از زمان تالس و پیش از او به جای مانده است.

چرا مفاهیم دگرگون می‌شوند؟ مفاهیم چگونه دگرگون می‌شوند؟ آیا همراه با یک مفهوم شبکه‌های ارتباطی شامل آن نیز دگرگون می‌شوند؟ یا این‌که دگرگونی یک مفهوم چیزی جز دگرگونی شبکه های ارتباطی شامل آن نیست؟ آیا دگرگونی یک مفهوم از فضاهای تئوریک و تحولات آنان نشئت می‌گیرد؟ ارتباط بین دو مفهوم چگونه همگام با تحولات آن مفاهیم دگرگون می‌شود؟ چه قوانینی بر تاریخ تحول مفاهیم حکومت می‌کنند؟ اگر بتوانیم روند تحول مفاهیم در ذهن را بشناسیم، خواهیم توانست مسیر تکامل تفکر بشری را شناسایی کنیم؛ چرا که تکامل تفکر در گرو تکامل مفاهیم و ساختارهای مفهومی شامل آن‌هاست.

عده‌ای که مفاهیم را متأثر از صرفه‌جویی مغز در حفظ داده‌ها می‌دانند، تصور می‌کنند اگر اعمالی که ذهن درگیر آن‌هاست، تحول پیدا کنند، مفاهیم مورد نیاز برای سهولت کار ذهن نیز تحول پیدا می‌کنند. همین مصداق، تحول مفاهیم را برای آنان که مفاهیم را حاصل ایده‌آل‌سازی می‌دانند نیز نتیجه می‌دهد. وقتی دامنه‌ی اشیای موردتوجه ذهن توسعه بیابد، ذهن ناچار است مفاهیم ایده‌آل‌سازی شده را تعمیم دهد تا بتواند آن‌ها را در حوزه‌ی گسترده‌تری به کار ببندد. عده‌ای مانند افلاطون به عالمی که مفاهیم مستقلاً در آن زندگی می‌کنند، اعتقاد دارند. در نظر ایشان کُنه ذات مفاهیم تحول پیدا نمی‌کند، بلکه تحول تنها در تجلیات آن است. عده‌ای نیز ابعاد زبان‌شناسانه

را در شـکل‌گیری مفاهیم دخیل می‌دانند. هر مفهوم با کلمه یا کلماتی متناظر می‌شـود که معنی آن‌ها توسـط ابعاد اجتماعی زبان شـکل می‌گیرد و تحول می‌یابد. می‌بینیم که در مورد چیسـتی تحول مفاهیم اتفاق‌نظر وجود دارد، همان‌طور که در مورد چیسـتی مفاهیم به نتیجه‌ی واحدی دست نیافته‌اند.

می‌توان بعضی از ابعاد تحول مفاهیم را برحسـب شـبکه‌ی مفاهیم مرتبط با یک مفهـوم توضیـح داد. تحول و دگرگونی یک مفهوم باعث می‌شـود با مفاهیم جدیدی ارتبـاط برقرار کند و حتّی ممکن اسـت بعضـی از ارتباطات قدیمی به علت صلبیت مفاهیم مرتبط با آن، دیگر دردسـترس نباشـند. بنابراین حاصل تحول و دگرگونی یک مفهوم، شـبکه‌ی ارتباطی جدیدی اسـت که با شـبکه‌ی مفاهیم اولیه متفاوت خواهد بود. شـاید بتوان گفت داسـتان تحول یک مفهوم را می‌توان در داستان تحول شبکه‌ی ارتباطـی مفاهیم متصـل به آن خلاصه کرد. باید توجه کرد که این دیدگاه همه‌ی ابعاد تحـولات مفاهیم را دربرنمی‌گیرد. بسـیاری از تحـولات از فضای تئوریک حاکم بر مفاهیم ناشـی می‌شـود که شبکه‌های مفهومی را با حفظ سـاختار دگرگون می‌کند؛ به طوری که مفاهیم و ارتباطات مفهومی آن تغییر کنند، ولی شـبکه‌ی ارتباطی بین آن‌ها به همان شکل باقی بماند.

تقلب و دگرگونی مفاهیم هندسـی می‌تواند از تحول مفهوم فضا و شـهود متناظر با آن ناشی شود یا از تحول احکامی که موردتوجه و تمرکز هستند به‌وجود بیاید. مثلاً با گذر از احکام موضعی به سرتاسری، مفاهیم تغییر هویت می‌دهند و شبکه‌ی ارتباطی جدیدی پیدا می‌کنند. تاریخ تحول مفهوم خط را در نظر بگیرید. به جز دستگاه اصل موضوعه‌ای هیلبرت، می‌توان گفت تمام تحولات مفهوم خط ناشی از تحولات مفهوم فضا بوده‌اند. مفهوم خط در دستگاه اصل موضوعه‌ای هیلبرت را نیز می‌توان ناشی از تحول فضای تئوریک حاکم بر اشـیای هندسـی دانست. با این وصف تحولات خرد دیگری قابل مشـاهده هسـتند که از ظهور تئوری‌ها و مسـائل خاص ناشی می‌شوند. مثلاً تقسیم همساز و ناهمساز، دیدگاهی جدید به خط است که در آن ترتیب و نسبت بسیار اهمیت دارد که این همه ناشی از کاربرد تبدیلات تصویری است.

بیایید تحولات شبکه‌ی ارتباطی مفاهیم همسایه با مفهوم خط را مطالعه کنیم. در هندسه‌ی مسطحه‌ی اقلیدسی، خط موجود هندسی درجه‌ی یکی است که در کنار اشیای هندسی درجه‌ی دو قرار می‌گیرد و تقاطع خط با خطوط دیگر یا توازی آن و یا تقاطع خط با سایر اشیای هندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در هندسه‌ی فضایی خط به عنوان اشتراک صفحات نیز مطرح می‌شود. اشیایی که خط در برابر آن‌ها مطالعه می‌شود، در هندسه‌ی فضایی بسیار گسترده‌تر از هندسه‌ی مسطحه هستند. خط در هندسه‌ی کروی و هندسه‌ی هذلولوی همین نقش را ایفا می‌کند. مفهوم زاویه در هندسه‌ی مسطحه، کروی و هذلولوی برهم منطبق است، اما مفهوم توازی در هندسه‌ی کروی وجود ندارد و در هندسه‌ی هذلولوی از یک نقطه‌ی خارج خط می‌توان چندین خط موازی با خط مفروض گذراند. در دستگاه اصل موضوعه‌ای هیلبرت نیز تقاطع خطوط موردتوجه است، اما خط می‌تواند یک مجموعه‌ی متناهی هم باشد. در واقع این دستگاه، اصول موضوعه اشیای هندسی را جبری‌سازی می‌کند و هویت هندسی آن‌ها را خلع می‌کند. در هندسه‌ی دیفرانسیل، خصوصیات متریک خط موردتوجه است، در صورتی که در هیچ‌کدام از هندسه‌های قبلی، چنین تأکیدی وجود نداشته است. مفهوم ژئودزیک، مفاهیم خط در هندسه‌ی مسطحه، کروی و هذلولوی را برهم منطبق می‌کند و با این کار، مفهوم فضای هندسی را به طور وسیعی توسعه می‌دهد. شبکه‌ی مفاهیم مرتبط با خط در هندسه‌ی دیفرانسیل بسیار متفاوت است با هندسه‌های پیش از آن؛ چرا که مفاهیم متریک بیش‌تر در آن ظاهر می‌شوند تا نظریه‌ی تقاطع. مفاهیم خط در هندسه‌ی مختلط و جبر خطی ادامه‌ی طبیعی مفاهیم مربوط در هندسه‌ی اقلیدسی هستند که در آن میدان اعداد حقیقی با میدان اعداد مختلط یا میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع جایگزین می‌شود. در این‌جا نیز نظریه‌ی تقاطع مورد تأکید است، اما در هندسه‌ی مختلط، هندسه‌ی خط که کره‌ی ریمان است، دچار تحول شده و در جبر خطی حساب جایگزین ساختار هندسی خط شده است.

بررسی تحولات مفهوم خط نشان می‌دهد که دیدگاه افلاطونی و دیدگاه زبان‌شناسانه چندان از تأییدات عملی بهره‌مند نمی‌شوند. در عین این‌که تفکر مادی‌گرایانه که

موردنظر زبان‌شناسی است، قانع‌کننده نیست، اما تفکر افلاطونی نیز به نظر مصنوعی و بی‌پایه می‌آید. این‌که ذهن به دلیل این‌که تغییر در نیازهای عملی، مفاهیم را دست‌خوش تحول می‌کند، دیدگاه طبیعی‌تری است، اما باید به روش صحیحی با حقیقت پشت صحنه‌ی ریاضی پیوند بخورد. تنها چاره این است که عوالم مجرد افلاطونی را بر عوالم مجرد معرفتی انسانی استوار کنیم. این دیدگاه با تاریخ تحول مفاهیم ریاضی نیز هم‌خوانی دارد.

فعالیت / دبستان ....

در هر ماشین پنج سرنشین جای می‌گیرند. می‌خواهیم تمام افراد شرکت‌کننده در یک سخنرانی را به بازدید علمی ببریم. با روش چوب‌خطی مشخص کنید که چند ماشین برای انتقال این افراد لازم است. باقی‌مانده‌ی چوب‌خط‌ها را که هنوز دسته‌ی پنج‌تایی نشده‌اند، در نظر بگیرید. حال اگر شرکت‌کنندگان دو سخنرانی را بخواهیم به بازدید علمی ببریم و تعداد ماشین‌های لازم برای هر یک از شرکت‌کنندگان دو سخنرانی و تعداد باقی‌مانده‌های هر دو دسته را بدانیم، تعداد ماشین‌های لازم برای همه‌ی شرکت‌کنندگان را محاسبه کنید. حال با جمع و تفریق تعداد شرکت‌کنندگان در دسته‌های مختلف، جمع و تفریق باقی‌مانده‌ی چوب‌خط‌ها را نیز تعریف کنید.

فعالیت/ راهنمایی ....

فرض کنید نقطه اثر مداد بر روی کاغذ تعریف شده باشد، لذا دایره‌ای به قطر d باشد. فرض کنید خط با کشیدن مداد در تماس با خط‌کش به وجود آید، لذا نواری به پهنای d باشد. اشکال مثلث، مربع، دایره و مانند آن را تعریف کنید و برای مساحت آن‌ها فرمولی ارائه دهید. حال همین تمرین را در سه بعد انجام دهید. نقطه را کره‌ای به قطر d بگیرید و خط را استوانه‌ای نامتناهی به قطر d بگیرید. اشکال مکعب مستطیل، هرم و کره و مانند آن را تعریف کنید و برای حجم آن‌ها فرمولی ارائه دهید. در این دو تئوری، مساحت پاره‌خط را چگونه تعریف کرده‌اید؟ طول پاره‌خط را چه‌طور؟

فعالیت /دبیرستان ....

مفهوم خط در صفحه را در نظر بگیرید و مشـابه آن را روی کره تعریف کنید. آیا اصول موضوعه‌ی هندسـه‌ی اقلیدسـی همه برای مفهومی از خط که تعریف کردید، برقرارند. اگر برقرار نیسـتند، مشـابهی از آن اصول را در نظر بگیرید که در هندسـه‌ی کـروی برقرار باشـند. حال یک مجموعـه‌ی مرجع متناهی در نظـر بگیرید و بعضی زیرمجموعه‌های آن را خط بنامید، چنان‌که اصول موضوعه‌ی هندسـه‌ی کروی برای آن‌ها برقرار باشد. در مورد هندسه‌ی اقلیدسی همین مسئله را حل کنید.

فعالیت / دانشگاه ....

با عمل $\mathbb{Z}^2$ روی $\mathbb{R}^2$ می‌توان نگاشت خارج قسمتی از صفحه به چنبره را تعریف کـرد. تصویـر یک خـط در صفحه را یک خـط روی چنبره تعریف کنیـد. آیا اصول موضوعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی روی چنبره برقرارند؟ اگر بعضی اصول برقرار نیستند، مشابهی از آن اصول را در نظر بگیرید که روی چنبره برقرار باشند. اگر با یک رویه‌ی ریمانی فشرده‌ی هذلولوی با متریک القایی از دیسک پوانکاره شروع کنیم، باز مفهومی از خـط داریم. آیا اصول موضوعه‌ی هندسـه‌ی هذلولـوی روی این رویه‌ی ریمانی برقرارند. اگر نیستند، اصول مشابهی را جایگزین کنید که روی رویه‌ی ریمانی برقرار باشـند. به نظر شـما از دیدگاه اصل موضوعه‌ای، مفهومی از خط که روی رویه‌های ریمانی تعریف کردیم، مفهومی طبیعی است؟

۴-۲. خاستگاه تغییر مفاهیم

حیـات مفاهیـم ریاضی و امکان تغییر و تحول در ایـن مفاهیم، مدیون روح علم ریاضی است و آن خاستگاه تحول مفاهیم است. به عبارت دیگر، عالمی که چارچوب تحولات ممکن مفاهیم را تعیین می‌کند، خاستگاه تغییر مفاهیم خوانده‌ایم. همان‌طور که روح انسـان ادراکـی فرازمانی دارد، این درجـه از درک مفاهیم، درکی فراتحوّلی بـه دسـت می‌دهد؛ یعنی درکی از مفاهیم پیدا می‌کنـد، که فارغ از همه‌ی تحولاتی که

ممکـــن اســـت برای آن‌ها رخ دهد، آن درک پایـــدار خواهد ماند و صحت این ادراک دست‌نخورده باقی خواهد ماند.

ادراک مفاهیم در این درجه‌ی تجرید، مجردتر از ادراک مفاهیم از طریق تحول و دگرگونی آن است. می‌توان گفت ادراک قلبی، ادراکی درون تحولی و ادراک روحانی، ادراکی فراتحولی یا برون‌تحولی است. مثال مفهوم فضا را در نظر بگیرید. این‌که این مفهوم در طی تاریخ چه تحولاتی پیدا کرده و کدام تحولات ماندگار شده و کدام‌ها به فراموشـی سـپرده شده اسـت، درکی از مفهوم فضا می‌دهد که ادراکی قلبی است و به زبان تحول و دگرگونی مفاهیم است. این‌که مفهوم فضا در اثر تحولات، چه چیزهایی می‌تواند بشـود و چه چیزهایی نمی‌تواند بشـود، در حد درک قلب نیسـت و ادراکی فراتحوّلی است. مثلاً این‌که هندسه، علم شناخت مفهوم فضاست، گزاره‌ای فراتحوّلی اسـت و فارغ از هرگونه تغییر در معنی هندسـه و مفهوم فضا صادق خواهد ماند و یا تاریخ تحول مفهوم خط که در فصول قبلی به آن اشـاره شـد، ادراکی قلبی به دسـت می‌دهد و درک فراتحوّلی مفهوم خط از این اطلاعات ممکن نیست.

چه چیز هندسـی بودن یک مفهوم را به زبان فراتحوّلی تضمین می‌کند؟ آیا ممکن است یک مفهوم هندسی در تقلب و دگرگونی خود به یک مفهوم جبری تبدیل شود؟ البته که ممکن است و این همان چیزی است که جبری‌سازی نام دارد. مثلاً در صفحه، مفهوم خط تبدیل به معادله‌ی خطی می‌شـود و این یک جبری‌سـازی است. اگر بتوان از یک مفهوم هندسی پس از تحولاتی در آن، به یک مفهوم جبری رسید، به این معنی است که تشخیص هندسی بودن یک مفهوم یا جبری بودن آن به زبان فراتحوّلی ممکن نیست؛ یعنی علم هندسه و علم جبر به این زبان قابل تمیز نیستند، بلکه هندسی بودن یا جبری بودن، دو دیدگاه مختلف به یک حقیقت ریاضی هستند.

این‌که در این خاسـتگاه، تغییر مفاهیم هندسـه و جبر قابل تمیز نباشـند، بسـیار درس‌آموز اسـت. بسـیاری از مفاهیم جبری وجود دارند که هنوز ما به ازای هندسی ندارند و بسیاری از مفاهیم هندسی هستند که هنوز جبری‌سازی نشده‌اند. تطابق علم هندسـه و علم جبر به این معنی اسـت که هم تمام مفاهیم جبری ما به ازای هندسـی

دارند و هم تمام مفاهیم هندسی قابل جبری‌سازی هستند. این درس در تحقیق ریاضی بسیار کارآمد است. حتّی می‌توان روش‌های تفکری را از زبان فراتحولی پیشنهاد کرد که در جبری‌سازی و یافتن ما به ازای هندسی که دو عمل دوگان هستند، به ما کمک کنند.

فعالیت / دبستان ....

فرض کنید می‌خواهیم بدون این‌که مانع از ورود و خروج افراد از یک شهر شویم، جمعیت دقیق آن شهر را محاسبه کنیم. آیا جمعیت شهر عدد ثابتی است؟ اگر شهر چندین ورودی داشته باشد، آیا روشی برای محاسبه‌ی دقیق جمعیت آن در هر لحظه وجود دارد؟ شهردار می‌خواهد برای مصرف مردم شهر گندم بخرد، با توجه به این‌که جمعیت دقیق شهر در حال تغییر است، چه روشی را برای شهردار پیشنهاد می‌کنید تا تصمیم بگیرد چه‌قدر گندم خریداری کند؟

فعالیت / راهنمایی ....

طول یک پاره‌خط مفروض را واحد بگیرید و با کمک آن به هر پاره‌خطی عددی مثبت نسبت دهید. با کمک قضیه‌ی تالس جمع و ضرب و تفریق و تقسیم طول پاره‌خط‌ها را با استفاده از خط‌کش و پرگار بسازید. آیا می‌توانید اعداد منفی و حساب آن‌ها را نیز با کمک طول پاره‌خط‌ها بیان کنید؟ حساب اعداد مثبت و منفی را ترکیب کنید و به وسیله‌ی خط‌کش و پرگار روشی برای محاسبه ارائه کنید.

فعالیت / دبیرستان ....

در هندسه‌ی تحلیلی روشی ارائه شده است که مسائل هندسه به روش جبری حل شوند. اما روش‌های جبری استدلال لزوماً قابل ترجمه به یک استدلال هندسی برای حکم موردنظر نیستند. سعی کنید روش‌های جبری حل مسائل هندسه را به الگوریتم‌هایی تحویل کنید که قابل ترجمه به زبان هندسه باشند. اگر موفق شوید چنین

کنید، توانسته‌اید به یک متخصص نرم‌افزار کمک کنید تا برنامه‌ای بنویسد که برای احکام هندسی، استدلال هندسی بیابد.

فعالیت / دانشگاه ....

در هندسه‌ی تحلیلی روشی جبری برای حل مسائل هندسه‌ی اقلیدسی در صفحه یا فضا ارائه شده است. برای هندسه‌ی کروی در بعد دو و سه و همین‌طور هندسه‌ی هذلولوی در بعد دو و سه، روش‌های جبری برای اثبات احکام ارائه دهید. آیا می‌توانید همین کار را برای یک رویه‌ی ریمانی فشرده با انحنای ثابت انجام دهید؟ به نظر شما روش‌های جبری در هندسه‌ی تحلیلی چه محدودیت‌هایی دارند؟ آیا این محدودیت‌ها قابل برطرف شدن هستند؟

۵-۲. تعقل و هندسه‌ی صلبیت

عقل ساختارشناس توانایی تشخیص ساختارهای مفهومی ثابت را دارد. ساختارهایی که در حال تحول‌اند، برای عقل یک‌به‌یک قابل تشخیص نیستند. عقل ناچار است ساختارهای موردمطالعه را چنان بررسی کند که آن ساختارها صلب به‌نظر برسند یا تنها ساختارهای صلب را موردمطالعه قرار دهد. آن‌چه گفتیم این معنی را نمی‌دهد که خانواده‌ی ساختارها قابل مطالعه نیستند. بلکه عقل می‌تواند زمان را هم وارد کار کند و خانواده‌ی ساختارها را به عنوان یک ساختار کلی که تک‌تک ساختارها را به عنوان زیرساختار دربردارد، در نظر بگیرد. این ناتوانی عقل چیزی شبیه ناتوانی مغز در درک خانواده‌ای پیوسته از مفاهیم است. اگر قرار باشد مغز ما خانواده‌ای پیوسته از مفاهیم را ادراک کند، راهی برای ادراک و تشخیص تک‌تک این مفاهیم نخواهد داشت؛ همان‌طور که روشی خداداد برای انتخاب نقطه‌ای از یک خط وجود ندارد.

اگر تاریخ علم هندسه را در نظر بگیریم، خواهیم دید که مطالعه‌ی ساختارهای هندسی صلب موضوع این علم است. استدلال‌های هندسه‌ی اقلیدسی هیچ‌کدام بر حرکت بنا نشده است، در صورتی که امکان استدلال با حرکت وجود دارد. سراسر

کتـاب اقلیدس، مطالعه‌ی اشـکال صلب هندسـی اسـت. حرکت تنها بـا فیزیک در هندســه وارد شده اســت؛مثل قانون اهرم‌ها یا هندسه‌ی فضا ـ زمان که هر کدام خود بــه نوعــی صلب‌اند. مثلاً، اغلب به طور موضعی توپولوژی فضا ـ زمان ثابت اسـت یــا قانون اهرم حرکت را مسـتقیماً در فرمول‌بندی خــود وارد نمی‌کند. این گرایش به بررســی ساختارهای صلب در تاریخ هندسه، تحت‌تأثیر عقل ساختارشناس به‌وجود آمده اسـت. فراموش نکنید که فلسـفه یک فعالیت عقلانی اســت، هم‌زمان با هندسه توســط تالس به‌وجود آمده اسـت. هم‌چنین تأثیر آموزش هندسه در رشد قوّه‌ی تعقل انکارناپذیر است.

ادراک عقلانــی لایــه‌ی تجریــدی، مجردتــر از ادراک روحانــی اسـت. لذا نگاه ساختارشناســانه به هندســه مجردتر از نگاه فراتحوّلی اســت. برای اثبات تمایز این دو لایه‌ی تجرید باید نشان دهیم که ادراکاتی فراتحولی یافت می‌شوند که ساختارشناسانه نباشــند. همین گزاره که هندسه علم شناخت مفهوم فضاست، گزاره‌ای فراتحوّلی، اما ساختارشناسانه است. نه علم هندسه و نه مفهوم فضا، تعریفی ساختارشناسانه ندارند. همان‌طور که گفتیم، حتّی نمی‌توان تعریفی فراتحوّلی از این دو ارائه کرد.

برای این‌که درک بهتری از لایه‌ی تجرید تعقل پیدا کنیم، تاریخ تحول ساختارهای هندسی را مرور می‌کنیم. در زمان تالس ساختارهای هندسی، اشیای هندسی یا ترکیبی از اشـیای هندسی بیش نبودند. در کتاب اقلیدس ساختارهای هندسی با ساختارهای عــددی و حتّی جبری منطبق شــدند. مثلاً برای حل یک معادله، روش‌های هندســی به کار برده می‌شــد یا برای اثبات یک اتحاد جبری از اشـکال هندســی کمک گرفته می‌شــد. موضوع مطالعه‌ی هندســه، ساختارهای تقاطعی و روابط طولی بود. در زمان دکارت هندســه کاملاً عددمند شــد و ساختارهای هندســی کاملاً جبری‌سازی شدند. این مقدمه‌ای شــد برای این‌که ســاختار اعداد مختلط وارد هندسه شود و مجموعه‌ی جواب‌های مختلط معادلات جبری درجه یک و دو مورد مطالعه قرار گیرد که مقدمه‌ای برای هندســه‌ی جبری باشــد. ارتباط هندسه‌ی جبری و جبر جابه‌جایی، ساختارهای هندســی را با ســاختارهای عددی نیز منطبق کرد که مقدمه‌ی آن توســط میدان توابع

پایه‌ریزی شده بود. می‌بینیم که ابزار عقل ساختارشناس، تجرید و تعمیم است که هر دو ادراکاتی فراتحوّلی هستند. با این حال، عقل قائم به ذات نیست و تعقل مؤید به ادراکات لایه‌ی تجرید بالاتری است.

فعالیت / دبستان ....

تصاویر مختلف را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آنان بخواهید با مثلث‌بندی تقریب خوبی از این اشکال را ارائه دهند. ابتدا با تصاویر ساده شروع کنید. همین کار را برای احجام سه‌بعدی نیز انجام دهید. از دانش‌آموزان بخواهید با چسباندن چوب‌کبریت‌ها یک حجم سه‌بعدی را تقریب بزنند. ابتدا با احجام ساده مثل مکعب شروع کنید. برای چسباندن چوب‌کبریت‌ها می‌توانید از شمع یا چسب مایع استفاده کنید.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید یک ماشین یا یک خانه را طراحی کنند و نقشه‌ی آن را از سه طرف بالا، روبه‌رو و راست یا چپ رسم کنند. سپس مدلی کوچک از ماشین یا خانه‌ای که طراحی کرده‌اند، بسازند. برای این کار می‌توانند از مقوا یا چوب کمک بگیرند. مدل ساخته شده را با نقشه‌ی آنان تطبیق دهید و موارد عدم تطابق را به آنان گوشزد کنید. تأکید کنید که نسبت‌ها را درست رعایت کنند.

فعالیت /دبیرستان ....

برای یک حکم هندسی چندین استدلال مستقل ارائه دهید. سپس از دانش‌آموزان بخواهید مؤلفه‌های اصلی هر اثبات را شناسایی کنند و آن مؤلفه‌ها را در هر یک از اثبات‌های دیگر بازشناسی کنند. سپس تحلیل کنند که آیا مؤلفه‌های اصلی یک استدلال، ناوردایی از یک حکم هندسی هستند یا خیر؟ چرا بعضی استدلال‌ها کوتاه و بعضی طولانی‌اند؟ آیا طول یک استدلال ناوردایی از یک حکم هندسی است؟

فعالیت / دانشگاه ....

در هندسه‌ی اقلیدسی، کروی و هذلولوی هر سه، حرکت صلب ممکن است. فرض کنید انتظارات ما از یک فضای فیزیکی این باشد که فضا همگن، نامتناهی و پیوسته باشد؛ به طوری که حرکت صلب در آن امکان‌پذیر باشد. در قرن نوزدهم سعی کردند این انتظارات فیزیکی را به زبان ریاضی اصل موضوعه‌سازی کنند. شما نیز سعی کنید این کار را انجام دهید. با توجه به این فعالیت، یک ساختار هندسی را چگونه تعریف می‌کنید؟ چه چیز باعث می‌شود یک ساختار هندسی باشد؟

۶-۲. شهود و هندسه‌ی اشیای متحرک

شهود یک لایه‌ی تجرید ادراک هندسی است که از تعقل مجردتر است. تعقل که ساختارشناسی حقایق ریاضی است، به‌واسطه‌ی شهود فعال است و مؤیّد به آن است. شهود ادراکی است که به واسطه‌ی نور ممکن می‌شود که در ریاضیات برای مثال می‌توان آن را نوعی تضاد گرفت. در این نوع ادراک اشیا و ساختارهای ریاضی را به واسطه‌ی ضد آنان می‌شناسند. حرکت و تغییر موضوع موردمطالعه، جزء لاینفک قابل شناخت بودن توسط شهود است. منظور از این حرکت تغییر پیوسته نیست، بلکه منظور امکان مقایسه یک مفهوم با ضد آن است. مثلاً خاصیت و ساختاری که همه جا هست و هرجا به طور خداداد وجود دارد، قابل شناسایی نیست. مثلاً این‌که هر چیز با خودش مساوی است، تنها یک قرارداد است و امکان ادراک درونی آن جز با ساختن یک کپی دیگر از شیء مورد مطالعه و مقایسه‌ی آن با خود اولیه‌اش ممکن نیست. این ادراک چیزی شبیه به این نکته است که تقارن را جز با شکستن تقارن نمی‌توان درک کرد. وقتی تقارن شکسته شد، می‌فهمیم که تقارنی وجود داشته است.

این‌که ساختارهای ریاضی تغییر و تحول داشته باشند، باعث می‌شود مفهوم ساختارهایی که ثابت می‌مانند، معنی پیدا کنند. اگر همه‌ی ساختارها صلب باشند، ساختارها را نمی‌توان به ضدشان درک کرد. به عبارت دیگر، تقارنی که شکستن آن باعث ادراک می‌شود، حرکت در برابر سکون است. این یکی از معضلات باستانی

فلسفی بوده است که اگر حرکت وجود دارد و شیء تغییر می‌کند، از کجا می‌فهمیم که این شیء همان شیء اولیه است که اکنون عوض شده و تغییر کرده است. این مشکل فلسفی را افلاطون با ابداع مفاهیم جوهر و عرض حل کرد که شیء متغیر، جوهرش ثابت و عرضش متغیر است. صورت جدید این فرمول‌بندی توسط ملاصدرا ارائه شده که وجود لایه‌های تجرید مختلفی دارد که بعضی از آن‌ها تغییر می‌کنند و بعضی ثابت هستند. همه‌ی لایه‌های تجرید می‌توانند تغییر کنند، اما لایه‌های بالاتر ثابت می‌مانند. از این‌جا همیشه می‌توان فهمید که این شیء همان شیء اولیه است. نکته این‌که بدون این تغییرها ادراک ساختارها غیرممکن است . به این شهود، نور حرکت و تغییر گفته می‌شود. این‌که می‌گوییم نور را می‌توان نوعی تضاد فرض کرد، ممکن است از نظر فلسفی بحث‌انگیز باشد؛ چرا که مفاهیم نور و وجود را در مراتبی نسبی فرض می‌کند.

حال منظورمان را از حرکت در این لایه‌ی تجرید، به زبان هندسی روشن‌تر خواهیم کرد. مثلاً مفهوم خطوط موازی را در نظر بگیرید. درک مفهوم توازی به خاطر وجود خطوط متقاطع ممکن است. در واقع موقعیت نسبی دو خط را می‌توان موازی یا متقاطع دانست، چون خانواده‌ی همه‌ی زوج خطوط قابل افراز به دو دسته زوج خطوط متقاطع و غیرمتقاطع است. همین امکان را که زوج خطوط هم بتوانند متقاطع باشند و هم غیرمتقاطع، حرکت می‌نامیم. هرچند که در لایه‌های تجرید ملموس‌تر می‌توان با حرکت هندسی، خانواده‌ای از زوج خطوط متقاطع را به یک زوج خط موازی میل داد. منظور ما از حرکت در این لایه‌ی تجرید، حرکت هندسی نیست. این ادراک منجر می‌شود که تعریفی جدید از یک مفهوم ارائه کنیم و آن افراز خانواده‌ای از اشیا به دسته‌های متناهی است. می‌توانید به بخش مفاهیم هندسی رجوع کنید و این تعریف را با سایر تعاریف ارائه شده مقایسه کنید.

فعالیت / دبستان

یک درخت روی کاغذ رسم کنید. نشان دهید هر دو نقطه روی درخت را می‌توان از مسیر یگانه‌ای به هم متصل کرد؛ به‌طوری که این مسیر خودش را قطع نکند. آیا این خاصیت برای یک دایره برقرار است؟ آیا برای یک مسیر بسته برقرار است؟ اگر شبکه‌ای از مسیرها داشته باشیم که در آن مسیر بسته‌ای وجود نداشته باشد، آیا می‌توان هر دو نقطه را با مسیر یگانه‌ای به هم وصل کرد؟ چنین شبکه ای از مسیرها را درخت می‌نامیم. اگر دو درخت تنها از یک شاخه به هم وصل شوند، آیا باز حاصل کار یک درخت است؟ اگر از دو شاخه به هم وصل شوند، چه‌طور؟

فعالیت/ راهنمایی

دایره، بیضی، سهمی و هذلولی اشکالی هستند که از تقاطع یک مخروط کامل با یک صفحه به دست می‌آیند. دایره و بیضی کراندارند، ولی سهمی و هذلولی بی‌کران. سهمی یک مؤلفه دارد، اما هذلولی دو تکه است. نشان دهید که کدام صفحات دایره، کدام صفحات بیضی، کدام صفحات سهمی، کدام صفحات هذلولی، کدام صفحات دو خط متقاطع، کدام صفحات یک خط و کدام صفحات یک نقطه به عنوان مقطع مخروط کامل مشخص می‌کنند. حال نشان دهید خانواده‌ای از بیضی‌ها می‌توانند به یک دایره یا یک سهمی میل کنند. همین‌طور خانواده‌ای از هذلولی‌ها می‌توانند به یک سهمی یا به دو خط متقاطع یا به یک خط میل کنند. هم‌چنین خانواده‌ای از دو خط متقاطع می‌توانند به یک خط میل کنند.

فعالیت /دبیرستان

نامساوی میانگین هندسی ـ حسابی را با کمک یک شکل هندسی قابل شهود کنید. حال سعی کنید سایر نامساوی‌های جبری را که می‌شناسید، با تغییر متغیر یا محاسبات جبری به یک نامساوی تبدیل کنید که معنی هندسی داشته باشد. آیا هر نامساوی جبری، قابل تبدیل به یک نامساوی هندسی است؟ اگر بخواهیم این فلسفه را بپذیریم، آیا ناچاریم مفهوم هندسی بودن یک نامساوی را تعمیم دهیم؟

فعالیت / دانشگاه ....

دگردیســی ســاختارهای جبری، یک فضای هندســی، اما موضعی به ساختارهای جبری نســبت می‌دهد. مفاهیم موضعی هندســه مثل فاصلــه، خمیدگی و مانند آن را برای خانواده‌ای از ساختارهای جبری تعریف کنید. با این کار، اجازه داده‌اید تا شهود هندسی برای مطالعه‌ی ساختارهای جبری به‌کار رود. آیا می‌توانید حقایق سرتاسری هندســه را نیز به این چارچوب توســعه دهید؟ ســاختارهای جبری صلب به شرطی در حوزه‌ی کارکرد شــهود هندسی قرار خواهند گرفت که در خانواده‌ای از ساختارها که هندســه دارند، نشانده شــوند. برای یک زیرخمینه‌ی گسسته از یک خمینه مفاهیم موضعی و سرتاسری هندسه را چگونه تعمیم می‌دهید؟

۷-۲. حقایق هندسی

از همه‌ی لایه‌های تجرید ریاضی صحبت کردیم و پیوسته گفتیم که این‌ها تجلیات حقایق ریاضی هســتند. حقایق ریاضی چیســتند؟ اگر بشماریم، با این لایه‌ی تجرید، لایه‌های تجرید ریاضی را به هفت قسمت تقسیم کرده‌ایم. باید بدانید که هرچند این تقســیم‌بندی هفت‌تایی معمول اســت، اما چیزی شبیه تقســیم یک اکتاو به هفت نت موسیقی است و این تقسیم خداداد نیست و غیر آن نیز ممکن است. مثلاً افلاطون سه لایه‌ی تجرید ملموس، مثالی و عقلانی را در نظر می‌گرفت یا در موســیقی چینی یک اکتاو را به پنج نت تقسیم می‌کنند. راستش را بخواهید، کسی نمی‌داند حقایق ریاضی چیســتند. اما دلایل و تجربیات بســیاری چنین ایجاب می‌کنند که همیشــه ادراکات ریاضی ما تجلی چیزهای عمیق‌تری هســتند. آن چیزهای عمیق‌تر را حقایق ریاضی می‌نامیم.

این‌که همیشــه ادراکات ما تجلی ابعاد عمیق‌تری از حقیقت هســتند، نکته‌ای قابل تعمیم اســت و در سطح بسیار گسترده‌تری صحیح است. به‌خصوص همین ادراک ما از لایه‌های تجرید مســتثنا، نیســت. این هفت لایه‌ی تجرید که ساختیم، خود می‌تواند سطح ادراک ما قلمداد شود و برای آن باطنی و برای آن باطن، باطن دیگری همین‌طور

تا هفت لایه تصور شود؛ همان‌طور که در موسیقی به یک اکتاو بالاتر می‌رویم و همه‌ی ساختارهای اکتاو پایین در اکتاو بالا هم مشاهده می‌شود. بنابراین این‌که حقایق پشت صحنه‌ی ریاضی چه چیزهایی هستند، به هفتمین لایه‌ی تجرید خلاصه نمی‌شود، بلکه این لایه‌های تجرید همه بواطنی دارند که باید به نوبه‌ی خود ادراک شوند. هفتمین لایه‌ی تجرید، در واقع چیزی است که ما متناظر ذات و ادراک ذاتی قرار می‌دهیم. بنابراین این روش مطالعه‌ی لایه‌های تجرید که ما در دستور کار قرار داده‌ایم، فرض می‌کند که نفس و قلب و روح و عقل و نور و ذات نسبی هستند و معنی مطلقی ندارند. این نکته نیز بسیار بحث‌انگیز است و مورد اتفاق جمهور علما قرار نگرفته است.

هرچند همان‌طور که پیش از این گفتیم، حقایق ریاضی، هندسی یا جبری نیستند و هندسی یا جبری بودن، دو بعد مختلف از یک حقیقت هستند، می‌توان حقیقت را به زبان هندسی بررسی کرد، لذا صحبت از حقایق هندسی معنی دارد. حال باید سؤال کرد که باور کردن وجود حقایق هندسی و ارتباط بین لایه‌های تجرید به این صورتی که گفتیم، چه فوایدی در ادراک مفاهیم هندسی دارد؟ مهم‌ترین نتیجه‌ای که این فرمالیسم در پژوهش حقایق هندسی دارد، این است که تجلی حقایق هندسی همگام با تکثر آن‌هاست. هرچه حقایق را مجردتر بررسی کنیم، وحدت بیش‌تری دارند و هرچه تجلیات ملموس‌تر آن‌ها را در نظر بگیریم، کثرت آن بیش‌تر است. به‌خصوص اگر ساختار ریاضی واحدی تجلی دو ساختار مجردتر متمایز باشد، حتماً بین دو ساختار ربطی وجود دارد. بلکه به طور دقیق‌تر، حتماً هر دو ساختارها تجلی ساختار مجردتر واحدی هستند. این نکته در بسیاری از صحنه‌های پژوهشی می‌تواند هدایت‌کننده‌ی خوبی به سوی حقایق هندسی باشد. هرچه به لایه‌های مجردتر نزدیک شویم و هرچه حالت کلی‌تر و تعمیم‌یافته‌تر یک حکم را در نظر بگیریم، درخواهیم یافت که به کُنه و حقیقت آن حکم نزدیک‌تر شده‌ایم و رفتار اجزای آن را در برابر اجزای دیگر بهتر می‌توانیم توجیه کنیم.

فعالیت / دبستان

به جای آن که اعداد را به دسته‌های ده‌تایی، صدتایی و هزارتایی تقسیم کنیم و نمایش ده‌دهی اعداد را در نظر بگیریم آن‌ها را به دسته‌های پنج‌تایی، بیست و پنج‌تایی و یکصد و بیست‌و پنج‌تایی تقسیم می‌کنیم. به همان روش قبلی می‌توان اعداد را در این نمایش جدید جمع کرد. دو عدد را در نظر بگیرید و در نمایش ده‌دهی و پنج‌پنجی به نمایش بگذارید. سپس حاصل جمع این دو عدد را در هر دوی این نمایش‌ها محاسبه و با هم مقایسه کنید. آیا دو حاصل جمع به دست آمده برابرند؟ عدد ده چه برتری‌ای نسبت به عدد پنج دارد؟ چرا از مبنای ده برای محاسبات عددی استفاده می‌کنیم، نه از مبنای پنج؟ اگر هیچ‌کدام برتری ندارند، چرا از مبنای خاصی برای محاسبه استفاده می‌کنیم؟

فعالیت / راهنمایی

فرض کنید می‌خواهیم تعداد برگ‌های یک درخت را به طور تقریبی بشماریم. ناچاریم حجم تقریبی فضایی که شاخ و برگ آن اشغال کرده‌اند، محاسبه کنیم و تعداد تقریبی برگ‌ها در واحد حجم را تخمین بزنیم. چرا شمارش به مفاهیم حجم و چگالی ارتباط پیدا می‌کند؟ حجم، مفهومی عددی است، اما نه گسسته، بلکه پیوسته. چگالی نیز همین‌طور. چرا برای محاسبه‌ی مفاهیم عددی گسسته، به مفاهیم عددی پیوسته نیازمند می‌شویم؟ آیا تفکر پیوسته، تنها حاصل تجرید ذهنی است؟

فعالیت /دبیرستان

چند جمله‌ای‌ها توابعی هستند که می‌توان آن‌ها را مانند اعداد جمع و تفریق کرد. اگر توابع گویا را که حاصل تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای هستند، در نظر بگیریم، حتّی ضرب و تقسیم آن‌ها نیز یک تابع گویا خواهد بود. آیا توابع گویا نیز عدد هستند؟ اگر نیستند، پس چرا محاسبات عددی برای آن‌ها هم امکان‌پذیر است؟ اگر هستند، چگونه می‌توان آن‌ها را به صورت هندسی مورد مطالعه قرار داد؟ آیا جمع و

تفریق و ضرب و تقسیم توابع تعبیری هندسی دارند؟

فعالیت / دانشگاه ....

مفهوم خط در هندسه‌های اقلیدسی، کروی، هذلولوی، در ابعاد ۲، ۳ یا بالاتر، و در جبر خطی به نظر متفاوت می‌رسند. تعریفی از خط ارائه دهید که تمام مفاهیم خط را که ذکر آن‌ها آمد، دربربگیرد. برای ارائه‌ی این تعریف کلی، از مفاهیمی جدید استفاده خواهید کرد. آیا می‌توانستید از پیش حدس بزنید که برای ارائه‌ی تعریفی کلی از مفهوم خط، به چنین مفاهیمی نیاز پیدا خواهد شد؟ تنوع پاسخ‌ها و مقایسه‌ی آن‌ها مورد تأکید است.

فصل ۳

نقش ترسیم در حل مسئله

همان‌طور که تاکنون برای خواننده مشخص شده است، ترسیم در این کتاب معنی‌ای بسیار کلی‌تر از معنی سنّتی آن دارد. در سطح دبیرستان ترسیم، ابزاری عملی برای تفکر هندسی است. استفاده از الگوهای مقوایی یا پلاستیکی برای اشکال ساده‌ی هندسی یا خط‌کش‌هایی که الگوهای اشکال ساده‌ی هندسی توسط آن‌ها قابل ترسیم است، می‌توانند ابزار ترسیم تلقی شوند و عمل ترسیم حتّی نقاشی کردن با این اشکال هندسی نیز معنی می‌دهد. همین مفهوم ساده‌ی ترسیم می‌تواند دانش‌آموزان را در حل مسائلی که به تفکر هندسی مربوط می‌شوند، یاری کند.

در سطح راهنمایی، عمل ترسیم به معنی سنتی آن نزدیک است. استفاده از خط‌کش و پرگار و سایر ابزارهای ساده‌ی ترسیم که به روشی می‌توان دید چگونه کار می‌کنند و به سادگی می‌توان دلایل هندسی ارائه داد که چرا این ابزارها نقش خود را ایفا می‌کنند، همان ترسیم موردنظر است. ترسیم شکل یک مسئله‌ی هندسه، می‌تواند راهنمایی‌هایی در مورد ارتباط اجزای مسئله در اختیار ما بگذارد که به حل این مسئله کمک کند.

در سطح دبیرستان، علم ترسیم شامل طراحی ابزارهای ترسیم نیز خواهد شد. برای طراحی چنین ابزارهایی نیاز به تسلط بر مبحث مکان‌های هندسی وجود دارد. در هر حال این‌که سیستم کار ابزارهای ترسیم چیست و برای ترسیم هر جزء چه اطلاعاتی لازم اســت، کمک‌هایی جدی به حل مســائل هندسه و تعمیم احکام هندسی خواهد کرد. پس در این سطح این ابزارها نیستند که اصالت دارند، بلکه تنها مهم است بدانیم که یک مکان هندسی با چه اطلاعاتی به طور یگانه مشخص می‌شود و حتّی می‌توان فرض کرد ابزاری برای رسم آن مکان هندسی با اطلاعات داده شده وجود دارد، بدون آن‌که چنین ابزاری ساخته باشیم. هرچند لازم است بدانیم چرا مکان هندسی با داشتن آن اطلاعات اولیه‌ی به‌خصوص به طور یگانه به دست خواهد آمد.

در سطح دانشگاه نیز کلمه‌ی ترسیم تعمیم‌پذیر است. دانشجویان فلسفه با اصطلاح «لااسم له، لارسم‌له» آشنا هستند. رسم به معنی قالبی است که با اطلاعاتی قابل تعریف است. مثلاً این‌که یک فضای مدولی چه شیئی را نمایش می‌دهد، آن فضای مدولی را به طور کامل مشــخص می‌کند و می‌توان از این اطلاعات در شــناخت ساختار فضای مدولی یا ارتباط آن با ســایر فضاهای هندســی اســتفاده کرد. این‌که چه موجودات هندســی صلب هســتند و چه موجوداتی را می‌توان در خانواده‌ها مطالعه کرد و این‌که هندســه‌ی این خانواده‌ها چیســت و فضای دربرگیرنده‌ی آن‌ها را چه‌طور می‌توان به طور یگانه مشخص کرد، در حل مسائل دانشگاهی علم هندسه، راهبردهایی عملی را پیش‌رو می‌نهند. شاید بتوان کلمه‌ی ترسیم در سطح دانشگاه را با ریاضیات ساختنی کم و بیش یکی گرفت. کاربرد تفکر ساختنی در حل مسئله کم و بیش روشن است.

۱-۳. ناحیه‌بندی شکل

ترســیم شــکل به طور طبیعی شکل مســئله را به نواحی مختلفی تقسیم می‌کند که ذهن را برای حل مسئله مرتب می‌کند. نظم هندسی فضا در ذهن ما به طور طبیعی از ســاختارهای درون ذهنی ما القا می‌شــود. هرچند این تفکر کانتی است اما تطابق نظم هندسی درون ذهنی ما و نظم هندسی فضا بر فلسفه‌ی اسلامی تکیه می‌زند که هر دو

ساختار را از تجلیات اسماء الهی ولذا برهم منطبق می‌داند.

فعالیت / دبستان ....

یک دانش‌آموز روی کف اتاق خود نشسته است و کاغذ نقاشی خود را بر روی زمین گذاشته و سعی می‌کند چیزهایی که در کف اتاقش پراکنده‌اند، همه را نقاشی کند. نشان دهید نقطه‌ای از نقاشی وجود دارد که دقیقاً تصویر همان نقطه از اتاق است. این نقطه را چگونه می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک خط‌کش و پرگار نقطه‌ی موردنظر در فعالیت بالا را به دست آورید.

فعالیت / راهنمایی ....

فرمول‌های مربوط به مساحت اشکال چندضلعی را که می‌شناسید، با کمک قیچی کردن و چینش دوباره‌ی قطعات کنار هم به اثبات برسانید. در مورد احجام سه‌بعدی چه پیشنهادی دارید؟

فعالیت /دبیرستان ....

ابزاری بسازید که مرکز تجانس دو شکل متشابه را مشخص کند.

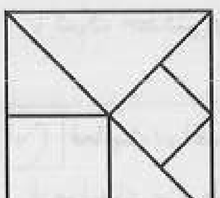
فعالیت / دانشگاه ....

نشان دهید هر نگاشت پیوسته از گوی به خودش نقطه‌ی ثابت دارد. آیا می‌توان اثباتی ساختنی از این حکم به دست داد؟ خانواده‌ی نگاشت‌های پیوسته را به نگاشت‌های هموار محدود کنید. آیا می‌توان اثباتی ساختنی از این حکم به دست داد؟ در مورد خانواده‌ی نگاشت‌های خطی چه‌طور؟ آیا می‌توانید صورت گسسته‌ای از حکم را به اثبات برسانید؟

۲-۳. برقراری ارتباط بین اجزا

برای رسم اجزای مختلف یک شکل هندسی، به اطلاعات اجزای دیگر نیاز داریم. به همین دلیل رسم به طور طبیعی بین اجزا ارتباط برقرار می‌کند. شناخت ارتباط بین اجزا به حل مسئله کمک می‌کند. برای مثال به ما ایده خواهد داد که چه روابط طولی ممکن است به حل مسئله کمک کنند. کاربرد روابط طولی خود یکی از روش‌های حل مسائل هندسی است. بسیاری از مسائل هندسه، با راه‌حلی که کاملاً به زبان روابط طولی است قابل حل هستند.

فعالیت / دبستان ....



مربعی را مطابق شکل به مربع‌ها و مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین تقسیم کنید. سپس از دانش‌آموزان بخواهید با کنار هم قرار دادن اجزای آن، نقاشی کنند. حال از آنان بخواهید روشی برای تقسیم مربع به اشکال ساده ابداع کنند و سپس با کمک اجزای جدید نقاشی کنند.

فعالیت / راهنمایی ....

سعی کنید با رسم مربع روی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه اثباتی برای قضیه‌ی فیثاغورس بیابید. حال روی هر ضلع آن یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین بنا کنید و اثباتی برای قضیه‌ی فیثاغورس از روی شکل جدید به دست دهید. همین کار را با مثلث متساوی‌الاضلاع تکرار کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

ابزاری برای تقسیم زاویه به n قسمت مساوی طراحی کنید. چنین ابزاری در نجوم کاربرد خواهد داشت. به نظر شما چرا بابلیان دایره را به ۳۶۰ درجه تقسیم کردند؟

فعالیت / دانشگاه

در قضیه‌ی گاوس ـ بونه از برهم نهی ناورداهای موضعی، ناوردایی سرتاسری به دست می‌آید. سعی کنید تمام قضایای گذر از موضعی به سرتاسری را که می‌شناسید، فهرست کنید. سپس سعی کنید این قضایا را دسته‌بندی کنید.

۳-۳. مراحل ترسیم

مراحل ترسیم یک شکل هندسی پس از مشخص شدن روش ترسیم یگانه است. به این معنی که ما از یک شکل اولیه شروع می‌کنیم که مرحله‌ی اول را تشکیل می‌دهد. سپس در مرحله‌ی دوم بعضی از اجزای دیگر قابل رسم است که از اجزای مرحله‌ی اول کمک می‌گیرد، و همین‌طور در مورد مرحله‌ی سوم الی آخر. این مراحل درجه‌ی سختی مسئله را ارزشیابی می‌کنند و از این لحاظ به حل مسئله کمک می‌کنند.

فعالیت / دبستان

الگویی از مکعب‌هایی را که روی هم قرار داده شـده‌اند، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید تا از جهت خاصی به آن نگاه کند و بدون دست زدن به آن، تعداد مکعب‌های به کار رفته را بشـمارد. حال تصویر چنین الگویی را در اختیار دانش‌آموز قرار دهید تا همان شمارش را از روی تصویر انجام دهد.

فعالیت / راهنمایی

الگوهایی را که در کتاب درسی برای رسم معرفی شده‌اند، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید مراحل رسم را خودشان حدس بزنند. سپس از الگوهای کاشی‌کاری مساجد استفاده کنید. ابتدا با تمرین‌های ساده شروع کنید و سپس رسم‌های مشکل‌تر را بررسی کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

قضایای کتاب درسی را در نظر بگیرید و با توجه به مراحل ترسیم شکل آن‌ها، عددی به هر یک نسبت دهید. حال قضاوت کنید که آیا مراحل ترسیم شکل یک قضیه تا چه اندازه محک خوبی برای پیچیدگی اثبات آن حکم است.

فعالیت / دانشگاه ....

فرض کنید روش‌های الگوریتمی برای ساختن موجوداتی هندسی در دست داریم. روشی برای تخمین پیچیدگی این الگوریتم‌ها مطرح کنید. مثلاً در روش‌های الگوریتمی در ترکیبات، سرعت یک الگوریتم محکی است که درجه‌ی توانایی الگوریتم را تخمین می‌زند. در الگوریتم‌های هندسی سرعت الگوریتم را باید با چه خصوصیت دیگری جایگزین کرد؟

۴-۳. ترسیم با روند معکوس

گاهی برای ترسیم ناچاریم مسئله را حل شده فرض کنیم. سپس با روند معکوس از پایان به آغاز بازگردیم و روش ترسیم را این‌طور حدس بزنیم. همین روش در حل مسئله نیز به‌کار می‌رود و در بسیاری مواقع می‌توان با فرض این‌که مسئله حل شده است، به نتایج خوبی رسید. توجه داشته باشید که برهان خلف به نوعی در همین روش کل حل مسئله می‌گنجد. اما برهان خلف ممکن است بی‌نهایت مرحله در اثبات را در یک مرحله خلاصه نماید. چنین مواردی در ترسیم شکل که باید در متناهی مرحله کامل شود، کاربرد ندارند.

فعالیت / دبستان ....

تمام اشکالی را که از همسایه کردن پنج مکعب واحد در کنار یکدیگر ممکن است به دست آید، بسازید و با چیدن این قطعات در کنار هم یک مکعب مستطیل بسازید (این کار را هم برای الگوهای مسطح با ساختن مستطیلی با قطر واحد و هم غیر مسطح

انجام دهید). حال این چینش را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و بخواهید با مرحله به مرحله خراب کردن و بازسازی، روش کنار هم چیدن این قطعات را برای ساختن مستطیل یا مکعب مستطیل به خاطر بسپارند.

فعالیت/ راهنمایی

یک شکل سه بعدی را در نظر بگیرید و نقشه‌ی تراز آن را از سه جهت عمود بر هم رسم کنید. سپس از دانش‌آموزان بخواهید حدس بزنند چه وسیله‌ای را در نظر گرفته بودید. می‌توانید از رایانه برای طرح چنین سؤالاتی استفاده کنید.

فعالیت /دبیرستان

یک مسئله‌ی ترسیم را در نظر بگیرید و سعی کنید به روش ترسیم با روند معکوس چند روش مختلف برای رسم شکل به دست آورید. حال همین فعالیت را برای روند مستقیم انجام دهید. به نظر کدام‌یک از روش‌های مستقیم و معکوس برای تنوع روش‌های رسم تناسب بیش‌تری دارند؟

فعالیت / دانشگاه

برهان خلف به نوعی اثبات با روند معکوس است. حتّی می‌توان ساختار با روند معکوس را مطرح کرد؛مثل ساختارهای خود متشابه. شاید بتوان گفت برهان خلف گاهی معادل با بی‌نهایت مرحله در استدلال است و به همین دلیل جایگزین‌پذیر نیست. سؤال این‌که آیا می‌توان یک منطق پادمتناهی طراحی کرد یا به کمک ساختارهای خود متشابه ریاضیات پادمتناهی را پایه‌گذاری کرد؟ سعی کنید چند مثال بسازید.

فصل ۴

ترسیم و آموزش هندسه

همان‌طور که تاکنون دریافته‌اید، آموزش هندسه در این نوشته به معنی آموزش تفکر هندسی است و هندسه معنی بسیار عام‌تری از معنی سنتی آن دارد. سؤال این که، ترسیم به معنی عام آن که در فصل گذشته تعریف شد، چه خدمتی می‌تواند به آموزش تفکر هندسی بکند؟ چه روش‌های تدریسی را پیشنهاد می‌کند؟ چه روش‌هایی برای تدوین محتوا و چینش آن را پیش‌رو می‌نهد؟ چه امکاناتی را در اختیار دانش‌آموز برای یادگیری بهتر قرار می‌دهد؟

در سطح دبستان، ترسیم چه به وسیله‌ی ابزارهای ملموس و چه توسط ابزار رسم ساده مانند خط‌کش الگودار، و چه توسط کامپیوتر و نرم‌افزارهای ساده‌ی هندسی، حرف اول و آخر را در آموزش تفکر هندسی می‌زند. در سطح راهنمایی ترسیم در کنار استدلال‌های ساده و ملموس که همه‌ی اجزای استدلال بتوانند هم‌زمان در معرض دید دانش‌آموز قرار گیرند، می‌تواند ابزار مفیدی برای آموزش تلقی شود. در سطح دبیرستان مهم‌ترین ابزار برای تربیت خلاقیت هندسی دانش‌آموزان، طراحی ابزار

ترسیم است. در سطح دانشگاه اگر بخواهیم ترسیم را با تفکر ساختنی و ریاضیات ساختنی یکی بگیریم، نمی‌توان گفت که امروزه در ابعاد نظری نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند، هرچند در آینده ساختارهای ریاضی در کنار پیچیدگی محاسبه مطالعه خواهند شد. در ریاضیات کاربردی برای استفاده از اشیای هندسی، به‌خصوص توسط رایانه، الگوریتم‌های ساختن این اشیا ریاضیات ساختنی حرف اول را می‌زنند.

در این فصل، ابتدا به دیدگاه‌های سنتی آموزش و نقش ترسیم در آن‌ها خواهیم پرداخت. سپس دیدگاهی مدرن که از ترسیم به روش مؤثری استفاده کند، معرفی خواهیم کرد. آن‌گاه کاربرد ترسیم را در برنامه‌ی آموزش ریاضی مطالعه خواهیم کرد و در چارچوب جریان‌های مفهومی و مهارتی آن را بررسی خواهیم کرد. سپس به نگرش تاریخی نسبت به ترسیم خواهیم پرداخت و آن را در خدمت کل‌نگری هندسی و تحول مفهوم فضا قرار خواهیم داد.

یک مسئله‌ی اجرایی مهم در این رابطه، دسترسی دانش‌آموزان و معلمان به ابزارهای ترسیم است. این‌که آیا تنها معلم دسترسی به این ابزارها دارد یا همه‌ی دانش‌آموزان؟ و این‌که آیا دانش‌آموزان امکانات لازم برای طراحی و ساخت ابزارهای ترسیم در اختیار دارند یا خیر؟ و سؤالاتی اجرایی مانند آن. از آن‌جا که در این کتاب به مباحث نظری اقبال داریم، نه مشکلات اجرایی، فرض خواهیم کرد همه‌ی این امکانات دردسترس معلمان و دانش‌آموزان قرار دارد و وظیفه‌ی بررسی امکانات موجود و برنامه‌ریزی مطابق با آن امکانات را به‌عهده‌ی برنامه‌ریزان آموزشی خواهیم گمارد.

۱-۴. آموزش سنتی و ترسیم

روش سنتی آموزش هندسه بر ترسیم به کمک خط‌کش و پرگار تأکید دارد. اثبات قضایا در کنار روش‌های رسم شکل آن‌ها توسط خط‌کش و پرگار از اهمیت یکسانی برخوردارند. در کتاب اقلیدس ترسیم به منزله‌ی روش ساختی از اشکال مورد بحث در قضایا مورد نظر بوده است تا قضایا یکسری احکام مجرد مستقل از عالم ظاهر تصور نشوند. به همین دلیل است که ریاضیات ساختنی را می‌توان به نوعی ادامه‌ی

روش ترسیم هندسی دانست.

فعالیت / دبستان ....

به دانش‌آموزان بیاموزید از نقاله و گونیا کمک بگیرند و اشکال ساده‌ی هندسی را به صحت و دقت رسم کنند.

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک اشکال منتظم ۱۷ نوع کاشی‌کاری منتظم می‌توان به دست داد. این الگوها را به ساده‌ترین روش رسم کنید. منظور از ساده‌ترین، کم‌ترین کاربرد خط‌کش و پرگار است. می‌توانید گذراندن دایره‌ای از سه نقطه را با گذراندن خطی از دو نقطه از یک درجه‌ی سختی فرض کنید. یا رسم دایره‌ای به مرکز داده شده و شعاع داده شده را با گذراندن خطی از دو نقطه از یک درجه‌ی سختی را فرض کنید. سپس روش‌های رسم مختلف را مقایسه نموده و ساده‌ترین آنها را انتخاب کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

اگر یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب مثبت در دو طرف تساوی داشته باشیم، روشی برای حل معادله با کمک خط‌کش و پرگار ارائه دهید. انواع چنین معادلات درجه‌ی دومی را رده‌بندی کنید. آیا می‌توانید بین روش‌های مختلفی که برای هر یک به دست آورده‌اید، اتحاد ایجاد کنید؟ آیا این روش هماهنگ از راه‌حل‌هایی که قبلاً ارائه کرده بودید، ساده‌تر است؟

فعالیت / دانشگاه ....

نشان دهید مجموعه‌ی اعداد رسم‌پذیر تشکیل یک میدان می‌دهند. آیا این میدان روی Q متناهی است؟ مولدهای آن را دقیقاً مشخص کنید.

۲-۴. آموزش مدرن و ترسیم

روش مدرن آموزش هندسه، بر ترسیم به کمک ابزارهای متنوع تأکید دارد و هم‌چنین ریاضیات ساختنی را به عنوان یک فلسفه به کار می‌گیرد و از همین طریق با تفکر الگوریتمی و استفاده و طراحی نرم‌افزارهای رایانه‌ای ارتباط پیدا می‌کند. از طرف دیگر خط‌کش و پرگار ابزاری برای تجربه تلقی می‌گردد. به این معنی که با آزمون و خطا می‌توان احکام هندسی را با کمک ترسیم حدس زد. بدین ترتیب، ریاضیات مانند سایر علوم تجربی، جنبه‌ی تجربی پیدا خواهد کرد.

فعالیت / دبستان ....

اوریگامی هنری است که در آن با کمک کاغذهای مربع شکل هم اندازه، اشیای مختلف را طراحی می‌کنند. روشی به دست دهید که هر یک از اشیای ساده‌ی هندسی توسط اوریگامی ساخته شود. حال سعی کنید تا روشی برای ساختن مکعب با کمک اوریگامی به دست دهید.

فعالیت / راهنمایی ....

احکام هندسه‌ی کتاب‌های دبیرستان را به کمک رسم با خط‌کش و پرگار تحقیق کنید. با این کار مهارت خود را در رسم تخمین خواهید زد و هم این‌که روشی برای نگاه به هندسه به عنوان علمی تجربی را تجربه کرده‌اید. این دیدگاه آموزشی توسط نیوتن مطرح شده است.

فعالیت / دبیرستان ....

ابزاری بسازید که مستقیماً از سه نقطه‌ی داده شده دایره‌ای بگذراند یا مرکز دایره‌ی گذرنده از آن‌ها را مشخص کند.

فعالیت / دانشگاه

نرم‌افزاری طراحی کنید که بتواند صحت یک حکم هندسی را تحقیق کند. برای این کار از ایده‌های هندسه‌ی تحلیلی یا هندسه‌ی جبری می‌توان استفاده کرد.

۳-۴. جریان‌های مفهومی و مهارتی

در روش برنامه‌ریزی درسی مهارت‌محور، این چینش مهارت‌ها و پیش‌مهارت‌ها هستند که بر نظام تدوین محتوا حکومت می‌کنند. جریان‌های مفهومی و مهارتی ابزاری هستند که کمک می‌کنند پیوستگی محتوای آموزشی در ذهن دانش‌آموز حفظ شود. یک جریان مهارتی مهم، جریان مهارتی ترسیم است که لازم است با جریان‌های مفهومی و مهارتی دیگر گره بخورد. در این‌جا مثال‌هایی از ارتباط جریان مهارتی ترسیم با جریان‌های مفهومی و جریان‌های مهارتی دبستان، راهنمایی، دبیرستان و دانشگاه ارائه خواهیم کرد.

فعالیت / دبستان

با کمک فرش چینی با مربع‌هایی به ضلع $^{n-}۲$ مفهومی از مساحت را پایه‌گذاری کنید. ابتدا سعی کنید با حدگیری ثابت کنید مساحت مستطیل از ضرب کردن طول در عرض آن به دست می‌آید.

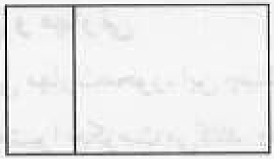
فعالیت/ راهنمایی

با عددگذاری و رسم شکل و اندازه‌گیری، تصمیم بگیرید در روابط طولی یک طول که به طور یگانه از متغیرهایی تعیین می‌شود، نسبت مستقیم یا معکوس با هر یک از این متغیرها دارد.

فعالیت /دبیرستان

نسبت $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را عدد طلایی می‌گویند و اعتقاد دارند این نسبت بین طول و

عرض مستطیل، زیباترین مستطیل را به دست می‌دهد. نقشه‌ی یک خانه را طراحی کنید که در آن این نسبت‌ها رعایت شده باشند. توجه کنید که اگر از یک مستطیل زیبا مربعی مطابق شکل حذف کنیم، مستطیلی زیبا به دست خواهد آمد. با توجه به این نکته، پیشنهاد دیگری برای یک مستطیل زیبا دارید؟



فعالیت / دانشگاه ....

ثابت کنید تثلیث زاویه با خط‌کش و پرگار ممکن نیست. این از نتایج نظریه‌ی گالوا است.

۴-۴. تاریخ علم هندسه

آشنایی با روند تاریخی پیدایش مفاهیم ریاضی، به ما کمک خواهد کرد تا ارتباطات بین این مفاهیم را بهتر درک کنیم. اطلاع از سیر تحول یک مفهوم نیز درک عمیق‌تری از آن مفهوم در اختیار ما خواهد گذاشت. حتّی می‌توان سعی کرد روند تاریخی دیگری برای پیدایش یک مفهوم تصور کرد و این خلاقیت در کار با مفاهیم را افزایش خواهد داد.

فعالیت / دبستان ....

بابلیان دایره را در نمودارهای نجومی خود برای اولین بار کشف کردند. به همین دلیل بود که آن را به ۳۶۰ درجه تقسیم کردند؛ چرا که به تعداد روزهای سال نزدیک بود و برای محاسبه نیز عدد مناسبی بود. روند تاریخی دیگری برای کشف دایره تصور کنید. سپس بگویید طبیعی‌تر است یک درجه را چه کسری از محیط دایره قرار دهیم؟

فعالیت / راهنمایی ....

دریانوردان از پرگار برای پیدا کردن محل کشتی روی نقشه‌های خود استفاده

می‌کرده‌اند. حدس بزنید که ایشان طول و عرض جغرافیایی را چگونه محاسبه می‌کرده‌اند، از چه نقشه‌هایی استفاده می‌کرده‌اند و چه نیازی به پرگار داشته‌اند.

فعالیت /دبیرستان ....

علم هندسه‌ی کروی و مثلثات کروی توسط مسلمانان که نیاز به محاسبه‌ی جهت قبله داشتند، به وجود آمد. روشی برای محاسبه‌ی طول و عرض جغرافیایی شهر خود پیشنهاد کنید. سپس بگویید برای محاسبه‌ی جهت قبله در شهرتان با داشتن طول و عرض جغرافیایی مکه، به چه فرمول‌های مثلثاتی نیاز خواهید داشت.

فعالیت / دانشگاه ....

تاریخ مفهوم فضا بعد از نسبیت اینشتین به فضا - زمان منجر می‌شود. آیا می‌توانید سیر تاریخی دیگری برای رسیدن به مفهوم فضا - زمان پیشنهاد کنید؟

۵-۴. هندسه ابزار کل‌نگری

ترسیم اشکال هندسی نیازمند در نظر گرفتن تدابیر سرتاسری است. از این‌رو ترسیم به روش تفکر کل‌نگر و درک مفاهیم سرتاسری کمک می‌کند و در آموزش هندسه باید از ترسیم در این راه کمک گرفت. البته کل‌نگری تنها در رابطه با اجزاء معنی پیدا می‌کند. در هندسه‌ی پیوسته کل‌نگری می‌تواند، معنای سرتاسری در برابر موضعی باشد اما در هندسه‌ی گسسته تفکر موضعی معنی ندارد و باید اجزاء را بازشناسی کرد.

فعالیت / دبستان ....

اشکال ساده‌ی هندسی را در نظر بگیرید. در هر یک بزرگ‌ترین مربع را جای‌گذاری کنید. ابتدا چند روش که ممکن است بزرگ‌ترین مربع را به دست دهند، در نظر بگیرید. سپس با اندازه‌گیری ضلع تصمیم بگیرید کدام از همه بزرگ‌تر است.

فعالیت / راهنمایی ....

دوایر محاطی داخلی و خارجی و دایره‌ی محیطی مثلث از این لحاظ اهمیت دارند که بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین دوایری هستند که در یک ناحیه جای می‌گیرند یا ناحیه‌ای را شامل می‌شوند. با توجه به این دیدگاه، بزرگ‌ترین‌ها و کوچک‌ترین‌های دیگری به مثلث و سایر اشکال هندسی نسبت دهید و خواص آن‌ها را بررسی کنید. چند روش برای رسم این بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین‌ها ارائه کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

پوش محدب یک شکل هندسی، یک ناوردای هندسی و مساحت یا حجم آن، تعداد اضلاع یا وجوه چند ضلعی یا چندوجهی، ناورداهای عددی سرتاسری نسبت داده شده به آن شکل ساده هستند. سعی کنید ناورداهای هندسی سرتاسری دیگری به اشکال هندسی نسبت دهید و خواص آن‌ها را بررسی کنید. همین کار را در مورد ناورداهای عددی انجام دهید.

فعالیت / دانشگاه ....

ارائه‌ی یک معادله برای مشخص کردن یک شیء هندسی، یک روش مشخص کردن آن با کمک ابزارهای کل‌نگر است. تمام روش‌هایی را که برای مشخص کردن یک فضای هندسی می‌شناسید و سرتاسری هستند، نه موضعی، فهرست کنید.

۶-۴. هندسه و مفهوم فضا

تاریخ علم هندسه با تاریخ تحول مفهوم فضا پیوند خورده است. هرچه درک ما از مفهوم فضا عمیق‌تر شود، در هندسه بیش‌تر به پیش رفته‌ایم. ترسیم‌های هندسی درکی ساختنی و ملموس از مفهوم فضا به دست می‌دهند، لذا ابزاری بسیار مناسب برای تربیت درک دانش‌آموزان از فضا، به‌خصوص در سنین پایین هستند. آیا ابزارهایی دیگر که از لحاظ آموزشی برای درک مفهوم فضا در سنین پایین کمک نمایند می‌شناسید؟

فعالیت / دبستان ....

خانــه‌ای چوبی به شــکل مکعب مســتطیل در اختیار دانش‌آمــوزان قرار دهید و بخواهید آن را طبقه‌بندی و اتاق‌بندی کنند. در مورد راهروها و پلکان‌ها تصمیم بگیرند و محل دست‌شــویی، آشــپزخانه، حمام و اتاق‌خواب‌ها را معین کنند. یک ضلع خانه را برای آنکه داخل آن قابل دسترسی باشد، خالی بگذارید.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید نقشه‌ی یک شهر را طراحی کنند و اماکن و مؤسسات و اتوبان‌ها و مراکز تفریحی و مانند آن را روی نقشــه‌ی خود مشــخص کنید. ابتدا روی سطحی مسطح و سپس روی سطحی ناهموار، این مسئله را در نظر بگیرید.

فعالیت /دبیرستان ....

خانه‌ای طراحی کنید که همه‌ی اتاق‌های آن چهاروجهی منتظم باشند. کل خانه را نیز تقریباً به همین شکل طراحی کنید و مزایای آن از لحاظ رسیدن نور و وسعت دید و مانند آن را بررسی کنید. مشکلات طراحی و زندگی در چنین ساختمانی را نیز بیان کنید. می‌توانید از مدل ساختمان مجلس شورای اسلامی ایده بگیرید.

فعالیت / دانشگاه ....

فرض کنید جهان ســه بعدی که ما در آن زندگی می‌کنیم، یک کره‌ی ســه بعدی یا یک چنبره‌ی ســه‌بعدی باشــد، با توجه به هندســه‌ی ژئودزیک‌ها توصیف کنید که در چنین جهانی چه خواهیم دید. می‌دانیم که فرض بی‌کران بودن جهان سه‌بعدی که در آن زندگی می‌کنیم، اولین بار توســط دکارت مطرح شــد. چه دلایل فلســفی برای این فرض می‌توانید ارائه کنید؟

فصل ۵

کاربردهای ترسیم

در این فصل و سه فصل آینده، به مسائل عملی ترسیم در سطح ریاضیات مدرسه خواهیم پرداخت و در دو فصل آخر به ابعاد فلسفی که بیش‌تر در ریاضیات دانشگاهی مصداق دارند، خواهیم پرداخت. هر چند در هر قسمت به مثال‌هایی برای دانش‌آموزان دبستان، راهنمایی و دبیرستان نیز اشاره خواهیم کرد. با این وصف، محتوای این فصل و سه فصل آینده بسیار به معنی سنتی ترسیم نزدیک خواهد بود که مطابق با تفکر تصویری است. بعضی از سرفصل‌ها در هر سه مقطع دبستان، راهنمایی و دبیرستان مصداق پیدا می‌کنند و بعضی دیگر تنها در بعضی رده‌هایی سنتی می‌توانند معنی داشته باشند.

۵-۱. اثبات اتحادهای جبری

کتاب اصول اقلیدس که سعی کرده است ریاضیات پایه‌ی زمان اقلیدس را اصل موضوعه‌ای کند، از ترسیم‌های هندسی به عنوان پلی ارتباطی بین ایده‌های

هندسی و عددی استفاده کرده است. اثبات هندسی اتحادهای جبری به تعبیر هندسی ساختارهای جبری قابل تعمیم است که در برابر آن می‌توان ساختاری جبری را به عنوان جبری‌سازی یک شیء هندسی مورد استفاده قرار داد.

فعالیت / دبستان ....

اعداد را به کمک چینه‌ها آموزش دهید تا با مفاهیم طول، مساحت و حجم مرتبط شوند. حال با کمک چینه‌ها اصول موضوعه‌ی حساب را تحقیق کنید. می‌توانید از تساوی هندسی یا ترازو برای اثبات اتحادها کمک بگیرید.

فعالیت/ راهنمایی ....

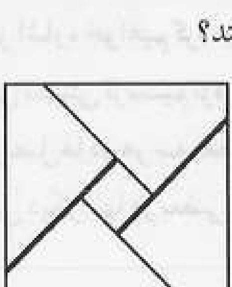
اتحادهای زیر را به کمک چیدن اشکال ساده‌ی هندسی به دو روش، در کنار هم به اثبات برسانید:

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

حال اتحادهایی مانند این را به روش هندسی اثبات کنید. سپس به شکل زیر توجه کنید. چه اتحادی را اثبات می‌کند؟



شکل بالا در الگوهای کاشی‌کاری اسلامی دیده می‌شود. الگوهایی شبیه این در کاشی‌کاری‌های مساجد بیابید و اتحادهای جبری مربوطه را بیان کنید. حال به کمک احجام ساده‌ی هندسی اتحادهای زیر را به اثبات برسانید.

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$(a-b)^3+b^3+3a^2b=a^3+3ab^2$$

$$(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

توجه کنید که همه‌ی جملات درجه‌ی سوم هستند. حال اتحادهایی با جملات درجه‌ی سوم در نظر بگیرید و سعی کنید با کمک روش هندسی آن‌ها را به اثبات برسانید.

فعالیت / دبیرستان ....

قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای زوایای °۳۰، °۴۵، °۶۰ و °۱۲۰ رأس به روش هندسی به اثبات برسانید. در حالت °۹۰ قضیه‌ی کسینوس‌ها به قضیه‌ی فیثاغورس تبدیل خواهد شد. می‌توانید روی رئوس به جای مربع، مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین یا مثلث متساوی‌الاضلاع کار بگذارید و فرمول قضیه‌ی کسینوس‌ها را به اثبات برسانید.

۵-۲. حل هندسی معادلات

از آن‌جا که عدد نزد اقلیدس با مفهوم طولی یکی بوده است، حل معادلات را به کمک روش‌های ترسیمی انجام می‌داده‌اند. البته تأکید بر حل هندسی معادلات ممکن است به خاطر بن‌بست‌های فلسفی باشد که در زمان فیثاغورسیان در مفهوم عدد ظهور کرد. کشف $\sqrt{2}$ بسیاری از بنیان‌های فلسفی تفکر فیثاغورسی را که بر مفهوم خاصی از عدد پایه‌ریزی شده بود دچار تزلزل کرد. بعدها در اثر کثرت این فروپاشی‌ها در فلسفه‌های صلب، به این نتیجه رسیدند که با آغوش باز از تحولات مفهومی استقبال کنند.

فعالیت / دبستان ....

الگوریتم تقسیم را به کمک چینه‌ها و ترازو به دانش‌آموزان بیاموزید.

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک قضیه‌ی تالس با داشـتن طول واحد و دو طول a و b معادله‌ی $ax=b$ را به روش هندسی با استفاده از خط‌کش و پرگار حل کنید.

فعالیت /دبیرستان ....

اقلیدس روش‌هایی هندسی برای حل تمام معادلات درجه‌ی دوم با ضرایب مثبت در کتاب اصول اقلیدس ارائه کرده است. خیام با کامل کردن راه‌حل‌های معاصرانش به کمک سهمی همه‌ی معادلات درجه‌ی سوم را نیز حل کرد. سال‌ها بعد ریاضی‌دانان ایتالیایی کشف کردند که چگونه با همین روش معادلات درجه‌ی چهارم را حل کنند. روش خیام و ریاضی‌دانان ایتالیایی را بازسازی کنید.

۳-۵. اثبات هندسی نامساوی‌ها

همان‌طور که تساوی اشکال هندسی به کار اثبات اتحادها می‌آید، اثبات نامساوی‌ها توسط اشکال هندسی و ترسیم حتّی متنوع‌تر نیز هست؛ چرا که برای اثبات نامساوی می‌توان از شمول هم کمک گرفت.

اثبات نامساوی‌ها به روش هندسی به کمک طول‌ها، مساحت‌ها و حجم‌ها هر سه ممکن است. به‌علاوه می‌توان طول، سطح و یا حجم غیراقلیدسی را هم در نظر گرفت. با این وصف یک الگوی هندسی با فیزیک‌های همگن مختلف نامساوی‌های بسیاری را به دست خواهد داد.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید اثبات کنند مجموع دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر است. این کار را می‌توانند با لولا کردن دو رأس از رئوس مثلث و بازگذاشتن رأس سوم به اثبات برسانند.

فعالیت / راهنمایی ....

با کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌ای به قطر وتر ثابت کنید $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. آیا می‌توانید تعمیم نامساوی میانگین حسابی - هندسی را نیز به روش هندسی اثبات کنید؟

فعالیت /دبیرستان ....

فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند که بتوانند اضلاع یک مثلث باشند. روابط طولی در مثلث را در نظر بگیرید و نامساوی‌های متقارن هندسی را به زبان جبری تبدیل کنید. نامساوی‌هایی به دست خواهد آمد که نسبت به a، b و c متقارن‌اند و با فرض $a+b>c$ ، $b+c>a$ ، $c+a>b$ برقرارند. حالتی که $a+b=c$ را نیز در نظر بگیرید و بررسی کنید که آیا حالت تساوی رخ خواهد داد؟

۴-۵. اثبات قضایا

بسیاری از احکام در تصویر به سادگی قابل مشاهده هستند، اما به راحتی نمی‌توان آن‌ها را حدس زد. از این رو ترسیم اشکال هندسی برای کشف احکام جدید بسیار تناسب دارد. کلید پیدا کردن استدلال برای بسیاری از احکام نیز با ترسیم شکل مکشوف خواهد شد. چرا که روند استدلال که مرحله به مرحله است به روند ترسیم که مرحله به مرحله است شباهت دارد بلکه غالباً متناظر است.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید برای احکام زیر استدلال بیاورند: هر قطر، دایره را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند. در مثلث متساوی‌الساقین زوایای رو به اضلاع مساوی برابرند. هر زاویه‌ی رو به قطر در دایره قائمه است.

فعالیت / راهنمایی ....

دو مربع با اندازه‌های دلخواه را در صفحه در نظر بگیرید و رئوس آن‌ها را دوبه‌دو، اما به ترتیب به هم وصل کنید. مهم نیست اولین رئوس به هم وصل شده کدام دو رأس باشند. حال وسط‌های این چهارپاره خط را در نظر بگیرید و به همان ترتیب رئوس را به هم وصل کنید. چه شکلی به دست می‌آید؟ همین کار را برای دو مثلث متساوی‌الاضلاع انجام دهید.

فعالیت /دبیرستان..............................

دو شکل متشابه با اندازه‌های نابرابر در نظر بگیرید. اجزای متناظر را با پاره‌خط‌هایی به هم وصل کنید. نقاط وسط این پاره‌خط‌ها را در نظر بگیرید. شکلی متشابه با دو شکل اولیه به دست خواهد آمد. حال به جای آن‌که پاره‌خط‌ها را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کنید، به نسبت λ تقسیم کنید. آیا می‌توانید برای مقادیر منفی و یا بزرگ λ نیز شکلی متشابه پیدا کنید. نشان دهید λ ای وجود دارد که اگر این پاره‌خط‌ها را به نسبت λ تقسیم کنیم، همه‌ی این نقاط بر هم منطبق می‌شوند. برای این نقطه معنی‌ای پیدا کنید.

۵-۵. کشف خواص جدید اشکال

ترسیم اشکال هندسی باعث می‌شود حقایق هندسی دردسترس تفکر تصویری قرار گیرند و تفکر تصویری خواص و ساختارهای هندسی اشکال را نمایان می‌سازد. تفکر تصویری در برابر تفکر کلامی تواناتر است همچنان که چشم در برابر گوش داده‌های بیش‌تری را در اختیار مغز قرار می‌دهد. بنابراین هندسی‌سازی یک مفهوم ریاضی که آن را دردسترس تفکر تصویری قرار می‌دهد، غنیمت است.

فعالیت / دبستان ....

الگویی از مکعب‌های هم اندازه را که روی هم قرار گرفته‌اند، در نظر بگیرید و از

دانش‌آموزان بخواهید بزرگ‌ترین مکعبی را که در آن الگو جای می‌گیرد پیدا کنند، که خود از مکعب‌های کوچک تشکیل شده باشد.

فعالیت / راهنمایی ....

یک دوازده وجهی منتظم با مقوا بسازید. وجوه این دوازده وجهی پنج‌ضلعی منتظم هستند. مکعبی بیابید که رئوس آن روی رئوس این دوازده وجهی قرار گرفته باشند.

فعالیت /دبیرستان ....

می‌توان یک مکعب درون یک دوازده‌وجهی منتظم محاط کرد که رئوس آن روی رئوس دوازده وجهی قرار بگیرند. الگوریتمی ارائه دهید که با داشتن مکعب، رئوس دوازده وجهی منتظم را به دست آوریم.

فصل ۶

ترسیم‌های پایه

تفکر اصل موضوعه‌ای و اشیایی که در یک نظریه‌ی هندسی به کار می‌روند و نوع روابطی که بین آن‌ها در اصول موضوعه تعریف می‌شود، به خوبی روش‌های ترسیمی را که می‌تواند به کار رود، محدود می‌کند. لذا ترسیم تبدیل خواهد شد به یک‌سری ترسیم‌های پایه و چگونگی ترکیب این ترسیم‌ها برای ساختن ترسیم‌های پیچیده‌تر و این‌که ترسیم‌های پایه توسط چه ابزارهایی قابل رسم هستند و این ابزارها چه شرایط خاصی را بر عمل ترسیم تحمیل می‌کنند. هرچند اصول موضوعه‌ی اقلیدسی برای هندسه‌ی اقلیدسی کهن‌ترین و معروف‌ترین فرمول‌بندی اصل موضوعه‌ای برای هندسه‌ی باستانی است، اما اصول موضوعه‌ای که توسط هیلبرت برای هندسه اقلیدسی ارائه شدند، ریزه‌کاری‌های هندسی را بهتر به نمایش می‌گذارند. لذا از این اصول موضوعه بهره خواهیم برد.

۱-۶. اصول موضوعه‌ی هیلبرت

اقلیـدس در فرمول‌بندی اصول موضوعه‌ی خـود از چندنکته غفلت کرده بود. او بایـد فـرض می‌کرد نقطه و خط وجود دارند. همه‌ی نقاط بر یک امتداد نیسـتند و هر خط دست‌کم دو نقطه روی خود دارد. این فرضیات را در قالب اصول وقوع می‌توان چنین بیان کرد:

- اصـل اول وقـوع. از هـر دو نقطه‌ی متمایز تنها یـک خط وجود دارد که از آن‌ها می‌گذرد.
- اصل دوم وقوع. روی هر خط لااقل دو نقطه‌ی متمایز وجود دارد.
- اصل سـوم وقوع. سـه نقطه‌ی متمایز وجود دارند که هیچ خطی هر سـه‌ی آن‌ها را دربرنمی‌گیرد.

هیلبرت به اصول اقلیدس اصول دیگری نیز اضافه کرد. دسته‌ای از اصول به مفهوم بینیـت بازمی‌گردنـد. اگر نقطه‌ی B بین نقاط A و C باشـد، آن را با نماد $A*B*C$ نمایش می‌دهیم. اصول بینیت بدین قرارند:

- اصـل اول بینیـت. اگـر $A*B*C$، آن‌گاه A، B و C سـه نقطه‌ی متمایز بر یک خط هستند و $C*B*A$.
- اصل دوم بینیت. اگر نقاط متمایز B و D داده شـده باشـند،نقاط A، C و E بر خـط گذرنـده از B و D وجـود دارند؛ به طوری کـه $A*B*D$، $B*C*D$ و $B*D*E$.
- اصل سوم بینیت. اگر A، B و C سه نقطه‌ی متمایز روی خطی باشند، آن‌گاه یک و تنها یکی از آن‌ها بین دو نقطه‌ی دیگر قرار دارد.
- اصل چهارم بینیت (جداسازی). به ازای هر خط l و هر سه نقطه‌ی A، B و C که روی l واقع نباشـند، هرگاه A و B در یک طرف l و B و C در یک طرف l باشند، آن‌گاه A و C در یک طرف l واقع‌اند. به‌علاوه هرگاه A و B در دو طرف l و B و C در دو طرف l باشند، آن‌گاه A و C در یک طرف l واقع‌اند.

هیلبـرت برای انطباق نیز اصـول موضوعه‌ای تعریف کرد. اصول موضوع قابلیت

انطباق بدین قرارند:

- **اصل اول قابلیت انطباق.** هرگاه A و B دو نقطه‌ی متمایز باشند و A' نقطه‌ای دلخواه به ازای هر نیم خط s که از A' رسم شود، فقط یک نقطه‌ی B' بر s واقع است که $B'\neq A'$ و $AB\cong A'B'$.
- **اصل دوم قابلیت انطباق.** قابلیت انطباق پاره‌خط‌ها رابطه‌ای هم‌ارزی است.
- **اصل سوم قابلیت انطباق.** هرگاه $A*B*C$ و $A'*B'*C'$ و $AB\simeq A'B'$ و $BC\simeq B'C'$، آن‌گاه $AC\simeq A'C'$.
- **اصل چهارم قابلیت انطباق.** هرگاه $\angle BAC$ و هم‌چنین نیم‌خط $\overrightarrow{A'B'}$ که از نقطه‌ی A' خارج شده است، داده شده باشند، فقط یک نیم خط $A'C'$ در یک طرف معین خط گذرنده از B' و A' وجود دارد که $\angle BAC = \angle B'A'C'$
- **اصل پنجم قابلیت انطباق.** قابلیت انطباق زاویه‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.
- **اصل ششم قابلیت انطباق.** هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر قابل انطباق باشند، آن دو مثلث قابل انطباق‌اند.

اصول موضوعه‌ی پیوستگی از سایر اصول پیچیده‌ترند و بدین‌قرارند.

- **اصل ارشمیدس.** اگر AB و CD دو پاره‌خط باشند، عددی مانند n وجود دارد؛ به طوری که اگر CD را n بار بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$، ابتدا از A بگذاریم، به نقطه‌ای مانند E می‌رسیم که $n.CD=AE$ و $A*B*E$
- **اصل ددکیند.** فرض می‌کنیم مجموعه‌ی نقاط واقع بر یک خط l، از اجتماع دو زیرمجموعه‌ی S_1، S_2 چنان تشکیل شده باشند که هیچ نقطه‌ی S_1 بین دو نقطه‌ی S_2 نباشد و به عکس. آن‌گاه نقطه‌ی یگانه‌ای مانند O وجود دارد که P_1*O*P_2 اگر و فقط اگر $P_1\in S_1$ و $P_2\in S_2$ یا این‌که $P_1\in S_2$ و $P_2\in S_1$
- **اصل پیوستگی دایره.** اگر دایره‌ی γ یک نقطه درون دایره‌ی γ' و یک نقطه بیرون آن داشته باشد،دو دایره همدیگر را در دو نقطه می‌برند.

● **اصل پیوستگی مقدماتی.** اگر یک سرپاره خطی درون یک دایره و سر دیگر آن بیرون آن باشد، آن پاره‌خط دایره را می‌برد. هیلبرت اصل توازی ضعیف‌تری از اقلیدس انتخاب کرد.

● **اصل توازی هیلبرت.** به ازای هر خط l و هر نقطه‌ی خارج از آن حداکثر یک خط موازی با l از آن نقطه می‌گذرد.

۲-۶. ابزارهای ترسیم و ترسیم‌های پایه

هرچند اصول موضوعه‌ی هیلبرت بسیار دقیق‌تر از اصول موضوعه‌ی اقلیدس هستند، با این حال حقایق فیزیکی ترسیم توسط خط‌کش و پرگار را به زبان اصول موضوعه ترجمه کرده‌اند و به هیچ‌وجه در ابزارهای ترسیم انقلابی به پا نمی‌کنند، لذا ابزارهای اولیه‌ی ترسیم خط‌کش و پرگار باقی می‌مانند. اگر خط را دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت فرض کنیم، باید گذراندن خطی از دو نقطه معادل گذراندن دایره‌ای از سه نقطه قرار بگیرد. یا این‌که چون خط از بی‌نهایت می‌گذرد، گذراندن خط از دو نقطه می‌تواند معادل گذراندن دایره به مرکز داده شده از یک نقطه تصور شود و این حقیقت که همه‌ی خطوط از بی‌نهایت می‌گذرند، با وسیله‌ای جایگزین شود که به هر سه نقطه، مرکز دایره‌ی گذرنده از آن‌ها را نسبت می‌دهد. در این صورت خط شیئی ساده‌تر از دایره فرض شده است که بسیار هم طبیعی است؛ چرا که خط خمی درجه‌ی اول و دایره‌ی خمی درجه‌ی دوم است. با کمک معادلات خط و دایره می‌توان دید که خط با دو ضریب و دایره با سه ضریب مشخص می‌شوند.

ابزاری که عمود منصف یک پاره‌خط را با داشتن دو سر آن به دست دهد، پس از دو بار کاربرد مرکز یک مثلث را مشخص می‌کند. اما این کار را پیچیده می‌کند و رسم هر عمود منصف با رسم دو دایره و یک خط معادل است. به روشنی و وضوح می‌توان دید که درجه‌ی خم‌های جبری با درجه‌ی پیچیدگی یک ترسیم ناهماهنگ است. ساده‌ترین راه برای فرار این است که هر ترسیم را معادل با رسم تعدادی خط و تعدادی دایره و چندبار انطباق شعاع دایره بگیریم، ولی این سه عمل را با هم مقایسه

نکنیم. با این کار رسم با خط‌کش و پرگار را با سه محک می‌سنجیم، نه با یک محک. اگر ابزاری در دست داشتیم که مرکز یک مثلث را به دست می‌داد، می‌توانستیم ترسیم را با تعدادی کاربرد این ابزار، تعدادی رسم خط یا دایره و تعدادی انطباق شعاع دایره یکی بگیریم. می‌بینیم که باز سه محک برای سنجش و مقایسه‌ی پیچیدگی ترسیم‌ها لازم داریم.

هنوز پیچیدگی‌های دیگری وجود دارند؛ مثلاً چرا باید رسم مماس مشترک دو دایره را پیچیده‌تر از رسم خطی گذرنده از دو نقطه بگیریم. یا این‌که رسم دایره‌ای مساوی با دایره‌ای دیگر به مرکز داده شده نیاز به انطباق شعاع‌ها دارد و آن نیازمند انتخاب نقطه‌ای روی دایره است. شاید به کار بردن مدلی از هندسه‌ی اقلیدسی که در آن نقاط دوایر به قطر واحد هستند و خطوط نوارهایی به قطر واحد، به سادگی کار کمک می‌کند. گذراندن خطی از دو نقطه معادل دو بار رسم مماس مشترک خواهد بود که به وسیله‌ی خط‌کش انجام شود و رسم دایره معادل دو بار رسم دایره به وسیله‌ی پرگار خواهد بود. پس مشکل اول را می‌توان حل کرد. در مورد مشکل دوم، منطبق کردن شعاع دایره مثل منطبق کردن با یک پاره‌خط خواهد بود، چون برای آن باید از دوبار کاربرد مرکزیاب و سپس انطباق پرگار با فاصله‌ی دو مرکز استفاده کرد. رسم توسط مرکزیاب، معادل پیدا کردن مرکز دایره مماس بر سه دایره خواهد بود. اما پیدا کردن دایره‌ی مماس بر دو دایره آسان‌تر است. با این اوصاف می‌توان فرض کرد رسم خط و رسم مماس مشترک هم‌ارزش‌اند و انتخاب نقطه‌ای روی دایره مجانی است و نباید در درجه‌ی سختی رسم تأثیری داشته باشد. این توضیحات نشان می‌دهند که ابزار مرکزیاب، ابزاری اساسی است و کاربرد خط‌کش و پرگار به طور طبیعی باید از یک درجه‌ی سختی تصور شوند. پس سه محک دوم ارجحیت دارند.

۶-۳. ابزارهای ترسیم و ترسیم‌های ترکیبی

در مسائل ترسیم از برخی ترسیم‌های ساده استفاده می‌شود که با ترکیب آن‌ها مسائل ترسیم حل می‌شوند. اگر برای هر یک از این ترسیم‌های ساده ابزاری وجود

داشت، کار ترسیم را بسیار ساده می‌کرد. اما تعداد ابزارهای پایه افزایش می‌یافت. حتی می‌توان ابزارهایی ساخت که ترسیم‌های ترکیبی را در یک مرحله انجام دهد، اما در این صورت باید برای هر مسئله‌ی ترسیمی یک ابزار ساخت که به صرفه نیست.

فعالیت /دبیرستان..

برای هر یک از ترسیم‌های زیر ابزاری بسازید که آن را در یک مرحله به انجام رساند. توجه کنید که برای بعضی از این ترسیم‌ها ابزارهایی را می‌شناسید.

۱. با داشتن دو نقطه عمود منصف پاره‌خط و اصل آن‌ها را رسم کنید.

۲. از نقطه‌ای واقع بر خط عمود اخراج کنید.

۳. از نقطه‌ی خارج خط عمودی بر خط رسم کنید.

۴. نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط را تعیین کنید. (یا یک پاره‌خط را به نسبت λ تقسیم کنید).

۵. نیمساز یک زاویه را رسم کنید (یا یک زاویه را به نسبت داده شده تقسیم کنید).

۶. زاویه‌ای مساوی با زاویه‌ی داده شده رسم کنید که رأس و یک ضلع آن معلوم باشد.

۷. اخراج خط مماس بر دایره از نقطه‌ای واقع بر آن.

۸. اخراج خط عمود بر دایره از نقطه‌ای واقع بر آن.

۹. از نقطه‌ای خارج از دایره بر آن خطی را مماس کنید.

۱۰. از نقطه‌ای خارج از دایره بر آن خطی را عمود کنید.

۱۱. در ترسیم‌های بالا رسم مماس یا قائم را با رسم خط یا دایره‌ای که با خط یا دایره‌ای داده شده، زاویه‌ای مفروض بسازد، جایگزین کنید.

فصل ۷

مکان‌های هندسی مهم

آن‌چه در تاریخ هندسه موردنظر ترسیم‌کنندگان بوده است، رسم مکان‌های هندسی است و به همین دلیل است که ابزارسازی برای چنین تعریفی از ترسیم معنی پیدا می‌کند. در سطح دبستان، راهنمایی و دبیرستان با این تعریف از ترسیم سروکار داریم، اما در سطح دانشگاه که ترسیم با ریاضیات ساختنی مترادف می‌شود، مبحث فضاهای مدولی نیز وارد می‌شود. این بی‌معنی است که بخواهیم ابزاری بسازیم که یک فضای مدولی را رسم کند؛ چرا که هم ساختار فضاهای مدولی تابعی پیچیده از اطلاعات اولیه است، هم این‌که خود این فضاها موجوداتی با ابعاد بالا هستند و معمولاً روی کاغذ قابل رسم نیستند. اما به طور نظری فضاهای مدولی می‌توانند همان نقش اشکال رسم شده توسط ابزارها را در ریاضیات عالی ایفا کنند.

۱-۷. مکان‌های خطی

اگر برای رسم مکان‌هایی که یک خم درجه‌ی یک پاسخ آن‌هاست، ابزاری می‌داشتیم، کار ترسیم اشکال هندسی بسیار ساده‌تر می‌شد. همه‌ی این ابزارها را از آن‌جا که خط رسم می‌کنند، خط‌کش می‌نامیم.

فعالیت /دبیرستان..

خط‌کش‌هایی بسازید که در هر یک از مکان‌های هندسی زیر با داشتن داده‌ها خط مکان را رسم کنند:

۱- مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصلش از دو نقطه‌ی داده شده مقدار ثابت k است.

۲- مکان هندسی نقاطی که از دو خط داده شده به یک فاصله‌اند (یا نسبت فواصلشان عددی ثابت است).

۳- مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو خط داده شده مقدار ثابت k است.

۴- مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو خط داده شده مقدار ثابت k است.

۵- مکان هندسی نقاطی که نسبت به دو دایره قوت برابر داشته باشند.

۶- مکان هندسی مرکز دوایری که بر دو دایره‌ی داده شده عمودند.

۲-۷. مکان‌های درجه‌ی دوم

با داشتن ابزارهایی برای رسم بیضی، سهمی و هذلولی بسیاری از مسائل از جمله حل معادلات درجه‌ی سوم و چهارم توسط ترسیم قابل حل خواهند شد. بسیاری از مکان‌های هندسی نیز دایره هستند که در صورت وجود ابزاری برای رسم این مکان‌ها، ترسیم‌های هندسی بسیار ساده‌تر خواهند شد. از آنجا که این ابزارها دایره رسم می‌کنند آن‌ها را دایره کش می‌نامیم.

فعالیت /دبیرستان.............................

دایره‌کش‌هایی بسازید که در هر یک از مکان‌های هندسی زیر با داشتن داده‌ها دایره‌ی مکان را رسم کنند:

۱- مکان هندسی نقاطی که پاره‌خط داده شده را با زاویه‌ی داده شده ببینند.

۲- مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلش از دو نقطه‌ی داده شده مقدار ثابتی باشند.

۳- مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصلشان از دو نقطه‌ی داده شده برابر مقدار ثابتی باشند.

۴- مکان هندسی نقاطی که طول مماس‌های رسم شده از آن‌ها بر دایره‌ای مفروض مقدار ثابتی باشند.

۵- مکان هندسی نقاطی که قوت آن‌ها نسبت به دایره‌ای مفروض مقدار ثابتی باشند.

فعالیت /دبیرستان.............................

بیضی‌کش‌هایی بسازید که در هر یک از مکان‌های هندسی زیر با داشتن داده‌ها بیضی مکان را رسم کنند:

۱- مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت برابر مقدار ثابتی باشند.

۲- مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصلشان از دو خط متقاطع مقدار ثابتی باشند.

۳- مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلشان از نقطه‌ای ثابت و خطی ثابت مقداری ثابت کوچک‌تر از واحد باشد.

فعالیت /دبیرستان.............................

هذلولی‌کش‌هایی بسازید که در هر یک از مکان‌های هندسی زیر با داشتن

داده‌ها هذلولی مکان را رسم کنند:

۱- مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت برابر مقدار ثابتی باشند.

۲- مکان هندسی نقاطی که حاصل‌ضرب فواصلشان از دو خط متقاطع مقدار ثابتی باشند.

۳- مکان هندسی مرکز دوایری که بر دو دایره مماس‌اند.

۴- مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلشان از نقطه‌ی ثابت و خطی ثابت، مقداری ثابت بزرگ‌تر از واحد باشد.

فعالیت /دبیرستان..

سهمی‌کشی بسازید که در مکان هندسی زیر با داشتن داده‌ها سهمی مکان را رسم کند. خیام چنین ابزاری را برای حل معادلات درجه‌ی سوم به کار می‌برده است.

۱- مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی ثابت و خطی ثابت فاصله‌ی برابر داشته باشند.

۳-۷. فضاهای مدولی

در هندسه جبری برای هر خانواده از اشیا از یک نوع که می‌توانند به طور پیوسته به یکدیگر تبدیل شوند، فضای مدولی در نظر می‌گیرند. فضای مدولی وابسته به یک خانواده از اشیا، فضایی هندسی است که نقاط آن با اشیای خانواده‌ی موردنظر متناظرند و تغییر پیوسته‌ی اشیای خانواده خم‌هایی پیوسته روی فضای مدولی به دست می‌دهند.

فعالیت / دانشگاه ....

فضای مدولی همه‌ی مثلث‌ها با تقریب تشابه را رسم کنید. حال فضای

مدولـی همه‌ی مثلث‌ها را مشــخص کنید. حالت‌هــای تبهگون یک مثلث را نیز در نظــر بگیریــد. حال ســعی کنید با کمک این فضاهای مدولی حکمی هندســی را به اثبات برســانید.

فصل ۸

روش‌های حل مسائل ترسیم

مسائل ترسیم شاخه‌ای خاص از مسائل هندسه‌ی سنتی است که عمدتاً به رسم اشکال هندسی با داشتن داده‌های خاص توسط خط‌کش و پرگار برمی‌گردد. مانند همه‌ی سنت‌های مسئله، به مرور تکنیک‌های خاصی برای حل این‌گونه مسائل دسته‌بندی شده‌اند و استراتژی‌های خاصی برای تفکر در مورد این مسائل شناخته شده‌اند. هرچند مسائل ترسیم بخشی کاملاً سنتی از علم هندسه را تشکیل می‌دهند، اما زیبایی مسائل مطرح شده در این شاخه موجب شد که نگاه فلسفی و آموزشی خود را به کناری بنهیم و با پیروی و تبعیت کردن از هندسه‌دانان سنتی، به حل و بحث این‌گونه مسائل بپردازیم. احتمالاً محتویات این فصل به علت تطابق با سنت، برای معلمان کهنه‌کار و باتجربه، شیرین‌ترین در بین همه‌ی فصول خواهد بود.

سبک تألیف این فصل با سایر فصول متفاوت خواهد بود. سعی می‌کنیم ایده‌های آموزشی خود را در یک کلاس درس واقعی پیاده کنیم و برای این کار به احترام استاد مسلّم هندسه و معلم یک نسل از معلمان هندسه‌ی کشورمان از نام آقای حسین

غیور استفاده کرده‌ایم. اما مکالماتی که در این‌جا آمده، واقعیت تاریخی ندارند. برای محتوای درس نیز از کتاب سجزی درباب ترسیم‌های هندسی استفاده کرده‌ایم.

سِجْزی یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری قمری بود. از زندگی او اطلاعات کمی در دست است. نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی است که در جنوب شرقی ایران واقع است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذرانده. او با ابوریحان بیرونی ملاقات داشته است. او اولین کسی است که روش‌هایی برای آموزش حل مسئله پیشنهاد می‌کند. هزار سال پس از او در قرن بیستم پولیا، ریاضی‌دان مجارستانی، ایده‌هایی بسیار شبیه به ایده‌های سجزی در آموزش حل مسئله بیان کرد. پولیا در غرب به عنوان یکی از پیش‌کسوتان آموزش ریاضی شناخته می‌شود. شاید پولیا بسیار خوشحال می‌شد اگر می‌دانست هزار سال پیش از او یک ریاضی‌دان ایرانی به نظرات او اعتقاد داشته است. هدف سجزی این است که قوانینی را برشمارد که با دانستن و فراگرفتن آن‌ها به دست آوردن ترسیم‌های هندسی موردنظر پژوهشگر بر وی آسان شود. او سعی می‌کند شیوه‌هایی را ذکر کند که چون پژوهشگری آن‌ها را درپیش گیرد، ذهنش در جنبه‌های مختلف ترسیم شکل‌ها تقویت شود. سجزی درباره‌ی آموزش حل مسئله چنین می‌گوید: «عده‌ای گمان می‌کنند که راهی برای آگاهی از قانون‌های به دست آوردن شکل‌های جدید، ولو با پژوهش زیاد، تمرین، مطالعه و فراگیری اصول هندسه وجود ندارد، مگر آن که شخص دارای استعدادی فطری و ذاتی باشد که او را به کشف شکل‌های هندسی قادر گرداند؛ چرا که مطالعه و تمرین برای این کار کافی نیست. اما واقعیت چنین نیست. کسانی هستند که توانایی فطری دارند و از قدرت عالی برای یافتن شکل‌های هندسی برخوردارند، ولی علم زیادی ندارند و در یادگیری این مطالب کوشا نیستند. اما کسانی هم هستند که کوشش زیاد می‌کنند و اصول و شیوه‌ها را یاد می‌گیرند، ولی توانایی فطری عالی ندارند. اگر کسی استعداد ذاتی و فطری داشته باشد و در مطالعه و تمرین بکوشد، در زمره‌ی دانشمندان طراز اول و برجسته درمی‌آید. اگر توانایی شخص کامل نباشد، اما بکوشد و مطالعه کند،

می‌تواند از طریق مطالعه به مقام برجسته‌ای نائل شود. اما اگر کسی دارای این قدرت باشد، ولی اصول را یاد نگیرد و در ترسیم‌های هندسی تمرین مداوم نکند، به‌هیچ‌وجه از توانایی خود بهره نخواهد گرفت. چون اوضاع بدین قرار است که گفتیم، اگر کسی تصور کند که کشف هندسی تنها به توانایی ذاتی است و به مطالعه بستگی ندارد، تصورش باطل است.»

سجزی در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی چنین می‌نویسد: «برکسی که می‌خواهد این رشته را فراگیرد، لازم است بر قضایایی که اقلیدس در کتاب اصول خود آورده، عمیقاً تسلط یابد، زیرا بین تسلط بر چیزی و خود آن چیز، فاصله‌ی عمیقی وجود دارد. هم‌چنین باید تصور کاملی از انواع و خواص شکل‌ها داشته باشد تا وقتی به جست‌وجوی خواص آن‌ها نیاز پیدا کرد، به راحتی بتواند آن‌ها را بیابد. اگر لازم شد پژوهشی انجام دهد، باید مقدمات و قضایایی را که از همان جنس هستند یا وجه اشتراکی با آن دارند، مطالعه و در ذهن خود مجسم کند. مثلاً اگر بخواهیم شکلی مربوط به مثلث به دست آوریم، باید همه‌ی خواصی را که در مثلث‌ها هست و قضایایی را که اقلیدس ذکر کرده است، و آن‌چه از زاویه‌ها و کمان‌ها و ضلع‌ها و خط‌های موازی را که به خواص مثلث‌ها مربوط است، در ذهن بیاوریم، تا کار بر پژوهشگر آسان شود و بتواند آن شکل را به دست آورد. بعضی شکل‌ها در یک یا چند ویژگی خاص اشتراک دارند و بعضی دیگر هیچ وجه مشترکی ندارند و برخی بسته به شکل، تناسب و جنس آن‌ها وجه اشتراک دور یا نزدیک با هم دارند.

هرگاه بخواهیم شکلی را از مقدمات به دست آوریم (که در این‌جا منظور از مقدمه، شکلی است که پیش از آن می‌آید و مبنایی است برای یافتن شکل جدید) و اگر یافتنش از این مقدمه برایمان دشوار باشد، در این صورت باید آن را از مقدمه‌ای مربوط به این مقدمه بجوییم، بلکه جست‌وجویمان براساس این قضیه به نتیجه برسد.

پس نتیجه می‌گیریم که اگر شکلی را بتوان از یکی از مقدمات به دست آورد، آن را از مقدماتی که به آن مربوط باشند، یا از برخی از آن‌ها برحسب میزان ارتباط، می‌توان به دست آورد.

از خواص شـکل‌ها آن اسـت که برخی از آن‌ها را می‌توان به آسـانی از مقدمات گوناگون و به شـیوه‌های مختلفی به دسـت آورد و برخی را تنها از یک مقدمه می‌توان به دسـت آورد و برای برخی هیچ مقدمه‌ای وجود ندارد، ولو آن که بتوان آن شـکل را تجسـم کرد یا درسـتی آن در طبیعت مشهود باشد. این امر نتیجه‌ی رابطه‌ی نزدیک آن شـکل با خواص مقدمات یا تفاوت بین آن شـکل و آن مقدمات اسـت. هم‌چنین، شـکل‌ها می‌توانند مقدماتی داشـته باشـند و مقدمات آن‌ها می‌توانند مقدماتی داشته باشـند و مقدمات آن‌ها هم می‌توانند مقدماتی داشـته باشند و این شکل‌ها را می‌توان از مقدمات مقدمات به دست آورد. این خاصیت نیز از وجوه اشتراک شکل‌ها که ذکر کردیم ناشی می‌شود.

هم‌چنین ممکن است که یافتن شکل‌ها دشوار باشد، به خاطر این که نیازمند یافتن یک رشـته مقدمات پی‌درپی، از یک یا دو قضیه باشـند، چنان که ان‌شـاءالله بعداً بیان خواهیم کرد. گاهی هم به قضایای زیاد و مقدمات زیاد نیاز دارند که متوالی نیسـتند، بلکه همه با یکدیگر مرتبط‌اند، چنان که ان‌شاءالله بعداً ذکر خواهیم کرد. گاهی شیوه‌ای بر پژوهشگر ظاهر می‌شود که با آن به آسانی می‌تواند بسیاری از شکل‌های دشوار را به دست آورد. این روش نقل است. ان‌شاءالله شرح و مثال آن را خواهیم آورد.

شـیوه‌ی دیگری هم هسـت که پیروی از آن، کار پژوهشگر را آسان می‌کند. فرض می‌کند مقصود مسـئله، چنان‌چه ترسـیم باشـد، رسم شده اسـت و چنان‌چه مقصود، جسـت‌وجوی ویژگی خاصی باشـد، آن ویژگی خاص برقرار اسـت. سپس آن را به کمـک مقدمـات متوالی یا مقدمات مرتبط به هم تحلیل می‌کند، تا آن‌که سـرانجام به مقدمات صحیح و درسـت یا به مقدمات غلط برسـد. اگر به مقدمات درسـت رسید، آن‌چه مطلوب بود، می‌تواند به عنوان نتیجه به دسـت آید. اگر به مقدمات غلط برسـد، ناممکن بودن آن‌چه مطلوب بود، نتیجه می‌شود. این روش «تحلیل به عکس» خوانده می‌شود. کاربرد این روش از روش‌های دیگر عام‌تر است. ان‌شاءالله بعداً مثالی برای آن خواهیم آورد. ترکیب، عکس تحلیل اسـت؛ یعنی ترکیب، پیمودن راه اسـتدلال به سوی نتیجه است. با استفاده از مقدمات، تحلیل پیمودن راه به سوی مقدماتی است که

مطلوب از آن‌ها نتیجه می‌شود. کار هندسه این است که مجهول را به کمک آن ترسیم یا معلوم می‌کنند. در این جا (مجهول) الزاماً یا ترسیم‌ها و یا ویژگی‌های خاص است. پژوهشگر نخست باید درباره‌ی مسئله و چیزهایی که خواسته شده است، تأمل کند. مسئله‌هایی هستند که بذاته و بالطبع امکان‌پذیرند، ولی ما به آن‌ها واقف نیستیم و یا به دست آوردن آن‌ها به علت نبود مقدمات ناممکن است...

مسائلی هم هستند که سیاله‌اند و تعداد مثال‌ها یعنی جواب‌های آن‌ها بی‌شمار است. معنی کلمه‌ی سیاله آن است که جواب‌ها به وسیله‌ی شرایط کاملی که آن‌ها را از بقیه جدا کند، معین نشده‌اند. شکل‌هایی هستند که می‌توان آن‌ها را کشف کرد، ولی کشف آن‌ها جز با مقدمات زیاد ممکن نیست... هم‌چنین مسائلی وجود دارد که به تیزهوشی فرد پژوهشگر نیاز دارند، به این صورت که لازم است در آن واحد علاوه بر قضایا و مقدمات، ترسیم‌های زیادی را تجسم کند، ترسیم‌هایی که ویژگی‌هایی خاص را برساند. مردی که این‌گونه در طلب ویژگی‌های خاص است، ارشمیدس نامیده می‌شود که تجسم کمال دانش یونانیان است؛ یعنی مهندس دارای احاطه‌ی کامل بر علوم عصر خود. بر پژوهشگر است که چون قصد یافتن شکلی را دارد، در آغاز به پایان کار بیندیشد و به عکس، چنان که قبلاً گفتیم. بدین ترتیب که در آغاز کار آن‌چه را مطلوب است، فرض کند و آن را نتیجه‌ی مقدماتی بداند که شکل را به آن‌ها تحلیل می‌کند.

هندسه‌دانانی در دوران باستان بوده‌اند که وقتی کشف چیزهای مطلوب برایشان دشوار بود، شگردهای ظریفی به کار می‌بردند؛ مثل آن هندسه‌دان که چیزهای مطلوبش به نسبت مربوط می‌شد و در آن‌ها از اعداد و ضرب استفاده می‌کرد. یا آن هندسه‌دان که مسئله‌اش اندازه‌گیری مساحت یک شکل یا تساوی بین شکل‌ها بود و در این کار از ترسیم آن‌ها بر پارچه‌ی نازک یا کاغذ و وزن کردن آن‌ها استفاده می‌کرد یا شگردهای مشابه دیگری به کار می‌برد. این‌ها شیوه‌های کشف در این فن است. ما آن‌ها را جداگانه برمی‌شماریم تا پژوهشگر با ذهن خود تجسم کند و به خواست خدا و حسن توفیق او، آن‌ها را فراگیرد:

نخســت، مهارت و تیزهوشی، و توجه به شــرایطی که نظم مناسب مسئله ایجاب می‌کند.

دوم،تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات مرتبط با شکل.

ســوم، دنبال کردن شــیوه‌های مربوط به قضایا و مقدمات به نحو عمیق و صحیح، چنان که تنها به قضایا و مقدمات و ترسیم‌ها و نظم آن‌ها که ذکر کردیم، متکی نباشد. بلکــه همــراه با آن‌ها از هوش و گمان و شــگردها نیز بهره گیــرد. عامل اصلی در این فن، اســتفاده از شگردهاســت و نه فقط با کمک ذهن خود، بلکه هم‌چنین اندیشــه‌ی ریاضی‌دانان باتجربه و افراد ماهر و آشنایان به شگردها.

چهارم، آگاهی از وجوه مشترک شکل‌ها، تفاوت‌ها و ویژگی‌های خاص آن‌ها. در این نحوه‌ی برداشت، ویژگی‌های خاص، مشابهت‌ها و تضادها بدون احتساب قضایا و مقدمات فی‌نفسه در نظر گرفته می‌شوند.

پنجم، به کار بردن نقل تبدیل مسئله به مسائل ساده‌تر.

ششم، به کار بردن تحلیل.

هفتم، استفاده از شگردها.

چون این موارد را به طور گذرا و آزاد عرضه و ذکر کردیم، اکنون لازم است برای هر یک مثال‌هایی آورده شود تا پژوهشگر به ماهیت واقعی آن‌ها پی ببرد، زیرا درباره‌ی این فن به دو صورت می‌توان سخن گفت: یکی سخن انتزاعی بر سبیل ابهام و تخیل و دیگری به صورت عمقی، با توضیحات روشن و عرضه‌ی مثال‌ها به طوری که کاملاً درک و احســاس شــود. خداوند تبارک و تعالی ما را در کار صحیح موفق بدارد و به راه راست هدایت فرماید.

اســتاندارد بالای دقت اندیشــه‌ی ریاضی‌دانان ایرانی باســتان در فرازهایی که از کتاب ســجزی ذکر شــد، آشکار اســت متنی که در بخش‌های این فصل آمده است از همین کتاب استخراج شده است.

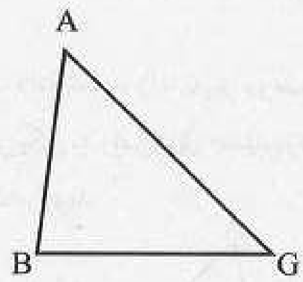
۱-۸. کاربرد قضایا

آقای غیور: سجزی مسئله‌ای برای توضیح استراتژی‌های خود مطرح کرده است. این مسئله را قبلاً حل کرده‌اید، ولی آن را با هم دوباره بررسی می‌کنیم.

مسئله..

«چون هوشـمندی در کشـف ویژگی‌های خاص بیش از هر چیز در ترسیم‌ها مفید است، مثالی در مورد جست‌وجوی ویژگی‌های خاص شکل‌ها می‌آوریم. به این صورت که مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ویژگی خاصی را در زاویه‌هایش جسـت‌وجو می‌کنیم؛ بدین قرار که مجموع هر سه زاویه برابر است با مجموع زاویه‌های یک مثلث معلوم، پیش از آن که بدانیم، مجموعاً با دو قائمه برابرند.»

حامد: من صورت مسـئله را نمی‌فهمم. آیا منظور سـجزی این اسـت که مجموع زاویه‌هـای مثلـث ABC دلخواه با مجموع زاویه‌های مثلثی معلوم برابر اسـت؟ اگر این‌طور باشد، بهتر است بگوییم که سجزی می‌خواهد نشان دهیم هر دو مثلث دلخواه مجموع زاویه‌های برابر دارند.



آقای غیور: ما قبلاً ثابت می‌کردیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر 180° یا به زبان سـجزی دو قائم اسـت. اما این‌جا خواسته شده که بدون استفاده از زاویه‌ی دو قائمه ثابت کنیم، هر دو مثلث مجموع زاویه‌های برابر دارند.

منصور: ولی چه‌طور ممکن است بین دو مثلث که هیچ ربطی به هم ندارند، ارتباط ایجاد کنیم؟

آقای غیور: این همان چیزی است که شما باید راه‌حلی برای آن پیدا کنید!

منصور: ولی دو مثلث دلخواه ربطی به هم ندارند.

آقای غیور: هر دو مثلث هستند!

رضا: همین خودش یک ربط است. اگر قرار است همه‌ی مثلث‌ها مجموع زاویه‌های برابر داشته باشند، نه همین دو مثلث، این به ما می‌گوید که اگر در ذهن خود مثلث را کوچک و بزرگ کنیم و یا شکل آن را تغییر دهیم نباید مجموع زاویه‌های آن عوض شود.

جست‌وجوی روابط بین اشکال و ویژگی‌های خاص آن‌ها

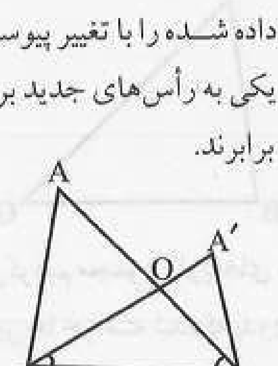
حمید: بگذارید با هم ببینیم ما در ذهن خود چه کارهایی می‌توانیم با یک مثلث انجام دهیم. مثلاً می‌توانیم آن را چند برابر بزرگ یا کوچک کنیم یا حتّی فرض کنیم مثلث کم‌کم رشد می‌کند و بزرگ می‌شود.

رضا: می‌توانیم یک ضلع آن را ثابت بگیریم و رأس سوم را حرکت دهیم و مثلث‌هایی با یک ضلع برابر داشته باشیم.

منصور: فهمیدم! همین مسئله را حل می‌کند.

رضا: چه‌طور؟

منصور: می‌توان دو مثلث داده شده را با تغییر پیوسته‌ی رأس‌ها به همدیگر برد؛ یعنی می‌توان رأس‌ها را یکی‌یکی به رأس‌های جدید برد و در هر مرحله نشان داد که مجموع زاویه‌ها در دو مثلث برابرند.



رضا: می‌فهمم. مثلاً نشان می‌دهیم در شکل بالا مجموع زاویه‌های مثلث‌های ABC و $A'BC$ برابرند.

منصور: دقیقاً!

حمید: پس دست به کار شویم. باید نشان دهیم مجموع زاویه‌های A ،B و C در مثلث ABC با مجموع زاویه‌های A' ،B و C در مثلث $A'BC$ برابرند. اما زاویه‌های B و C در مثلث OBC بین این دو مشترک‌اند.

پس باید بدانیم

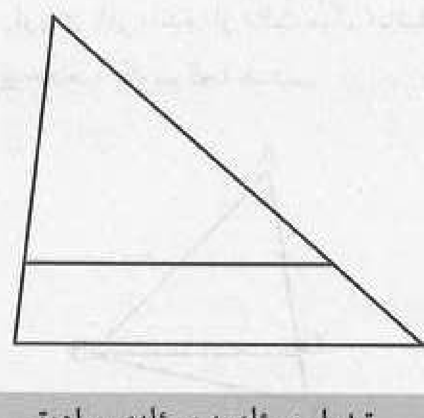
$$B\hat{A}C + A\hat{B}C = B\hat{A'}C + A'\hat{C}B$$

رضا: خراب شد. این کمک نمی‌کند.

حمید: چرا؟

رضا: این همان مسئله‌ی قبل است. در حالتی که یک زاویه ثابت بماند، چون در مثلث‌های OAB و $OA'C$ زاویه‌ی O برابر است.

حمید: خوب، این کمک می‌کند. اگر دو تا مثلث زاویه‌ای برابر داشته باشند، تبدیل پیوسته‌ی یکی به دیگری، خیلی شکل ساده‌تری دارد. به این شکل توجه کنید.

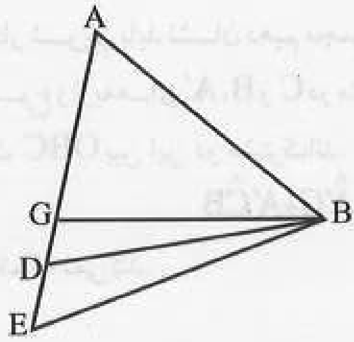


تبدیل مسئله به مسئله‌ی ساده‌تر

منصور: پس در یک مرحله، کافی است نشان دهیم که یک رأس روی یکی از اضلاع از رأس دیگری دور شود، مجموع زاویه‌های مثلث ثابت می‌ماند.

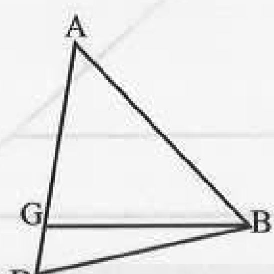
آقای غیور: آفرین بر شما! سجزی هم به همین نتیجه رسید. سجزی چنین گفته است:

راه جست‌وجوی ما در این مرحله‌ی اول چنین است که یک زاویه‌ی مثلث را در وضع خود ثابت می‌گیریم و اضلاعش را تغییر می‌دهیم، تا ببینیم که آیا دو زاویه‌ی دیگر مجموعاً از مجموع دو زاویه‌ی اصلی بزرگ‌ترند یا کوچک‌ترند و یا با آن برابرند؟



در شکل بالا زاویه‌ی A را برخلاف زاویه‌های دیگر ثابت فرض کرده‌ایم، با در نظر داشتن این که اگر فرض کنیم دو زاویه از مثلث مفروضی با دو زاویه از مثلث مفروض دیگـر برابر باشـند و ضلع محدود به ایـن دو زاویه با ضلع محدود به این زاویه‌ها در مثلث دیگر به طوری که هر کدام با نظیر خود برابر باشد، ناچار باید زاویه‌ی باقی‌مانده (از یک مثلث)، برابر با زاویه‌ی باقی‌مانده (از مثلث دیگر) باشد.

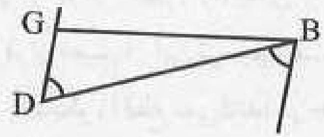
رضا: بگذارید به طور خلاصه بگویم کجا هستیم.



AG را تـا D امتـداد می‌دهیم و BD را وصـل می‌کنیم. زاویه‌ی ADB کوچک‌تر از زاویه‌ی AGB می‌شود. سپس به زاویه‌های ABG و ABD نگاه می‌کنیم. زاویه‌ی ABD از زاویه‌ی ABG بزرگ‌تر است. این کار را تکرار می‌کنیم. ضلع AD را تا E امتداد می‌دهیم و BE را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی E کوچک‌تر از زاویه‌ی ADB و زاویه‌ی ABE بزرگ‌تر از زاویه‌ی ABD اسـت. این کار را به طور مرتب تکرار می‌کنیم. به این ترتیـب زاویه‌هایـی را که رأس آن‌ها بر ضلع AG واقع می‌شـوند، کوچک‌تر و زاویه‌های مجاور به ضلع AB در نقطه‌ی B را از آن‌چه قبلاً بوده، بزرگ‌تر می‌کنیم. حالا باید بررسی کنیم

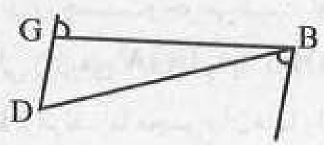
که آیا این زیاد و کم شدن‌ها به طور طبیعی با هم متعادل‌اند؛ یعنی یکدیگر را جبران می‌کنند و آن‌چه در یک طرف اضافه می‌شود، به همان اندازه از طرف دیگر کم می‌شود یا نه؟

حمید: این که روشن است. فقط باید نشان دهیم زاویه‌ی G از مثلث AGB مجموع زاویه‌های D و B از مثلث BDG است. این را در دوره‌ی راهنمایی دیده‌ایم.



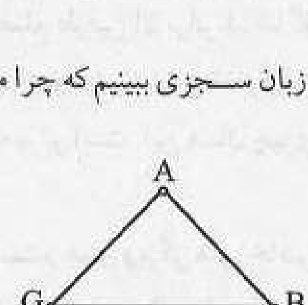
اگر از B خطی موازی DG رسم کنیم، بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورّب زاویه‌های D و B در شکل بالا برابرند:

و همین‌طور زاویه‌های G و B در شکل زیر:



پس روشن است که زاویه‌ی G برابر مجموع زاویه‌های B و C از مثلث BDG است.

آقای غیور: حال بیایید از زبان سجزی ببینیم که چرا مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر دو قائمه است؟!



اکنون پس از آن که برایمان روشن شد که مجموع زاویه‌های هر مثلث با مجموع زاویه‌های هر مثلث دیگر برابر است، ویژگی خاص دیگری از آن جست‌وجو می‌کنیم، آن‌هم این‌که مقدار مجموع این زاویه‌ها را می‌طلبیم. در این‌جا لازم است مقیاسی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها داشته باشیم. این مقیاس باید از جنس آن‌ها باشد و آن زاویه‌ی قائمه است. پس باید مثلثی را فرض کنیم و زاویه‌ای از آن را قائمه قرار دهیم، زیرا اگر دو زاویه‌ی آن را قائمه قرار دهیم، از این ترسیم مثلث به وجود نمی‌آید، بلکه دو ضلع آن متوازی می‌شوند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ در حالی که مثلث از برخورد سه ضلعش ایجاد می‌شود. فرض می‌کنیم که دو ضلع طرفین زاویه‌ی قائمه برابرند. مثلث ABG را قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین فرض می‌کنیم و زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی A است. سپس خط موازی را به کار می‌بریم، زیرا تناسب آن با این وضعیت، از خطوط دیگر بیش‌تر است. از نقطه‌ی B خط BD را موازی با AG رسم می‌کنیم. زاویه‌ای ایجاد می‌شود که خواص آن را جست‌وجو می‌کنیم. زاویه‌ی DBG را مساوی با زاویه‌ی BGA یافته‌ایم، ولی زاویه‌ی BGA را با ABG مساوی گرفته بودیم. پس زاویه‌های ABG و DBG برابرند، اما مجموع آن‌ها با زاویه‌ی BAG برابر است. پس لازم می‌آید که مجموع سه زاویه‌ی مثلث ABG برابر با دو قائمه باشد.

اما این ویژگی خاصی است که در مثلث مشخصی یافتیم؛ یعنی مثلثی که یک زاویه‌اش قائمه است و دو ضلع طرفین آن برابرند. اما گفته‌ایم که مجموع زاویه‌های مثلث‌های نامشخص و کلی با هم برابرند. پس معلوم می‌شود که مجموع سه زاویه‌ی هر مثلث با دو زاویه‌ی قائمه برابر است. این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

این یکی از راه‌های جست‌وجوی ویژگی‌های خاص است. پس لازم است فهم و ذهن خود را در این فن اصلاح کنیم. در این طریق، یعنی کشف شکل‌ها، اصلاح فهم و باز بودن ذهن مفیدتر از خواندن کتاب‌های هندسه است که پیشینیان تجویز می‌کردند؛ چرا که قصد آن‌ها از این کار خواندن کتاب‌های هندسه به عنوان مدخلی بر سایر کتاب‌های فلسفه‌ی ریاضی و پرورش ذهن بود.

آقای غیور: حال همه دست به کار شوید و ثابت کنید در یک مثلث متساوی‌الاضلاع میانه‌ها همرسند و میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

حال با تغییر مثلث به طور پیوسته نشان دهید در هر مثلث میانه‌ها همرسند. برای این کار از قضیه‌ی تالس کمک بگیرید.

۲-۸. استفاده از مکان‌های هندسی

مسئله

خارج دایره‌ای داده شده، نقطه‌ای بیابید، به طوری که اگر مماسی از آن نقطه بر دایره رسم کنیم و از آن نقطه به مرکز دایره وصل کنیم، دو پاره‌خطی که نقطه را به محیط دایره وصل می‌کنند، متناسب با دو پاره‌خط مفروض باشند.

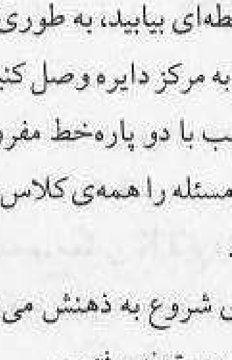
آقای غیور تصمیم گرفت این مسئله را همه‌ی کلاس دسته‌جمعی حل کنند. بنابراین هدایت کلاس را به عهده گرفت.

آقای غیور: کسی ایده‌ای برای شروع به ذهنش می‌رسد؟

حامد: من صورت مسئله را درست نمی‌فهمم.

آقای غیور: شکلی رسم کن و نقاط مهم آن را نام‌گذاری کن. حامد شکلی رسم کرد و سعی کرد صورت مسئله را با آن شکل بهتر بفهمد.

شکل رسم کنید.



آقای غیور: چه چیزهایی داده شده‌اند و چه چیزهایی را می‌خواهیم به دست آوریم؟

معلوم‌ها و مجهول‌ها را پیدا کنید.

حامد: دایره داده شده است. نقطه‌ی T و آن‌گاه پاره‌خط‌های TK و TN نیز داده شده است.

منصور: نسبت پاره‌خط‌های TK و TN را می‌خواهیم به دست آوریم.

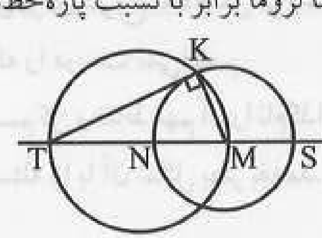
آقای غیور: کدام نقاط مهم در شکل را داریم و کدام‌ها را باید به دست بیاوریم؟

منصور: نقاط T و K و N را باید به دست آوریم و فقط نقطه‌ی M که مرکز دایره است داده شده است.

آقای غیور: فرض کنیم نسبت پاره‌خط‌های TK و TN دلخواه باشد، چگونه شکل را رسم می‌کنید؟

از فرضیه‌ها کم کنید یا فرضیه‌های مناسبی اضافه کنید.

رضا: این ساده‌ترین کار است. یک قطر دایره را امتداد می‌دهیم و هر نقطه‌ی T روی این امتداد که انتخاب کنیم، مماس TK بر دایره و پاره‌خط TN دو پاره‌خط می‌دهند که نسبت طول آن‌ها لزوماً برابر با نسبت پاره‌خط‌های مفروض نیست.



اما در مسئله‌ی اصلی، مهم این است که بدانیم برای کدام T روی این قطر TK و TN به نسبت داده شده، رسم شده‌اند.

آقای غیور: چگونه از نقطه‌ی T بر دایره‌ی K مماس می‌کنید؟

حل مسئله در حالت خاص

رضا: شعاع MK بر مماس TK عمود است. پس مثلث TKM قائم‌الزاویه است. کافی است دایره‌ای به قطر TM رسم کنیم و تقاطع آن را با دایره‌ای به قطر NS به دست آوریم. برای این کار عمودمنصف TM را رسم می‌کنیم تا مرکز دایره‌ی به قطر

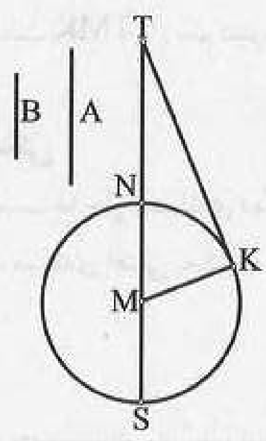
TM به دست آید.

آقای غیور: بسیار خوب پس می‌فهمیم که شعاع MK هم مهم است. حال فرض کنید که مسئله حل شده است؛ یعنی به همان شیوه‌ای که سجزی تحلیل می‌نامد، عمل می‌کنیم.

فرض کنید مسئله حل شده است و شرایط موجود را بررسی کنید.

۳-۸. ترسیم به روش معکوس

سجزی چنین ادامه می‌دهد: «به شیوه‌ی تحلیل، فرض می‌کنیم که شکل رسم شده است، تا به جست‌وجوی مقدماتش برآییم. مثلاً در شکل فرض می‌کنیم که نسبت مذکور، نسبت A به B باشد و دایره، دایره‌ی NS باشد و خط‌های TK و TN به نسبت A به B و همان پاره‌خط‌های مطلوب باشند، چنان که TN درون دایره به سمت S امتداد یابد و NS قطری از آن باشد. سپس می‌پرسیم: از چه ترسیمی و چه مقدماتی شکل آن یافته می‌شود؟»



آقای غیور: چون نقطه‌ی T و خط‌های TN و TK و محل تماس دایره‌ی NS در نقطه‌ی K، همگی بر ما مجهول‌اند و هم‌چنین اندازه‌ی زاویه‌ی T نامعلوم است، به دست آوردن آن شکل دشوار است. این حدس همان است که سجزی آن را معلوم کردن میزان آسانی و دشواری آن‌ها نامیده است. اگر در شکلی تعداد مجهول‌ها زیاد

باشد، یافتن آن‌ها به کمک معلومات دشوار است، به‌خصوص اگر شکل طوری باشد که بین اجزای شکل ارتباطی موجود نباشد.

تخمین سختی مسئله

حمید: البته تعداد مجهول‌ها خیلی هم زیاد نیست؛ مثلاً اگر زاویه‌ی T را داشته باشیم، می‌توانیم همه‌ی شکل را رسم کنیم. چون زاویه‌ی T و M متمم هستند و با داشتن زاویه‌ی M نقطه‌ی K و مماس TK به دست می‌آیند و از آن‌جا نقطه‌ی T و پاره‌خط‌های TK و TN به دست می‌آیند. پس کافی است زاویه‌ی T را پیدا کنیم.

تبدیل مسئله به مسائل ساده‌تر

آقای غیور: این همان تبدیل مسئله به مسئله‌ای ساده‌تر است که سجزی آن را نقل می‌نامد.

رضا: پس باید به دنبال یک زاویه بگردیم یا به دنبال رسم مثلثی باشیم که این زاویه یکی از زاویه‌های آن باشد. مثلاً اگر مثلث TMK را رسم کنیم، زاویه‌ی T هم پیدا می‌شود.

۴-۸. استفاده از شکل کمکی

آقای غیور: پس با این برداشت‌ها حل مسئله‌ی دیگری را جست‌وجو می‌کنیم. اگر این مسئله تازه را حل کنیم، مسئله‌ی اصلی به کمک آن حل می‌شود. مسئله‌ی تازه چنین است:

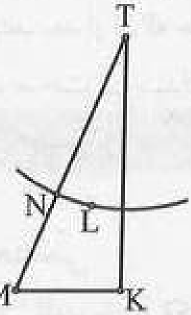
مسئله

مثلثی قائم‌الزاویه رسم کنید که نسبت یکی از ضلع‌هایش به وتر منهای ضلع دیگر نسبت مفروضی است.

آقای غیور: از شکل مثلث TKM چنین مشخص می‌شود که مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که نسبت یکی از ضلع‌هایش به وتر منهای ضلع دیگر، نسبت مفروضی است.

پس با استفاده از روشی که اکنون به کار بردیم، مسئله‌ای اول به این مسئله تحویل شده است، برای آن که جواب خواسته شده در مسئله‌ی اول را می‌دهد.

کسی می‌تواند ایده‌ای برای حل مسئله‌ی جدید بدهد؟



حامد: حال باید ببینیم چه چیزهایی معلوم و چه چیزهایی مجهول است.

معلوم‌ها و مجهول‌ها را پیدا کنید.

منصور: می‌توانیم خط KM و نقطه‌ی T و نقطه‌ی K را معلوم بگیریم. دایره‌ی TN مرکز معلوم و شعاع معلوم دارد، چون نسبت TK به TN داده شده است. مجهول نقطه‌ی N روی دایره و نقطه‌ی M روی KM است، به طوری که MN با MK برابر باشد.

آقای غیور: اگر نقطه‌ی N داده شده باشد، چگونه مسئله را حل می‌کنید؟

منصور: TN را امتداد می‌دهیم تا خط KM را در M قطع کند و مثلث TKM تشکیل شود. بنابراین زاویه‌ی T به دست می‌آید و با کمک آن مسئله‌ی اصلی حل می‌شود.

آقای غیور: چه‌طور؟

منصور با سردرگمی سر تکان داد: نمی‌دانم. خودتان گفتید فقط زاویه‌ی T را احتیاج داریم.

حامد: زاویه‌ی T و زاویه‌ی M متمم هستند. پس زاویه‌ی M را داریم و با داشتن زاویه‌ی M نقطه‌ی K و با خارج کردن عمودی از نقطه‌ی K بر شعاع MK نقطه‌ی

T به دست می‌آید.

آقای غیور: پس معلوم می‌شود معلوم‌ها و مجهول‌ها را درست شناخته‌ایم. وقتی با مسئله‌ی جدیدی مواجه می‌شوید، باید مهارت خود را به کار بیندازید و حدس بزنید. معلومات قبلی چندان کمکی نمی‌کنند. بعد از آن که حدس درست زدید، سعی کنید با کمک معلومات قبلی برای اثبات صحت آن استدلال کنید.

حدس بزنید

۵-۸. استفاده از تبدیل‌های هندسی

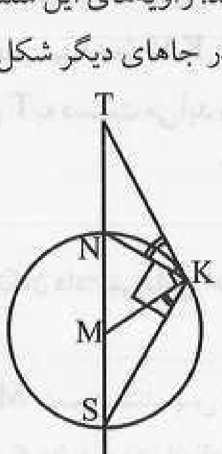
بچه‌ها یک ربع ساعت روی مسئله‌ی جدید فکر کردند و کسی نتوانست ایده‌ای برای حل آن بدهد.

امیر: فکر می‌کنم این مسئله‌ی جدید از مسئله‌ی اول هم سخت‌تر است. بهتر است به عقب بازگردیم و سعی کنیم از طریق دیگری مسئله‌ی اصلی را حل کنیم.

بازگشت به عقب

رضا: گفتیم که ما به دنبال زاویه می‌گردیم. بهتر است زاویه‌ها را بررسی کنیم.

امیر: پاره‌خط‌هایی که برای ما مهم هستند، TN و TK هستند. پس توجه به مثلث TNK ممکن است کارساز باشد. زاویه‌های این مثلث زاویه‌های T، K و N هستند. باید سعی کنیم این زاویه‌ها را در جاهای دیگر شکل پیدا کنیم.

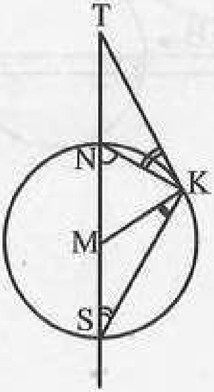


مثلاً زاویه‌ی K از مثلث TNK متمم زاویه‌ی K از مثلث MNK است. و زاویه‌ی K از مثلث MKS نیز متمم زاویه‌ی K از مثلث MNK اســت. پس زاویه‌ی K از مثلث MKS با زاویه‌ی K از مثلث TNK برابر است.

جست‌وجو کردن اطلاعات کلیدی

حمید: هنوز هم زاویه‌ی K در شــکل پیدا می‌شــود. مثلث‌های MKS و MNK هر دو متساوی‌الســاقین هســتند، پس در مثلث MKS زاویه‌های S و K برابرند و در مثلث MNK زاویه‌های N و K برابرند.

حامد: یافتم! یافتم! یک تشابه یافتم! مثلث TNK و TKS متشابه هستند. چون دو زاویه‌ی برابر دارند. زاویه‌ی T مشترک است و زاویه‌ی K با زاویه‌ی S برابر است.



منصور: این که کمکی نمی‌کند.

حامــد: اتفاقاً همین کمک می‌کند. نســبت پاره‌خط‌هــای TK و TN برای ما مهم است و در تشابه مثلث‌ها نسبت حفظ می‌شود. یعنی بنابر تشابه داریم.

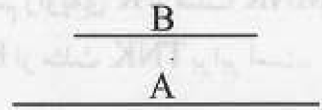
$$\frac{TN}{TK}=\frac{TK}{TS}$$

منصور: پس مسئله حل شده است.

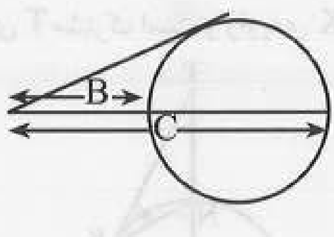
آقای غیور: برای بچه‌ها توضیح دهید.

منصور: اگر پاره‌خط‌های اولیه را A و B بنامیم، می‌توان با کمک قضیه‌ی تالس پاره‌خطی

یافت که نسبت آن به A برابر نسبت A به B باشد. آن را پاره‌خط C می‌نامیم.



حال اگر دایره‌ای به قطر BC رسم کنیم، مانند شکل طول مماس به اندازه‌ی پاره‌خط A است. این را حامد نشان داد. پس کافی است همین شکل را چند برابر بزرگ کنیم تا حل مسئله به دست بیاید. بنابراین زاویه‌ی T از روی همین شکل قابل محاسبه است.



فصل ۹

تربیت تفکر هندسی ریاضی‌دانان

در تمدن غرب که مرکز رشد و توسعه‌ی علوم مدرن محسوب می‌شود، به سرچشمه‌های الهی علوم توجه نمی‌شود؛ در صورتی که در فلسفه‌ی اسلامی همه‌ی علوم به توحید مهار می‌شوند و شناخت با توجه به ارتباط بین درجات هستی ممکن می‌شود. هرچند پس از تقدس‌زدایی علوم جدید در اوایل قرن بیستم گرایش‌های بازگشت به سنت متافیزیک در غرب مشاهده می‌شود، با این حال هنوز انسان‌شناسی غربی سطحی‌تر از این است که بتواند تبیین کند علوم مختلف در کمال انسان چه نقشی دارند، یا این‌که ظهور آن‌ها نمایانگر چه کمالاتی از انسان است، یا این‌که به چه جنبه‌هایی از عظمت هستی اشاره می‌کنند، و یا این‌که هر یک درباره‌ی خالق چه می‌گویند؟

آن‌چه مورد تأکید ماست، این است که مراتب عالیه‌ی شناخت بر مراتب عالیه‌ی علوم تطابق دارند. هر یک از علوم یکی از ابعاد شناخت ما ولذا یکی از ابعاد هستی را معرفی می‌کنند. هر یک از علوم باید چنان مطالعه شود که روشن

گردد درباره‌ی هستی چه می‌گوید. هماهنگی علوم، هماهنگی ابعاد شناخت و هماهنگی ابعاد هستی، همه یک چیزند. همان‌طور که علوم دارای مراتبی هستند، پس ادراک و شناخت آدمی نیز دارای مراتبی است، پس هستی دارای مراتبی است. مراتب عالیه‌ی علوم، مراتب نزدیک به حکمت الهی هستند. البته نظر به مراتب عالیه‌ی علوم، یعنی نظر به همه‌ی مراتب علوم، نه فقط مراتب بسیار مجرد. بنابراین علوم گواه مراتب هستی هستند، چون خود موجی از عالم غیب‌اند. علم، شناخت و هستی همه تجلی اسماء و صفات الهی هستند. همه‌ی تجلیات هم‌آهنگ و هم‌آوا هستند و نقل از صاحب تجلی می‌کنند. کارآمدی علوم گواهی بر این است که تجلیاتی از اسماء و صفات الهی هستند. هم‌چنین هماهنگی علوم بر این گواه است. علوم ریاضی که در ذهن خانه گرفته‌اند، با علوم تجربی که در طبیعت خانه دارند، هماهنگ‌اند. همه‌ی علوم موردنیاز بشرند و مهار شده به توحیدند؛ یعنی با هم هماهنگ هستند، لذا علومی که در فرهنگ‌ها و تمدن‌های مختلف توسعه پیدا کرده‌اند، باید هم‌زبان و هماهنگ فهمیده شوند.

مراتب یک علم را می‌توان از دوری و نزدیکی به مشرق و مبدأ تجلیات یا مغرب و مقصد تجلیات شناخت و مرتب کرد. علوم نیز مانند اسماء حرکت نزولی و صعودی دارند. نازل می‌شوند و سپس عروج می‌کنند. نزول علوم در عالم خلقت و عروج علوم درون انسان است. هر علمی یک جهان‌بینی علمی دارد و همه‌ی این جهان‌بینی‌ها با یک جهان‌بینی سرتاسری هماهنگ‌اند. تقسیم‌بندی علوم باید متناسب با تجلیات و نظام آن‌ها صورت بگیرد تا سرچشمه‌های علوم در علوم الهی روشن و آشکار باشد. اما سرچشمه‌ها در زمینه‌های فکری و فلسفی غرب گم شده است. دلیل این غفلت، این است که دانشمندان بزرگ شاگردانی تربیت نکردند تا تجربه‌ی متافیزیک آنان را سینه به سینه انتقال دهند. در غرب سعی کردند زبان علمی را مستقل از شخصیت علمی عالمان بنا کنند و این ابعاد انسانی علم را محدود کرد.

در شرق همه‌ی ابعاد علم در خدمت همه‌ی ابعاد انسان تصور می‌شد. به این

سـؤال که «آیا انسـان قادر است تمام مراتب هسـتی را ادراک کند؟» پاسخ مثبت داده می‌شـد و وحی طلایه‌دار ارتباط انسـان با حقیقت دانسـته می‌شد. این سنت که توسـط ادیان الهی پایه‌گذاری شـده بود تا به امروز پایدار مانده اسـت. امروز هم فیلسـوفان اسـلامی معتقدند وجود ذهنی اگر هماهنگ و همگام با سایر مراتب وجود و حقیقت در انسـان باشـد، یک وجود حقیقی اسـت، نه اعتباری. انسـان می‌توانـد حقیقـت را از درون بچشـد. علـم و متافیزیک در برابر حقیقت آشتی ابدی دارند. مسـلماً با چنین دیدگاهی نسـبت به علوم شخصیت علمی دانشمندان اسـلامی با دانشـمندان غربی تفاوت خواهد داشـت.

در فلسفه‌ی اسلامی هدف عمده‌ی آموزش ریاضی، این است که تفکر ریاضی مقدمه‌ای برای ادراک معنویات شود. در تحقیقات ریاضی به دنبال حقایق فرامثالی و فراذهنی هسـتیم، نه این‌که تنها به سـاختارهای باطنی ریاضیات دست پیدا کنیم؛ چرا که چنین سـاختارهایی دردسـترس فلسـفه هم قرار دارند. بلکه می‌خواهیم سـاختارهای باطنـی را چنان بشناسـیم که رابطه‌ی تجلیـات آن‌ها را در لایه‌های تجریـد مختلف درک کنیم. برای این کار به شـناخت همه‌ی ابعاد حقیقت ریاضی احتیـاج داریم. ادعای تحقیق ریاضی و کشـف ارتبـاط ریاضیات و حقیقت بدون این‌که ابعاد متافیزیک در ریاضیات دیده شـود یا تجلی کند، ادعای پوچی اسـت. ریاضیات باید به ما کمک کند معنویات را بهتر درک کنیم. چنین ریاضیاتی اسـت کـه می‌توانـد تکیه‌گاه سـایر علوم تجربی باشـد و از آن به حکمت وسـطی تعبیر شود.

شـکی نیسـت که ریاضیات با شـناخت مجردات رابطه‌ای مستقیم دارد. هرچه سـاختارهای ادراک ما برای شـناخت مجردات آمادگی بیش‌تری داشـته باشـند و تناسـب بیش‌تـری پیـدا کنند، درک ریاضیات و توسـعه‌ی ریاضیات برای آن‌ها آسـان‌تر خواهد بود. آن‌چه اثبات آن مشـکل اسـت، طرف دیگر این تأثیرگذاری اسـت. آیا پیشـرفت ادراک ریاضی موجب تکامل سـاختارهای شناختی در درک کل مجردات خواهد شـد؟ بدون شـک باید برای توانایی‌های آموزشی ریاضیات

حدی قائل شد. این‌که بخواهیم گفته‌ی گالیله را که ریاضیات زبان طبیعت است، به ماوراءالطبیعه نیز توسعه دهیم، بدون دلایل کافی نظری تند روانه است. اما تأثیر مثبت آموزش ریاضی در درک مجردات قابل انکار نیست.

تربیت ریاضی‌دانانی که مهارت‌های تفکر ریاضی را به درک معنویات توسعه داده باشند، هدفی بلند است که باید از سنین پایین تخم استعداد آن در وجود دانش‌آموزان کاشته شود. چنین دانش‌آموزانی با نگاه دیگری به علم و ارتباط آن با دین تربیت می‌شوند تا هم‌نشینی ادراکات علمی آن‌ها با باورهای معنوی آنان تضمین شود. تنها جهان‌بینی صحیحی در برابر حقیقت می‌تواند دانش‌آموزان را برای درک لایه‌های تجرید علم و هماهنگی آن با لایه‌های تجرید شناخت انسانی آماده کند. هدف ما در این فصل، این است که این جهان‌بینی را با یک زبان هندسی در چارچوب ادراکات ریاضی معرفی کنیم. این کار را چنان انجام خواهیم داد که قابل پیاده‌سازی در صحنه‌ی آموزش باشد و معلم را دربرآورده کردن اهداف تربیتی خود یاری برساند.

سرآخر این‌که دیدگاه هندسی چه ربطی با معنویات می‌تواند داشته باشد؟ دیدگاه هندسی را می‌توان معادل تفکر بصری و بصیرتی گرفت که نگاهی کل‌نگر و سازمان‌یافته به اجزا و ارتباط آن‌ها در شکل دادن به کل است. در نگاهی که جزء و کل را در برابر هم قرار می‌دهد، می‌توان از احکام موضعی و سرتاسری صحبت کرد. درک ساختار یک‌یک لایه‌های تجرید شناخت و ارتباط بین آن‌ها از طریق تجلی و تجرید در چارچوب کل‌نگر دیدگاه هندسی می‌گنجد. در این فصل سعی خواهیم کرد این دیدگاه‌ها را مشروح‌تر مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت /دبستان ....

با کمک نوارهای مقوایی و دکمه‌ی قابلمه‌ای یک چهارضلعی بسازید که رأس‌های آن لولا شوند. یک رأس چهارضلعی را ثابت بگیرید و رأس روبه‌رو قطری آن را تغییر دهید. مکان هندسی رأس روبه‌رو قطری را مشخص کنید. حال

به جای چهارضلعی یک پنج ضلعی مقوایی با رأس‌های لولایی بسازید. مجدداً یک رأس را ثابت بگیرید و یکی از دو رأس روبه‌رو قطری را تغییر دهید. مکان هندسی این رأس را مشخص و با حالت قبل مقایسه کنید. حال هر دو مسئله را در حالی که یک ضلع رأس ثابت نیز ثابت گرفته می‌شود، حل کنید. پاسخ‌ها را مقایسه و حالت‌های مختلف را بحث کنید.

فعالیت/راهنمایی

یک توپ کروی داده شده است. یک پرگار و یک خط‌کش کروی داده شده است. قطر توپ را با کمک این ابزارها محاسبه کنید. حال یک دایره روی کره توسط پرگار کروی رسم کنید. شعاع این دایره روی کره توسط خط‌کش کروی قابل اندازه‌گیری است. زاویه‌ی پرگار را محاسبه کنید. اگر زاویه‌ی پرگار را داشته باشیم، شعاع دایره‌ای را که توسط آن رسم می‌شود، چگونه محاسبه می‌کنید؟

فعالیت/دبیرستان

اعداد چهارگان اعدادی به شکل $a+bi+cj+dk$ هستند که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی و i، j و k بردارهای موهومی هستند که این‌طور ضرب می‌شوند: $ij=k$ و $jk=i$ و $ki=j$ و $ji=-k$ و $kj=-i$ و $ik=-j$ و $i^2=j^2=k^2=-1$ این اعداد تعمیمی از دستگاه اعداد مختلط محسوب می‌شوند که ضرب آن‌ها جابه‌جایی نیست. همان‌طور که با کمک اعداد مختلط معادله‌ی خط، دایره و مانند آن را برای حل مسائل هندسه مسطحه به کار می‌بریم، از اعداد چهارگان کمک بگیرید و مسائل هندسه‌ی فضایی را حل کنید.

فعالیت / دانشگاه

فرض کنید یک مجموعه خودمتشابه داده شده باشد. چگونه می‌توان حجم زیرمجموعه‌ای از این فضای خودمتشابه را محاسبه کرد؟ آیا مفاهیم خط و دایره

در چنین فضایی مفاهیمی طبیعی هستند؟ چه مفاهیمی را می‌توان جایگزین آن‌ها کرد؟ آیا مفاهیم فاصله و فضای مماس مفاهیمی طبیعی هستند؟ چه مفاهیمی را می‌توان جایگزین آن‌ها کرد؟ آیا فرض این‌که فضای فیزیکی خودمتشابه است، با داده‌های تجربی اطراف ما هم‌خوانی دارد؟ آیا به هر شیء هندسی می‌توان یک شیء خودمتشابه نسبت داد، به‌طوری که این نسبت دادن همورد باشد؟

۱-۹. هندسه و فضا- زمان

اولین فرمول‌بندی فضا - زمان توسط نیوتن ارائه شد. گالیله و دکارت حقیقت ریاضی مکان و ایزاک بارو، استاد نیوتن، حقیقت ریاضی زمان را کشف و فرمول‌بندی کرده بودند. از دیدگاه نیوتن فضای مطلق حرکت‌ناپذیر و متشابه‌الاجزاست و زمان مطلق خودبه‌خود و بدون نسبت به هیچ امر خارجی جریانی یکنواخت دارد. حرکت مطلق، یعنی انتقال در فضای مطلق در بستر زمان مطلق. در تفکر نیوتن فضا و زمان دال بر حضور همه‌جایی و بقای ازلی و ابدی خداوند هستند.

در قرن ۱۸ که جامه‌ی متافیزیکی علم را درآوردند، فضای مطلق، اما تهی باقی ماند و این همان چیزی است که مشکل‌ساز شد و مقدمات ظهور نسبیت اینشتین را فراهم کرد. نقدی که بر فضا - زمان نیوتن وارد شد، این بود که حرکت مادی در فضای مطلقی که متشابه‌الاجزا است، معنی فیزیکی ندارد.

در فرمول‌بندی اینشتین از فضا - زمان، مفاهیم حال، آینده و گذشته به طور نسبی و موضعی معنی دارند؛ در حالی که در فرمول‌بندی نیوتن حال و گذشته و آینده مفاهیمی سرتاسری و مطلق بودند. ادراک ما از وقایع در این فرمول‌بندی جدید نسبی است. درک وقایع و رویدادهای کاملاً هم‌زمان ممکن نیست. سرعت حرکت اشیا محدود به سرعت نور است که برای هر ناظر عدد ثابتی است. ترتیب وقوع رویدادها نسبی است، مگر این‌که ارتباط علّی داشته باشند. متریک فضا- زمان متغیر است و تغییرات آن تحت کنترل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خاصی

قرار دارد. فضا و زمان به طور مستقل قابل مطالعه نیستند و باید در کنار هم مطالعه شوند. جرم و انرژی معادل‌اند و باید در کنار هم مطالعه شوند؛ و... مانند آن‌ها.

حال مبانی متافیزیک تفکر نیوتن و اینشتین را مقایسه می‌کنیم. نیوتن فردی بسیار مذهبی بود، بلکه گرایش‌های عرفانی نیز داشت. اما شخصیت علمی او بر شخصیت مابعدالطبیعی‌اش غالب بود. او از حرکت ظاهری شروع می‌کرد و سعی می‌کرد به کمک استنتاج، قوانین پشت صحنه را کشف کند. در صورتی که می‌توانست به‌عکس از متافیزیک شروع کند و سعی کند ادراکات متافیزیکی را با حرکت مربوط کند. مثلاً می‌توانست با درک بهتر حقایق ریاضی، درکی از قوانینی که ممکن است در طبیعت صدق کنند، پیدا کند. نیوتن واضع استفاده از روش‌های جبری مانند مشتق در برابر روش‌های هندسی برای درک طبیعت است؛ یعنی او توانست ریاضیات را برای درک بهتر طبیعت بسط دهد. به ریاضیاتی که چنین نمی‌کرد، اقبال نداشت. تأکید نیوتن بر قوانین تجربی و حساسیت او علیه فرضیات فیزیکی یا متافیزیکی، نشان می‌دهد که او از ادراکات هم‌جنس و غیرهم‌جنس آگاه بود. درجه‌ی تعمیم تفکرات فلسفی او از حیطه‌ی تجربه فراتر نمی‌شد. روش تجربی نیوتن این بود که ابتدا پدیدارها را به مدد آزمون‌های حسی ساده می‌کرد و سپس به تصرّف و تعمل ریاضی می‌پرداخت. آن‌گاه با اجرای آزمون‌های دقیق، هم درجه‌ی کلیّت ریاضیات مربوطه را تخمین می‌زد و هم فاکتورهای دیگر را شناسایی می‌کرد. مثلاً حقیقت نیرو مورد مطالعه نیوتن نبود، بلکه فقط می‌خواست روش عمل آن را بفهمد و این با ادراک‌های هم‌جنس و غیرهم‌جنس هماهنگ است. حقیقت نیرو را نمی‌توان فقط با ریاضیات شناخت. درباره‌ی انسان و جهان خلقت، نیوتن پیرو گالیله و دکارت بود. انسان تصویری از حقیقت را می‌فهمد و خداوند عین حقیقت را. روح را همان ذهن و محصور در غده‌ای می‌دانست. نظرات نیوتن درباب اسماء و صفات الهی بدون شک تحت‌تأثیر تفکر مسلمانان قرار گرفته است. احتمالاً از طریق توماس آکوئیناس با برخی آرای ابن‌سینا آشنا بوده است. در عقاید او رگه‌هایی از آرینیسم متکلم

مسـیحی قرن چهارم دیده می‌شـود که به تثلیث اعتقاد نداشـت. وی معتقد بود که سـامان و جمال و موزونیت کل کیهان اگر مسـتمراً حفظ نشـود، زایل می‌شـود.

اینشـتین گرچـه تظاهر بـه مذهب نمی‌کرد، امـا باطناً یک یهـودی معتقد بود. علاقه‌ی اینشـتین به مسـئله‌ی نور دلایل متافیزیک داشـت. کنجکاوی او نسبت به معنویـت نـور او را به این مسـئله رهنمون کرده بود. اینشـتین روند تفکر خود را در اختیار ما گذاشـته اسـت. بی‌شـباهت به مکاشـفه‌ی عرفا نیست. سوار شدن بر نور، ایده‌ای اسـت که حتی در مکاشـفات عرفانی اسلامی شـبیه آن نیامده است. برخلاف نیوتن که سـعی داشـت با برهم نهی نتایج تجربی قوانین پشـت صحنه را کشـف کند، اینشـتین سـعی می‌کرد نظام بین مفاهیم و ساختار حقیقت را از درون بچشـد. در یک سـال (۱۹۰۵) تحقیقاتی در زمینه‌های ایده‌ی نور کوانتیزه، نسبیت خاص، آسـمان چرا آبی اسـت و اثر فتوالکتریک را به چاپ رسـاند. این نشـان می‌دهد که تحقیقات او سرچشمه‌ی معنوی دارد، نه این‌که بر تجربیات طاقت‌فرسا اسـتوار باشـد. با این حال، هنوز بر محک تجربه تأکید داشـت، یعنی به ارتباط با عالم محسوس و با الهیات هر دو آگاه بود. مهارت بالا در مورد تفکرات و مفاهیم هم‌جنس و غیرهم‌جنس منجر شـد که دریابد شـتاب و جاذبه دو مفهوم منطبق بر هم هسـتند. مانند نیوتن درک انسـان از حقیقت را تصویری از آن می‌دانست، بلکه متواضع‌تـر درک انسـان را فقط مدلی از حقیقت می‌دانسـت. نسـبت به مکانیک کوانتوم خوشـبین نبود، چون نمی‌توانسـت با آن ارتباط فلسـفی برقرار کند. این نشـان می‌دهـد که رونـد فکری او از مجرد به ملموس بـود؛ در حالی که نیوتن از ملمـوس به سـوی مجرد حرکت می‌کرد. تلاش‌های اینشـتین در نظریه‌ی وحدت نیروها ریشـه‌های تفکر توحیدی در آرای او را به اثبات می‌رسـاند.

حـال گـذر از متافیزیک نیوتن به متافیزیک اینشـتین و از فضا - زمان نیوتن به فضا - زمان اینشـتین را بررسـی می‌کنیم و تأثیرات آن بر این را که، هندسه چیست و فضای هندسی چیست را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نیوتن سعی می‌کرد طبیعت را با عروج بشناسـد، اما اینشـتین سـعی می‌کرد با نزول از مجردات ادراکاتی به

دست آورد. لذا اینشتین ناچار بود مجردات را به خودشان درک کند، نه با تکیه بر ملموسات که روشی متعالی‌تر است. نتیجه هم این شد که علم هندسه که علم مطالعه‌ی فضاهای صلب بود، به علم مطالعه‌ی فضاهای در حال دگردیسی تبدیل شد و کلیت بیش‌تری یافت. دیگر قرار نبود مفهوم فضا از ادراکات ملموس استخراج شود، بلکه آن تفکر هندسی که برای درک مسئله‌ی مورد مطالعه مناسب‌تر می‌بود، مفهوم فضا را به ما تحمیل می‌کرد. به عبارت دیگر، در برابر یک مسئله، هندسه‌دان باید به دنبال این باشد که هندسه‌ی طبیعی آن را کشف کند تا بتواند آن را مورد مطالعه قرار دهد. در غیر این صورت تفکر در مورد مسئله، درگیر پیچیدگی‌های فرمول‌بندی خواهد شد و به احتمال زیاد به بیراهه کشیده خواهد شد. این دیدگاه که هر مسئله، هندسه‌ای طبیعی دارد، هندسه‌سازی را در کنار جبری‌سازی معتبر کرد.

این دیدگاه می‌تواند در درک مسائل معنوی نیز بسیار کارساز افتد. کشف هندسه یا فضای معنوی که در آن به طور طبیعی بتوان مفاهیم معنوی را درک کرد، وظیفه‌ی اولیه‌ی یک متفکر درباره‌ی معنویات است. برای به دست آوردن تجربه‌ی این نوع از خلاقیت، درک عمیقی از هندسه و مفاهیم هندسی و مهارت‌های مدرن هندسی نقطه‌ی شروع بسیار خوبی خواهد بود. چنین نگاهی به چیستی هندسه، این علم را به خوبی با معنویات و الهیات پیوند می‌زند و این همان چیزی است که موردنظر ما بود.

فعالیت/دبستان

در قدیم تصور می‌کردند که کره‌ی زمین مسطح است و روی شاخ گاوی قرار داده شده است که آن گاو بر پشت نهنگی روی یک اقیانوس بی‌کران ایستاده است. بعدها که پی بردند زمین کروی است، تصور می‌کردند که خورشید و همه‌ی ستارگان به دور زمین می‌گردند و زمین مرکز عالم است و ثابت بر جای خود قرار گرفته است. بعدها که فهمیدند حرکت نسبی است، دریافتند که اگر زمین را حول

محور خود و حول خورشید در حال گردش فرض کنند، درک حرکت ستارگان و ماه بسیار آسان‌تر خواهد بود. شما نیز از تخیل خود بهره بگیرید و مدلی برای زمین و آسمان‌ها بسازید.

فعالیت/راهنمایی

از سالنامه‌ی آمار کمک بگیرید و نمودار ستونی جمعیت، واردات، صادرات، تورم، زاد و ولد و مانند آن را بر حسب زمان استخراج کنید. سپس این نمودارها را مقایسه و سعی کنید توجیهاتی برای شباهت‌ها و عدم شباهت‌های این نمودارها پیدا کنید. حال با توجه به این نمودارها، رفتار یک متغیر جدید را حدس بزنید. سپس به سالنامه‌ی آمار مراجعه کنید و حدس خود را با داده‌های واقعی مقایسه کنید.

فعالیت/دبیرستان

فرض کنید دو محور زمان عمود بر هم داشتیم. در این صورت حرکت در فضای سه‌بعدی نسبت به این دو محور زمان مستقل می‌بود. فیزیک چنین فضا-زمانی را توصیف کنید. در چنین فضا-زمانی دو مفهوم از حرکت وجود دارد. چه بلایی بر سر قوانین حرکت خواهد آمد؟ آیا قوانین حرکت نسبت به دو محور زمان مستقل یا با هم هماهنگ‌اند؟ آیا لزومی دارد که هماهنگ باشند؟

فعالیت/دانشگاه

فرض کنید برای حرکت در هر یک از سه جهت اصلی، یک محور زمان مستقل داریم. در این صورت سه بعد مکان و سه بعد زمان متصور است. قوانین حرکت را در فیزیک نیوتنی و نسبیت اینشتینی در این فضا-زمان طراحی کنید؛ به طوری که با تجربیات روزمره هماهنگ باشند. آیا هنوز فیزیک نیوتنی حد

خانواده‌ای از فضاهای نسبیتی خواهد بود که در آن سرعت نور به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؟

۲-۹. فضاهای حقیقی و اعتباری

آیا لایه‌های کثیر شناخت و لایه‌های کثیر هستی به طور یگانه و از پیش تعیین‌شده‌ای شکل می‌گیرند؟ آیا مراحل شناخت و درجات کمال آن ساختاری جهانی دارند؟ آیا ممکن است در نژادهای مختلف یا در تمدن‌های مختلف این کثرت و وحدت شناخت صورت‌های متفاوتی بپذیرد؟ اگر این‌طور نیست و این ساختار جهانی است، می‌تواند تعریفی از انسان بدهد که بر ساختارشناختی او استوار باشد؛ یعنی که انسان چیزی است که همه‌ی لایه‌های هستی او و لایه‌های معرفتی و شناخت او کامل باشد.

اما لایه‌های تجرید علوم در وجود ذهنی همه حقیقی نیستند، بلکه لایه‌های اعتباری هم وجود دارد. هرچند انسان یک نماد حقیقی از اسماء خداوند است و ساختارشناختی او از مراتب نمادین حقیقی تشکیل شده است، اما مراتب نمادین علوم در ذهن انسان، بعضی حقیقی و بعضی اعتباری هستند. این مراتب نمادین حقیقی علم هستند که باید شناخته شوند و اصالت دارند. هستی نمادین علم، ساختار نمادین حقیقی علم و ارتباط بین این نمادهاست؛ چرا که نمادهای اعتباری محدود به وجود ذهنی هستند و خارج از ذهن بشر معنی ندارند.

شناخت ساختار نمادین علوم احتیاج به تزکیه و تخصص دارد تا دانشمند بتواند نمادهای حقیقی و اعتباری را از هم تشخیص بدهد. ذهن که خاستگاه تفکر و ادراک انسانی است، خاستگاه وهم و نمادهای اعتباری هم هست. در رابطه با نمادهای حقیقی و اعتباری، توجه به نکاتی ضروری است. این‌که از به‌کارگیری نمادهای اعتباری در براهین عقلی پرهیز کنیم و توجه کنیم که نماد اعتباری از قلمرو اعتبار معتبران تجاوز نمی‌کند و با اختلاف اعتبار دگرگون می‌شود. این‌که ممکن است نمادهای اعتباری برای دو معنی متضاد توسط دو گروه مختلف به‌کار

روند. اعتقاد به نمادهای حقیقی، مستلزم اذعان به حقیقت یا حقایق برتری است که ضمن تجرید به امور متکثره، محدود به آن نیستند. برای درک حقایق نمادین علم باید از چنگ اسطوره‌های دروغین که داعیه‌ی حقیقت دارند، خلاص شد. اسطوره که سراب است، در دامن شرک پرورش می‌یابد و با حقیقت که با توحید عجین است، هم‌نشین نیست.

مبانی فکری قوانین و تئوری‌ها توسط فرضیات پایه‌گذاری می‌شود. قوانین علمی باید مطابق خارجی قابل شهود داشته باشند و برحسب زبان و فرضیات، تعریف دقیق و علمی بپذیرند و صدق و کذب آن‌ها قابل ادراک باشد. فرضیات می‌توانند درباب حقیقی بودن ارتباط برخی بود و نمودها باشند. مثلاً یک فرضیه می‌تواند این باشد که برخی نمادها حقیقی باشند؛ چرا که تا وقتی همه‌ی لایه‌های تجرید را نشناخته‌ایم، چگونه بفهمیم که نمادی حقیقی است یا اعتباری؟ یک فرضیه می‌تواند از چند فرضیه با سطوح تجرید مختلف تشکیل شده باشد که در طول هم قرار دارند. در زبان فرضیات ممکن است از نمادهای اعتباری استفاده شود، اما محتوای نمادین حقیقی فرضیات باید کاملاً مشخص باشند. فرضیات باید چنان پی‌ریزی شوند که راه را برای صورت‌بندی قوانین و تئوری‌ها هموار سازند. بنابراین تا آن‌جا که ممکن است، باید ساده باشند. این، هم با مبانی زیباشناختی علوم هماهنگی دارد و هم این فرضیات ساده هستند که کاربردهای بسیاری دارند و هم تأثیرات فرضیات ساده بر چگونگی قوانین و تئوری‌ها قابل بررسی خواهد بود. لایه‌های تجرید فرضیات در وجود علمی و وجود ذهنی، هر دو باید مورد توجه باشند. توجه صرف به لایه‌های تجرید علم در وجود ذهنی، منجر به گمراهی خواهد شد.

این‌که چه انواعی از شهود دردسترس است، به ما خواهد گفت که چه انواعی از قوانین حقیقت را می‌توان فرمول‌بندی کرد. قوانین باید چنان پی‌ریزی شوند که قابل ابطال باشند. ممکن است قوانینی به روابط نمادین لایه‌های تجرید مربوط شوند و ممکن است قوانینی در چند لایه‌ی تجرید مختلف فرمول‌بندی شوند، به

طوری که بین آن‌ها ارتباط نمادین وجود داشته باشد. اگر قوانین در یک لایه‌ی تجرید فرمول‌بندی شوند، علم حاصل از آن‌ها نمی‌تواند باعث عروج و کمال معرفتی عالم گردد.

تئوری‌ها باید کل نظام ادراکی یک علم را دربربگیرند، نه فقط لایه‌های تجرید خاصی از آن را. این تئوری‌ها می‌توانند از نوع مدل‌های مماثلت باشند که بخشی از یک علم را مثلاً به انسان تشبیه می‌کنند. می‌توانند از نوع مدل‌های ساده‌کننده باشند که برای درک تقریبی ساختار یک علم به کار می‌روند. تئوری‌ها نمی‌توانند از نوع مدل‌های مکانیکی باشند، چه تمام لایه‌های تجرید حقیقت در چنین مدلی وارد نمی‌شوند. قوانین و تئوری‌ها باید قدرت تبیین و پیش‌بینی مشهودات را بدهند؛ حتّی اگر این شهودات تکرارپذیر نباشند. این تئوری‌ها به تعبیری همان فضاهای حقیقی یا اعتباری هستند که می‌توان مسائل را در چارچوب آن‌ها مورد مطالعه قرار داد. حوزه‌ی تئوری‌ها عام‌ترند و حوزه‌ی قوانین خاص‌تر و زبان تئوری‌ها مجردتر از زبان قوانین است.

دانشمندان بسیاری به وجود حقیقت اعتراف دارند. از زمان نیوتن، دانشمندان اعتقاد داشتند که با کشف قوانین فیزیک و سایر علوم تجربی، از رموز هستی پرده برمی‌دارند تا این‌که اینشتین ادعا کرد که این‌ها همه مدل‌هایی هستند که با آن‌ها حقیقت را تقریب می‌زنیم و به آن نزدیک می‌شویم. هر دو متفکر به وجود حقیقت اذعان دارند. حتّی تفکرات فلسفی فیزیک‌دانان برای کشف فرمول‌بندی‌های ریاضی مناسب‌تر با تئوری‌های جدید فیزیک دلیل بر این است که موضوع مورد مطالعه‌ی خود را عقلانی می‌دانند و برای آن باطنی قائل‌اند که قابل کشف و ادراک است و سعی می‌کنند هم با روش‌های علمی و هم با روش‌های فلسفی به آن دست یابند.

گستره‌ی حقیقت، تمام هستی است و تمام هستی، مسخر ساختارشناسی انسان است. ارتباط انسان با خداوند، دلیل بر این است که تمام لایه‌های تجرد هستی در ساختار ادراکی انسان وجود دارد. به عبارت دیگر، انسان در هستی ناقص

نیست. این‌که چه گستره‌ای از حقیقت در فرضیات، قانون‌ها و تئوری‌های معنوی دانشمندان بگنجد، بستگی به پیشرفت علوم و سطح تفکر بشری و تربیت معنوی دانشمندان یک عصر دارد. متأسفانه در عصر ما آن‌چه جمهور دانشمندان به آن دسترسی داشته‌اند، بسیار عمیق نیست. حتّی به ندرت به پشت صحنه‌ی مفاهیم توجه می‌شود. دیدگاه توحیدی به گستره‌ی حقیقت نشان می‌دهد که هرچند در عوالم کثرت ممکن است بعضی علوم نامربوط به نظر برسند، اما هرچه به عمق باطن آن‌ها نزدیک‌تر شویم ارتباط بین این علوم آشکارتر می‌شود.

منظور از کمال انسان، این است که گستره‌ی حقیقت با تمام روابط نمادین آن در ساختار ادراک انسان نقش ببندد؛ یعنی انسان به ساختاری شناختی دست پیدا کند که برای شناخت همه‌ی هستی مناسب باشد. این همان قرب به پروردگار است و عبادت همان حرکت به سوی کمال است. می‌بینیم که دیدگاه مناسبی به علوم می‌تواند کسب دانش را در همسایگی کسب کمالات معنوی قرار دهد.

فعالیت /دبستان ....

فرض کنید مجموعه‌ای از پنج سیب را در نظر گرفته‌ایم و می‌خواهیم اعضای آن را بشماریم. از سیب اول شروع به شمارش می‌کنیم: ۱، ۲، ۳،... . در این صورت ما ترتیب خاصی از سیب‌ها را در نظر گرفته‌ایم. تعداد کل ترتیب‌ها ۱×۲×۳×۴×۵ برابر است با ۱۲۰ ترتیب که در هر یک از آن‌ها تعداد کل سیب‌ها عدد ثابت ۵ است. در حالت کلی اگر n سیب داشته باشیم، $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$ ترتیب متصور است که قرار است همه‌ی آن‌ها حاصل شمارش n را به دست دهد. اما به زودی !n از تعداد ذرات کل عالم هستی که در دیدرس ما هستند، بزرگ‌تر می‌شود. از کجا بدانیم تعداد اعضای یک مجموعه مستقل از ترتیب انتخابی از اعضای آن است؟

فعالیت / راهنمایی ....

یک خط راست را در نظر بگیرید که روی صفحه‌ای از کاغذ رسم شده باشد. امتداد این خط را در نظر بگیرید. به زودی از خانه، محله و شهر شما خارج می‌شود، بر زمین مماس می‌گردد و پس از اندکی از منظومه‌ی شمسی خارج می‌شود و همین‌طور تا کهکشان‌های دوردست ادامه پیدا می‌کند. حال این صفحه‌ی کاغذ را ۹۰ درجه دوران دهید. دورترین نقاط خط با سرعتی بسیار بیش از سرعت نور جابه‌جا خواهد شد. اما می‌دانیم که در عالم واقع جابه‌جایی با سرعت بیش از سرعت نور ممکن نیست. آیا حرکت در عالم ذهن می‌تواند سریع‌تر از عالم واقع اتفاق بیفتد یا این‌که مفهوم ارائه شده از خط راست دارای خدشه است؟

فعالیت / دبیرستان ....

فرض کنید که فوتون‌ها داده‌ها را از هر ستاره‌ای به سایر اجرام آسمانی انتقال می‌دهند. مثلاً انواری را که از ستارگان به زمین می‌رسند، داده‌هایی فرض کنید و انواری را که از زمین به خارج فرستاده می‌شوند نیز داده‌هایی در نظر بگیرید. حال یک مدل اطلاعاتی از جهان خلقت به دست دهید. با توجه به این‌که سرعت انتقال داده‌ها ثابت است، در مورد هندسه‌ی مدلی که ارائه کردید، چه می‌توانید بگویید؟

فعالیت / دانشگاه ....

دیکشنری یا لغت‌نامه‌ی بین میدان‌های توابع و میدان‌های اعداد را در نظر بگیرید. به نظر شما دلیل این همه شباهت بین این دو تئوری چیست؟ آیا آن‌ها حالت‌های خاص مختلفی از یک تئوری کلی‌تر هستند؟ آیا حقیقت باطنی مشترکی منجر به این شباهت‌ها شده است؟ آیا تابع یک عدد است؟ آیا دلیلی فلسفی بر این مدّعا وجود دارد؟

۳-۹. هندسه‌ی ظاهری و باطنی

ارتباط بین ظاهر و باطن، ارتباط بین بود و نمود است. ارتباط بین حقیقت و نمادهای آن، همان چیزی است که از آن به علیّت تعبیر می‌شود. علیّت در فلسفه‌ی غرب در عرض یک لایه‌ی تجرید مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. در صورتی که در فلسفه‌ی شرق علیّت یک رابطه‌ی طولی است. چنین دیدگاهی به اصل علیّت، منجر به روش علمی متفاوتی خواهد شد. هم علوم در جهت وجود علمی رشد خواهند کرد و هم تصویر آن‌ها در وجود ذهنی رشد خواهد کرد. در واقع علیّت فلسفه‌ی غرب، تصویر و تجلی علیّت فلسفه‌ی شرق در وجود ذهنی است. در علیّت نمادین حقیقی خطا راه ندارد، اما در علیّت وجود ذهنی وهم راه دارد. در فلسفه‌ی شرق مسئله‌ی وجود در علیّت تنها موضوع مورد مطالعه است؛ در حالی که علیّت نمادین تمام ابعاد حقیقت را دربرمی‌گیرد و به مسئله‌ی وجود تمرکز ندارد.

در فلسفه‌ی قدسی معلول تجلی علت است. در واقع معلول و علت هر دو تجلیاتی از علل عمیق‌ترند. اگر معلول از چند دلیل یا از ترکیب آن‌ها نتیجه شود، این دلایل خود در طول یکدیگر قرار گرفته‌اند و بعضی علت دیگری هستند. بین فرضیاتی که در لایه‌های مختلف تجرید فرمول‌بندی می‌شوند، باید رابطه‌ی علیّت برقرار باشد. در مورد قوانین و تئوری‌ها هم چنین است. لغت‌نامه و دیکشنری بین بعضی تئوری‌ها هم با این رابطه علیّت قابل توجیه است.

برای درک تفاوت بین هندسه‌ی ظاهری که لایه‌های تجرید عرضی حقیقت را مورد مطالعه قرار می‌دهد و هندسه‌ی باطنی که به مطالعه‌ی لایه‌های تجرید طولی تأکید دارد، باید وجود علمی و وجود ذهنی را در برابر یکدیگر بشناسیم. وجود علمی در سراسر هستی عالم گسترده است، ولی وجود ذهنی در نفس او گسترده شده است. مراتب هستی وجود علمی و وجود ذهنی مساوق هستند، اما مراتب وجود علمی طولی و مراتب وجود ذهنی عرضی است. در علوم تجربی و ریاضیات که ذومراتب هستند، تنها مراتب عرضی شناخت نمایان شده و کار

عالم موحد این است که مراتب طولی این علوم را کشف کند. با این حال، وجود علمی و وجود ذهنی هر دو حقیقی هستند؛ به این معنی که مراتب هستی حقیقت در آن‌ها نمایان است. حقیقی بودن وجود ذهنی وابسته و سوار بر حقیقی بودن وجود علمی است. حقیقی بودن وجود علمی از طریق مجاری شناخت انسان، مساوق با خود حقیقت است. اگر بتوانیم همه‌ی مجاری شناخت را هم‌زمان برای ادراک حقیقت بگشاییم، قادر خواهیم بود حقیقت را از درون بچشیم. معادلاً همه‌ی لایه‌های تجرید وجود ذهنی حقیقت نیز بر ما آشکار خواهند شد. پس عدم درک ما از برخی لایه‌های تجرید به خاطر عدم کمال است.

این دیدگاه‌ها منجر به نگاهی انسانی به علم می‌شوند که در آن علوم واقعیت‌های عینی هستند، نه ذهنی و نه مادی، بلکه مثالی و عقلانی مطابق با عالم ماده؛ یعنی هم فعالیتی بشری هستند و هم پدیده‌ای اجتماعی و هم بخشی از فرهنگ بشری هستند و هم درگیر با تاریخ و هم قابل درک و فهمیدنی هستند. در عین حال، خارج از همه‌ی اذهان وجود دارند. همان‌طور که برای ادراک انسان لایه‌های تجرید مختلفی قائل می‌شویم، برای کل جهان هستی نیز چنین لایه‌های تجریدی معنی دارند و به‌خصوص برای علوم نیز این لایه‌های تجرید مستقل از بشر متصورند. این‌گونه خاستگاهی برای علم مستقل از بشر معنی پیدا می‌کند.

فعالیت /دبستان......................................

مصداق‌های عدد ۱ در اطراف ما فراوان‌اند: مفاهیم وحدت، تساوی، اتحاد و مانند آن. از مصداق‌های عدد ۲ مفاهیم ازواج، تقارن آینه‌ای، چشم‌ها، گوش‌ها، دست‌ها، پاها و مانند آن را می‌توان نام برد. از دانش‌آموزان بخواهید در اطراف خود بگردند و مصداق‌های اعداد کوچک را پیدا کنند. ممکن است این مصداق‌ها طبیعی باشند و یا از ماوراءالطبیعه سرچشمه گرفته شده باشند. در مورد دایره و پاره‌خط و اشکال ساده‌ی هندسی، همین فعالیت را تکرار کنید.

فعالیت/راهنمایی

آیا خط راست، دایره‌ی کامل، مثلث، مربع و مانند آن در طبیعت یافت می‌شوند یا این‌که نتیجه‌ی ایده‌آل‌سازی ذهن ما هستند؟ اگر از ذهن ما می‌آیند، چرا همه‌ی این ایده‌آل‌سازی‌ها، با هم هماهنگ‌اند و در کنار هم علم هندسه را می‌سازند؟ از دانش‌آموزان بخواهید اشکال ساده‌ی دیگری از طبیعت الهام گرفته، ایده‌آل‌سازی کنند و با کنار هم قرار دادن آن‌ها علم دیگری غیر از علم هندسه‌ی اقلیدسی بسازند. برای این کار ناچارند روشی جدید برای ایده‌آل‌سازی اشیائی که در طبیعت یافت می‌شوند، پیدا کنند.

فعالیت/دبیرستان

احکام هندسه‌ی تصویری را که از اصول موضوعه‌ی آن نتیجه می‌شوند، در نظر بگیرید. اگر در این احکام خط را با نقطه و نقطه را با خط جایگزین کنیم، باز هم حکمی صحیح به دست می‌آید. این به خاطر تقارن اصول موضوعه نسبت به مفاهیم خط و نقطه است. آیا این بدین معنی است که مفاهیم خط و نقطه بر هم منطبق‌اند؟ آیا ساختار اصول موضوعه مجردتر از ساختار احکام هندسه است و احکام اصول موضوعه در هندسه تجلی می‌کنند یا این‌که احکام هندسه و اصول موضوعه از یک درجه‌ی تجرید هستند؟

فعالیت/دانشگاه

شباهت مثلثات اقلیدسی، کروی و هذلولوی را در نظر بگیرید. آیا این بدین معنی است که هر سه‌ی این هندسه‌ها تجلی باطن مشترکی هستند؟ یا این‌که هر سه حالت خاص هندسه‌ای به معنی کلی‌تر هستند؟ در وجود علمی و وجود ذهنی، به هر دوی این سؤال‌ها پاسخ دهید. اگر جواب مثبت است، آن هندسه‌ی باطنی یا آن هندسه‌ی کلی‌تر را بسازید. تنوع پاسخ‌ها مورد تأکید است.

۴-۹. هندسه‌ی هستی ریاضیات

علم قدسی که معلوم عالم هستی است، دارای همان مراتب‌شناختی است که انسان و هستی او را دربرمی‌گیرد. هر یک از لایه‌های تجرید مثل حس، مثال و عقل، هم در عالم کبیر مصداق دارد و هم در عالم صغیر. هر یک از مراتب شناخت در عالم صغیر، دریچه‌ای است به این مرتبه در عالم کبیر. از این‌رو علم قدسی، هم دردسترس بشر است و هم مستقل از بشر. این دریچه‌های شناختی را مجاری شناخت نامیده‌اند. انسان به مجاری شناخت می‌شناسد و این مجاری شناخت با مراتب هستی او مساوق است. برای شناخت ساختار ادراک انسانی و مجاری شناخت او، لازم است که انسان و لایه‌های تجرید هستی او را بشناسیم.

در مورد لایه‌های تجرید هستی انسان، تئوری‌های گوناگونی ارائه شده که هرکدام تنها رنگی از حقیقت را دربردارند. مثلاً عمده‌ی فلسفه‌های غربی، انسان را متشکل از ذهن و جسد می‌دانند. در بعضی فلسفه‌های شناخت شرقی، لایه‌های تجرید شناخت را تجربه، الهام و تعقل می‌دانند که مساوق با آن، لایه‌های هستی انسان را حس و قلب و عقل در نظر می‌گیرند. در بعضی فلسفه‌های شناخت شرقی جسد، نفس، قلب، روح، عقل، نور و هویت را لایه‌های هستی می‌گیرند که هماهنگ با آن در بعضی نظریه‌های عرفانی برای نفس هفت لایه‌ی تجرید در نظر می‌گیرند که مساوق با لایه‌های تجرید برای شناخت ذهنی است. برای سادگی تئوری حس، قلب و عقل را در نظر می‌گیریم. در تئوری‌های مشابه به همین سیاق بررسی شود.

ادراکات قلبی بدون ما به ازای حسی ممکن نیست و ادراکات عقلی بدون ما به ازای قلبی ممکن نیست. مخروط ادراکات در عالم نفس کثیر و در عالم عقل وحدت بیش‌تری دارد. مخروط عوالم در عالم نفس تنگ‌تر و در عالم عقل گشایش بیش‌تری دارد. محسوسات، الهامات صادقه و معقولات ارتباط متقابل دارند:

عالم حس تکرارپذیر، پیش‌بینی‌پذیر و تجربه‌پذیر است و در بستر زمان جریان

دارد. محسوسات از قوانینی علمی تبعیّت می‌کنند. قوانین بعضی بر صدق تأکید دارند و بعضی بر کارآمدی و این‌که ابزاری هستند برای استنباط. قوانین به تبیین و پیش‌بینی کمک می‌کنند. مفاهیم زبان خاص علم را تشکیل می‌دهند. تئوری‌ها در این لایه‌ی تجرید، نظامی از قوانین است که بعضی تجربی هستند. نظام صوری یک تئوری از مفهوم آن متمایز است.

عالم الهام، نه تکرارپذیر است، نه پیش‌بینی‌پذیر و نه تجربه‌پذیر. این بدان معنا نیست که تکرار پیش‌بینی و تجربه غیرممکن است، بلکه ارادی نیست. عالم الهام در بستر باطن زمان که دهر نام دارد، جاری است. الهامات از قوانین ماوراءالطبیعه پیروی می‌کنند. مفاهیمی که در این لایه‌ی تجرید مورد نظرند نیز ماوراءالطبیعه‌اند؛ مانند زهد، حکمت، تقوا، ایمان و مانند آن. درک ما از این مفاهیم دست‌خوش تقلب و دگرگونی است. به این معنی هر یک از این مفاهیم نیز ذومراتب هستند. تأکیدات قوانین ماوراءالطبیعه، ممکن است عبادی، کاربردی یا شناختی باشند. بسیاری از این قوانین در احادیث وارد شده‌اند؛ مثلاً این‌که از آثار زهد حکمت است. تئوری‌ها نظامی از قوانین ماوراءالطبیعه و غیر آن هستند. به عنوان مثال، حدیث جنود عقل و جهل یک تئوری قلبی است.

عالم عقل همیشه حاضر است و نیاز به تکرارپذیری ندارد و نه نیاز به پیش‌بینی. عالم عقل به طور مستقیم و حضوری دردسترس است و نیازی به تجربه ندارد. عالم عقل در بستر باطن دهر که سرمد نام دارد، جاری است. معقولات از قوانین عالم عقل تبعیت می‌کنند. بسیاری از مفاهیم عقلانی مثل مفاهیم فلسفی، بر مسئله‌ی وجود تأکید دارند. تأکیدات قوانین عقلی معمولاً ساختاری است. اتحاد عاقل و معقول و اتحاد عالم و معلوم، مثال‌هایی از قوانین عقلی هستند. تئوری‌ها نظامی از قوانین عقلی هستند، مانند فلسفه‌ی ابن‌سینا یا فلسفه‌ی ملاصدرا. عقل به‌این معنی با شهود عقلانی هم‌نشین است.

در مدل‌شناختی حس، قلب و عقل علم قدسی، علمی است که همه‌ی این مراتب را دارا باشد. مفاهیم آن، قوانین آن و تئوری‌های آن، همه‌ی این مراتب

را دارا باشند. علم قدسی، علم عقلانی است، به این معنی که مرتبه‌ی عقل و همه‌ی مراتب پایین‌تر را داراست. مراتب نمادین علم قدسی نیز با مراتب نمادین جهان هستی و مراتب نمادین هستی انسان و مراتب نمادین نفس هر دو تطابق دارند. حال ببینیم در چنین مدلی از علم قدسی، هندسه‌ی هستی علم ریاضیات چیست؟

اشیای ریاضی و مفاهیم ریاضی در لایه‌ی تجرید حس قرار می‌گیرند. قلب خاستگاه تغییر و تحول مفاهیم است و عقل خاستگاه ساختارهای ریاضی است. اشیا و مفاهیم ریاضی حاصل تفکرند که با لایه‌ی شناختی حس مطابقت دارند. تغییر و تقلب مفاهیم حاصل الهام‌اند که با قلب تطابق دارد. ساختارهای ریاضی نیز حاصل عقل ساختارشناسند. این سه لایه تجرید با یکدیگر ارتباط دارند. لایه‌های مجردتر بر لایه‌های ملموس‌تر تجلی می‌کنند. مثلاً ساختارهای ریاضی در اشیا و مفاهیم ریاضی تجلی می‌کنند و بر آن‌ها حکومت دارند، و هم الهامات ریاضی از این ساختارها تبعیت می‌کنند. البته این لایه‌های تجرید ریاضیات در لایه‌های تجرید ذهنی علم ریاضیات نیز تجلی می‌کنند. از این‌رو ریاضیات در ذهن ما نیز لایه‌های تجرید متفاوتی دارد.

درست است که علوم از ریاضیات، فیزیک، شیمی و طب گرفته تا جغرافیا، علم‌النفس، جامعه‌شناسی و معماری و هنر، همه در چارچوب علم قدسی می‌گنجند، اما نگاه علم قدسی به تأکیدات این علوم و تقسیم‌بندی‌های آن‌ها و تعاریف آن‌ها متفاوت است. مثلاً معماری در غرب مدرن، علمی بدون هویت و بی‌جهان‌بینی است که سعی می‌کند خود را به جهان‌بینی‌های مختلف بیاویزد تا روح پیدا کند. اما در معماری اسلامی، هویت توحیدی برای این علم وجود دارد. معماری، هنر طراحی محل زندگی انسانی موحد است که نگاه خاصی به زندگی، طبیعت و عالم معنی دارد. اگر علوم را چنان بازسازی و تقسیم‌بندی کنیم که با ساختار لایه‌های تجرید آنان هماهنگ باشد، هم‌نشینی و مساوقت علوم آشکارتر خواهد شد. در این چینش جدید و معنایی علوم، هنر قدسی نیز جای خود را

باز می‌کند و خلاقیت معنوی در این بازسازی اهمیت پیدا می‌کند. این جاست که دامنه‌ی هنر نیز چنان توسعه پیدا می‌کند که در علوم قدسی جذب می‌شود؛ چرا که هدفدار و هماهنگ با همان جهان‌بینی است و از باطن جدا نیست و تجلیات هستی نمادین در آن آشکار است.

فعالیت /دبستان..

از دانش‌آموزان بخواهید مربع وفقی بسازند. مربع وفقی را به عنوان یک ساختمان عددی معرفی کنید. از مربع وفقی ۲×۲ شروع کنید و به سمت مربع‌های وفقی بزرگ‌تر بروید. روش ساختن مربع وفقی را نیز به دانش‌آموزان بیاموزید. تنوع پاسخ‌ها در هر مورد، مورد تأکید است. از دانش‌آموزان بخواهید کاشی‌کاری‌هایی بسازند که در آن تنها از یک نوع کاشی استفاده شده باشد. کاشی‌کاری را به عنوان یک ساختار هندسی معرفی کنید.

فعالیت /راهنمایی..

در مساجد مختلف جست‌وجو کنید و مدل‌هایی را که در آن‌ها از یک نوع کاشی برای فرش کردن سطحی به کار گرفته شده، در دفتر خود ثبت کنید. حال این کاشی‌کاری‌ها را با هم مقایسه کنید و ببینید در هر یک از آن‌ها هر کاشی چند همسایه دارد. آیا می‌توان این کاشی‌کاری‌ها را به طور پیوسته به یکدیگر تبدیل کرد؟ حداکثر چند کاشی‌کاری می‌توان ساخت که دوبدو متمایز باشند؟

فعالیت /دبیرستان..

نامساوی حسابی - هندسی را به دو روش هندسی و جبری ثابت کنید و سعی کنید مراحل اثبات هندسی را بر مراحل اثبات جبری منطبق کنید. سعی کنید همین کار را برای سایر نامساوی‌های معروف انجام دهید. آیا جبر بستر مناسب‌تری برای تعمیم نامساوی‌هاست یا هندسه؟ آیا هندسه بستر مناسب‌تری

برای کشف نامساوی‌هاست یا جبر؟ آیا اثبات هندسی یک حکم جبری یگانه است؟ آیا می‌توانید مراحل مختلف دو اثبات هندسی برای یک حکم جبری را بر هم منطبق کنید؟

فعالیت / دانشگاه ....

ساختارهای جبری و ساختارهای هندسی را می‌توان در چارچوب نظریه‌ی رسته‌ها مطالعه کرد. در نظریه‌ی رسته‌ها بر شناخت جمعی یک ساختار تأکید می‌شود. مثلاً سعی می‌کنند یک ساختار را برحسب همه‌ی مرفیسم‌های آن به دسته‌ای از ساختارها به طور یگانه مشخص کنند. این روش را برای ساختارهای هندسی نیز به کار ببرید. یعنی سعی کنید اشیائی هندسی را برحسب مرفیسم‌های آن‌ها به خانواده‌ای از اشیای هندسی رده‌بندی کنید.

۵-۹. ریاضی‌دان موحد و وحدت‌بخشی الگوهای هندسی

انسان، علوم قدسی و جهان امکان همه از دیدگاه موحد نمادهای حقیقی ذاتی هستند. هرچه یک موجود کامل‌تر باشد، نمادی کامل‌تر است تا برسد به انسان کامل. حجاب کثرت، ما را از شهود حقیقت و نظام توحیدی حاکم بر آن بازمی‌دارد و زمینه‌ی وسوسه‌ی وهم بیرونی و درونی را فراهم می‌کند. وحدت، مجاری شناخت در انسان موحد منجر می‌شود که انسان با دریچه‌ی یگانه‌ای به جهان هستی متصل شود، لذا ادراک او جزئی از حقیقت خواهد بود. انسان موحد، حقیقت‌شناس و حقیقت‌بین است و حجاب‌های طبیعت برای او مانع از شهود عالم معنی نمی‌شود. معنویت و باطن هم‌نشین با عالم طبیعت و ظاهر است، اما شناخت آن، چشم معنوی و بصیرت انسان موحد را می‌طلبد. این دیدگاه معنوی منجر به نگاه دیگری به علوم طبیعی و ریاضی و تأکیداتی متفاوت خواهد شد. انسان موحد علوم را طور دیگری دسته‌بندی می‌کند. بنابراین دانشمندان موحد باید علوم را بازسازی و بازنویسی کنند و با چهره‌ای جدید و مطابق با معنویت

به نمایش بگذارند.

حال سعی می‌کنیم وحدت مجازی شناخت را که یکی از مراتب کمال است، روشن‌تر بیان کنیم. درک نظام توحیدی حقیقت به واسطه‌ی یک توحید درونی در ساختارشناختی ممکن است. این توحید درونی با وحدت یافتن لایه‌های هستی انسان و جهان خلقت توأم است؛ یعنی پس از وحدت ساختارشناختی، هستی انسان و جهان خلقت نیز توحیدی ادراک می‌شوند. این معنی تعبیری است که آمد. این‌که پس از وحدت، مجازی شناخت هستی انسان جزئی متصل به هستی جهان خلقت است. و این‌که مرتبه‌ای از تکامل ساختار ادراکی ما وحدت مجازی شناخت است، دلیلی است بر این‌که مرتبه‌ای از تکامل علوم وحدت علوم است. برای این‌که علوم مختلف بتوانند وحدت پیدا کنند، باید ابتدا مبانی آن‌ها متحد شوند. ریاضیات ابزار اصلی برقراری وحدت بین مبانی علوم است. در واقع هر علمی در تقسیم‌بندی دانشمند موحد، به یک دریچه‌ی شناختی متناظر می‌شود و وحدت علوم در واقع وحدت دیدگاه ما نسبت به جهان خلقت است و این حاصل وحدت‌مجازی‌شناخت‌است.

آیا لایه‌ی تجرید ریاضیات هم‌سطح سایر علومی است که باید با آن‌ها متحد شود یا مجردتر از آن‌هاست؟ افلاطون از ریاضیات به عنوان حکمت وسطی تعبیر می‌کرد و آن را هم‌نشین با حکمت اولی که شامل الهیات می‌شد، می‌دانست و مجردتر از علوم تجربی. ریاضیات توسط گالیله به عنوان زبان مشترک علوم تجربی و زبان شناخت طبیعت محترم شناخته شد. اما آن‌چه افلاطون و گالیله ریاضیات می‌دانستند، کمی با آن‌چه امروز ریاضیات خوانده می‌شود، متفاوت است. لایه‌های تجرید ریاضیات عرضی است و در وجود ذهنی گسترده شده است. پس فقط می‌تواند مایه‌ی وحدت مبانی علوم در وجود ذهنی باشد. اما آن‌چه وظیفه‌ی دانشمند موحد است، شناخت لایه‌های تجرید ریاضیات در وجود علمی است تا بتوان در وجود علمی به علوم انسانی، تجربی و ریاضی وحدت بخشید. چنین وحدتی، وحدت حقیقی علوم است، بدون وحدت در وجود علمی،

وحدت در وجود ذهنی غیرممکن است، چون دومی سوار بر اولی است. پس سؤال کلیدی این است که باطن ریاضیات چیست؟ پشت صحنه‌ی مفاهیم ریاضی را با چه زبانی باید مطالعه کرد؟ مفاهیم ریاضی تنها لباس حقیقت هستند، نه زبان حقیقت.

حال ببینیم ریاضی‌دان موحد چه نقشی را می‌تواند ایفا کند. دانشمند موحد دارای ساختاری ادراکی است که هم با پیچیدگی‌ها و معضلات علمی هماهنگ است و هم به خاطر وحدت‌شناختی، علم انسان موحد یکپارچه و هدفدار است. روش علمی دانشمند موحد، غنای لازم برای بررسی همه‌ی مسائل مربوط به انسان را داراست و همه‌ی نیازهای شناختی او را برآورده می‌کند. ملاک‌های او برای تشخیص حق از باطل و دسترسی به حقیقت کامل است. علم او در اخلاق او، نوشتن او، مطالعه‌ی او و روش‌های یادگیری او همه تأثیر می‌گذارد. دانشمند موحد دارای جهان‌بینی و انسان‌شناسی خاصی است؛ دارای علم‌شناسی و حقیقت‌شناسی خاصی است؛ دارای تاریخ‌شناسی و جامعه‌شناسی خاصی است؛ دارای هنرشناسی و زیبایی‌شناسی خاصی است؛ دارای دین‌شناسی و تمدن‌شناسی خاصی است، و در نهایت او دارای دیدگاه خاصی نسبت به خیر و اخلاق است.

ریاضی‌دان موحد، در هندسه به دنبال وحدت‌بخشی الگوهای هندسی است. گفتیم که هر مسئله‌ای هندسه‌ی خاص خود را دارد و ریاضی‌دان باید هندسه‌ی طبیعی یک مسئله را کشف کند. هم‌چنین درمورد هندسه‌ی هستی ریاضیات و لایه‌های تجرید آن سخن گفتیم و مدلی نیز برای آن ارائه دادیم. نشان دادیم که ساختار ریاضیات در وجود ذهنی، یک تجلی ساختار آن در وجود علمی است، لذا مصداق‌های هندسه در وجود ذهنی ریاضیات که همان ریاضیات مشهور است، با مصداق‌های هندسه در وجود علمی مساوقت دارد. وحدت مجازی شناخت در ساختار ادراکی ریاضی‌دان موحد، منجر به این خواهد شد که نظام تجلیات در مفاهیم هندسی ساختاری توحیدی پیدا کند. هرچه به لایه‌های مجردتر برویم،

وحدت هندسه آشکارتر خواهد شد. سرآخر مصداق توحیدی آن بر ریاضی‌دان موحد کشف خواهد شد و آن مفهوم قدر است.

در حدیث آمده است که قدر همان هندسه است. این درک عمیقی از مفهوم تقدیر را به دست خواهد داد. عرفای اسلامی از ابن‌سینا و ابن عربی گرفته تا ملاصدرا در مورد سرّ قدر داد سخن داده‌اند. در این مورد احادیث بسیاری نیز وارد شده است. یکی از مصداق‌های مهم تأثیرگذاری تفکر ریاضی بر درک مفاهیم معنوی همین مورد است. از این‌جا علم هندسه با بسیاری از علوم تجربی و انسانی پیوند خواهد خورد؛ چرا که قدر در همه‌ی این علوم تجلی کرده است.

در برابر هندسه، مصداق توحیدی تفکر جبری مفهوم عدد است. در این مورد نیز عرفای اسلامی ید طولایی دارند. مصداق‌های بسیار مجردی از مفهوم عدد در قرآن نیز آمده است. از این‌جا نیز علم حساب با بسیاری از علوم تجربی و انسانی پیوند خواهد خورد؛ چرا که عدد در همه‌ی این علوم نیز تجلی کرده است. سؤال این‌که مفهوم عدد و مفهوم قدر چه ارتباطی دارند؟ درک این ارتباط به ما خواهد آموخت که چرا تفکر هندسی و تفکر جبری هم‌چون دو رودخانه‌ی موازی در ریاضیات بشری همواره جریان داشته‌اند.

فعالیت /دبستان

حجمی بسازید که از روبه‌رو مقطع آن دایره به نظر برسد، از چپ مربع و از زیر مثلث دیده شود. حجمی بسازید که از سه طرف دایره به نظر برسد. آیا چنین حجمی لزوماً کره است؟ مقاطع یک مکعب چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟ آیا می‌توانید مقطعی از مکعب پیدا کنید که یک شش ضلعی باشد. مرکز وجوه یک مکعب را به هم وصل کنید. چه شکلی به دست خواهد آمد؟ می‌توانید برای حل این مسائل از برش دادن سیب‌زمینی استفاده کنید.

فعالیت / راهنمایی

با خط‌کش و پرگار زاویه‌ای را نصف کنید. آیا می‌توانید این کار را با کاغذ و تا انجام دهید. چه طول‌هایی را می‌توان با کاغذ و تا رسم کرد؟ اگر طولی قابل رسم با کاغذ و تا باشد، آیا لزوماً قابل رسم با خط‌کش و پرگار هست؟ به‌عکس چه‌طور؟ به نظر شما استفاده از کاغذ و تا راحت‌تر است یا استفاده از خط‌کش و پرگار؟ برای تقسیم زاویه به چند قسمت مساوی، ابزاری بسازید.

فعالیت / دبیرستان

دو خط متقاطع در صفحه در نظر بگیرید. اگر صفحه در یک فضای سه‌بعدی نشسته باشد، می‌توان با دوران دو خط متقاطع حول نیمساز آن یک مخروط به دست آورد و دورترین خط روی مخروط را به دو خط متقاطع نسبت داد. به همین روش به دو خط موازی، خطی موازی صفحه نسبت می‌دهیم. این یک تناظر بین خطوط فضا و زوج خطوط صفحه خواهد بود. حال سعی کنید با کمک این تناظر، هندسه‌ی فضایی را روی صفحه پیاده کنید.

فعالیت / دانشگاه

سطح مخروط کامل را در نظر بگیرید. سطحی تخت، اما تکینه است. به جز نقطه‌ی تکینگی همه‌ی احکام هندسه‌ی اقلیدسی روی مخروط صحیح است. حال سعی کنید هندسه‌ی اقلیدسی را روی مخروط کامل بسط دهید. اشکالی را در نظر بگیرید که در هر دو نیمه‌ی مخروط حضور دارند و سعی کنید مشابه احکام هندسی را برای این اشکال ثابت کنید. آیا هندسه‌ی اقلیدسی قابل توسعه به این فضای تکینه است؟

فصل ۱۰

هندسه و شهود

یک ریاضی‌دان نمی‌تواند ادعا کند که هنگام تحقیق فقط استدلال و محاسبات نیازهایش را برآورده می‌کند؛ چرا که هم ناخودآگاه او در کار است و هم فراشناخت. فراشناخت نقش هدایت استدلال و محاسبات را به‌عهده دارد و ناخودآگاه برداشتن سدهایی را که به دلیل تاریخ ادراک ریاضی برای شناخت تشکیل می‌شوند، پیگیری می‌کند. شهود در هر دوی این موارد نقش دارد. یک فیزیک‌دان هم به دلیل تجربه و مشاهده به شهود نیازمند است و هم به دلیل نیازی که به ریاضیات در شناخت طبیعت دارد، با شهود سروکار دارد. ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان هر دو نقش شهود را در پیشبرد تحقیقاتشان اساسی می‌دانند.

فیزیک‌دانان تعبیر این را که شهود چیست از نتایج تئوریک دیدگاه فلسفی‌شان می‌دانند و این‌که چه چیزی مشاهده‌پذیر است، بستگی به قضاوت تئوری‌های آن‌ها دارد. اما ریاضی‌دانان در مورد شهود عرفانی‌تر فکر می‌کنند. آنان ادراکاتی فراریاضی را که به تحقیقات ریاضی کمک می‌کنند، شهود می‌نامند. از همین جا مفهوم شهود فیزیکی

و شـــهود ریاضی از هم جدا می‌شـــوند. سؤال این‌که شهود فیزیکی و شهود ریاضی از یک جنس‌اند یا متفاوت‌اند؟ آیا یکی تجلی دیگری است؟ یا این‌که مستقل‌اند؟

کاربردهـــای روزمره‌ی کلمه‌ی شـــهود در بین ریاضی‌دانـــان اغلب به وجود ذهنی محدود است. گاهی شهودی یعنی بصری. یعنی گاهی ریاضی‌دانان در کاربرد کلمه‌ی شـــهود به ســـاختار بصری و هندسی مسئله تأکید دارند و سعی می‌کنند با تصویرسازی هندســـی مســـئله موردمطالعه را ملموس‌تر سازند. ریاضی‌دانانی که درک تصویری‌شان بر درک کلامی یا دست‌ورزی آنان غلبه دارد، معمولاً تا تصویری کلی از تمام داستان مورد مطالعه نداشـــته باشـــند، به درک جزئیات نمی‌توانند اشـــتغال پیدا کنند. این به ســـاختارهای ذهنی این افراد و این‌که چگونه ارتباط بین جزء و کل را درک می‌کنند، مربوط می‌شود. برای این افراد، شناخت هندسه‌ی طبیعی یک مسئله‌ی ریاضی ساده‌تر اســـت. در واقع، این شـــناخت، نوعی شـــهود تصویری دادن از مسئله است. این نوع شـــهود برای مســـائلی که در آن‌ها تغییر پیوســـته وجود دارد، بسیار اهمیت دارد. بدون تصویرســـازی هندســـی، ممکن است اجزای مهمی از مسئله مورد توجه قرار نگیرند. مرکزیت این نوع شـــهود، به خاطر مرکزیت حس بینایی بین ســـایر حواس است. این نوع شـــهود، در آموزش بســـیار اهمیت دارد؛ چرا که به کمک آن می‌توان حجم زیادی از اطلاعات را در دسترس دانش‌آموزان قرار داد.

بعضی اوقات شـــهودی یعنی محتمل. برای روند حل مسئله یا مراحل اجرای یک فراینـــد، می‌تـــوان خطوط کلی روند را به طور خلاصه چید تا بعد به یک‌یک جزئیات پرداخت و مطمئن شـــد که تمام مراحل قابل اجرا هســـتند یا مشـــکلات احتمالی آن قابل رفع هستند. این طرح کلی از روند حل مسئله یا مراحل اجرای فرایند را طرحی شـــهودی گویند. راه‌حل‌هایی که در یک جرقه به ذهن می‌رسند، معمولاً طرح شهودی از اثبات محتمل آن حکم یا روش ساختن آن ساختار را با خواص موردنیاز به دست می‌دهند و جزئیات صحت و کارآمدی این طرح باید با دقت مورد بررسی قرار گیرد. محاســـبات ریاضی که توســـط فیزیک‌دانان انجام می‌شـــود، تا وقتی که مبانی ریاضی آن محکم و اســـتوار نشـــود، به همین معنی شـــهودی هستند. یکی از دلایل دیر شکوفا

شـدن ارتباطـات عمده بیـن ریاضیات و فیزیک که از هر دو طرف تأثیرگذار باشـد، همین ناهماهنگی تفکر شـهودی فیزیک‌دانـان با انتظارات منطقی دقیق ریاضی‌دانان است. بسیاری اوقات ممکن است جرقه‌های ذهنی، اثبات‌های محتمل و راه‌حل‌های شهودی جواب ندهند و به‌هیچ‌وجه نتوان جزئیات را تعمیر کرد؛ یعنی این نوع شهود خطاپذیر است.

برای بعضی ریاضی‌دانان، شـهودی یعنی ناکامل. این نوع شـهود بسـیار نزدیک شـهودی به معنای محتمل اسـت. گاهی برای گام‌های مهمی از حل مسـئله یا مراحل مهمی از اجرای یک فرایند یا پیاده‌سـازی یک تئوری یک طرح قوی داریم، ولی این طرح هنوز باید کامل شود تا بتواند از عهده‌ی همه‌ی وظایف محول شده به آن برآید. این شهود دو جزء اصلی دارد؛ یکی تقسیم مسئله به زیرمسئله‌ها یا تجزیه‌ی حل مسئله به گام‌ها یا اجرای فرایند به مراحل است، و دیگر تشخیص اجزای مهم و حل مسئله در آن اجزا به طوری که به نظر قابل کامل شـدن باشـند؛ به طوری که یک کل بی‌نقص بسازند. گاهی مراحل اثبات را از آخر به اول و از اول به آخر به انجام می‌رسانیم؛ به طوری که به نظر برسد که سروته اثبات قابل وصل شدن باشد. در این صورت این یک اثبات شـهودی به معنی ناکامل اسـت. محاسبات ریاضی فیزیک‌دانان به این معنی نیز شـهودی هستند. هم‌گرایی سری‌ها را چک نمی‌کنند یا با فرایند نرمال‌سازی، سرهای واگرا را متناهی می‌کنند، ولی فرمالیسمی ارائه نمی‌دهند که نشان دهد این کار ممکن است و به تناقض نمی‌انجامد.

گاهـی شـهودی یعنی مبتنی بر الگـوی فیزیکی. منظور از الگـوی فیزیکی، مدلی هندسـی اسـت که منطبق بر یک پدیده‌ی طبیعی شده اسـت. برای بسیاری از مسائل علوم انسـانی، مدل‌های سـاده‌کننده‌ی فیزیکی مطرح شده است؛ مثل مدل تعادل قوا در روان‌شناسـی و اقتصاد. می‌توان چنین مدل‌هایی را در مسـائل مجرد ریاضی نیز مطرح کرد. به این معنی شهود یعنی چنان به مسئله فکر کنیم که آن را ملموس ساخته باشـیم. این صورتی بسـیار زمینی از مفهوم شهود است و به ابعاد مجرد شهود تعمیم پیدا نمی‌کند.

بعضی مواقع شـــهودی یعنی کل‌نگرانه یا تلفیقی. نگاه کل‌نگر به مســئله یا موضوع مورد مطالعه، بدون توجه به جزئیات و ارتباط بین اجزای شهودی است که تصمیم‌گیری در بعضـــی مـــوارد را به بعد موکول می‌کند. ممکن اســـت ترکیباتی از اجزا را به عنوان کل گرفــت و آن‌هــا را تلفیق کرد تا کل بزرگ‌تری به دســت آید. بعضی اوقات فرض می‌کننـــد الگوهـــای خاص در مثال‌هـــای خاص در حالت‌های کلی‌تـــری برقرارند که نوعی تفکر شـــهودی از جنس بالاست. کل‌نگری شهودی با کل‌نگری فلسفی متفاوت است. کل‌نگری شهودی ملموس است، اما کل‌نگری فلسفی نوعی مجردنگری است. برای شهود به معنی کل‌نگری باید ساختار ریاضی را در یک نظام کلی خلاصه کرد تا بتوان این نظام‌های خلاصه را مقایسه کرد. شاید بتوان کل‌نگری شهودی را نزدیک به ساختارنگری دانست. به این معنی هم کل‌نگری وهم خُردنگری در چارچوب شهود قرار می‌گیرند. اجزا در برابر کل و کل در برابر اجزا مقایسه می‌شوند تا مفهوم تلفیقی شهود نیز مورد توجه قرار گیرد.

در غالب مواقع در وجود ذهنی، شـــهود در برابر اثبات قرار می‌گیرد. اثبات ناقص یا هر نوع بســـته‌ی دلایل که به نوعی صحت حکمی را توجیه کنند یا دلایلی بر این‌که از بین چند گزینه کدام حکم محتمل‌تر اســـت، ارائه کنند، شـــهودی خوانده می‌شـــود. شهودی به معنی محتمل یا ناکامل هم در این چارچوب می‌گنجند. محاسبات ریاضی فیزیک‌دانان شهودی است در برابر ارائه‌ی اثباتی کامل.

هرچند مفاهیمی از شهود که در رابطه با وجود ذهنی ریاضیات به کار برده می‌شوند، چندان عمیق نیســت، همگی نوعی ارتباط تنگاتنگ با هندســـه‌ی مفاهیم موردبررسی دارند. به عبارت دیگر، فضای مفهومی یک مســئله، خاســتگاه معنی پیدا کردن تفکر شهودی است. در این فصل سعی خواهیم کرد که با معنی شهود در وجود علمی آشنا شـــویم و آن را با درک عمیقی از هندســـه که در فصل گذشـــته به دســت آوردیم، پیوند دهیم.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید محاسبات عددی را به طور تقریبی انجام دهند و حاصل را با محاسبات دقیق مقایسه کنند. سپس تفاوت این دو را در نظر بگیرند. حال از آن‌ها بخواهید تصمیم بگیرند که اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در کدام بیش از همه، محاسبات تقریبی و دقیق فاصله دارند. همین فعالیت را درباره‌ی محاسبات طول‌ها و مساحت‌ها در اشکال ساده‌ی هندسی تکرار کنید و مساحت تقریبی را با مساحت دقیق مقایسه کنید. حال اشکالی را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آنان بخواهید با کمک خط‌کش، مساحت تقریبی آن‌ها را محاسبه کنند و تخمین بزنند محاسباتشان چه‌قدر به جواب واقعی نزدیک است.

فعالیت/ راهنمایی ....

پیش از حل هر مسئله، استراتژی‌های حمله به مسئله را فهرست کنید و تصمیم بگیرید کدام استراتژی‌ها برای حل مسئله و رسیدن به هدف نهایی آن مناسب‌ترند و کدام استراتژی‌ها برای درک بهتر ارتباطات ریاضی مسئله مناسب‌ترند. برای انتخاب خود، از استراتژی حمله به مسئله دلیل بیاورید و برای رد استراتژی‌های دیگر نیز دلیل بیاورید. سپس قسمت‌هایی که احتمالاً در اجرای استراتژی به مشکلاتی برخواهید خورد، از پیش حدس بزنید.

فعالیت /دبیرستان ....

معادلات خط و دایره را به زبان بردارها بیان کنید و سعی کنید مسائل هندسه را به زبان بردارها ترجمه و حل کنید. آیا معنی فیزیکی بردارها در حل مسئله نقشی به عهده داشته‌اند؟ آیا حرکت می‌تواند به این روش وارد هندسه شود؟ حال دایره‌هایی را در نظر بگیرید که نقطه‌ای روی آن‌ها در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت است و خطوطی را در نظر بگیرید که نقطه‌ای روی آن‌ها در حال حرکت است. سعی کنید احکامی هندسی برای چنین خط و دایره‌هایی ثابت کنید. از زبان بردارها کمک بگیرید.

فعالیت / دانشگاه ....

این یک قاعده‌ی کلی است که ناورداهای سرتاسری از بر هم نهی ناورداهای موضعی به دست می‌آیند. روی شبکه‌ی اعداد صحیح شکلی بسازید که اضلاع آن افقی یا عمودی باشند. مساحت شکل را از روی اطلاعات موضعی مرز محاسبه کنید. حال سعی کنید مدل‌های دیگر از تفکر هندسی ارائه دهید که گذر از موضعی به سرتاسری در آن‌ها پیاده شوند.

۱-۱۰. شهود و لایه‌های تجرید

در وجود علمی شهود یعنی شناخت جوهر حقیقی. منظور ما از شهود، شناخت همه‌ی لایه‌های هستی موضوع و همه‌ی ابعاد حقیقت است. در هر یک از لایه‌های تجرید، شهود معنی خاصی به خود می‌گیرد که بین این مفاهیم ارتباط نمادین برقرار است. مکاشفات در خواب و بیداری، چه سمعی و چه بصری، چه چشایی و چه بویایی و چه لمسی، همه در این چارچوب قرار می‌گیرند. این معنی شهود کلی‌ترین معنی‌ای است که به کار یک محقق یا فیزیک‌دان یا ریاضی‌دان می‌آید. معنی این شهود ذاتی است و وابسته به جهان‌بینی مشاهده‌گر نیست. برخلاف شهود و مشاهده‌ی فیزیکی که به نظر اینشتین تحت‌تأثیر تئوری‌های حاکم بر ذهن فیزیک‌دان است؛ شهود لایه‌های تجرید حقیقت به مفاهیم حجاب و نور و لایه‌های تجرید آنان مربوط می‌شود. تمام معانی شهود که در زبان علمی رایج به کار می‌رود، نقص در ذات خود دارد، اما شهود حقیقی در نوع خود کامل است و یک نوع ادراک است؛ هم‌چنان که استدلال در نوع خود کامل است و در تعریف آن نقصی ذاتی وارد نیست. شهود حقیقی، لایه‌های باطنی مشاهده‌ی بصری است. ادراک شهودی و عقلانی را لایه‌های باطنی سمع و بصر می‌دانند که غیر مستقیم هستند و در برابر، ادراک مستقیم قرار دارد که در آن ادراک عینی و یقینی، لایه‌های باطنی ادراک لمسی و بویایی و چشایی هستند.

تقابل شهود و عقل، باطن تقابل بصر و سمع است شهود به واسطه‌ی نور و عقل به واسطه‌ی ندا ادراک می‌کنند. در فلسفه‌ی متعالیه‌ی ملاصدرا تأکید بر شهود و عقل هر

دو هست. عقل از فلسفه‌ی ابن‌سینا و شهود از فلسفه‌ی ابن عربی و فلسفه‌ی سهروردی گرفته شده است. همان‌طور که نور لایه‌های تجرید دارد، ندا هم لایه‌های تجرید دارد که متفاوت با نور است. گاهی شهود پیشگام است و عقل را به دنبال خود می‌کشد و بالا می‌برد و گاهی عقل پیشگام است و شهود را بالا می‌برد. شهود و تعقل موهومی، مکاشفه و وحی نام دارند که در آن مشاهده‌کننده و تعقل‌کننده فاعل نیست. اما مشاهده و تعقل ارادی هم ممکن است همان‌طور که دیدن و شنیدن ارادی ممکن است.

بعضی از ابعاد شهود باید در آموزش در کنار اثبات مورد تأکید قرار بگیرند. ابعاد ادراک فراشناخت از این جمله‌اند. در صحنه‌ی آموزش شهود نباید بار گرانی از اسرار و ابهام را حمل کند. همه‌ی فلسفه‌های ریاضی روی بعضی از ابعاد شهود تکیه دارند که می‌توانند در آموزش مورد توجه قرار گیرند. در سبک‌های آموزشی مختلف، دو مؤلفه‌ی شهود و استدلال به روش‌های مختلفی در کنار هم قرار می‌گیرند. در نظام‌های آموزش غربی از استدلال شروع می‌کنند و به سمت شهود پیش می‌روند و در نظام‌های شرقی از شهود شروع می‌کنند و درس را به استدلال ختم می‌کنند. در یک سیستم آموزشی باید حرکت از شهود به استدلال و از استدلال به شهود هر دو موجود باشند. این‌که کدامیک از دو سیستم شهود / استدلال /شهود یا استدلال /شهود / استدلال به کار رود، بستگی به محتوای آموزش دارد. مهم است دانش‌آموزان معلم را درگیر با شهود و استدلال ببینند تا از او الگوبرداری کنند. بنابراین معلم باید مدارج شهود و استدلال را خود احراز کرده باشد.

در لایه‌ی جسد، شهودی یعنی دیدن و استدلال علیّت مکانیکی است. در نفس شهود، تفکر تصویری و استدلال تفکر منطقی است. شهود قلبی، روحانی، عقلانی، نورانی و ذاتی نیز مورد توجه است؛ هم‌چنان‌که استدلال در همه‌ی این لایه‌ها معنی دارد. شهود و تعقل موهومی توسط بعضی انکار می‌شوند. ایشان شهود و لایه‌های تجرید آن را می‌پذیرند و هم لایه‌های تجرید تعقل را. بعضی نیز شهود و تعقل ارادی را انکار می‌کنند و فقط نوع موهومی را می‌پذیرند، مانند ابن‌سینا.

فعالیت / دبستان

از دانش‌آموزان بخواهید مساحت یک شکل را هم از طریق فرمول مساحت و هم از طریق فرش کردن آن شکل با مربع‌های واحد محاسبه و حاصل را با یکدیگر مقایسه کنند. همین فعالیت را در مورد حجم مخروط، کره و استوانه و سایر اشکال هندسی می‌توان انجام داد، اما از پیاله‌ای با حجم واحد کمک گرفت. در صورتی که این اشکال مقوایی هستند، از جامدی مانند شکر درون پیاله استفاده کنید. با این روش، صحت فرمول‌های حجم و سطح مورد آزمون قرار خواهد گرفت. آیا می‌توان از روش سه‌بعدی برای بررسی صحت فرمول‌های مساحت دوبعدی کمک گرفت؟

فعالیت / راهنمایی

احکام هندسی را با آزمون و خطا توسط ترسیم، با استدلال هندسی و استدلال جبری به اثبات برسانید و روش‌های به کار برده شده را مقایسه کنید. به نظر شما کدام روش‌ها یقینی‌تر است؟ کدام روش‌ها برای تعمیم حکم مناسب‌تر است؟ کدام روش‌ها برای درک کنه ریاضی مسئله مناسب‌تر است؟ آیا روش ترسیم به پیدا کردن استدلال هندسی کمک می‌کند؟ آیا در کنار هم قرار دادن استدلال هندسی و جبری برای درک کنه ریاضی مسئله از در نظر گرفتن تک‌تک آن‌ها کارآمدتر است؟

فعالیت / دبیرستان

سعی کنید از روش احتمال هندسی کمک بگیرید و راهکاری برای اثبات احکام هندسی ارائه کنید. قوت روش خود را با روش‌های استدلال جبری و هندسی مقایسه کنید. از مکانیک نیز ایده بگیرید و روشی برای اثبات احکام هندسی پیدا کنید. صحت این روش‌ها را با هم مقایسه کنید. کدام روش یقینی‌تر است؟

فعالیت / دانشگاه

حکمی را در هندسه در نظر بگیرید که دو تعمیم مستقل دارد. مثلاً قضیه‌ی

ریمان – رخ هم به روش گروتندیک و هم به روش عطیّه قابل تعمیم اســت. تفکر در چارچوب لایه‌های تجرید نتیجه می‌دهد که باید بتواند حکمی کلی‌تر پیدا کرد که هر دوی ایــن تعمیم‌ها حالت خاص آن حکم کلی باشــند. مثــلاً تعمیمی از ریمان – رخ هســت که هم تعمیم گروتندیک و هم تعمیم عطیّه را به دســت می‌دهد. این حکم کلی را در چند مصداق متفاوت به محک آزمایش بگذارید.

۲–۱۰. مصداق‌های شهود در هندسه

اگــر بخواهیم مثال‌هایی مجردتر از شــهود ریاضی‌دانان ارائــه کنیم، می‌توانیم از تشــخیص ساختارهای ایزومرف، تشــخیص ناورداها یا عددمند کردن مسئله‌ی مورد مطالعه نام ببریم. شــهود برای فیزیک‌دانان مصداق‌هایی مانند بیرون‌کشی و تشخیص ســاختارهای ریاضی پشــت صحنــه‌ی فرایندهای طبیعی دارد. از شــهود مشــترک ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان می‌توان تشــخیص و جداســازی ســاختارهای پنهان در مسئله را نام برد. تشخیص وهم کاذبه و خالص کردن شهود، منجر به شهودی می‌شود که به زبان اســتدلال قابل ترجمه اســت. هر استدلالی هم شهودپذیر نیست. استدلال باید چنان باشد که کُنه ساختار موضوع مورد مطالعه را آشکار کند. این نشان می‌دهد که هر شهود و استدلالی با لایه‌های تجرید تطابق ندارد. شهود خالص و برهان سلیم است که باطن معنوی مسائل مورد بحث را آشکار می‌کند.

در عمل هم ریاضی‌دانان این‌طور تجربه می‌کنند که هر اســتدلالی راهگشــا به فهم یک حکم نیست. بسیاری از استدلال‌ها هسته‌ی اصلی حکم را پنهان می‌کنند. به همین دلیل بســیار پیش می‌آید که بازنویســی یک استدلال با فرمول‌بندی جدید یا تنظیم آن با نظم جدید، گره‌ی درک یک حکم را باز کند و زمینه را برای تعمیم و شــناخت کُنه حکم فراهم آورد. هماهنگی استدلال با شهود یکی از محک‌های استدلال راهنماست. استدلال کور شهودپذیر نیست. در تاریخ ریاضیات، مثال‌هایی هست که بازسازی یک اثبات باعث شــکوفایی یک شــاخه‌ی اصلی ریاضیات شده است. یکی از محک‌های اســتدلال راهنما، زیبایی و ســادگی آن است. برای احکامی زیبا که استدلال زیبا برای

آن‌ها پیدا نشده، پیوسته تلاش می‌شود تا استدلالی که زیبایی آن هماهنگ با آن حکم باشد، به دست بیاید.

در این جا منظور از شهود، مکاشفات و مشاهدات علمی است که در توسعه‌ی علوم تجربی و ریاضیات نقش کلیدی دارند. در تجلیات نفسانی مشاهدات یا در مشاهدات نفسانی که مربوط به وجود ذهنی ریاضیات می‌شود، خطا راه دارد، لذا عین حقیقت نیست. بنابراین تا جایی که ممکن است، باید در رده‌بندی مشاهدات از بررسی و مقایسه‌ی مشاهدات نفسانی پرهیز کرد. اما عمده‌ی مشاهدات در ریاضیات و فیزیک، مربوط به وجود ذهنی هستند. اگر هرگز نخواهیم به حدسیات در مورد باطن این مشاهدات بسنده کنیم، باید خود را به گزارش‌های مربوط به لایه‌های مجردتر شهود محدود کنیم.

تشخیص الگو یا ساختاری که قبلاً کشف و شناخته شده، نیاز به احاطه داشتن به دو موضوع شناخت و مقایسه‌ی آن‌ها دارد، لذا یک توانایی روحانی است. البته این در نفس تجلی پیدا می‌کند، لذا در وجود ذهنی نیز این توانایی قابل مشاهده است. در این شهود، موضوعات موردمقایسه، در یک لایه‌ی تجرید یکسان قرار دارند. بیرون کشیدن و تشخیص یک الگو یا ساختار از یک موضوع شهود، یک توانایی عقلانی است و از بازشناسی الگوها مجردتر شده است. این شهود برخلاف مثال قبل، در دو لایه‌ی تجرید مختلف موضوعات شهود را بررسی می‌کند. این‌طور نیست که همیشه یک لایه‌ی تجرید شاهد و لایه‌ی دیگر هستی مشهود باشد. شاهد می‌تواند هم‌زمان به چندین لایه‌ی تجرید نظر کند و ارتباط آن‌ها را بشناسد. برای مثال، فیزیک‌دانان مجردات ریاضی را که مُثُلی هستند و وجود ذهنی دارند، با پدیده‌های طبیعی هم‌زمان مشاهده می‌کنند و تطبیق می‌دهند.

در کشف تشابه‌ها دو موضوع از یک لایه‌ی تجرید مقایسه می‌شوند، سپس الگو و ساختارهایی در هرکدام تجرید می‌شوند، به طوری که این ساختارها با هم منطبق باشند. در این جا هم توانایی و مهارت عقلانی تجرید ساختارها و هم توانایی روحانی مقایسه‌ی ساختارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. پیدا کردن دیکشنری و لغت‌نامه بین

شاخه‌های ریاضی، از این نوع شهود بهره می‌گیرند. در این نوع شهود نیز چندلایه‌ی تجرید مختلف موضوع شهود هستند. حتّی ممکن است دو موضوع شهود از لایه‌های تجرید مختلفی باشند، اما بتوان الگوها و ساختارهایی از آن‌ها تجرید کرد که بر هم منطبق باشند. این الگوها و ساختارها به‌ناچار باید از هر دو لایه‌های تجرید مشهود، مجردتر باشند. این‌کار به توانایی عقلانی بسیار بالایی نیازمند است؛ چرا که از یک موضوع شهود، ساختاری را تجرید می‌کند که چندین لایه از موضوع شهود مجردتر است.

شکستن تقارن نیز یک مهارت شهودی است. تقارن را تنها می‌توان با شکستن آن کشف کرد. تقارن ممکن است در هر یک از لایه‌های تجرید کشف و مشاهده شود. در واقع، تقارن نوعی خود مشابهت است. پس شهود آن پیچیده‌تر از شهود کشف تشابه‌هاست. در اکثر مثال‌های واقعی، تقارن در همان لایه‌ی تجرید وجود ندارد، بلکه در ساختارها و الگوهای تجریدشده، تقارن دیده می‌شود. مثل تقارن در گل‌ها که تقارن دقیق ریاضی نیست. شهود تطابق دو چیز یک توانایی روحانی است، اما شهود تطابق یک ساختار با خودش به درک درونی آن ساختار مربوط می‌شود، نه به احاطه هم‌زمان به چندچیز. بنابراین درک تقارن یک توانایی عقلانی است.

تعمیم و تخصیص احکام ریاضی، بین لایه‌های تجرید وجود ذهنی ریاضی ارتباط برقرار می‌کند. اما این تعمیم و تخصیص وجود ذهنی، تجلی و تصویر نفسانی چه حقایقی در لایه‌های هستی حقیقی ریاضی است؟ تجرید و تجلی همان ارتباط نمادین از پایین به بالا و از بالا به پایین، یعنی عروج و تجلی هستند که در نفس و وجود ذهنی به صورت تعمیم و تخصیص دیده می‌شوند. تجرید یک توانایی عقلانی است و تجلی یک توانایی قلبی است که هر دو در عوالمی مجردتر از نفس معنی دارند. شهود این‌که حکمی حالت خاص یک حکم دیگر است یا این‌که شهودی خاص تجلی شهود دیگری است، به شهود چندلایه‌ی تجرید و درک شهودی ارتباط بین این لایه‌ها مربوط می‌شود. بنابراین موضوع شهود تنها محتویات لایه‌های تجرید مختلف نیستند، بلکه ارتباطات بین این لایه‌های تجرید هم می‌توانند موضوع شهود قرار بگیرند.

شهود تجلی بین دو لایه‌ی تجرید چیزی مانند انطباق دو تصویر کپی برداشته شده از یک اصل است که با برهم نهی اجزای متناظر، به نظر می‌رسد که هر دو از روی شیء مشترکی کپی‌برداری شده‌اند. البته در شهود تجلی، این کپی‌ها که منطبق می‌شوند، در دو لایه‌ی تجرید مختلف هستند.

بدون شک مصداق‌های دیگری از شهود هندسه‌ی هستی ریاضیات قابل طرح است و در مورد این لیست که ارائه شد، هیچ‌گونه ادعای جامع و مانع بودن نداریم. برای نویسنده مقدور نیست فهرست کاملی از این مصداق‌ها ارائه دهد، اما سعی خواهیم کرد تا به نوعی این مصداق‌های شهود را رده‌بندی کنیم.

فعالیت / دبستان ....

از چند شکل ساده شروع کنید و از کنار هم قرار دادن آن‌ها مانند نقاشی اشکالی بسازید که در زندگی روزمره معنی دارند. حال با چند شکل ساده‌ی دیگر شروع کنید و همین کار را انجام دهید. در مرحله‌ی بعدی از روی این اشکال کپی‌برداری کنید؛ طوری که مرزهای بین اشکال ساده قابل تشخیص نباشند. از دوستان خود بخواهید تشخیص دهند کدام اشکال از اجزای یکسانی درست شده‌اند و کدام اشکال از اجزای متفاوتی به دست می‌آیند.

فعالیت/ راهنمایی ....

در اطراف خود بگردید و مصداق‌های کاربرد قضیه‌ی تالس را بیابید. میز اتو، قیچی و چندین ابزار که روزمره با آن‌ها سروکار داریم، برپایه‌ی همین قضیه ساخته شده‌اند. قضیه‌ی تالس را با قانون اهرم ارشمیدس ارتباط دهید. آیا قضیه‌ی تالس با سایر قوانین فیزیکی که می‌شناسید، ارتباط دارد؟ قضیه‌ی تالس براساس مفهوم تشابه بنا شده است. تشابه در چه قوانین فیزیکی که می‌شناسید، وارد می‌شود؟

فعالیت /دبیرستان

پیش از حل یک مسئله‌ی هندسی، حدس بزنید که احتمالاً در حل مسئله از چه قضایایی استفاده خواهید کرد. خطوط اضافه‌ی احتمالی را که به کار خواهید برد نیز حدس بزنید. حال مسئله را حل کنید و با حدس‌های خود مقایسه کنید. حال سعی کنید از روی سایر حدس‌هایی که زده‌اید، اثباتی دیگر برای آن حکم هندسی ارائه دهید. به نظر شما چرا در اثبات احکام هندسی تنوع روش‌های استدلال ممکن است؟ چرا همه‌ی روش‌های استدلال به یک نتیجه می‌رسند و با هم تناقض ندارند؟

فعالیت / دانشگاه

سعی کنید مسائل ساده‌ی مکانیک کلاسیک را در چارچوب مکانیک نسبیتی حل و پاسخ را مقایسه کنید. در هر مورد بررسی کنید که چرا جواب نسبیتی در سرعت‌های پایین به جواب کلاسیک میل می‌کند. حال سعی کنید احکام کلاسیک در علم هندسه را به زبان فضا -زمان ترجمه کنید. در هر مورد چک کنید که با میل کردن سرعت نور به سمت بی‌نهایت، احکام هندسه‌ی نسبیتی به احکام هندسه‌ی کلاسیک میل خواهند کرد.

۳-۱۰. انوار شهود

کمال شهود تجلیات این است که همه‌ی تجلیات یک حقیقت در لایه‌های تجرید مختلف برهم و بر حقیقت منطبق شوند. در این‌جا شهود همه‌ی لایه‌های تجرید و شهود همه انواع تجلیات که بین لایه‌های تجرید برقرارند، لازم می‌شود که کامل‌ترین نوع شهود است. این انواع شهود، همه هم‌آوا و هم‌آهنگ باید انجام بگیرد که این احاطه، به ابعاد مختلف لایه‌های تجرید هستی یک توانایی ذاتی یا هویتی است و فقط برای انسان در بین همه‌ی مخلوقات ممکن است. ارتباط بین مشهودات تنها رابطه‌ی بین تجلیات نیست که هنگام شهود واقع می‌شود. شاهد هم لایه‌های تجرید مختلفی دارد. اگر دو لایه‌ی تجرید در شاهد مشاهداتی داشته باشند، بین این مشاهدات هم رابطه‌ی تجلی برقرار است؛ یعنی یک شهود می‌تواند تجلی شهود دیگری باشد. حتّی

ممکن است هم شاهد و هم مشهود، تجلیات شاهد و مشهود مجردتری باشند. بنابراین شاهد دارای لایه‌های تجرید مختلف و مشهود دارای لایه‌های تجرید مختلف است و شهود بین همه‌ی این لایه‌ها ممکن است اتفاق بیفتد.

وقتی شاهد به وحدت مجاری شناخت برسد، لایه‌های تجرید هستی شاهد بر هم منطبق می‌شوند و همین‌طور انواع مختلف شهود بر هم منطبق می‌شوند و چون عالم موحد، حقیقت‌بین است، لایه‌های تجرید هستی مشهود نیز بر هم و بر حقیقت منطبق می‌شوند. پس در ادراک دانشمند موحد، شاهد یک چیز است و مشهود یک چیز. دانشمند موحد از این ساختار توحیدی ادراکات کمک می‌گیرد تا حقایق را بهتر بشناسد و توسعه‌ی علوم به واسطه‌ی این کمک ادراکی برای او سهل‌تر صورت می‌پذیرد.

مشهود به واسطه‌ی نور ممکن است. همان‌طور که دیدن چشم سر به واسطه‌ی نور است. در هر لایه‌ی تجرید شهود، شاهد، مشهود را به نوری می‌بیند. درجات تجرید این نورها خود متفاوت‌اند. لایه‌های تجرید نور با لایه‌های تجرید هستی انسان و جهان خلقت منطبق‌اند. هر مشهودی از جنس نوری است که به واسطه‌ی آن مشهود می‌شود. این نور باید مجردتر از لایه‌ی تجرید شهودکننده و هم موضوع شهود باشد. بهتر بگوییم، نور باید لطیف‌تر از شاهد و مشهود باشد.

همان‌طور که نور ابزار شهود است، لذا ابزار سمع و بواطن سمع که استدلال است، می‌باشد. همان‌طور که شهود می‌تواند ارتباطات تجرید و تجلی را درک کند، استدلال نیز این توانایی را دارد. استدلال در یک لایه‌ی تجرید می‌تواند تجلی استدلال در لایه‌ی تجرید بالاتری باشد. فرق بین شهود و استدلال یکی این است که در شهود توجه به مشهود قبل از شهود می‌آید، اما در استدلال نتیجه‌ی استدلال ممکن است بعد از اتمام استدلال آشکار شود. بنابراین می‌توان گفت نتیجه‌ی استدلال غیرمنتظره‌تر از نتایج شهود است. شباهت شهود و استدلال، اتحاد بین شاهد و شهود است که بر اتحاد بین عاقل و معقول انطباق دارد. برتری مشاهدات در برابر استدلال‌ها این است که ابزاری دوربردتر و سریع‌الوصول‌تر به حقیقت است، اما استدلال کندتر و برای

ادراک ناشناخته‌ها کم‌ظرفیت‌تر است. با این حال، شهود و استدلال در درک حقیقت مکمل یکدیگرند، هم‌چون سمع و بصر که یکدیگر را کامل می‌کنند.

در لایه‌هـای تجرید، جسـد، نفس، قلب، روح، عقل، نـور و هویت تجلیات انوار توحیـدی هم ظهـور دارند. لایه‌های تجرید نور و کثرت انـوار در طی این تجلیات، همان چیزی اسـت که به آن مجاری شـناخت گفتیم. لایه‌های تجرید ندا نیز با همان مجاری شـناخت قابل انطباق هسـتند. همه‌ی تجلیات انوار در اختیار هر شـاهدی نیسـتند. بسـیاری از تجلیات در لایه‌های تجرید بالا در ورای حجاب‌هایی هستند که از دیدرس شـاهد به‌دورند. فرق این حجاب‌هاسـت که مشاهدات مجردتر را ممکن می‌سـازد. فرق حجاب‌های حقیقت به واسـطه‌ی تزکیه ممکن است. پس هر شهودی نتیجه‌ی خرق حجابی اسـت و آن در اثر تزکیه‌ی خاصی برای شـاهد ممکن است. از این لحاظ اسـت که شـهود آموزش دادنی اسـت. در واقع این تزکیه است که آموزش دادنی است و شهود بواطن حقیقت نتیجه‌ی آن است.

فعالیت / دبستان ....

از دانش‌آموزان بخواهید با چشـم‌های بسـته اشکال هندسی ساده را کنار هم قرار دهند و اشکالی شبیه اشیای روزمره بسازند. از آن‌ها بخواهید این اشکال را در اختیار دوستانشـان قرار دهند تا آنان با چشـم بسته حدس بزنند که دوستانشان چه شیئی را موردنظر داشـته‌اند. در مرحله‌ی بعدی یک کپی از این اشـکال را که خطوط مرزی در آن‌ها معلوم نیستند، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و بخواهید با چشم بسته اجزای آن را تعیین کنند.

فعالیت / راهنمایی ....

از دانش‌آموزان بخواهید شکلی دقیقاً دو برابر شکل داده شده رسم کنند یا حجمی دقیقاً دو برابر حجم داده شـده بسـازند. برای این کار نیاز به الگوریتم‌های عملی یا ابزارهایی دارند که مخصوص این کار تعبیه شـده باشـد. در سـاختن این وسائل باید

ایده‌ی تشابه به کار برده شود.

فعالیت /دبیرستان..

اشکال هندسی مربوط به هر مسئله‌ی هندسی در چند مرحله رسم می‌شوند؛ چرا که رسم بعضی اجزا نیاز به رسم اجزایی دارند که در مراحل پیشین رسم شده است. تعداد این طبقات بستگی به پیچیدگی شکل موردنظر دارد. در تعداد زیادی از مسائل تعداد طبقات را مشخص و تحقیق کنید که آیا با پیچیدگی مسئله رابطه‌ی مستقیم دارد یا خیر؟

فعالیت / دانشگاه..

اصل موضوع توازی در سه هندسه‌ی اقلیدسی، کروی و هذلولوی موجب فرمول‌بندی علم مثلثات در چارچوب این سه هندسه می‌شود. اما فرمول‌های مثلثاتی حل مثلث در این سه هندسه، بسیار به هم شبیه‌اند. بنابراین اصل موضوع توازی هم‌چون نوری است که علم مثلثات پنهان در اصول موضوعه‌ی دیگر را آشکار می‌کند. مثال‌هایی شبیه این در هندسه‌ی اصل موضوعه‌ای به دست دهید.

۴-۱۰. شهود و تزکیه

دانشمند موحد مسیر ادراکات خود را با تزکیه و خرق حجاب‌هایی که در برابر حقیقت قرار دارند، طی می‌کند. هر حجابی که کنار می‌رود، عمق مجردتری از حقایق در دسترس ادراک او قرار می‌گیرد و لایه‌های تجرید نور که با کنار رفتن این حجاب‌ها در اختیار او قرار می‌گیرند، منجر به شهود مشهودات مجردتری خواهند شد. هر کدام از حجاب‌ها با تزکیه‌ی متناسب با آن حجاب کنار می‌رود و هر چنین تزکیه‌ای در کنار عبادتی است که در همان لایه‌ی تجرید انجام می‌شود. جز حجاب‌های نورانی، حجاب‌های ظلمانی نیز وجود دارند که دانشمند در مسیر کمال خود پیش از کنار زدن حجاب‌های نورانی باید آن‌ها را خرق کند. این حجاب‌ها به ساختار حقیقت مربوط

نمی‌شوند، بلکه به ساختارشناختی خود دانشمند و خلاص شدن از جنس این ساختار در شناخت حقیقت مربوط است. خرق حجاب‌های ظلمانی هم با تزکیه انجام می‌شود که آن پاکسازی شناخت از ناخالصی‌هاست. حجاب‌های نورانی لطیف و معنوی و عالم بالایی است و حجاب‌های ظلمانی کثیف و دنیوی و عالم پایینی است. خرق حجب نورانی عروج و کمال است، اما خرق حجب ظلمانی پاره کردن زنجیرهای دنیوی است و خلاصی از سنگینی کثافاتی است که مانع عروج است تا حجاب‌های ظلمانی خرق نشود، حجاب‌های نورانی دست‌نیافتنی هستند.

ساختار منطقی ذهن علمی دانشمندان در زبان علمی ایشان متجلی است؛ همان‌طور که کل نظام منطقی ادراک آنان در ساختار زبانشان تجلی کرده است و هم ساختارهای منطقی یک جامعه یا تمدن در زبان آن تجلی پیدا می‌کند. در حل مسائل علمی و در شناخت و بررسی حقیقت و بیان شناخته‌ها در خیلی مواضع ممکن است نظام منطقی و هم زبان منطبق با آن بر ساختار حقیقت منطبق باشد و در خیلی مواضع هم ممکن است نظام منطقی خاصی در بررسی ابعاد خاصی از حقیقت ضعف داشته باشد و این در زبان هم تجلی کند. نظام منطقی ذهن دانشمند، حجاب درک حقیقت است و دانشمند باید برای درک حقیقت، آن‌طور که هست، از این حجاب خلاص شود تا اسیر آن نباشد. خرق این حجاب منجر به ادراکی می‌شود که باطن فراشناخت است. در فراشناخت، دانشمند نظام تفکر خود را از بیرون نظاره می‌کند و مسیر رودخانه‌ی تفکر خود را از بیرون کنترل می‌کند. با خرق حجاب نظام منطقی، دانشمند ساختار منطقی ذهن خود را از بیرون کنترل می‌کند تا آن را مناسب ابعاد مختلف حقیقت شکل دهد و این در ساختار زبانی دانشمند هم تجلی می‌کند. کسی که این حجاب را خرق کرده، همان‌طور که در بازسازی نظام منطقی ادراک خلاق است، در زبان و ساختارهای زبانی هم خلاق است.

وحدت مجاری شناخت، اتحاد و انطباق ادراکات آن‌هاست، نه این‌که به هم بپیوندند و یکی شوند و لایه‌های تجرید هستی از بین بروند. کثرت مجاری شناخت، عدم تطابق این ادراکات است. این عدم تطابق، هم ممکن است بین لایه‌های تجرید

مختلف باشد و هم ممکن است عدم تطابق بین مجاری مختلف شناخت در یک لایه‌ی تجرید خاص باشد. تشخیص این حجاب تنها به مدد دانشمند موحد که وحدت ساختارشناختی دارد، ممکن است. چه دانشمند موحد حقیقت را طوری می‌بیند که متفاوت با مشاهدات در نتیجه‌ی کثرت ساختارشناختی است. برای رسیدن به وحدت ساختارشناختی، دانشمند باید خود را از شرک پاک و تزکیه کند. وقتی که ناخالصی شرک از ساختارهای شناختی پاک شود، ذات هماهنگ این ساختارها وحدت آن‌ها را ایجاب می‌کند. برای ردیابی شرک نیز دانشمند موحد مدد رسان است. چون سره در کنار ناسره قرار گیرد، ناخالصی‌ها آشکار شوند و خود را نشان دهند. ساختار شناختی دانشمند موحد چنان زیباست که در کنار او انسان از شرک خود بیزار می‌شود.

پیشینه‌ی برخورد با یک مفهوم نیز حجاب است. نقشه‌های مفهومی تشکیل شده در ذهن دانشمند که از مسائلی که با آن‌ها درگیر بوده است آمده، هنگام مواجهه با مسئله‌ای جدید، یک به یک با نقشه‌ی مفهومی مسئله مقایسه می‌شوند تا در شناخت حقایق جدید از آن‌ها کمک گرفته شود. دانشمند از این لحاظ اسیر پیشینه‌ی برخوردش با یک مفهوم و اسیر نقشه‌های مفهومی تشکیل شده در ذهن اوست. خرق این حجاب به این معنی نیست که دانشمند نقشه‌های مفهومی تأثیرگذار را کنترل کند، بلکه به این معنی است که در خلق مفاهیم برای درک حقیقت چنان خلاق باشد که از اسارت ساختارهای مفهومی قدیمی خود نجات پیدا کند. تزکیه‌ی لازم برای خلاقیت مفهومی، اعتماد به نعمت‌های شناختی پروردگار است. دانشمند باید خود را از ترس مقام علمی دانشمندان و ترس از ضعف خود در برابر آنان پاک کند. از علامت‌های خرق این حجاب، آزاداندیشی و دوری از تعصب است.

هر دانشمندی در حمله به یک مسئله‌ی شناختی، شیوه‌های خاص خود را دنبال می‌کند که شخصیت علمی او را تشکیل می‌دهند. این شخصیت علمی تابع مهارت‌های فردی او در تحقیق است. در بسیاری مواضع، ممکن است این شخصیت علمی برای درک ابعادی از حقیقت تناسب داشته باشد ولی در بسیاری مواضع این شیوه‌های خاص، متناسب با ساختار حقیقت نیست. به جای آن‌که دانشمند به دنبال حقایقی

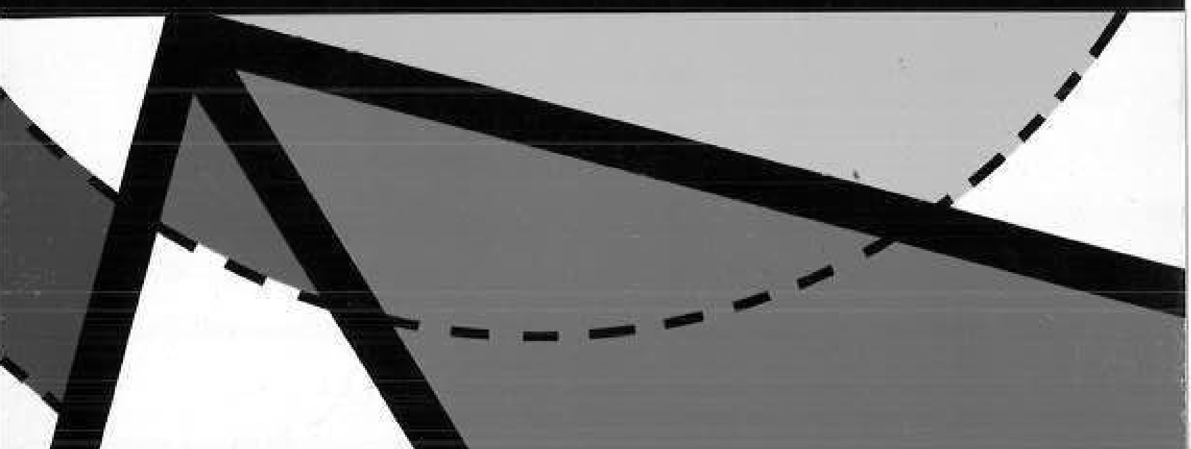
برود که با شخصیت علمی او تطابق داشته باشد و بتواند به آن‌ها فکر کند، باید از حجاب شخصیت علمی بگذرد تا بتواند هر حقیقتی را مورد مطالعه قرار دهد. تنها در این صورت است که می‌توان او را دانشمند خطاب کرد، وگرنه یک متخصص بیش نیست. برای این‌که این حجاب شناخته شود، هم‌نشینی با دانشمند موحد در تحقیق لازم است تا عدم اسارت او در روش‌های خاص حمله به مسئله، محدودیت توانایی انسان را آشکار کند. برای خرق حجاب شخصیت علمی و عدم اسارت دانشمند در مهارت‌های فردی خود در تحقیق، لازم است بتواند در بستر حقیقت مورد مطالعه کسب مهارت کند، لذا باید در مرز توانایی‌های خود تحقیق کند تا همواره با کسب مهارت‌های جدید مواجه باشد و این خصلت را در خود تازه نگه‌دارد. این ممکن نمی‌شود مگر با تزکیه از آن‌چه می‌داند و در آن مهارت دارد. دانشمندی که علم خود را به چیزی نمی‌گیرد، همیشه برای یادگیری آماده است و سعی نمی‌کند با همان که می‌داند، همه‌ی مسائل را حل کند.

نظام ارزشیابی دانشمند از صحت یافته‌های علمی خود یا از اهمیت تحقیقات علمی همکارانش و نقش خاصی که این تحقیقات می‌توانند در توسعه‌ی علم ایفا کنند، یا تخمین او از مشکلات خاصی که در شناخت حقیقت خاصی ممکن است در سر راه قرار گیرد، ساختار علمی تحقیق را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد. حتّی به نوعی جهان‌بینی علمی دانشمند تحت‌تأثیر و اسیر همین نظام‌های ارزشیابی است. دانشمند برای کمال خود همواره سعی می‌کند برطبق همین نظام‌های ارزشیابی پیشرفت کند، اما این نظام‌ها تمام ابعاد کمال را دربرندارند. خرق حجاب این نظام‌های ارزشیابی، منجر به این مورد می‌شود که دانشمند ادراکات خود را با حقیقت بسنجد و با حقیقت ارزشیابی کند. برای خرق این حجاب، دانشمند باید خود را از قضاوت و ساختارهای درونی که برای قضاوت تعبیه شده، پاک کند. دانشمندی که فراتر از نظام‌های ارزشیابی خود کمال می‌یابد، اسیر ساختارهای درونی نیست و می‌تواند متناسب با حقیقت و برای ادراک آن کمال پیدا کند. دانشمندی که این حجاب را خرق کرده، آماده‌ی تأثیرپذیری از بیرون برای کمال یافتن است.

محیط علمی که دانشـــمند در آن زندگی می‌کند، تا مرحله‌ای از رشـــد، کمال او را حمایت و هدایت می‌کند، اما از جایی به بعد دانشمند را از کمالاتی که فراتر از ابعاد کمال محیط علمی اســـت، بازمی‌دارد. دانشـــمندان بزرگ مســـتقل از محیط علمی یاد می‌گیرند و فکر می‌کنند. خرج حجاب محیط علمی منجر به یک دانشـــمند می‌شود که در جهت رودخانه‌ی افکار دانشمندان عصر خود شنا نمی‌کند. برای خرق این حجاب، تزکیه از عادات و اســـتانداردهای محیط علمی لازم اســـت. دانشمند باید برای رضای خدا کار کند و ارزشیابی جامعه‌ی علمی برای او اهمیتی نداشته باشد.

آن‌چه گفتیم تنها اشاره به بعضی حجب ظلمانی حقیقت بود. اشاره به حجاب‌های نورانـــی حقیقـــت و چگونگی خرق آن‌ها فرصتی فراخ‌تر می‌طلبد که در ســـعه‌ی این کتاب نمی‌گنجد. امیدواریم اهدافی که در تألیف این کتاب موردنظر داشته‌ایم، به یاری خداوند برآورده شود. پس به او توکل می‌کنیم که او ولیّ توفیق است.

۸۵ و
ناشر
برگزیده سالهای
۸۴،۸۳،۷۹،۷۵،۷۳



این مجموعه با هدف توسعه و بسط دانش پایه‌ی ریاضیِ مورد نیازِ معلمان دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی تهیه شده است. ویژگی مهم این مجموعه، موضوعی بودن مطالب هر جلد است. به عبارت دیگر، هر کتاب از این مجموعه فقط به یک موضوع ریاضی می‌پردازد، فارغ از آن که این مفاهیم و دروس درحال حاضر درچه پایه‌ای تدریس می‌شوند. برای مثال، موضوع «عدد و عددنویسی» عنوان یکی از کتاب‌های این مجموعه است. این کتاب، نگاه جامعی به این موضوع خواهد داشت، اگر چه مفاهیم مربوط به آن، سال های اول ابتدایی تا پایان دوره ی راهنمایی را شامل می شود.

9 789640 800195

1975001023000
۲۳۰۰۰ ریال - کد ۱۹۷۵/۱