رامانوجان*

بروس برنت*
ترجمهٔ کورس ضیائی، محمد باقری

تخیل مهمتر از دانش است.

آلبرت اینشتین

برگزاری جشن تولد برای همه خوشایند است. ولی باید پذیرفت که گویا هرچه بیشتر پا به سن می‌گذاریم ازجشن تولدیگران بیش‌ازمال خودمان لذت‌می‌بریم. بزرگداشت سالروز تولدکسانی که‌قبل‌ازما جهان‌را ترك گفته‌اند نیز برایمان دلپذیراست. یادآوری دستاوردها و کارهای آنها شور و الهام لازم‌را برای زندگی خود ما فراهم می‌آورد و به‌تلاشهایمان جهت می‌بخشد. درسال ۱۹۸۵ جهان موسیقی سیصدمین سال تولد سه موسیقیدان بزرگ، یوهان سباستیان باخ، گئورك فریدریش هندل و دومینکو اسکارلاتی را جشن گرفت. جامعهٔ موسیقی مراسمی در بزرگداشت این سه‌تن برپا داشت ودستاوردهای‌آنها وتأثیری‌که آنان سالهاپس‌ازمرگ خود برموسیقی نهادند طی سخنرانیها و مقالات پرشمار بررسی شد.

سال۱۹۸۷ صدمین سالگرد تولد دوتن از ریاضیدانانی بود که تأثیر عمیقی برریاضیات گذاشته‌اند: اریش هکه و سرینی واسا رامانوجان[1]. بی‌شك بررسی‌تأثیرونفوذ هکه از رامانوجان‌آسانتر است، چراکه‌بسیاری‌ازکارهای رامانوجان هنوز ارزیابی‌نشده‌اند، انتشار نیافته‌اند یا هنوزکسی آنهارا درك نکرده‌است. به‌هیچ‌روی ادعا نمی‌کنیم‌که دراین مقالهٔ‌کوتاه می‌توانیم موضوع را روشن کنیم، اما شاید بتوانیم موجبات‌آشنایی بیشتر خوانندگان را با دستاوردهای رامانوجان فراهم آوریم. روال زندگی رامانوجان چنان نامعمول بودکه آن‌را با زندگی هیچ ریاضیدان دیگری نمی‌توان مقایسه‌کرد. اما جالب اینجاست‌که با روال زندگی باخ (البته درحدی نازلتر) شباهتهایی داردکه دراین‌مقاله به‌اختصار نشان داده خواهد شد. درواقع به‌خاطر مهارت بی‌نظیر باخ در چندنوایی حساب‌شده و رهیافت برنامه‌ریزی شده و روشمند او، اغلب وی‌را باخ «ریاضیاتی» نامیده‌اند.

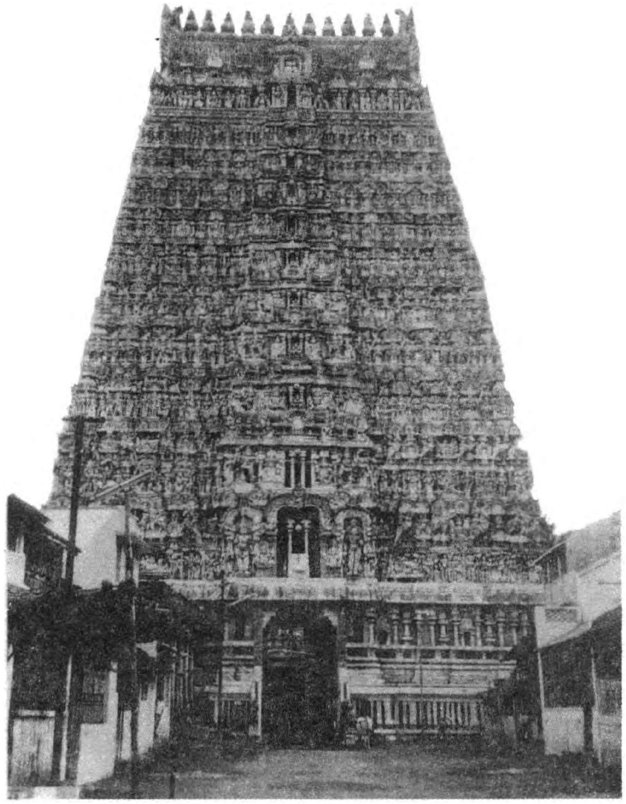
1. Srinivasa Ramanujan

زندگی وکارهای رامانوجان

ازآنجاکه اغلب خوانندگان با داستان غم‌انگیز زندگی بسیار کوتاه رامانوجان آشنا هستند در اینجا تنها به‌اجمال ازآن یاد خواهیم کرد. توصیفهای کاملتری‌رادرمجموعهٔ‌آثار رامانوجان[۱۹]، کتابهای گادفری هرلد هاردی [۱۳] و برنت[۸] ومقالهٔ راماناتان به‌مناسبت صدمین‌سال تولد رامانوجان[۱۷] می‌توان‌یافت.

رامانوجان در روز ۲۲ دسامبر ۱۸۸۷ درشهر ارود واقع در جنوب هندوستان به‌دنیاآمد. چنانکه درآن روزگار مرسوم بود وی درخانهٔ پدربزرگ ومادربزرگ مادریش چشم به‌جهان گشود. کمی‌پس‌ازآن، مادر رامانوجان به‌همراه‌نوزادش به‌شهر کومباکونام که‌شوهرش‌درآنجا نزد تاجرپارچه‌ای‌حسابداری می‌کردبازگشت. این‌شهر درآن زمان جمعیتی حدود ۵۲۰۰۰ نفر داشت. امروزه کومباکونام بیش‌از۱۵۰۰۰۰ نفرجمعیت دارد و به‌خاطرمعبدهایش معروف است. اگر درخیابان سارانگاپانی سانیدهی درمقابل‌خانهٔ فقیرانهٔ‌تك‌اتاقهٔ رامانوجان بایستیم می‌توانیم معبد سارانگاپانی را که باشکوهترین این معبدهاست چند خانه آن طرف‌تر ببینیم. کومباکونام درحدود۲۵۰ کیلومتری‌جنوب جنوبغربی مدرس واقع است و تقریباً ۳۰تا ۳۵کیلومتر با خلیج‌بنگال فاصله دارد. چیدام بارام، شهر دیگری در هندکه به‌سبب معبدهایش مشهور است در شمال‌شرقی کومباکونام و درحدود ۷۰کیلومتری آن قرار دارد.

اکثر ریاضیدانان بزرگ از مراکزعمدهٔ علمی و نیز ازسایر ریاضیدانان‌مشهور تأثیرپذیرفته‌اند. این‌موضوع دربارهٔ رامانوجان



معبد سارانگاپانی در کومباکونام، در نزدیکی خانهٔ رامانوجان

که تا حد زیادی خود آموخته بود صدق نمی‌کند. پس باید به سراغ کتابهایی برویم که بر رامانوجان تأثیر گذاشتند، و در این زمینه‌هم اطلاعات ما بسیار اندك است. رامانوجان در ۱۲ سالگی بر محتویات کتاب مثلثات مسطحه اثر لانی[1] که درسال ۱۸۹۴ در کیمبریج منتشر شده‌بود و از آنچه که امروزه‌به‌آن «مثلثات»می‌گوییم تنها اندکی افزونتر داشت، تسلط یافت. سرفصلهای این کتاب (مانند لگاریتم کمیتهای مختلط، سریهای گرگوری، محاسبهٔ مقدار پی، مجموع‌یابی سریها وبسطهای سری)هم بیانگر وسعت دامنهٔ مطالب کتاب است و هم خط‌سیری راکه رامانوجان چه دراوایل کار وچه بعدها درقلمرو ریاضیات پیمود، نشان می‌دهد.

رامانوجان در ۱۵ سالگی کتاب چکیدهٔ قضایای مقدماتی در ریاضیات محض اثر کار[2] را از کتابخانهٔ کالج دولتی محل خود امانت گرفت. سبك ومحتویات کتاب چنان‌بود که درطول دههٔ بعدی تأثیر عمیقی بر رامانوجان گذاشت؛ هرچندکه او در این دوره موضوعهای خیلی بیشتری‌را بررسی و ابداع کرد. کتاب فشردهٔ کار شامل‌حدود ۵۰۰۰ صورت‌قضیه‌وطرح خلاصه‌ای از اثبات آنهاست. درحوالی سال ۱۹۰۳ رامانوجان شروع به‌ثبت کشفیات ریاضی خود در دفترهای یادداشت کرد، بدون آنکه اشاره‌ای به‌اثبات آنها کند. گرچه رامانوجان بدون‌شك از الگوی کتاب‌کار تأثیرپذیرفته بود، احتمالاً کمبودکاغذ و اطمینان وی از اینکه هرگاه بخواهد می‌تواند برهان قضایای خودرا عرضه‌کند علتهای عمدهٔ انتخاب این‌روش فشرده بود.

رامانوجان‌درآخرین‌سال‌تحصیل‌دردبیرستان‌شهر کومباکونام، در امتحان ورودی دانشگاه مدرس شرکت‌کرد و با مرتبهٔ «عالی» قبول شد. درسال ۱۹۰۳ وارد دانشگاه دولتی کومباکونام شد که به‌سبب بالابودن سطح علمیش وازآنجاکه همچون دانشگاه کیمبریج که درکنار رودکم قراردارد، درکرانه‌های رود کاوری‌واقع‌است، اغلب آن‌را «کمبریج جنوب‌هند»می‌خوانند. دراین‌زمان رامانوجان سراپا مجذوب ریاضیات شده‌بود و به‌هیچ‌یك از درسهای دیگر نمی‌توانست بپردازد. درنتیجه درپایان سال اول در امتحانها رد شد و نتوانست به‌درس ادامه‌دهد. تلاشهای بعدی او برای‌تحصیل در دانشگاه نیز به همان دلیل به‌جایی نرسید. بنابراین در سالهای بین ۱۹۰۳ تا ۱۹۱۰ رامانوجان در تنهایی کار می‌کرد و خود را به‌تمامی‌وقف‌ریاضیات کرده،یافته‌های‌خود را دردفترهای‌یادداشتش می‌نوشت.

در ۱۹۰۹ باخانم‌س. جاناکی[1] ازدواج‌کرد و ازاین‌رو برآن شدکه به‌دنبال شغلی بگردد. عاقبت درسال ۱۹۱۲ به‌عنوان کارمند دفتری در ادارهٔ امانات پستی بندر مدرس مشغول به‌کارشد. رئیس اداره، سر فرانسیس اسپرینگ و مدیرآن س. ن. ایار[2] که خودنیز ریاضیدان بود توجهشان شدیداً به رامانوجان جلب شد و او را تشویق کردند که کشفیات خود را با بعضی ریاضیدانان انگلیسی درمیان بگذارد. اولین نامه‌نگاریهای او نتایج دلگرم‌کننده‌ای به‌بار نیاورد تا آنکه در۱۶ژانویهٔ۱۹۱۳ نامه‌ای به‌هاردی نوشت و بدین‌ترتیب یکی از پرمحتواترین همکاریهای تاریخ ریاضیات سرگرفت. هاردی [۱۳ص۹] درمورداولین نامهٔ رامانوجان [۱۳ ص۹] راجع به‌چند فرمول کسرهای مسلسل،بعدها چنین گفت:

> من قبلاً هرگز چیزی ندیده بودم‌که دست‌کم شباهتی به‌این فرمولها داشته‌باشد. بایك‌نگاه می‌توان‌دریافت‌که‌ریاضیدان طراز اولی‌آنها را نوشته‌است. این‌مطالب باید درست‌باشد چون اگر درست نبود هیچکس چنین قوهٔ تخیلی نداشت‌که آنها را ازخود اختراع‌کند.

رامانوجان‌پاسخ تشویقهای هاردی را در نامهٔ دوم‌خود[۱۹] چنین داد: «من شمارا دوستی یافته‌ام‌که با دلسوزی به‌کارهایم می‌نگرد».

1. S.L. Loney 2. G.S. Carr

1. S. Janaki 2. S. N. Aiyar

رامانوجان پس‌از غلبه بر موانع طبقاتی و خانوادگی دعوت هاردی را برای رفتن به کیمبریج پذیرفت ودر روز۱۷مارس۱۹۱۴ هندوستان را ترک گفت. ظرف سه‌سال بعد، کشفیات رامانوجان به شهرت ماندگاری دست‌یافت. ما فقط به‌سه‌تا از مهمترین مقالات او در این دوره‌اشاره می‌کنیم. اولی [۱۸]، دربارهٔ برخی تابعهای حسابی، در بخش اعظم قرن حاضر تأثیر ژرفی برنظریهٔ اعداد و صورتهای پیمانه‌ای گذاشته‌است. دراین رساله رامانوجان تابع‌تاو را مطرح کرد وحدس معروف‌خود را درمورد مقدار آن بیان‌داشت. مقالهٔ دوم [۱۴] که‌مشترکاً باهاردی‌نوشته‌شده، تعدادعادی‌عاملهای اول‌عددی چون n، امروزه به‌عنوان پایه‌ای برای نظریهٔ احتمالاتی اعداد شناخته می‌شود. سومی[۱۵] که آن‌هم با هاردی نوشته شده فرمولهای‌مجانبی درآنالیز ترکیبی نام‌دارد. دراین‌مقاله‌نویسندگان فرمول مجانبی قابل‌توجهی برای‌تابع افراز به‌دست‌آوردند ویکی از ژرفترین‌ومفیدترین روشهارا درنظریهٔ تحلیلی اعداد به‌نام‌روش «دایره‌ای» هاردی-رامانوجان-لیتلوود مطرح کردند.

پس‌از گذشت سه‌سال در کیمبریج، رامانوجان به‌شدت مبتلا به مرض ناشناخته‌ای شد که فکر می‌کردند سل باشد. تجزیه و تحلیل رانکین [۲۴] از گزارشهای طبی و نامه‌هایی‌که رامانوجان ارسال و دریافت کرده به‌این‌نتیجه منجر شده‌که مرض رامانوجان احتمالا سل نبوده‌است، امابیماری او را هم مشخص نمی‌کند. رامانوجان پس‌ازگذراندن دوسال دربیمارستان و آسایشگاه به‌هند بازگشت. درسال۱۹۸۴ بیوهٔ او به‌نگارنده گفت‌که اولین حرف رامانوجان در بازگشت به‌میهنش به‌وی این‌بوده که می‌بایست اورا با خود به انگلستان می‌برد. رامانوجان می‌گفت‌که اگر همسرش همراه او می‌بود و غذا می‌پخت و از او مراقبت می‌کرد، به‌سوء تغذیه و بدخوابی‌که به‌نظر وی منشأ اصلی ناخوشی او بوده دچار نمی‌شد. شاید چنین تصور شود که رامانوجان از سفر به‌انگلستان تأسف می‌خورد. اما بیوهٔ او به‌نگارنده گفت که وی اقامت خود را در انگلستان بهترین واقعه‌ای توصیف می‌کرد‌که در زندگیش رخ‌داده است. او هرگزاز آنچه‌پیش آمد متأسف نبود و از هاردی، به‌خاطر همه محبتهایی‌که درحق او کرده بود فوق‌العاده سپاسگزار بود. با آنکه‌بیماری او را رفته‌رفته‌ناتوانترمی‌کرد باخوش‌بینی‌می‌اندیشید که سلامتی خود را بازخواهد یافت. اندکی پس از بازگشت به هندوستان از او دعوت‌کردندکه‌سمت استادی‌را دردانشگاه‌هندویی بنارس بپذیرد. رامانوجان در پاسخ نوشت‌که متأسفانه به‌سبب بیماری ازپذیرفتن چنین‌سمتی درآن‌زمان معذوراست ولی‌هنگامی که وضع مزاجی بهتری‌یافت آن‌را باعلاقه‌خواهدپذیرفت. بیماری رامانوجان بهبودی درپی‌نداشت، و وی در روز ۲۶ آوریل۱۹۲۰ در سن۳۲سالگی درگذشت.

پس‌ازمرگ رامانوجان ازاو۳۷ مقالهٔ منتشر شده، مجموعه‌ای از مسائل جالب‌که در مجلهٔ انجمن ریاضی هندوستان مطرح شده بود، بیش‌ازیکصد صورت‌قضیه در نامه‌هایش به‌هاردی، سه‌دفترچهٔ یادداشت و چندین مقاله و دستنوشتهٔ منتشر نشده باقی‌ماند. مجموعهٔ مقالات[۱۹] او در۱۹۲۷ انتشاریافت. قضیه‌هایی که‌اودرنامه‌هایش به‌هاردی‌مطرح کرددراواخردههٔ ۱۹۲۰واوایل‌دههٔ۱۹۳۰الهام‌بخش انبوهی از مقالات شد. بالاخره در سال ۱۹۵۷ مؤسسهٔ پژوهشهای بنیادی تاتا یادداشتهای اورا[۲۰] به‌صورت نسخهٔ عکسی بدون ویرایش به‌چاپ رساند. رانکین شرحی راجع به‌آثار چاپ نشدهٔ رامانوجان[۲۳] نوشته است. باوجود این میراث، بعضی از آثار رامانوجان، درست همچون باخ، گم شده است. خانم رامانوجان اظهارداشته‌است‌که شوهرش‌دربازگشت‌ازانگلستان چمدان‌بزرگی پراز مقاله باخود به‌همراه‌داشت. همچنین ازهمهٔ گزارشهای‌موجود چنین برمی‌آیدکه رامانوجان درآخرین‌سال زندگی باوجود ابتلا به‌بیماری باکوششی خستگی‌ناپذیر در زمینهٔ ریاضیات کارمی‌کرد. خانم رامانوجان در سال ۱۹۸۴ به‌نگارنده اطلاع دادکه او در آخرین‌سال عمرش یکسره به‌ریاضیات می‌پرداخت و مقاله‌هایش را درچمدانی چرمی زیر بستر خود قرار می‌داد، با این حال کل آثار مربوط به‌سالهای ۱۹۱۸ تا۱۹۲۰که از وی دراختیارداریم «دفتر یادداشت گم‌شدهٔ» [۲۱] اوست که اندروز هنگام بررسی مقاله‌های واتسن درکتابخانه‌کالج ترینیتی کیمبریج پیداکرد. برسر سایرآثار رامانوجان چه‌آمده‌است؟ خانم جاناکی به‌نویسنده‌گفت هنگامی‌که مشغول مراسم تدفین شوهرش بود، پ. و. سشو ایار[1] معلم ریاضی رامانوجان در کالج دولتی کومباکونام به‌خانهٔ آنها آمد و همهٔ‌مقاله‌های‌رامانوجان را باخود برد. گویادانشگاه مدرس جایگاه نهایی مقاله‌های رامانوجان شده‌است. آیا خیلی از این مقاله‌ها در دانشگاه گم‌شد؟ ما همین‌قدر می‌دانیم که این‌کتابخانه گزارشهای فصلی رامانوجان راکه وی درسال قبل‌از عزیمت به انگلستان ضمن استفاده از یک بورس تحصیلی در دانشگاه مدرس می‌نوشت گم‌کرده‌است. دانشگاه‌مدرس بیشتر مقاله‌های‌رامانوجان را درسال ۱۹۲۳ به‌کیمبریج فرستاد ولی دفترهای‌یادداشت‌اصلی را نگاه داشت. بنابراین به‌نظر می‌رسد که بسیاری از مقاله‌های رامانوجان درفاصلهٔ‌کمی پس‌ازمرگش یاگم‌شد یا دورانداخته‌شد. فرزندان موسیقیدان باخ‌باید مسؤولیت سنگین گم‌شدن بسیاری از آثار پدرشان را به‌عهده بگیرند. بدیهی‌است‌که بعضی‌ازمعاصران رامانوجان نیز باید بار مسؤولیت مشابهی را بردوش بکشند.

افسانه‌ها

افسانه‌هایی دربارهٔ آثار رامانوجان ساخته شده‌که باید آنها را کنار گذاشت. اول اینکه رامانوجان مکرراً اشتباه می‌کرد. ریشهٔ این‌اظهارنظر به‌نامه‌هایی برمی‌گرددکه رامانوجان به‌هاردی نوشت ودرآنها چندفرمول‌مجانبی درنظریهٔ تحلیلی‌اعداد ذکرکرد([۱۳] و [۱۹]). این فرمولها یا غلط بودند و یا درآن‌زمان قابل اثبات نبودند. اشتباههای رامانوجان ناشی از بی‌اطلاعی او از تابعهای بامتغیرهای مختلط بود. به ویژه او اساساً همه صفرهای‌تابع زتای ریمان را عدد حقیقی می‌انگاشت. برای بررسی دقیق این‌موضوع به‌کتاب هاردی[۱۳] فصل ۲ مراجعه‌کنید. در مجموعهٔ مقاله‌های رامانوجان به‌ندرت‌می‌توان‌اشتباهی یافت. گرچه دفترهای‌یادداشت اوتنها به‌خاطر ثبت نتایج برای خودش تنظیم‌شده‌بود، تعداد خیلی کمی غلط در مطالب آنها می‌توان پیداکرد. البته بعضی‌حکمها در این دفترهای یادداشت بی‌معنی به‌نظر می‌رسند. وی‌احتمالا این مطالب را به‌عنوان یادآوری اصولی نوشته‌بودکه قصد داشت بعدها آنها را به‌کار برد یا بیان‌کند. از آنجا که رامانوجان آموزش

1. P. V. Seshu Aiyar

رسمی اندکی در ریاضیات دیده بود، مکرراً از برهانهای غیردقیق استفاده می‌کرد. مثلاً عملیات حدی را بدون هیچ توجیهی جا به‌جا می‌کرد. علی‌رغم این نقصان آموزشی، رامانوجان توانایی خارق‌العاده‌ای در تشخیص این موضوع داشت که عملیاتش چه‌موقع معتبر و چه‌موقع نامعتبرند. بنابراین، خارج از محدودهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد، فرمولهای رامانوجان تقریباً همگی درست هستند. رامانوجان درمقایسه با اکثر افرادی چون ما که شغلمان ریاضیات است، به‌مراتب غلطهای کمتری مرتکب شد.

درخارج از محدودهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد، فرمولهای رامانوجان تقریباً همگی درست هستند. رامانوجان در مقایسه با افرادی، چون ما که شغلمان ریاضیات است، به‌مراتب غلطهای کمتری مرتکب شد.

خیلیها رامانوجان را یک «صورت‌گرای صرف» به‌شمار می‌آورند. منظورشان این است که رامانوجان ریاضیدانی «سطح پایین» بوده است؛ اوفقط فرمول ثابت می‌کرده ونمی‌توان اورا با ریاضیدانان انتزاعی‌تر، یعنی ریاضیدانان «سطح بالا» مقایسه کرد. ظاهراً کسانی که‌چنین عقیده‌ای دارند می‌پندارند که رامانوجان رابطه‌ای را می‌گرفت، خیلی از انتگرال‌گیریها و مجموع‌یابیها را جابه‌جا می‌کرد و دستکاریهایی انجام می‌داد تا رابطه‌ای پیچیده‌تر به‌دست آورد. ولی کار رامانوجان بسیار بیش از دستکاری و جابه‌جا کردن فرایندهای حدی بود. درحقیقت درمورد بسیاری از فرمولهایش خیلی از ما دوست داریم بدانیم رامانوجان چگونه استدلال می‌کرده است. اگر ما به‌باطن او دسترسی داشتیم اطلاعات زیادی به‌دست می‌آوردیم. از آن گذشته هرچند تعدادی از فرمولهای رامانوجان کهنه، بی‌مصرف و نازیبا هستند، اکثر فرمولهایش ژرف، مفید و درخشان هستند. اینها فرمولهایی نیستند که صرفاً به‌خاطر خودشان پدید آمده باشند. برای ملاحظهٔ اثبات این مطلب که فرمولهای رامانوجان مفیدند و به‌نتایج مفید دیگری منجر می‌شوند، نگاه کنید به گزارشهای کنفرانس بزرگداشت صدهٔ رامانوجان[۵] که در روزهای اول تا پنجم ژوئن ۱۹۸۷ در دانشگاه ایلینوی برگزار شد. عرصه‌ای که اکثر فرمولهای رامانوجان را می‌توان از آن استخراج کرد درواقع سریهای نامتناهی است. همان‌طور که باخ در تصنیف کانتاتها هیچ همتایی نداشت، در تاریخ ریاضیات هم رامانوجان در «تصنیف» سریهای نامتناهی احتمالاً بجز اویلر و ژاکوبی هیچ همتایی نداشت.

وقتی باخ در مدرسهٔ توماس لایپزیگ رهبر گروه خوانندگان شد، رتبهٔ چهارم را در گزینش کسب کرده بود. خیلیها بر آن بودند که باخ بیش از حد محافظه‌کار، و دارای افکاری کهنه و از مد افتاده است. هاردی دربارهٔ رامانوجان چنین اظهار عقیده کرده است ([۱۳] ص ۱۴) «شاید ایام شکوهمندی فرمول به پایان آمده باشد و رامانوجان باید ۱۰۰ سال پیش به‌دنیا می‌آمد.» ولی ما می‌خواهیم بطلان این عقیدهٔ گسترده را که رامانوجان از زمانهٔ خود عقب بود نشان دهیم. مسلماً رامانوجان انواع گوناگونی از ابزارها و روشهای متعلق به قرنهای ۱۸ و ۱۹ را به‌کار می‌گرفت. در واقع بسیاری از نتایجی که او به‌دست آورد حال و هوای آنالیز کلاسیک قرن ۱۹ را دارد. اما در بسیاری از جنبه‌ها رامانوجان چندین دهه از زمان خود جلوتر بود. دلیل این ادعا عمدتاً در دفترهای یادداشت، «دفتر یادداشت گم‌شده» و سایر دستنوشته‌های منتشرنشدهٔ او نهفته است، هرچند که مقالهٔ فوق‌العادهٔ او[۱۸] نیز این دیدگاه را تقویت می‌کند. برای تأیید ادعای خود چند مثال می‌آوریم.

تأثیرگذاری رامانوجان

در تاریخ ریاضیات رامانوجان هیچ همتایی در یافتن نمایش توابع تحلیلی به‌صورت کسر مسلسل ندارد. مثلاً حالتی خاص از مطلب شمارهٔ ۳۲ (۳) در فصل ۱۲ از دفتر یادداشت دوم او [۲۰]، فرمول زیر است

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2\times 2+}\,\frac{1^3}{1+}\,\frac{1^3}{6\times 2+}\,\frac{2^3}{1+}\,\frac{2^3}{10\times 2+}\cdots$$

این کسر مسلسل برای $\zeta(3)$، در اثبات تاریخی آپری [۶] که $\zeta(3)$ عددی گنگ است کمال اهمیت را داشت. پنج سال پس از اثبات آپری تازه فهمیدند که ابتدا رامانوجان بوده است که این کسر مسلسل فوق‌العاده سودمند را یافته است [۱۰]. رامانوجان کسرهای مسلسل زیادی برای حاصلضربها و خارج قسمتهای توابع گاما پیدا کرد. گرچه امروزه اکثر این فرمولها را اثبات کرده‌ایم، هنوز نمی‌توانیم بفهمیم منشأ آنها چه بوده، رامانوجان چگونه آنها را کشف کرده و اینکه آیا این نتایج قابل تعمیم‌اند یا نه.

گرچه بسطهای مجانبی رامانوجان در نظریهٔ اعداد به‌خوبی شناخته شده است، بسطهای مجانبی عموماً عمیقتر وی در آنالیز چندان شناخته‌شده نیست. مثلاً، (طبق [۲۰]، [۹])، مطلب شمارهٔ ۱۰، [۱۲]، قضیهٔ ۹) هنگامی که h به‌سمت $+0$ میل می‌کند،

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{\phi(h(\alpha+j\delta))}{\phi(h(\beta+j\gamma))} = \sqrt{\frac{\pi\phi(0)}{2h(\gamma-\delta)\phi'(0)}} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} + \frac{\gamma+\delta}{4(\gamma-\delta)}\left(1-\frac{\phi(0)\phi''(0)}{\phi'(0)^2}\right) + O(\sqrt{h}) \qquad (1)$$

شرایطی که تحت آن شرایط این بسط معتبر است، معین شده است ([۹] و [۱۲]). اما ردهٔ توابعی که (۱) برای آنها برقرار است بی‌شک قابل گسترش است. شکل این فرمول مجانبی یادآور فرمولهای مجانبی مطرح‌شده در روش فاز مانا و سایر برآوردهای مجانبی انتگرالهاست. آیا رامانوجان اولین قضیهٔ بسط مجانبی را برای نظریهٔ متناظری درمورد سریها پیدا کرده بود؟ برای به‌دست آوردن نظر روشنی دربارهٔ بسیاری از بسطهای مجانبی زیبا و نیرومند رامانوجان به‌مقالهٔ اوانز[۱۲] نگاه کنید.

در آخرین نامهٔ رامانوجان به‌هاردی[۱۹] ودر «دفتر یادداشت گم‌شده»[۲۱] رامانوجان، وی چندین حکم را دربارهٔ «توابع تتای ساختگی» بدون برهان ذکر می‌کند که شاید آخرین ابداع او در زندگی کوتاهش باشد. تابع

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)} \qquad (2)$$

مثالی از یک تابع تتای ساختگی مرتبهٔ پنجم است. به‌طور خلاصه می‌توان گفت توابع تتای ساختگی رفتار توابع تتای کلاسیک را در مرزهای طبیعی قلمروی که در آن تحلیلی هستند به نمایش می‌گذارند، اما در فرمولهای تبدیل صدق نمی‌کنند. بسیاری از فرمولهای رامانوجان هنوز نیازمند بررسی‌اند. خوانندگان می‌توانند برای آشنایی با این توابع اسرارآمیز که ما هنوز هم درک مبهمی از آنها داریم به آثار اندروز، به‌ویژه رسالهٔ [۱] و تکنگاشت [۳] وی مراجعه کنند.

تابع

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)/2}}{(1+q)(1+q^{2})\cdots(1+q^{n})} \qquad (3)$$

شباهتی ظاهری به تابع (۲) دارد. اما بین آنها تفاوتهای بسیار چشمگیری نیز هست. اندروز[۲] ضرایب بسط (۳) به‌سری توانی را به‌روش عددی بررسی کرد و حدس زد که تعدادی نامتناهی از آنها مساوی صفرند ولی بقیه به ∞ میل می‌کنند. این حدسها توجه بعضی از برجسته‌ترین ریاضیدانهای زمان ما را جلب کرد، زیرا رفتار حدسی این ضرایب با وضعیتهای معمولی که در آنها همهٔ ضرایب «کوچک» یا همهٔ آنها «بزرگ» هستند مغایرت داشت. حدسهای اندروز بعداً توسط خود او و هیکرسن [۴] اثبات شد، و کوهن نیز کارهای اساسی دیگری در این زمینه کرد [۱۱]. کوهن در یک

رمز فرایند خلاقیت رامانوجان را هنوز پرده‌ای پوشانده که جز به‌میزان اندکی کنار نرفته‌است.

سخنرانی در کتک ضمن تشریح نتایج به‌دست آمده اعلام کرد که این کشفها فقط به‌منزلهٔ «قسمت بالای کوه یخ» نظریه‌ای عام هستند که هنوز برای تکامل آتی خود جا دارد.

همان‌طور که قبلاً گفته‌شد، سال ۱۹۸۷ صدمین سال تولد داریش هکه نیز هست. یکی از درخشانترین و نافذترین نظریه‌های هکه نظریهٔ صورتهای پیمانه‌ای، حاصلضربهای اویلر و سریهای دیریکلهٔ اوست. اما در یکی از دستنوشته‌های منتشر نشدهٔ رامانوجان بعضی از عناصر «نظریهٔ هکه» را می‌توان یافت. برای ملاحظهٔ شرح این مطالب، مقاله‌های جالب راگهاون[۱۶] و رانگاچاری [۲۲] را که در کنفرانس سدهٔ رامانوجان در دانشگاه ایلینوی عرضه‌شد ببینید.

در این کنفرانس ر. ویلیام گاسپر میزان تأثیر رامانوجان را در دورهٔ خود چنین بیان کرد که «چگونه می‌توانید مردی را دوست بدارید که پیوسته از گور خود برمی‌خیزد تا فرمولهایتان را از شما برباید؟». به‌عنوان شاهدی دیگر، خاطرنشان می‌کنیم که بررسی کامپیوتری در منابع و کتب نشان می‌دهد که در دههٔ اخیر تقریباً در ۳۰۰ مقاله، ضمن عنوان یا چکیده به آثار رامانوجان ارجاع داده شده‌است.

آوازهٔ رامانوجان

پس از مرگ باخ در سال ۱۷۵۰، گرچه آوازهٔ او در بین موسیقیدانان و آهنگسازان حرفه‌ای همچنان در اوج باقی ماند، محبوبیت موسیقی وی نزد مردم به‌نحو چشمگیری کاهش یافت. تجدید حیات موسیقی باخ در ۱۱ مارس ۱۸۲۹ آغاز شد که مندلسون «پاسیون» متای باخ را اجرا کرد.

پس از انتشار مجموعهٔ مقالات[۱۹] رامانوجان در سال ۱۹۲۷، یعنی ۷ سال پس از مرگش، تعداد زیادی مقاله که پریس، واتسن و دیگران نوشته بودند منتشر شد. انگیزهٔ نگارش اکثر این مقالات ادعاهایی بود که رامانوجان در نامه‌هایش به‌هاردی مطرح کرده‌بود و در مجموعهٔ مقالات[۱۹] نقل شده‌بود. پس از آن، نفوذ رامانوجان قدری فروکش کرد، هرچند که بعداً به‌خاطر مزایای چشمگیر روش «دایره‌ای» و ابداع نظریهٔ احتمالاتی اعداد ادامه یافت. بدین‌ترتیب رامانوجان در بین بسیاری از عالمان نظریهٔ اعداد در اوج احترام باقی ماند. اما در دهسالهٔ گذشته آوازه و اعتبار رامانوجان افزایش یافته‌است. برخلاف اجرای مندلسون از آهنگ باخ، مشکل بتوان رویداد یا مقاله‌ای را به‌عنوان نقطهٔ آغاز این اوج‌گیری معرفی کرد، هرچند شاید کشف «دفتر یادداشت گم‌شده» توسط اندروز در سال ۱۹۷۶ چنین نقشی داشته است. نتایج فراوانی که از دفترهای یادداشت، «دفتر یادداشت گم‌شده» و دستنوشته‌های منتشر نشدهٔ رامانوجان کسب شده رویهمرفته عامل اصلی در بازشناسی ارزش نبوغ رامانوجان هستند. کاربردهای فیزیکی، ازقبیل اثر باکستر[۷] دربارهٔ مدل شش‌ضلعی سخت هم در این‌میان نقش دارد. به‌علاوه، ریاضیدانانی چون اسکی[1] و راماناتان نشان داده‌اند که قضایای زیبای رامانوجان چگونه با ریاضیات جدید تطبیق می‌یابند. احتمالاً بهترین راه درک نفوذ وسیع رامانوجان در دورهٔ معاصر خواندن مقالاتی است که در کنفرانس سدهٔ رامانوجان[۵] عرضه‌شد.

خیلی از ادعاهای رامانوجان را هنوز باید ثابت کرد و تعداد زیادی از آنها هنوز به‌طور کامل درک نشده‌اند. رمز فرایند خلاقیت رامانوجان را هنوز پرده‌ای پوشانده که جز به‌میزان اندکی کنار نرفته‌است.

مراجع

1. G. E. Andrews, The fifth and seventh order mock theta functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 293 (1986), 113-134.
2. —, Questions and conjectures in Partition theory, *Amer. Math. Monthly* 93 (1986), 708-711.
3. —, *q-series: Their development and applications in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS regional conf., no. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.
4. G. E. Andrews and D. Hickerson, *Partitions and indefinite quadratic forms*, to appear.
5. G.E.Andrews,R.A.Askey,B.C.Berndt,K.G Ramanathan, and R.A. Rankin, eds., *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.

1. R. A. Askey

6. R. Apéry, Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes, *Bull. Section des Sci.*, Tome III, Bibliotheque Nationale, Paris, 1981, 37-63.
7. R. J. Baxter, Ramanujan's identities in statistical mechanics, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
8. B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part I, Springer-Verlag, New York, 1985.
9. B. C. Berndt and R. J. Evans, Chapter 13 of Ramanujan's second notebook: Integrals and asymptotic expansions, *Expos. Math.* 2 (1984), 289-347.
10. B. C. Berndt, R. L. Lamphere, and B. M. Wilson, Chapter 12 of Ramanujan's second notebook: Continued fractions, *Rocky Mt. J. Math.* 15 (1985), 235-310.
11. H. Cohen, Sur une fausse forme modulaire liee a des identites de Ramanujan et Andrews, *Proceedings of the International Number Theory Conf.*, Université Laval, 1987, to appear.
12. R. J. Evans, Ramanujan's second notebook: asymptotic expansions for hypergeometric series and related functions, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
13. G. H. Hardy, *Ramanujan*, third ed., Chelsea, New York, 1978.
14. G. H. Hardy and S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number *n*, *Quart. J. Math.* 48 (1917), 76-92.
15. G. H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2) 17 (1918), 75-115.
16. S. Raghavan, Euler products, modular identities and elliptic integrals in Ramanujan's manuscripts I, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
17. K. G. Ramanathan, Srinivasa Ramanujan 22 December 1887-26 April 1920, *J. Indian Math. Soc.*, to appear.
18. S. Ramanujan, On certain arithmetical functions, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22 (1916), 159-184.
19. S. Ramanujan, *Collected Papers*, Chelsea, New York, 1962.
20. S. Ramanujan, *Notebooks* (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
21. S. Ramanujan, *Lost Notebook*, unpublished manuscript, Trinity College Library, Cambridge.
22. S. S. Rangachari, Euler products, modular identities and elliptic integrals in Ramanujan's manuscripts II, *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, 1988, to appear.
23. R. A. Rankin, Ramanujan's manuscripts and notebooks, *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 81-97.
24. R. A. Rankin, Ramanujan as a patient, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 93 (1984), 79-100.

****

• Bruce C. Berndt, "Ramanujan-100 years old (fashioned) or 100 years new (fangled)?," *The Math. Intelligencer*, (3) **10** (1988) 24-29.

★ بروس برنت، دانشگاه ایلینوی در اربانا، آمریکا