براؤر و توپولوژی•

دیرک وان دالن*

ترجمهٔ ابوالقاسم لاله

پیش از ورود براؤر به عرصهٔ ریاضیات، هلند چند ریاضیدان برجسته پرورانده بود که شاخص‌ترین آنها کریستیان هویگنس، سیمون استوین و توماس یان استیلتیس بودند. فقط ریاضیدان اخیر به قرن نوزدهم تعلق داشت، اما وی در هلند به ریاضیات نپرداخت. درواقع، سطح ریاضیات هلند طی قرنهای هجدهم و نوزدهم بسیار پایینتر از کشورهای همسایهٔ آن بود؛ در مورد علوم دقیق دیگر نیز وضع به همین منوال بود، اما در انتهای قرن نوزدهم آن شاخه‌های علم با تحقیقات بین‌المللی همگام شدند. افرادی چون واندر وال[1]، کامرلینگ اونز[2]، لورنتس[3]، فان هوف[4]، هوگو دوریس[5] و دیگران در رشتهٔ خودشان در بالاترین سطح بودند.

براؤر در ۲۷ فوریهٔ ۱۸۸۱ در اورسخی[6] (که اکنون بخشی از روتردام است) به دنیا آمد، پدرش که مدیر مدرسه بود شش ماه بعد شغلی در مدمبلیک[7] پذیرفت و خانوادهٔ براؤر یازده سال بعد را در آنجا گذراندند و سپس راهی هارلم شدند که پدر در آنجا مدیر یک مدرسه متوسط شد. دو برادر دیگر براؤر، لکس و آلدرت در مدمبلیک متولد شدند.

دوران دبیرستان براؤر بدون هیچ مشکلی سپری شد. وی در سال ۱۸۹۰ در سن نه سالگی وارد دبیرستان (مدرسهٔ هوخره برگر[8]) شد که این امر تا آن زمان سابقه نداشت.

در هارلم دوباره به مدرسهٔ هوخره برگر رفت؛ در سال ۱۸۹۴ وارد گیمنازیوم (جانشین مدرسهٔ قدیم لاتین) شد و در عین حال خود را برای امتحانات نهایی مدرسهٔ هوخره برگر آماده می‌ساخت. در سال ۱۸۹۵ موفق به دریافت مدرک مدرسهٔ هوخره برگر شد و دو سال بعد (دوران سه سالهٔ مدرسه را در دو سال گذراند) از گیمنازیوم با دو نوع دیپلم فارغ‌التحصیل

1. Van der Waals 2. Kamerlingh Onnes 3. Lorentz 4. van't Hoff 5. Hugo de Vries 6. Overschie 7. Medemblik 8. Hogere Burger School

شد. وی در تمام مدت تحصیل شاگرد اول بود، و تنها نقطهٔ ضعفش درس هنر بود.

مدرک گیمنازیوم حق ادامهٔ تحصیل در دانشگاه را به وی داد. دانشگاه منتخب او دانشگاه شهری آمستردام بود، که فیزیک آن زیر نظر واندر وال بود. در ریاضیات دو استاد تدریس می‌کردند: دیدریک یوهانس کورتوخ[1] و وان پش[2] که فرد دوم کارهای علمی مهمی نکرده است؛ اما کورتوخ ریاضیدان کاربردی بسیار برجسته‌ای بود. او اولین دکتر دانشگاه جوان آمستردام بود، و درجهٔ دکتریش را از واندر وال دریافت کرده بود. سه سال بعد از دریافت دکتری، استاد دانشگاه آمستردام شد. امروزه عمدتاً شهرت وی به‌خاطر معادلهٔ کورتوخ-دوریس است، اما درواقع وی در بخشهای بسیار متفاوتی از ریاضیات، از ترمودینامیک، تا فلسفهٔ ریاضیات، فعال بود. مبنای ریاضی نظریه‌های فیزیکی واندر وال تا حد زیادی کار کورتوخ بود (مثلاً بررسی رویهٔ واندر وال، تا زدن رویه‌ها)، و به‌علاوه چاپ مجموعهٔ آثار هویگنس نیز عمدتاً کار او بوده است.

اساساً براؤر ریاضیات را از کورتوخ آموخت؛ اما دومین شخصیتی که در همان سالهای اول روی وی تأثیری عمیق گذاشت، یک ریاضیدان کم و بیش خود ساخته به اسم خریت مانوری[3] بود.

براؤر دورهٔ دانشکده را چندان سریع طی نکرد؛ سه سال و نیم طول کشید تا امتحان میان‌دوره‌ای[4] را بگذرند، که می‌شد بعد از دو سال گذارند. در ۱۶ ژوئن ۱۹۰۴ امتحان نهایی، یعنی امتحان دکتری را گذارند. جمعاً هفت سال طول کشید تا به درجهٔ دکتری نائل شد (که با دورهٔ کارشناسی ارشد فعلی قابل مقایسه است) و این مسلماً برای چنان دانشجوی درخشانی افتخارآمیز نبود، براؤر واقعاً درخشان بود و هر دو امتحان را با درجهٔ عالی گذارند. باید

1. Diederik Johannes Korteweg 2. A. J. Van Pesch 3. Gerrit Mannoury 4. candidaatsexamen

متذکر شد که وی قبل از امتحان نهایی سه مقالهٔ تحقیقاتی به‌چاپ رسانده بود: [Br 04a]، [Br 04b]، [Br 04c].

مقاله‌های وی در ارتباط با تجزیهٔ دورانهای فضای اقلیدسی چهار بعدی است. به زبان امروزی براؤر نشان داد که $SO_4 \cong SU_2 \times SU_2 / \pm(1,1)$. اثبات وی کاملاً هندسی بود؛ در مقالهٔ سوم یک استنتاج جبری اضافه کرد. مقاله تا حدی موجب شناخته شدن وی شد، اما در ضمن او را گرفتار اولین منازعهٔ خود بر سر تقدم کرد. یانکه[1] استاد برلینی ادعا کرد که وی زودتر به نتیجهٔ اصلی مقاله رسیده بوده است. براؤر که از مقالهٔ یانکه مطلع نبود، نتیجه او را تحلیل کرد و نشان داد که به‌غیر از مشابهتهایی در صورتبندی، زمینه‌ای برای ادعای یانکه وجود ندارد.

دلیل اصلی طول کشیدن دوران تحصیل براؤر ضعف جسمانی وی بود. در دوران دانشجویی و طی چند سال بعد، دچار حملات عصبی می‌شد و از ضعف عمومی در رنج بود.

شرح دوران تحصیل براؤر را در مکاتبات وی با شاعر معاصرش کارل آداما وان اسخلتما می‌توان خواند؛ مراجعه کنید به [Da 84].

خدمت سربازی موجب وقفه در نیمهٔ دوم تحصیل وی شد. هرچند براؤر با تمرینهای بدنی بیگانه نبود ــ وی به پیاده‌روی، فوتبال و شنا بسیار علاقه داشت و در سال ۱۸۹۹ پیاده سفری به ایتالیا کرد ــ اما نمی‌توانست خود را با محیط نظامی تطبیق دهد. سربازان دیگر آزارش می‌دادند و مافوقهایش او را مسخره می‌کردند، او شدیدترین حملات عصبی را در این دوره متحمل شد.

براؤر هم به ریاضیات و هم به فلسفه علاقه‌مند بود؛ فلسفه برای او تا حدی جنبهٔ سرگرمی داشت و مطالعهٔ رسمی دربارهٔ آن نداشت. عشق واقعی به ریاضیات را مانوری که فردی همه‌فن حریف بود، به‌شدت در او برانگیخت. خریت مانوری، که پدرش ناخدای کشتی بازرگانی بود، از طریق شغل معلمی به ریاضیات روی آورده بود. وی دبیرستان را در سال ۱۸۸۵ تمام کرده و سه ماه بعد گواهینامهٔ معلمی را دریافت کرده بود. در بسیاری از مدرسه‌ها تدریس کرد، تا اینکه در سال ۱۹۱۸ در دانشگاه به مرتبهٔ استادی رسید. هر چند هرگز به دریافت درجهٔ دانشگاهی نایل نشد، اما چند مقالهٔ ارزشمند ریاضی قبل از شروع فعالیت ریاضی براؤر به‌چاپ رساند. در سال ۱۸۹۸ مقاله‌ای[2] نوشت، که اولین مقاله به‌زبان هلندی در مبحث جدید توپولوژی بود.

همچنین مانوری اولین کسی بود که منطق نمادی پئانو را در هلند معرفی کرد. علی‌رغم تلاشهای کورتوخ، که برای مانوری تدریس خصوصی در روزهای یکشنبه گذاشته بود و به او اجازهٔ استفادهٔ از کتابخانهٔ شخصیش را داده بود (تا آن زمان هیچ کتابخانهٔ ریاضی در دانشگاه آمستردام وجود نداشت)، مانوری مجال تحصیل برای دریافت درجهٔ رسمی دانشگاهی نیافت. اما استعداد ریاضی وی به‌خوبی شناخته شده بود، به‌نحوی که در سال ۱۹۰۳ دانشگاه آمستردام وی را به عنوان privaate docent[3] پذیرفت. روش اصیل و پر نشاط مانوری در ریاضیات شدیداً براؤر را تحت تأثیر قرار داد. متن درسهای مانوری سرانجام چاپ شد [Ma 09].

1. E. Jahnke

۲. [Ma 98]

۳. معادل Privatdozent آلمانی، شغلی در دانشگاه با حقوقی نسبتاً کم، با امکان تدریس و اقامت در اطراف دانشگاه، تا زمانی که امکان بهتری در جای دیگر فراهم شود.

در سنّت دانشگاهی هلند، فردی که در دانشگاه تحصیل می‌کرد نخست به دریافت گواهینامهٔ دکتری با عنوان doctorandus نائل می‌شد، و سپس یا باید شغلی انتخاب می‌کرد و یا برای دریافت درجهٔ Ph.D ادامهٔ تحصیل می‌داد. در ریاضیات شغلی غیر از «تدریس» وجود نداشت، اما حتی مدرک دکتری تضمینی برای به‌دست آوردن یک سمت دانشگاهی نبود. دانشگاهها تعداد کمی استاد ریاضیات، و به ندرت سمتهای پایینتر از استاد، داشتند. اگر یک دکتر ریاضی شانس می‌آورد، استادی فوت می‌کرد و دانشکده جایش را به او می‌داد؛ و تا آن موقع چاره‌ای نبود جز تدریس در دبیرستان و ادامهٔ کار مقاله چاپ کردن به این امید که روزی بخت به انسان روی آورد.

خُلق و خوی براؤر مناسب شغل تدریس نبود، از این رو تصمیم وی برای ادامهٔ تحصیل منطقی به‌نظر می‌رسید. حتی بعد از پایان تحصیلات دانشگاهی او هنوز مردد بود که ریاضیدان شود یا فیلسوف. بالاخره ریاضیات را برگزید، اما بعد از سیری کوتاه در قلمرو فلسفه.

براؤر در سال ۱۹۰۵ یک رشته سخنرانی تحت عنوان «فلسفهٔ اخلاق» ایراد کرد، که با عنوان «زندگی، هنر و عرفان» به چاپ رسید. وی در این سخنرانیها به تشریح یک نگرش عرفانی به جهان، پرداخت. چند موضوع که در کارهای علمی و بنیادی بعدی وی اهمیت دارند، در اینجا مطرح شده است، از آن جمله نظر منفی وی دربارهٔ نقش زبان و این عقیده که سلطهٔ طبیعت یا همنوعان گناه است.

براؤر قبل از اینکه پایان‌نامه‌اش را بنویسد، مقالاتی در زمینهٔ آنالیز برداری به چاپ رساند: «میدان نیروی فضاهای نااقلیدسی با خمیدگی منفی» [Br 06b]، «میدان نیروی فضاهای نااقلیدسی با خمیدگی مثبت» [Br 06c]، «توزیعهای برداری چند بعدی» [Br 06a]. براؤر در مقالهٔ اول ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل معاصر را به‌کار برد، اما مفهوم جدید «جابه‌جایی موازی» را افزود، لذا وی اولین ریاضیدانی بود که این مفهوم را، هرچند در یک حالت خاص، به‌کار برد. مقالهٔ سوم حاوی اثباتی از قضیهٔ استوکس در بُعد بالاتر است. ظاهراً وی نمی‌دانست که پوانکاره در سالهای ۱۸۸۷ و ۱۸۹۹ این قضیه را بیان کرده است. بعداً [Br 19c] وی صریحاً به تقدم پوانکاره در بیان قضیه اذعان کرد، اما افزود «ولی بدون ارائهٔ اثبات».[1]

پایان‌نامه‌اش که در ۱۹ فوریهٔ ۱۹۰۷ از آن دفاع کرد، آمیزه‌ای از چند مبحث بود. از مکاتبه‌های وی با استاد راهنمایش، کورتوخ، چنین برمی‌آید که اصولاً براؤر تمایل داشته یک بخش فلسفی مفصل در رسالهٔ خود بیاورد اما کورتوخ چنین اجازه‌ای را به وی نداده و براؤر را ملزم کرده بحث را به مباحث ریاضی محدود کند.

در نامه‌ای که براؤر به کورتوخ نوشت ادعا کرد بخش ریاضی رسالهٔ وی به‌قدر کافی پرمحتواست، و او توانسته است سه تا از مسائل هیلبرت را حل کند ـ مسألهٔ شمارهٔ ۱، مسألهٔ پیوستار، مسألهٔ شمارهٔ ۲، سازگاری حساب، و مسألهٔ شمارهٔ ۵، حذف شرایط مشتق‌پذیری از نظریهٔ گروههای لی.[2]

ادعای وی ممکن است خوانندهٔ امروزی را شگفت‌زده کند، اما باید توجه داشت که براؤر دو مسألهٔ اول را در چارچوب روش ساختی[3] و نه در چارچوب

۱. اسخوتن [Schouten] در کتاب خود *Ricci-kalkül* تقدم براؤر را تصدیق می‌کند، اما ظاهراً مؤلفان بعدی وی را فراموش کرده‌اند.

۲. نامهٔ براؤر به کورتوخ، ۵ نوامبر ۱۹۰۶؛ نگاه کنید به [Da 81].

3. constructive

روش اصل موضوعی یا فراریاضی در نظر گرفته بود. بنابراین راه حل او در چارچوب دیگر مفهوم خود را از دست می‌دهد. اما حل مسألهٔ پنجم، کاملاً ریاضی بود، هرچند که کامل نبود. براوِر در فصل اول شرایط مشتق‌پذیری را در حالت خاص یک پارامتری با روش ساخت ظریفی حذف کرد.

از این‌رو پایان‌نامهٔ وی شامل اولین پژوهش براوِر در توپولوژی است. وی بعداً صورت جدیدی از آن را به گردهمایی بین‌المللی ریاضی در رُم ارائه داد [Br 09c] که متعاقباً نتایج آن در ماتماتیشه آنالن [Br 09d] به چاپ رسید. وی به تحقیقات خود در [Br 09c] و [Br 09b] ادامه داد؛ مقالهٔ دوم به‌حالت دو بعدی می‌پردازد. براوِر در نامه‌ای به اوریسون (۱۹۲۴/۴/۹) اظهار کرد که مطالبی برای یک مقالهٔ دیگر دارد، که متأسفانه هیچ وقت چاپ نشد و حتی دستنوشتهٔ آن نیز پیدا نشد. احتمالاً این مطالب در یکی از آتش‌سوزیهای خانهٔ براوِر از بین رفته است. شاید گردهمایی رُم منبع الهام یکی از کارهای تحقیقاتی براوِر در سالهای بعد بوده است. متن سخنرانی پوانکاره دربارهٔ آیندهٔ ریاضیات (که به‌وسیلهٔ خود پوانکاره ایراد نشد)، حاوی بخشی دربارهٔ «معادلات دیفرانسیل» بود، که در آن پوانکاره یک «بحث کیفی دربارهٔ خمهای تعریف شده به‌وسیلهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل» را مطرح کرده بود. براوِر این موضوع را طی یک سلسله مقاله با عنوان «دربارهٔ توزیعهای برداری پیوسته روی رویه‌ها» بررسی کرد: [Br 09f]، [Br 10a]، [Br 10b]. وی با قضیهٔ وجودی پئانو شروع کرد و تنها از ویژگیهای پیوستگی استفاده کرد، برخلاف پوانکاره که درکارهای منتشر شدهٔ خود از دیدگاه جبری و تحلیلی به این موضوع پرداخته بود. علی‌رغم آنکه متن سخنرانی پوانکاره یک منبع الهام براوِر در این زمینه بود، چنین به‌نظر می‌رسد که براوِر اطلاعی از نوشته‌های پوانکاره دربارهٔ این موضوع نداشته است (رک. [Br 79]، ص ۴۲۳). هر چند این امر عجیب به‌نظر می‌رسد، اما می‌توانیم آن را به‌حساب محدودیت خاصی در آموزش ریاضی وی بگذاریم. مثلاً توجه کنید که ارجاع او به پوانکاره دربارهٔ قضیهٔ استوکس مربوط به ۱۹۱۹ است نه ۱۹۰۶.

در میان نتایج مقالهٔ اول، قضیهٔ مشهور مربوط به وجود نقاط تکین دیده می‌شود: «برداری که به‌طور پیوسته روی یک رویهٔ ساده‌ـهمبند، دوطرفه و بسته تغییر می‌کند باید دست‌کم در یک نقطه نامعین باشد».

در مقالهٔ دوم قضیه‌هایی ساختاری برای نقاط تکین و برای رفتار میدان (برداری) در همسایگی نقاط تکین اثبات می‌شوند. این مقاله حاوی یک تعریف کاملاً توپولوژیک از «عدد چرخشی[1]»، و مفهوم تغییر هوموتوپیک میدانهای برداری است. روشهای «توزیع برداری» که در مقاله‌ها به‌کار رفته از نظر توپولوژیک کاملاً مقدماتی‌اند.

هنگامی که براوِر مشغول تهیهٔ مقاله‌های خود دربارهٔ گروه لی برای ماتماتیشه آنالن بود، کشف کرد که برخی از نتایج توپولوژیکی برگرفته از اثر شوئنفلیس[2] به‌نحو مطلوبی اثبات نشده‌اند، و یا حتی نادرست‌اند (نامه به هیلبرت، ۱۹۰۹/۵/۱۴). کتاب شوئنفلیس جلد دوم از یک بررسی جامع دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بود که نظریهٔ مجموعه‌های نقاط را نیز دربر می‌گرفت. این کتاب به سفارش انجمن ریاضی آلمان تألیف شده بود و انتخاب شوئنفلیس احتمالاً به این جهت بوده است که وی از سال ۱۸۹۹ به تحقیق در رشتهٔ جدید توپولوژی مجموعهٔ نقاط پرداخته بود. شهرت وی به‌سبب ارائهٔ عکس قضیهٔ خم ژوردان بود. ترکیب این دو حکم امروزه به قضیهٔ ژوردان‌ـشوئنفلیس مشهور است. براوِر با تأسف دریافت که استدلالهای شوئنفلیس کامل نیستند. وی مفاهیم و اثباتهای شوئنفلیس را دقیقاً بررسی کرد و گزارشی از بررسیهای خود را برای چاپ در ماتماتیشه آنالن برای هیلبرت فرستاد. بعد از چند مکاتبه که خالی از لحظات دردناک نیز نبود، مقالهٔ انتقادی براوِر و پاسخ شوئنفلیس در یک شماره از آن نشریه به‌چاپ رسید.

مقالهٔ «دربارهٔ تحلیل جا[1]»ی براوِر حاوی نکاتی دربارهٔ توپولوژی شوئنفلیس بود. نظریهٔ خمها در این تحقیق آماج شدیدترین حمله قرارگرفت. براوِر چند مثال ناقض ارائه داد که از میان آنها خمی که مربع را به سه ناحیه تقسیم می‌کند شهرت یافت. این خم اولین مثال از پیوستار تجزیه‌ناپذیر را به‌دست داد. وادا[2] طرحی جالب توجه برای ساختن آن عرضه کرد: جزیره‌ای را در یک دریای آب‌شور در نظر بگیرید، که دریاچهٔ آب شیرینی در آن واقع است. با حفاریهای مناسب متوالی کانالهایی از دریا و آب شیرین دریاچه حفر شده‌اند به‌طوری که همه‌جای جزیره را بجز یک خم که آبهای شور و شیرین را از هم جدا می‌کند فرا می‌گیرند. طرح مشابهی با دو دریاچه (مثلاً با آبهای سرخ و سیاه) خمی به‌دست خواهد داد که جزیره را به سه ناحیه تقسیم می‌کند.

مقالهٔ «دربارهٔ تحلیل جا» توپولوژی نظریهٔ مجموعه‌ها را به سطح جدیدی از دقت ارتقاء داد. این مقاله به‌صورت یکی از خواندنیهای ضروری برای توپولوژیدانهای نسل جدید درآمد.

حدوداً در همان زمان براوِر شروع به انتشار یک سلسله مقاله با عنوان «تبدیلهای پیوستهٔ یک به یک رویه به خود آن» کرد: ([Br 09b]، [Br 10a]، [Br 10d]، [Br 09f]، [Br 11e]، [Br 11k]، [Br 12c]). نقطهٔ شروع، این سؤال بود که «آیا یک نگاشت پیوستهٔ یک به یک از یک کره به خودش وجود دارد به‌طوری که حتی یک نقطه در جای خود باقی نماند»؟

ظاهراً این سؤال آغاز کار براوِر در مورد نقاط ثابت است. در مقالات اول، هنوز روشها مقدماتی‌اند. تعداد کل مقاله‌ها ۸ تاست که آخرین آنها در سال ۱۹۲۰ انتشار یافت.

مقالهٔ دوم حاوی اولین فرمولبندی و اثبات، هرچند ناقص، از قضیهٔ انتقال صفحه‌ای است. صورت دقیق قضیه به شرح زیر است:

> فرض کنیم f یک همسانریختی جهت‌نگهدار از $\mathbb{R}^2$ بدون نقطهٔ ثابت باشد؛ آنگاه هر نقطهٔ p متعلق به دامنهٔ انتقالش برای f است. در اینجا دامنهٔ انتقال برای f یک زیرمجموعهٔ باز همبند از $\mathbb{R}^2$ با مرز $L \cup f(L)$ است، که L تصویر یک نشانندهٔ سره از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}^2$ است و L، $f(L)$ و $f^{-1}(L)$ را از هم جدا می‌سازد.

براوِر این قضیه را در مقالهٔ «اثبات قضایای انتقال در صفحه» خود به دقت اثبات کرد [Br 12b]. وی در مقالهٔ پنجم خود قبول کرد که اثبات قبلی او متکی بر استدلالهای ناقص در «گزارش[3]» شوئنفلیس (از سری گزارش‌های انجمن ریاضی آلمان) بوده است. همچنین [Fr 92] را ببینید.

خلاصه‌ای از بخش اول این رشته مقالات در ماتماتیشه آنالن چاپ شده است [Br 19e]. مسیر تحقیقاتی دیگری که براوِر در پیش گرفت، و فروید نتال آن را توپولوژی (به سبک) کانتورـشوئنفلیس می‌نامید، اساساً توپولوژی مجموعه نقاط بود. وی دو مقاله با عنوان «دربارهٔ ساختار مجموعه‌های بیکاست از

1. winding number 2. Schoenflies

1. Zur Analysis Situs 2. Wada 3. Bericht

نقاط» منتشر کرد که در آن توسیع قضیهٔ کانتور-بندیکسن را اثبات نمود ([Br 10c]، ص ۷۹۰)، و اولین گروه توپولوژیکی را که گروه لی نبود معرفی کرد؛ همان مرجع را ببینید.

مقالهٔ دوم وی حاوی تعمیم دیگری از قضیه بود؛ به‌علاوه براور قضیهٔ تحویل‌پذیری خود را صورتبندی و اثبات کرد ([Br 11f] ص ۱۳۸. رک. [AH 37] ص ۱۲۳).

همچنین براور اثباتی جدید اما با ابزارهای توپولوژی مقدماتی از قضیهٔ خم ژوردان ارائه داد؛ این اثبات یکی از زیباترین اثباتهای مقدماتی است که بسیار مورد تحسین هیلبرت قرار گرفت.

چند مقالهٔ دیگر در زمینهٔ توپولوژی به سبک کانتور-شوئنفلیس در مجموعهٔ آثار براور وجود دارند: «ملاحظاتی درباره چسبندگی نوع η» [Br 13a]، که حاوی تعمیمهای ابعاد بالاتر قضیهٔ کانگوری کانتور است (همهٔ مجموعه‌های خطی مرتب شمارای چگال بدون نقاط انتهایی یکریخت هستند) و دو مقاله دربارهٔ مجموعه‌های G_δ.

می‌توان گفت که براور دچار نوعی دوگانگی بود. او قلباً یک ساختگرای جدی بود اما تمایلات ریاضییش بسیار هندسی و بالاخص توپولوژیک بود. در واقع استخدام وی به‌عنوان "Privaat docent" در درجهٔ اول به‌منظور تقویت هندسه در دانشگاه آمستردام صورت گرفت. عنوان سخنرانی آغاز کار وی در ۱۹۰۹/۱۰/۱۲، «ماهیت هندسه» بود (به زبان هلندی، [Br 75] صص ۱۱۲-۱۲۰)؛ در این سخنرانی مروری بر هندسهٔ آن زمان کرد و برخی ایده‌های هندسی دربارهٔ نظریهٔ نسبیت را مطرح کرد. براور نتیجه‌گیری کرد که با اتکاء بر هیچ‌گونه استدلال پیشینی نمی‌توان بخشهایی از هندسه را ممتاز قلمداد کرد. تعریف وی از هندسه بسیار آسانگیرانه بود: «هندسه به بررسی خواص فضاهای یک، یا چند بعدی می‌پردازد؛ به‌خصوص با رده‌بندی مجموعه‌های نقاط، تبدیلها و گروههای تبدیلهایی که در آن فضاها امکان‌پذیرند سر و کار دارد» ([Br 09e] ص ۱۵).

درهمان سخنرانی چند مسألهٔ حل نشده را مطرح کرد، مثلاً:

—«فضاهای با ابعاد متمایز تا چه میزان گروه [همسانریختیهای] متفاوتی دارند». وی افزود «بسیار محتمل است که این تفاوت همیشه وجود داشته باشد، اما اثبات آن ظاهراً بسیار مشکل است، و احتمالاً این مسأله تا مدتهای طولانی به‌صورت مسأله‌ای حل نشده باقی خواهد ماند».

— ... کسی مطمئن نیست که فضای سه‌بعدی دکارتی به‌وسیلهٔ یک رویهٔ بستهٔ ژوردان، یعنی تصویر پیوستهٔ یک به یک کره به دو ناحیه تجزیه شود.

براور سخنرانی خود را با این پیشنهاد خاتمه داد که تحلیل جا [توپولوژی] مبنای نظریه‌های ریاضی قرارگیرد و به‌عنوان نمونهٔ بارز از بررسی توپولوژیک هندسه (به‌صورتی که هیلبرت در «دربارهٔ مبانی هندسه» [Hi 02] آورده است)، نام برد. همچنین به مبانی هندسه [اثر هیلبرت] ضمیمهٔ IV مراجعه کنید. در مورد هندسه، مختصات را بعداً با استفاده از روشهای وان اشتات[1] می‌توان معرفی کرد. «و بنابراین» براور نتیجه می‌گیرد که «اگر بتوان مختصات را بر مبنای توپولوژی بنا نهاد، لازم نیست در سایر رشته‌ها ممنوع شوند». اما روش «هندسی» بدون فرمول، نقطهٔ شروع جدیدی خواهد بود و روش تحلیلی به ابزاری غیرضروری مبدل خواهد شد.

1. Van Staudt

این امکان، و همین برتری روش هندسی است (حتی در بخشهایی از ریاضیات که هنوز این روش در آنها به‌کار نرفته) که من اصولاً خواسته‌ام در مطالب بالا به آن اشاره کنم.

این بیان روشنی از مرام هندسی براور است که او در ریاضیات خودش نسبت به آن وفادار ماند.

در واقع، براور سرگرم مسائل بنیادی توپولوژی بود. در اواخر سال ۱۹۰۹ به پیشرفت مهمی دست یافت. ظاهراً هنگامی که تعطیلات کریسمس را با برادرش در پاریس می‌گذراند، ایدهٔ «درجهٔ نگاشت» به ذهنش خطور کرد. در نامه‌ای به هیلبرت (۱۹۱۰/۱/۱) به مفهوم «درجه» اشاره کرد[1] (رک. [Br 76] ص ۴۲۱). در این نامه رهیافت او به مفهوم درجه هنوز جبری است، اما روشن است که براور به اهمیت و نتایج آن واقف بوده است. همچنین وی تعمیم قضایای نقطهٔ ثابت خود روی کره‌ها را به ابعاد بالاتر، و نه لزوماً به نگاشتهای پیوستهٔ دوسویی، صورتبندی کرد.

براور در مارس ۱۹۱۰ طی نامه‌ای به هیلبرت اظهار کرد که به حل قسمتی از مسألهٔ بُعد دست یافته است: فضاهای با بعد زوج و فضاهای با بعد فرد همسانریخت نیستند (نامه به هیلبرت، ۱۹۱۰/۳/۱۸).

براور ظاهراً باید در بهار یا در اوایل تابستان بر مشکلات غلبه کرده باشد و اثباتی رضایتبخش از ناوردایی بعد یافته باشد. وی مقاله‌ای ۵ صفحه‌ای در این زمینه به ماتماتیشه آنالن تسلیم کرد [Br 11a].

اساساً این مقاله حاوی روشهای درجهٔ نگاشت و تقریب سادکی، ناوردایی درجهٔ نگاشت تحت تغییر هوموتوپیک، نگاشت سادکی، و غیره است... امروزه این اثبات متعارف است، اما در آن زمان اثباتی زیرکانه اما پیچیده تلقی می‌شد. وقتی بلومنتال ویراستار مجری (که ماتماتیشه آنالن را برای هیلبرت اداره می‌کرد) در سفری به پاریس در تعطیلات تابستان، با لبگ دربارهٔ مقالهٔ صحبت کرد، لبگ گفت که چند اثبات از این مطلب در دست دارد. یکی از آنها که جزئی از یک نامه به سردبیر بود در همان شمارهٔ ماتماتیشه آنالن، بلافاصله بعد از اثبات براور چاپ شد. براور شگفت‌زده شد، وی تقریباً بلافاصله دریافت که لبگ به اصل زیبایی اشاره کرده است که ناوردایی به‌طور سرراست از آن نتیجه می‌شود، اما همچنین مشاهده کرد که اثبات لبگ کاملاً نادرست است. اصلی که لبگ بیان کرده بود بدون اینکه واقعاً آن را اثبات کند، اصل مشهور و ظریف سنگفرش بود.

مکاتباتی طولانی و پیچیده بین براور، بلومنتال، لبگ، بر و احتمالاً دیگران انجام شد. در مقابل ایرادات، لبگ قول داد اثبات درستی ارائه دهد، اما علی‌رغم پافشاریهای براور و بلومنتال هیچ اثباتی تا سال ۱۹۲۱ ارائه نشد [Le 21]، و حتی در آن زمان نیز به گفتهٔ براور، اثبات وی اساساً همان اثبات سال ۱۹۱۳ براور بود.

در این ضمن لبگ اثباتهای دیگری از ناوردایی بعد به کونت راندو[2] ارائه کرده بود [Le 11a].

براور در [Br 09f] اظهارنظر کرد که: «اثبات اول، [Br 11e]، ناقص است. اثبات دوم، [Le 11b]، از لحاظ محتوا با اثبات من یکی است: اختلاف آن با اثبات من تنها در پیچیده‌تر کردن مسیر فکری است.»

۱. فرویدنتال تاریخچهٔ کشف درجهٔ نگاشت و کاربردهای آن را در جلد مربوط به توپولوژی از مجموعه آثار براور شرح می‌دهد.

2. Comptes Rendus

براؤر در نامه‌ای به بر (۱۹۱۱/۱۱/۵) می‌نویسد که «من قضیهٔ آنالن لبگ را چند روز بعد از انتشار آن اثبات کرده بودم، اما اثبات را منتشر نکردم زیرا خواستم فرصت این کار را به لبگ بدهم» ([Br 76] ص ۴۴۱).

برخورد لبگ و براؤر تنها نتایج منفی دربرنداشت، بلکه هر دو طرف را به تلاش بیشتر و هوشمندانه‌تر واداشت. لبگ مفاهیم جدیدی مانند اصل سنگفرش و چندگوناهای پیوندی را مطرح کرد و براؤر روشهای خود را به نهایتِ منطقی‌شان رساند. وی اثباتهای گوناگونی از احکام پایه‌ای ارائه داد، و پایه‌ای برای توپولوژیِ سالهای بعد (و حتی دهه‌های بعد) بنا نهاد. فرویدنتال در ملاحظات خود راجع به مقالهٔ براؤر در «مجموعهٔ آثار» جریان این نزاع را تحلیل و توصیف کرده است. اطلاعات بیشتر را می‌توانید در [Jo 81] و نیز در زندگینامهٔ در دست تهیهٔ براؤر بیابید. براؤر در اکتبر سال ۱۹۱۰ اثبات ناوردایی بعد را درگردهمایی انجمن ریاضی هلند ارائه داد. اثبات مزبور همان اثبات مقالهٔ آنالن است، اما نحوهٔ ارائهٔ آن در آن گردهمایی از لحاظ آموزشی بسیار جالب بود. در سال ۱۹۱۱ یک سلسله مقالهٔ پی‌درپی توپولوژی در آنالن انتشار یافت: [Br 11g]، [Br 11b]، [Br 11c]، [Br 11h].

به‌خصوص مقالهٔ اول از این سلسله مقالات اهمیت بسیار زیادی در توسعه و تکامل توپولوژی داشته است، این مقاله حاوی همهٔ ابزارهایی است که در مقالهٔ ناوردایی بعد به‌طور ضمنی به‌کار رفته‌اند، از آن جمله، ستارهٔ سادکی، خمینهٔ سادکی (اولین تعریف وی از خمینه در [Br 09b] آمده است)، سادک، نشانه‌گر[1]، تجزیهٔ سادکی، تقریب سادکی، درجهٔ نگاشت، هوموتوپی برای نگاشتها، ناوردایی درجهٔ نگاشت تحت تغییرات هوموتوپیک، شاخص تکینی.

علاوه بر آن، این مقاله حاوی تعمیم نقطهٔ تکین یک نگاشت روی کره به کره‌های با بُعد زوج است، و مقاله با بخشی در بارهٔ نقاط ثابت نگاشتهای پیوستهٔ گویها، که نقطهٔ اوج آن قضیهٔ مشهور نقطهٔ ثابت است خاتمه می‌یابد.

مقالهٔ دوم دربرگیرندهٔ اثباتی از قضیهٔ ناوردایی دامنه است: تصویر همسانریخت یک دامنه، یک دامنه است. در [Br 12c] اثبات دیگری از ناوردایی دامنه ارائه می‌شود، که این بار بر پایهٔ مفهوم درجهٔ نگاشت است.

براؤر مقالهٔ ناوردایی دامنهٔ خود را بسیار مهمتر از مقالهٔ ناوردایی بعُد می‌دانست. در واقع این قضیه نقش مهمی در آنالیز دارد، و همان حلقهٔ مفقوده در اثبات قضیهٔ اصلی توابع خودریخت (یا یکنواخت‌سازی) بود. براؤر به‌محض حل کردن مسألهٔ ناوردایی دامنه، به‌جستجوی کاربردی قانع‌کننده پرداخت. اندکی بعد به کاربرد آن در مسأله‌ای دست یافت که آن مسأله موجب سردرگمی نخبگان آنالیز شده بود. بعد از قدری تأمل و احتمالاً مشورت، نظریهٔ توابع خودریخت و یکنواخت‌سازی را زمینهٔ کار قرار داد.

مسألهٔ یکنواخت‌سازی ذهن برخی از ریاضیدانان شاخص قرن نوزدهم، از جمله کلاین و پوانکاره را به خود مشغول کرده بود. کلاین روشی موسوم به «روش پیوستگی» را برای حل مسأله مطرح کرده بود. اما این روش مستلزم یک حکم عمیق دربارهٔ همسانریختی بود.

بخت با براؤر یار بود که فهمید قضیهٔ ناوردایی دامنه دقیقاً همان حلقهٔ مفقوده را به‌دست می‌دهد. مکاتباتی بین براؤر و بلومنتال و پوانکاره انجام شده است، اما شکی نیست که براؤر این کاربرد را خود یافته بود. بی‌درنگ از وی دعوت شد تا در سمینار تخصصی دربارهٔ توابع خودریخت که در حاشیهٔ گردهمایی سالیانهٔ انجمن ریاضی آلمان از ۲۷ تا ۲۹ سپتامبر ۱۹۱۱ در کارلسروهه برگزار می‌شد، کار خود را ارائه دهد.

تکمیل موفقیت‌آمیز روش پیوستگی، متخصص برجستهٔ این رشته، یعنی پاول کوبه[1] راکه در سال ۱۹۰۶ به‌طور همزمان با پوانکاره مسألهٔ یکنواخت‌سازی را با استفاده از ابزارهای دیگر حل کرده بود تا اندازه‌ای عصبانی کرد. این ماجرا دورهٔ ناخوشایندی درپی داشت که در آن کوبه می‌کوشید براؤر را در قلمرو تخصصی خود شکست دهد. نامه‌های بسیاری بین آنها مبادله شد؛ کوبه از براؤر خواست تا دستنوشته‌هایشان را ردوبدل کنند، و بعد خود چنین نکرد. داستانهای ناگواری پیش آمد که از آن جمله، دست بردن در نمونهٔ چاپخانه‌ای مقالهٔ براؤر است. سرانجام براؤر از اینکه به موضوع یکنواخت‌سازی پرداخته است پشیمان شد.

سال ۱۹۱۲ نتایج بیشتری را برای توپولوژی جدید در برداشت: ناوردایی خم بسته (که شوئنفلیس آن را ادعا کرد اما اثبات نکرد [Sc 13])؛ معرفی ردهٔ هوموتوپی (تحت نام «رده») در مقالهٔ «تبدیلهای پیوستهٔ یک به یک رویه به خود، V» [Br 12c] به‌انضمام این قضیه که نگاشتهای با درجهٔ برابر به یک رده تعلق دارند. قضیهٔ اخیر موضوع سخنرانی براؤر درگردهمایی بین‌المللی ریاضیات در سال ۱۹۱۲ درکیمبریج بود [Br 12 d].

براؤر اولین کسی بود که به عرضه و بررسی تعدادی از مفاهیم توپولوژی پرداخت. اغلب آنها در بالا معرفی شده‌اند. وی اصطلاحات جدید اندکی ابداع کرد. او کاملاً قانع بود به اینکه توصیفهای مفاهیم را به‌جای اسامی کوتاهی که بر آنها دلالت کنند به‌کار برد. مثلاً از رده‌های هوموتوپی تنها به عنوان «رده‌ها» نام می‌برد، و نام «هوموتوپی» را فرد دیگری ابداع کرد. وی همچنین اصطلاح «Zyklosis» را که احتمالاً از لیستینگ اقتباس شده، به‌کار برده است؛ براؤر آن را برای تعریف اولیهٔ گروه بنیادی به‌کار می‌برد؛ رک. [Br 12a]، [Br 19e]. ویتوریس این اصطلاح را در چارچوب نظریهٔ هومولوژی به‌کار برد. استفاده از اصطلاح «نگاشت توپولوژیک» در معنای جدید آن را براؤر در سال ۱۹۱۹ باب کرد [Br 19b].

مقاله‌های شهودگرایانهٔ براؤر نیز همین نقص را دارند. مثلاً، تقریباً سی سال طول کشید تا قضیهٔ بادبزن را به این اسم نامگذاری کند (در تمام این مدت نام بی‌مسمای «قضیهٔ پهنه‌های متناهی» بر آن بوده است)

آخرین مقالهٔ وی در زمینهٔ روشهای جدید، «دربارهٔ مفاهیم طبیعی بعد» [Br 24] بود. براؤر در این مقاله یک تعریف ذاتاً توپولوژیک از مفهوم بعد ارائه داد. پوانکاره قبلاً در مقالهٔ «چرا فضا سه بعد دارد؟» [Po 12]، صورت اولیهٔ چنین تعریفی را ارائه داده بود، اما آن تعریف نارساییهایی داشت.

براؤر ایده را از پوانکاره گرفت و تعریف دقیقی به‌دست داد که در آن از مفهوم جداسازی استفاده شده بود. این تعریف به شرح زیر است: «عبارت π بُعد کلی درجهٔ n دارد»، که در آن n یک عدد طبیعی دلخواه است، یعنی برای هر انتخاب ρ و ρ' [زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزا از π] یک مجموعهٔ جداساز π_1 وجود دارد که بُعد کلی درجهٔ $n-1$ دارد، اما برای هر انتخاب ρ و ρ' یک مجموعهٔ جداساز π_1 وجود ندارد که درجهٔ بعد آن کمتر از $n-1$ باشد.»

براؤر برپایهٔ این تعریف نشان داد که درجهٔ بعد $\mathbb{R}^n$ برابر با n است، و در نتیجه یک‌بار دیگر ناوردایی بُعد را اثبات کرد. در اثبات از اصل سنگفرش

1. indicatrix

1. Paul Koebe

استفاده شد که براوئر برهان کوتاهی برای آن با استفاده درجهٔ نگاشت به‌دست داد. این مقالهٔ خاص در دههٔ ۲۰ اسباب دردسر او شد، و منازعهٔ او با منگر بر سر همین مقاله بود. قبل از اینکه به ماجرای بعدی زندگی براوئر بپردازیم، تذکری راجع‌به روشهای توپولوژیک وی ضروری است. بسیاری از معاصران براوئر معتقد بودند که خواندن آثار وی مشکل است، و تا حدی حق با آنها بود. براوئر سرسختانه به روش هندسی خود چسبیده بود، وی یا از توان مفهوم هومولوژی که پوانکاره آن را ابداع کرده بود اطلاعی نداشت، و یا صرفاً ترجیح می‌داد که با روش مستقیم هندسی به‌موضوع بپردازد؛ مراجعه کنید به [Di 89] چون کسی این سؤال را از وی نپرسیده است، در این مورد فقط می‌شود حدس زد.

تا اکنون کاملاً مشخص شده است که محرک براوئر در به‌دست آوردن نتایج ریاضی هیچ‌گونه فشاری نبوده است. معمولاً کار ریاضی را مثل یک هنرمند در کار هنری، فارغ از فشارهای اقتصادی انجام می‌داد: وی به ریاضیات به‌دلیل زیبایی و ارضا کنندگیش عشق می‌ورزید، اما وقتی یک رگهٔ طلا کشف می‌کرد، تعقیب آن باب میل وی نبود. بعد از اثبات احکام پایه‌ای خوشحال می‌شد که ادامهٔ کار را به‌عهدهٔ افراد جاه‌طلب‌تر بگذارد. از این بابت باید سپاسگزار لبگ باشیم که بیش از یک مشاور خوش‌نیت او را به‌کار واداشت!

سال ۱۹۱۳ پایان اولین و پرحاصل‌ترین دورهٔ فعالیت توپولوژیک براوئر بود. مثل این است که اشتیاق براوئر به توپولوژی فروکش کرد.

جنگ جهانی اول براوئر را کم و بیش از وطن علمی دوم او یعنی گوتینگن دور ساخت و در نتیجه وی در سالهای جنگ به مبانی فلسفهٔ ریاضی که عشق نخستینش بود، بازگشت.

پیشرفتهای براوئر در مبانی با تدریس او ارتباط تنگاتنگ داشت. در سالهای ۱۹۱۲ـ۱۹۱۳ و مجدداً ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶، ۱۹۱۶ـ۱۹۱۷ (علاوه بر درسهای دیگر) درسی در نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه داد. با عنایت به یادداشتهای درسی وی می‌توان کم و بیش به سیر پیشرفت وی پی‌برد. درسهای اول او اصولاً دربارهٔ نظریهٔ مجموعهٔ نقاط بودند، که امروزه به «نظریهٔ توابع حقیقی» موسوم است. این درسها به سبک ساختگرایانهٔ سال ۱۹۰۷ وی تنظیم شده بودند، و بخشهای غیرساختی نظریه به این طریق مشخص شدند.

در ۱۹۱۶ـ۱۹۱۷ وی درس ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ را تکرار کرد، اما این بار ایدهٔ جدیدی را ابداع کرد: معرفی دنباله‌های انتخاب. وی در حاشیهٔ یادداشتهای ۱۹۱۵ـ۱۹۱۶ نظرگاه جدید خود دربارهٔ دنباله‌های انتخاب را اضافه کرد. ساده‌ترین حالت برای یک دنبالهٔ انتخاب، یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی مشخص شده به‌طریق کم و بیش دلخواه است. با توجه به اینکه دنباله‌های انتخاب اشیایی کاملاً غیرقابل پیش‌بینی بودند، براوئر مشاهده کرد که ضعف آنها در عین حال نقطهٔ قوت آنهاست: اگر بدانیم که به هر دنبالهٔ انتخاب یک عدد طبیعی نسبت داده می‌شود آنگاه همان نامعین بودن آنها یک ویژگی پیوستگی را ایجاب می‌کند. به زبان ریاضی، وی براساس یک تحلیل مفهومی از دنباله‌های انتخاب خود اصل پیوستگی زیر را پذیرفت: همهٔ توابع از مجموعهٔ دنباله‌های انتخاب به اعداد طبیعی، پیوسته‌اند [Br 18].

به‌علاوه در خلال جنگ به یک انجمن فلسفی پیوست، که بعداً به «حلقهٔ سیگنیفیک[۱]» شهرت یافت. در سال ۱۹۱۵ یکی از بزرگترین افتخاراتی که یک ریاضیدان ممکن بود از سوی همکارش به آن نائل شود نصیب براوئر شد: وی به عضویت هیأت ویراستاران ماتماتیشه آنالن منصوب شد.

براوئر بعد از جنگ تحقیقات توپولوژیک خود را از سر گرفت، اما با شدت کمتر، و نیز بدون دیدگاههای انقلابی. دلش واقعاً در هوای مبانی ریاضیات بود. در یک رشته مقاله شروع به تجدید بنای ریاضیات در مسیر شهودگرایی جدید خود کرد، یعنی شهودگرایی با اصول انتخاب: [Br 18]، [Br 19a]، [Br 19d]، [Br 21]، [Br 23]. در همان ایام حدوداً بیش از پانزده مقاله دربارهٔ توپولوژی رویه‌ها منتشر کرد. حاصل آنها تعدادی روش محاسباتی و نیز مقاله‌ای است که نتایج نیلسن دربارهٔ نقطهٔ ثابت روی چنبره را توسعه داده است ([Ni 20]، [Br 20]).

براوئر به یک شهودگرای تمام عیار مبدل شده و برنامهٔ جدید همهٔ حواس او را به خود مشغول کرده بود. در سال ۱۹۱۹ پس از آنکه براوئر در خلال یکی از تعطیلات در انگادین سوئیس با هرمان وایل دربارهٔ شهودگرایی جدید صحبت کرد، از پشتیبانی پرشور او برخوردار شد. وایل شهودگرایی را در مقالهٔ جنجال‌برانگیز خود «بحران جدید در مبانی ریاضیات» [We 21] به‌شدت تبلیغ کرد. یک سال بعد براوئر اولین سخنرانی عمومی خود در «جامعهٔ طبیعیدانان» در بادناوهایم (سپتامبر ۱۹۲۰) را ارائه داد. عنوان تعجب‌برانگیز سخنرانی وی «آیا هر عدد حقیقی یک بسط اعشاری دارد؟» بود.

مقالهٔ وایل بود که شعارهایی مانند «براوئر انقلاب است»، «وجود محض، پول بی‌ارزش است» را سر زبانها انداخت.

این مقاله تخیل خوانندگان را برانگیخت، و اغراق نیست اگر بگوییم که اولین شلیک در «جنگ بر سر مبانی» [Grundlagenstreit] بود. (رک. [Da 90].)

در سال ۱۹۲۳ براوئر بدون قصد قبلی دوباره به توپولوژی روی آورد. سخنرانی توپولوژیدان جوان روسی پاول اوریسون درگردهمایی سالیانهٔ انجمن ریاضی آلمان در ماربورگ دلیل این رویکرد بود. براوئر در همان گردهمایی به‌منظور سخنرانی دربارهٔ شهودگرایی حضور یافته بود. اوریسون توفیقاتی در جهت حل چند مسألهٔ توپولوژی از جمله، تعریفها و نظریه‌هایی دربارهٔ خم و بُعد، به‌دست آورده بود.

اوریسون که همراه آلکساندروف برای ملاقات همکارانش آمده بود، هنگام دیدار از گوتینگن مطالبی دربارهٔ مقالهٔ سال ۱۹۱۳ براوئر شنیده بود. وی در سخنرانی خود در ماربورگ به یک اشتباه براوئر در تعریف بعد اشاره کرد. اصطلاح «بسته» در تعریف جداسازی، بُعد نادرستی را به دست می‌داد. اوریسون یک مثال ناقض ساده ارائه کرد؛ در این مورد مراجعه کنید به [Br 24] ص. ۶۷۳. ظاهراً براوئر شرط «بسته» را سهواً گذاشته بود.

تحلیل دقیق و قانع‌کنندهٔ فرویدنتال نشان می‌دهد که براوئر بلافاصله بعد از انتشار مقاله متوجه این اشتباه، به گفتهٔ وی تحریری، شده است. وی تذکری به این مضمون به نمونهٔ چاپی گزارش [Sc 13] خود منضم کرده بود که شوئنفلیس آن را بی‌ربط انگاشته و حذف کرده بود. حال سؤال (این سؤال در جنجال مربوط به منگر اهمیت اساسی پیدا کرد) این است که آیا براوئر

۱. Significs عبارت بود از مطالعهٔ رابطهٔ گوینده و شنونده در چارچوب عوامل روانشناختی و جامعه‌شناختی. مانوری معروفترین فرد در این زمینه بود ــ نشر ریاضی.

مفهوم درست (یعنی مفهوم جدید) همبندی را می‌دانسته است؟ انس تعریف جدید را در سال ۱۹۱۱ عرضه کرد، و خود براؤر نیز در همان سال (احتمالاً به‌طور مستقل) تعریف مشابهی ارائه کرد ([Le 11]، [Br 11e]). به‌علاوه، براؤر داور مقالهٔ دوم لنس بود و لذا امکان ندارد متوجه نشده باشد که او و لنس یک تعریف (جدید) ارائه کرده‌اند.

بنابراین، شواهد حاکی از جواب «مثبت»، قاطع به‌نظر می‌رسد (رک. [Br 79] ص ۵۴۸). این موضوع قدری مهم است زیرا اگر تعریف درست براؤر از بُعد را اوریسون و بعد از او منگر می‌دانستند، ابهامی در مورد فضل تقدم در تعریف بعد پیش نمی‌آمد.

در سال ۱۹۲۴ اوریسون و آلکساندروف دوباره سفری به اروپای غربی کردند. این بار دیداری با براؤر داشتند که در وی احساس بسیار تحسین‌آمیزی نسبت به دو ریاضیدان روس پدید آورد. خصوصاً شیفتهٔ اوریسون شد و او را به دیدهٔ پسری بازیافته می‌نگریست. وی اوریسون را وارث به حق توپولوژی خود تلقی می‌کرد. اوریسون و الکساندروف بعد از بازدید از هلند به فرانسه سفر کردند و کلبه‌ای در بریتانی اجاره کردند. در آنجا اوریسون متأسفانه در یک حادثهٔ شنا غرق شد.[1]

براؤر از این واقعه سخت دلشکسته شد و تصمیم گرفت به‌جستجوی میراث علمی اوریسون بپردازد تا از نابغهٔ فقید قدردانی کرده باشد؛ وی به‌همراه الکساندروف به‌خوبی از عهدهٔ این کار برآمدند.

در سالهای بعد توپولوژیدانهای بسیاری با براؤر دیدار کردند: الکساندروف، ویتوریس، منگر و بعداً فرویدنتال، هورویچ و ویلسن.

منگر نزد هانس هان در وین تحصیل کرده، و در آنجا تحقیقات توپولوژیک خود را در سمینار هان آغاز کرده بود. او در سال ۱۹۱۲ مستقل از اوریسون (و براؤر) مفهوم خم و بُعد را مورد بررسی قرار داده بود. منگر پس از قدری مکاتبه در مارس ۱۹۲۵ به‌عنوان دستیار کارش را با براؤر شروع کرد، و در ماه مه همان سال الکساندروف نیز به آنها پیوست. در پاییز ویتوریس آمد و نیومن به‌مدت کوتاهی به آنجا سر زد. ویلسن، دانشجوی دکتری براؤر نیز در بحثهای توپولوژی شرکت می‌کرد. اعضای این گروه در لارن و بلاریکوم (در نزدیکی آمستردام) زندگی می‌کردند و جلسات آنها در خانهٔ براؤر در بلاریکوم تشکیل می‌شد.[2]

امی‌نوتر همراه با بارتل وان دروردن تعطیلات کریسمس را با براؤر گذراندند، نوتر به‌طور غیررسمی دربارهٔ تعریف گروههای بتی مجتمعها و مباحث مربوط صحبت کرد.

سرانجام اختلاف براؤر و منگر بالا گرفت؛ اختلاف نظر آنها عمدتاً بر سر میزان مشارکت ایشان در نظریهٔ بُعد بود. این مطلب باعث برخوردی شدید بین آنها از طریق نامه‌نگاری و وارد کردن اتهام شد. حتی میانجیگری هانس هان (که معلم منگر و دوست خوب براؤر بود) فایده‌ای نکرد. در سال ۱۹۲۷ منگر یک کرسی در وین پذیرفت و در آنجا به چهره‌ای شاخص در جامعهٔ ریاضی مبدل شد. خواننده برای کسب اطلاعات بیشتری می‌تواند به [Me 19]، [Jo 81]، و نظریات فرویدنتال در [Br 76] مراجعه کند.

در این ضمن براؤر طرح شهودگرایی خود را با توفیق چشمگیری دنبال می‌کرد. وی ابزارهایی برای استفادهٔ مناسب از ویژگیهای دنباله‌های انتخاب یافته بود. در این زمان هیلبرت مشغول پروراندن نظریهٔ برهان خود به‌عنوان پاسخی به دعاوی شهودگرایانه بود. بحث و جدل بر سر مبانی به تدریج جنبهٔ خارج از نزاکت به خود می‌گرفت. در حالی که براؤر سعی می‌کرد اقدام تحریک‌آمیزی نکند (در مقاله‌های او از اشخاص نام برده نمی‌شد)، هیلبرت به هر وسیلهٔ ممکن به مخالفان خود حمله می‌کرد. بعد از مشاجرات زیاد، جنبهٔ علمی «مجادله بر سر مبانی» با برکناری براؤر از ویراستاری ماتماتیشه آنالن از سوی هیلبرت به پایان رسید (رک. [Da 90]). براؤر از مباحثه کنار کشید و در طی ده سال بعد، چندان چیزی انتشار نداد. در نتیجهٔ فعالیت شهودگرایانهٔ دههٔ ۱۹۲۰ چند مقالهٔ توپولوژیک حاصل شد، که هدف آنها عمدتاً نشان دادن این مطلب بود که قبول دیدگاه شهودگرایانه آن‌طور که بعضی ادعا کرده‌اند به فاجعهٔ «قطع عضو» [کنار گذاشتن بخشهای ضروری و اساسی] منجر نمی‌شود. از جمله نتایج این مقاله‌ها عبارت‌اند از (صورتهای شهودگرایانهٔ) قضیهٔ هاینه بورل، تعریف بُعد، قضیهٔ «درستی» (ناوردایی بُعد)، قضیهٔ ژوردان.

تحقیقات توپولوژیک در آمستردام به‌وسیلهٔ فرویدنتال و هورویچ انجام می‌گرفت که دستیاران براؤر شدند؛ پیدایش نظریهٔ هموتوپی نتیجهٔ تحقیقات هورویچ و فرویدنتال بود. هوپف در زوریخ با ادامه دادن روشهای براؤر آنها را به فراتر از حدود شناخته شده‌شان برد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۵ براؤر با سخنرانیهای خود در برلین (۱۹۲۷، [Br 92]) و وین (۱۹۲۸، [Br 29]، [Br 30]) جنجال زیادی را برانگیخت، اما اینها درواقع «وداعیه» وی بود.

براؤر در دههٔ ۱۹۳۰ عمدتاً در انزوا کار می‌کرد و به‌ندرت مقاله‌ای انتشار می‌داد. البته یک استثناء وجود دارد: وی در [Br 39] قضیهٔ مثلث‌بندی خمینه‌های مشتقپذیر را انتشار داد. سپس فرویدنتال اثبات دیگری ارائه کرد. هیچ یک از آنها اطلاع نداشتند که کرنز قبلاً قضیه را اثبات کرده است [Ca 34] و [Ca 35] و نیز [K 79] را ببینید.

در خلال جنگ جهانی دوم براؤر چند مقالهٔ شهودگرایانه انتشار داد. بعد از جنگ کار خود را ادامه داد و یک سلسله مقاله منتشر کرد که نشان می‌دادند آنالیز شهودگرایانه به نحو خاصی از آنالیز کلاسیک دور می‌شود.

ابداعات بعد از جنگ براؤر (که در سخنرانیهای قبلی او در برلین مستتر بود) سرانجام به‌عنوان «روش ذهن خالق» شناخته شدند. این روش جوابهای قاطع منفی) را جایگزین نتایج ضعیف به‌صورت «عجالتاً نمی‌توانیم تأئید کنیم که . . . » (به اصطلاح مثالهای ناقض براؤری) کرد. براؤر در مقاله‌ای در «گزارشهای» انجمن سلطنتی بریتانیا [Br 52] یک صورت شهودگرایانه از قضیهٔ نقطهٔ ثابت ارائه داد. (به‌ازای هر $\epsilon > 0$، xای وجود دارد که $|f(x) - x| < \epsilon$، و f در اینجا یک تابع پیوسته است).

جریانات پس از جنگ براؤر را دچار افسردگی کرد. خدمت او در دانشگاه چند ماهی به دلائل جزئی به حال تعلیق درآمد و سرانجام با توبیخ وزیر به‌سر کار برگشت. نظرات وی در دانشکده دیگر مورد توجه قرار نمی‌گرفت و از آن بدتر، در آمستردام یک مرکز ریاضی تشکیل شد که همهٔ امکانات، حتی

۱. رک. [Al 79]، [Al 80].

۲. براؤر به اکثر بازدیدکنندگان حقوق می‌پرداخت. فهرست مختصری از دستیاران براؤر از این قرار است: ۱۹۲۵/۲۶ـ بلین ناته، منگر، الکساندروف، ویتوریس؛ ۱۹۲۶/۲۷ـ منگر، هورویچ؛ ۱۹۲۷/۲۸ـ منگر، هورویچ، گاون؛ ۱۹۲۸/۲۹ـ هورویچ، گاون؛ ۱۹۲۰/۳۰ـ هورویچ، گاون؛ ۱۹۳۰/۳۱ـ هورویچ، گاون، فرویدنتال، ۱۹۳۱/۳۲ـ هورویچ، فرویدنتال.

بیش از آنچه در سال ۱۹۲۰ به براؤر در مقابل رد پیشنهاد کرسی براین وعده داده شده بود، در اختیار آن مرکز قرار گرفت. به‌علاوه نقش خودش در مجلهٔ کومپوزیتیو ماتماتیکا به ریاستی صوری کاهش یافته بود.

وی در خارج از هلند به افتخاراتی دست یافت که در آن کشور به آنها نرسیده بود. به‌عنوان عضو خارجی انجمن سلطنتی بریتانیا برگزیده شد؛ کیمبریج (انگلستان) به وی دکتری افتخاری اعطا کرد؛ و چندین دعوت از وی به‌عمل آمد. در سال ۱۹۵۳ طی مسافرتهایی به امریکا و کانادا یک سلسله سخنرانی کرد. به‌علاوه سخنرانیهایی در فنلاند، انگلستان، فرانسه، بلژیک، افریقای جنوبی انجام داد. وی هفت سال پس ازازدست دادن همسرش لیزه دهل[1] زنده ماند و در دوم دسامبر ۱۹۶۶ در تصادم با اتوموبیل کشته شد.

کتابشناسی

[AH 35] Alexandroff, P. and Hopf, H. *Topologie I.* Springer Verlag, Berlin, 1935.

[Al 69] P. S. Alexandrov. Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920-1930. *Nieuw Arch Wiskunde*, 17: 109-127, 1969.

[Al 79] P. S. Alexandrov. Pages from an autobiography. *Russian Math. Surveys*, 34: 267-302, 1979.

[Al 80] P. S. Alexandrov. Pages from an autobiography. *Russian Math. Surveys*, 35: 315-358, 1980.

[Br 04a] L. E. J. Brouwer. Algebraic deduction of the decomposability of the continuous motion about a fixed point of S_4 into those of two S_3's. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 832-838, 1904a.

[Br 04b] L. E. J. Brouwer. On a decomposition of a continuous motion about a fixed point O of S_4 into two continuous motions about O of S_3's. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 716-735, 1904b.

[Br 04c] L. E. J. Brouwer. On symmetric transformation of S_4 in connection with S_r and S_l. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 6: 785-787, 1904c.

[Br 06a] L. E. J. Brouwer. Polydimensional vectordistributions. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 66-78, 1906a.

[Br 06b] L. E. J. Brouwer. The force field of the non-Euclidean spaces with negative curvature. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 116-133, 1906b.

[Br 06c] L. E. J. Brouwer. The force field of the non-Euclidean spaces with positive curvature. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 9: 250-266, 1906c. Corr. in 1909H2.

[Br 09a] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 11: 788-798, 1909a.

[Br 09b] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 286-297, 1909b. Corr. in 1911H2.

[Br 09c] L. E. J. Brouwer. Die Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie. *Atti IV Congr. Intern. Mat. Roma*, volume 2, pages 296-303, 1909c.

[Br 09d] L. E. J. Brouwer. Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, I. *Math Ann*, 67: 246-267, 1909d.

[Br 09e] L. E. J. Brouwer. *Het wezen der meetkunde*, 1909e. Openbare Les privaat docent 12.10.1909. (inaugural address). Also in 1919B.

[Br 09f] L. E. J. Brouwer. On continuous vector distributions on surfaces. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 11: 850-858, 1909f. Corr. in 1910D2.

[Br 10a] L. E. J. Brouwer. On continuous vectordistributions on surfaces, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 716-734, 1910a.

[Br 10b] L. E. J. Brouwer. On continuous vectordistributions on surfaces, III. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 171-186, 1910b.

[Br 10c] L. E. J. Brouwer. On the structure of perfect sets of points. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 12: 785-794, 1910c.

[Br 10d] L. E. J. Brouwer. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. *Math Ann*, 69: 176-180, 1910d.

[Br 11a] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math Ann*, 70: 161-165, 1911a.

[Br 11b] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. *Math Ann*, 71: 305-313, 1911b.

[Br 11c] L. E. J. Brouwer. Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum. *Math Ann*, 71: 314-319, 1911c.

[Br 11d] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, III. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 13: 767-777, 1911d. Corr. in 1911J2.

[Br 11e] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, IV. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 14: 300-310, 1911e.

[Br 11f] L. E. J. Brouwer. On the structure of perfect sets of points, II. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 14: 137-147, 1911f.

[Br 11g] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math Ann*, 71: 97-115., 1911g. Corr. in 1911M, 1921E.

[Br 11h] L. E. J. Brouwer. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. *Math Ann*, 71: 320-327, 1911h. Corr. in 1911N.

[Br 12a] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve. *Math Ann*, 72: 422-425, 1912a.

[Br 12b] L. E. J. Brouwer. Beweis des ebenen Translationssatzes. *Math Ann*, 72: 37-54., 1912b.

1. Lize de Holl

[Br 30] L. E. J. Brouwer. *Die Struktur des Kontinuums* [Sonderabdruck], 1930.

[Br 39] L. E. J. Brouwer. Zum Triangulationsproblem. *Ind Math*, 1: 248-253, 1939.

[Br 52] L. E. J. Brouwer. An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere. *Proceedings of the Royal Society London*, 213: 1-2, 1952.

[Br 75] L. E. J. Brouwer. *Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics (ed. A. Heyting)*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975.

[Br 76] L. E. J. Brouwer. *Collected works 2. Geometry, Analysis Topology and Mechanics. (ed. H. Freudenthal)* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1976.

[Br 92] L. E. J. Brouwer. *Intuitionismus*. Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.

[Ca 34] S. S. Cairns. On the triangulation of regular loci. *Ann Math*, 35: 579-587, 1934.

[Ca 35] S. S. Cairns. Triangulation of the manifold of class one. *Bull Am Math Soc*, 41: 549-552, 1935.

[Da 90] D. van Dalen. The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Annalen. *Math. Intelligencer*, 12: 17-31, 1990.

[Da 95] D. van Dalen. Hermann Weyl's intuitionistic mathematics. *Bull. Symb. Logic*, 1: 145-169, 1995.

[Da 81] D. van (ed.) Dalen. *L.E.J. BROUWER. Over de Grondslagen van de Wiskunde*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981. Brouwer's dissertation + correspondence and related papers.

[Da 84] D. van Dalen (ed.). *L.E.J. Brouwer, C.S. Adama van Scheltema. Droeve snaar, vriend van mij*. Arbeiderspers, Amsterdam, 1984.

[Da 57] D. van Dantzig. Gerrit Mannoury's significance for Mathematics and its Foundations. *Nieuw Arch Wiskunde*, 5: 1-18, 1957.

[Di 89] J. Dieudonné. *A History of Algebraic Differential Toplogy, 1900-1960*. Birkhäuser, Basel, 1989.

[Fr 92] J. Franks. A new proof of the Brouwer plane translation theorem. *Ergod. Th. and Dynamic Systems*, 12: 217-226, 1992.

[Fr 78] H. Freudenthal. Topologie in den Niederlanden: das erste Halbjahrhundert. *Nieuw Arch Wiskunde*, 26: 22-40, 1978.

[Hi 02] D. Hilbert. Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Math Ann*, 56: 381-422, 1902.

[Br 12c] L. E. J. Brouwer. Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, V. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 15: 352-360, 1912c.

[Br 12d] L. E. J. Brouwer. Sur la notion de 'classe' de transformations d'unemultiplicité. *Proc. V Int. Congr. Math. Cambridge 1912, II*, volume 2, pages9-10, 1912d.

[Br 12e] L. E. J. Brouwer. Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. *Math Ann*, 72: 55-56, 1912e.

[Br 13a] L. E. J. Brouwer. Some remarks on the coherence type η. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 15: 1256-1263, 1913a.

[Br 13b] L. E. J. Brouwer. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. *J Reine Angew Math*, 142: 146-152, 1913b. Corr. in 1924M.

[Br 18] L. E. J. Brouwer. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 5: 1-43, 1918.

[Br 19a] L. E. J. Brouwer. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil, Theorie der Punktmengen. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 7: 1-33, 1919a.

[Br 19b] L. E. J. Brouwer. Énumération des groupes finis de transformations topologiques du tore. *Comptes Rendus*, 168: 845-848, 1168, 1919b.

[Br 19c] L. E. J. Brouwer. Énumération des surfaces de Riemann regulières de genre un. *Comptes Rendus*, 168: 677-678, 832, 1919c.

[Br 19d] L. E. J. Brouwer. Intuitionistische Mengenlehre. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 28: 203-208, 1919d.

[Br 19e] L. E. J. Brouwer. Über die periodischen Transformationen der Kugel. *Math Ann*, 80: 39-41, 1919e.

[Br 20] L. E. J. Brouwer. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. *Math Ann*, 82: 94-96, 1920.

[Br 21] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruch-Entwickelung?. *Math Ann*, 83: 201-210, 1921.

[Br 23] L. E. J. Brouwer. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Stetigkeit, Messbarkeit, Derivierbarkeit. *Kon Ned Ak Wet Verhandelingen*, 2: 1-24, 1923.

[Br 24] L. E. J. Brouwer. Bemerkungen zum natürlichen Dimensionsbegriff. *Nederl Ak Wetensch Proc*, 27: 635-638, 1924.

[Br 29] L. E. J. Brouwer. Mathematik, Wissenschaft und Sprache. *Monats Math-Phys*, 36: 153-164, 1929.

[Ma 09] G. Mannoury. *Methodologisches und Philosophisches zur Elmentarmathematik.* Visser & Zn., Haarlem, 1909.

[Me 79] K Menger. *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics.* Reidel, Dordrecht, 1979.

[Ni 20] J. Nielsen. Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen. *Math Ann*, 81: 94-96, 1920.

[Po 12] H. Poincaré. Pourquoi l+espace a trois dimensions. *Rev Metaph Morale*, 20: 484-504, 1912.

[Sc 13] A. Schoenflies. *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, I, 1. Hälfte.* Teubner, Leipzig, Berlin, 1913.

[St 79] W. P. van Stigt. The rejected parts of Brouwer's dissertation on the Foundations of Mathematics. *Historia Mathematica*, 6: 385-404, 1979.

[St 96] W. P. van Stigt. L.E.J. Brouwer. Life, Art and Mysticism. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37: 381-429, 1996. Translation of [Brouwer05].

[We 21] H. Weyl. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Math. Zeitschr*, 10: 39-79, 1921.

* * * * * *

• این مقاله ترجمهٔ مقاله‌ای است که در کتاب *Handbook of Topology* به ویراستاری I. James چاپ خواهد شد.

* دیرک وان دالن، بخش ریاضیات و بخش فلسفهٔ دانشگاه اوترخت، هلند

[Jo 79] Dale M. Johnson. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part I. *Archive for History of Exact Sciences*, 20: 97-188, 1979.

[Jo 81] Dale M. Johnson. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. *Archive for History of Exact Sciences*, 25: 85-267, 1981.

[Ku 79] N. H. Kuiper. A short history of triangulation and related matters. *Proceedings Bicentennial Congress Wiskundig Genootschap (eds. P.C. Baayen, D. van Dulst, J. Oosterhoff)*, volume 1, pages 61-79, Amsterdam, 1979. Mathematisch centrum.

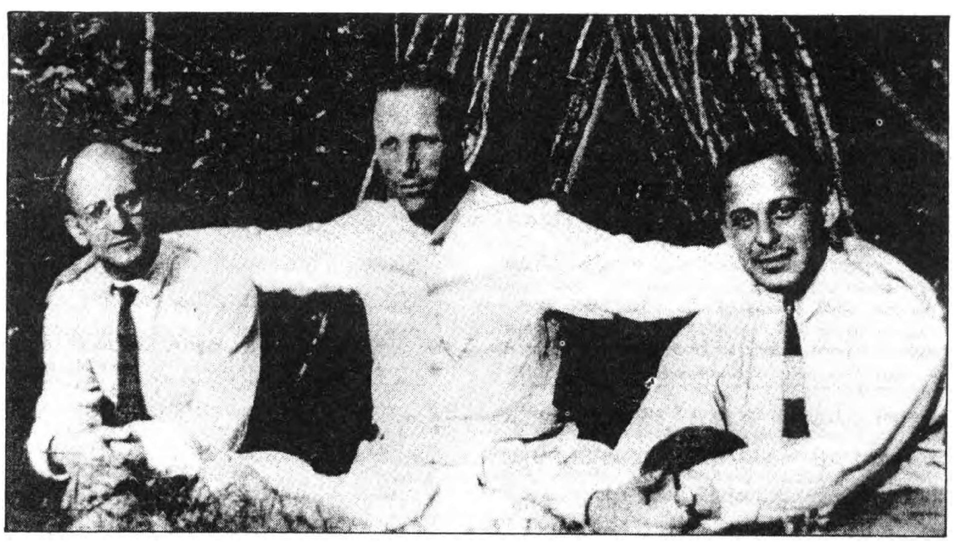
[Le 11a] H. Lebesgue. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement des espaces à n et $n+p$ dimensions (Extrait d'une lettre à M.O.Blumenthal). *Math Ann*, 70:166–168, 1911a.

[Le 11b] H. Lebesgue. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variété fermées. *Comptes Rendus*, 152: 841-843, 1911b.

[Le 21] H. Lebesgue. Sur les correspondances entre les points de deux espaces. *Fund. Math.*, 2: 256-285, 1921.

[Le 11] N. J. Lennes. Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. *American Journal of Mathematics*, 33: 287-326, 1911.

[Ma 98] G. Mannoury. Lois cyclomatiques. *Nieuw Arch Wiskunde*, 2: 126-152, 1898.



سه توپولوژیدان بزرگ (از چپ به راست) الکساندروف، براؤر، اوریسون