

هر که شاخ را گرفت، شکست و فرو افتاد،
و هر که درخت را گرفت همه شاخ آن اوست.
شمس‌الدین تبریزی

اندرز به ریاضیدان جوان*

اتیا، بلوباش، کُن، مک‌داف، سرنک
ترجمه بامداد یاحقی

موفق شوید، اما اگر از ریاضیات لذت ببرید، احساس رضایتی که می‌توانید از حل مسأله‌های سخت ریاضی به‌دست آورید بیکران است.

سخت‌ترین سالها، یکی دو سال نخست پژوهش است. مطالب زیادی هست که باید بیاموزید. یکی با مسأله‌های کوچک درگیر است بدون اینکه موفقیتی به‌دست آورد، و دیگری تردیدهای جدی دارد در اینکه اصلاً بتواند چیزی جالب و دندانگیر ثابت کند. من هم این تجربه را در دومین سال پژوهش داشتم، و ژان پیر سیر^۱، شاید برجسته‌ترین ریاضیدان نسل من، به من گفت که او هم در برهه‌ای در فکر این بوده که تسلیم شود.

تنها میان‌مایگان به توانایی‌شان اعتماد بی‌حد و حصر دارند. هرچه بهتر باشی، استاندارد بالاتری را برای خود تعیین می‌کنی — بدین‌گونه می‌توانی فراتر از نقاط در دسترس را ببینی و دریایی.

بسیاری از ریاضیدانان آینده علائق و استعدادهایی در زمینه‌های دیگر هم دارند. اینان چه‌بسا که انتخاب سختی بین گام نهادن در حرفه ریاضی یا رشته دیگری درپیش داشته باشند. مشهور است که گاوس^۲ بزرگ در انتخاب ریاضیات یا زبان‌شناسی تطبیقی دودل بود، پاسکال در آغاز کار ریاضیات را به‌خاطر الهیات ترک کرد، در حالی که دکارت و لایبنیتس به عنوان فیلسوف مشهورند. ریاضیدانهایی چون فریمن دایسن^۳، از ریاضی شروع کردند و به فیزیک پرداختند در حالی که دیگرانی، چون هاریش چاندر^۴ و رافول بات^۵، در جهت دیگر حرکت کردند و به ریاضی پرداختند. ریاضیات را نباید به دیده دنیایی بسته بنگری. بدهستان بین ریاضی و دیگر شاخه‌ها هم برای ریاضیدان و هم برای جامعه ریاضی سلامت‌بخش است.

به‌طور قطع ریاضی مهم‌ترین چیزی است که ریاضیدان جوان باید بیاموزد. ولی آموختن از تجربیات دیگر ریاضیدانان هم می‌تواند بسیار باارزش افتد. از نویسندگان این مقاله [که ریاضیدانانی سرشناس‌اند] خواسته شد که تجربیاتی از زندگی و پژوهش ریاضی‌شان را به تصویر بکشند، و اندرزهایی ارائه دهند که خود دوست می‌داشتند در آغاز کارشان بشنوند (عنوان این مطلب اشاره‌ای به کتاب آشنای سیر پتر مداور^۱، اندرز به دانشمند جوان، دارد). حاصل این همکاریها، کلمه‌به‌کلمه، همان اندازه جالب بود که انتظار داشتیم. آنچه عجیب می‌نمود این بود که میان این نوشته‌ها همپوشانی بسیار کمی وجود داشت. پس، این شما و این پنج دُر شاهوار برای ریاضیدانان جوان، که بی‌تردید برای عموم ریاضیدانان در هر سنی خواندنی و دلپذیر است.

۱. مایکل اتیا^۲

هشدار

آنچه پیش روی شماست دیدگاهی کاملاً شخصی براساس تجربیات نگارنده است، منعکس‌کننده شخصیت من است، منعکس‌کننده گونه‌ای از ریاضی است که به آن پرداخته‌ام، و منعکس‌کننده سبک کاری من است. ولی ریاضیدانان از دیدگاه این مشخصه‌ها بسیار گوناگون‌اند و هرکس باید از غریزه خود پیروی کند. از دیگران بیاموز ولی آنچه را آموخته‌ای به سبک و سیاق خود تعبیر کن. اصالت و ابتکار، از بعضی لحاظ، با جدا شدن از روند گذشته می‌آغازد.

انگیزه

ریاضیدان پژوهشگر، چون هنرمندی خلاق، باید عاشقانه دلبسته ریاضیات باشد و خود را به‌تمامی وقف آن کند. بدون انگیزه‌های قوی درونی نمی‌توانید

1. Sir Peter Medawar 2. Michael Atiyah

1. Jean-Pierre Serre 2. Freeman Dyson 3. Harish Chandra

4. Raoul Bott

جنبه‌های روانی

به دلیل تمرکز ذهنی زیادی که برای کار ریاضی لازم است، فشارهای روحی، حتی وقتی که کارها به خوبی پیش می‌روند، ممکن است زیاد باشند. بسته به ویژگیهای شخصی شما این مشکل ممکن است عمده یا ناچیز باشد، ولی فرد می‌تواند گامهایی برای کم کردن این تنش بردارد. ارتباط با دوستان دانشجو-رفتن به سخنرانیها، سمینارها، و همایشها-هم افق دید شخص را گسترش می‌دهد و هم پشتوانه مهم اجتماعی برای او فراهم می‌آورد. انزوا و درونگرایی بیش از حد می‌تواند خطرآفرین باشد. زمان صرف‌شده برای گفتگوهای ظاهراً بی‌فایده آنقدرها هم به هدر نمی‌رود.

همکاری علمی دانشجو با دوستان همدوره‌ای یا با استاد راهنما، فواید زیادی دارد، و بعداً همکاری درازمدت با همکاران هم از جنبه‌های ریاضی و هم از جنبه‌های شخصی می‌تواند بسیار مثمر و واقع شود. نیاز به تفکر انفرادی عمیق و آرام همواره وجود دارد، ولی با برقراری تعادل بین تفکر انفرادی و دادوستد اندیشه با دوستان علمی می‌توان اندیشه خود را اعتلا بخشید.

مسأله در برابر نظریه

ریاضیدانان را گاهی به دو دسته «مسأله حل کن» و «نظریه پرداز» تقسیم می‌کنند. قطعاً افرادی در دو سر طیف ریاضیدانها، مانند اردوش و گروتندیک، وجود دارند که نمونه‌های بارز این دو دسته‌اند ولی بیشتر ریاضیدانها، که کارشان هم حل مسأله و هم گسترش نظریه است، جایی بین این دو حالت قرار دارند. در واقع، نظریه‌ای که به حل مسائلی ملموس و جالب رهنمون نشود ارزشی ندارد. برعکس، هر مسأله واقعاً عمیق، گسترش نظریه مربوط به حل آن مسأله را برمی‌انگیزد (قضیه آخر فرما مثالی متعارف از این دست است).

این مطلب چه ربطی به یک دانشجوی تازه‌کار دارد؟ هرچند دانشجو باید کتابها و مقالات را بخواند و مفاهیم و روشهای کلی (نظریه) را جذب کند، در عمل باید روی یک یا چند مسأله خاص تمرکز کند. این امر در عین حالی که غذای فکری برای شخص فراهم می‌آورد مایه و توان او را نیز به بوتۀ آزمایش می‌گذارد. مسأله‌ای معین که دانشجو با آن درگیر است و جزئیات آن را درک می‌کند، معیاری گرانبهاست که سودمندی و توانایی نظریه‌های موجود نیز با آن سنجیده می‌شود.

بسته به اینکه پژوهش چگونه به پیش رود، شخص ممکن است در پایان‌نامه دکتریش در نهایت بخش بزرگی از نظریه مورد استفاده را به کنار گذارد و تنها روی مسأله اساسی تمرکز کند یا اینکه سناریویی را طرح بریزد که در آن مسأله به‌طور طبیعی جا بگیرد.

نقش کنجکاو

نیروی محرک در پژوهش کنجکاو است. چه وقتی نتیجه خاصی درست است؟ آیا برهان مورد نظر بهترین برهان است، یا برهانی طبیعی‌تر و زیباتر وجود دارد؟ کلی‌ترین زمینه‌ای که در آن نتیجه مورد نظر برقرار است چیست؟ اگر به هنگام خواندن یک مقاله یا گوش کردن به یک سخنرانی مدام سؤالاتی بالا را از خود بپرسید، دیر یا زود کورسویی از پاسخی، یا مسیری احتمالی برای بررسی پاسخ، پدیدار می‌شود. وقتی که این وضع برای من پیش

می‌آید، ایده را پیگیری می‌کنم تا ببینم به کجا می‌رسد یا در برابر موشکافیها پابرجا می‌ماند یا نه. نه بار از ده بار، نتیجه کوچهای تنگ و تاریک از کار در می‌آید، ولی گهگاه شخص به معدن طلا برمی‌خورد. مشکل در این است که بدانیم چه وقتی ایده‌ای که نخست نویدبخش و امیددهنده به نظر می‌آید در واقع ره به جایی نمی‌برد. در این مرحله باید جلوی ضرر را گرفت و به مسیر اصلی بازگشت. معمولاً تصمیم من قطعی نیست و غالباً به ایده‌ای که قبلاً دور انداخته‌ام برمی‌گردم و دوباره آن را امتحان می‌کنم.

برخلاف انتظار، ایده‌های خوب ممکن است از یک سخنرانی یا سمینار بد نشأت بگیرند. خیلی وقتها می‌بینم در حال گوش کردن به یک سخنرانی هستم که در آن نتیجه مورد بحث زیباست ولی برهان زشت و پیچیده است. به جای اینکه سعی کنم برهان آشفته را روی تخته سیاه دنبال کنم، سعی می‌کنم باقی وقت را صرف اندیشیدن درباره ایجاد برهانی زیبا و برازنده‌تر کنم. معمولاً، ولی نه همیشه، ره به جایی نمی‌برم، اما با وجود این، استفاده بهتری از وقت کرده‌ام چراکه به سبک و سیاق خودم سخت درباره مسأله اندیشیده‌ام. این روش خیلی بهتر از این است که منفعلانه به استدلال شخص دیگری گوش بسپاری.

مثالها

اگر شما، همچون من، چشم‌اندازهای وسیع و نظریه‌های توانمند را ترجیح می‌دهید (من تحت تأثیر گروتندیک قرار گرفتم ولی پیرو سبک او نشدم)، لازم است که بتوانید نتایج کلی را با به‌کار بردن آنها در مورد مثالهای ساده محک بزنید. در گذر سالان، مجموعه بزرگی از چنین مثالهایی، برگرفته از زمینه‌های گوناگون، ساختم. اینها مثالهایی هستند که در آنها شخص می‌تواند محاسبات ملموس انجام دهد، گهگاه با دستورهای که استادانه پرداخته شده باشند، مثالهایی که به درک نظریه کلی کمک می‌کنند. این مثالها جای پای شما را بر زمین قرص و محکم می‌کنند. جالب است که گروتندیک از مثالها دوری می‌کرد، ولی خوشبختانه در تماس نزدیک با سر بود، که می‌توانست این کوتاهی را جبران کند. هیچ تمایز روشنی بین مثال و نظریه وجود ندارد. بسیاری از مثالهای مورد علاقه من از آموخته‌های نخستین من از هندسه تصویری متعارف می‌آیند: مکعب پیچ‌خورده^۱، رویه مربعی^۲، نمایش کلاینی خطها در فضای سه‌بعدی^۳. نظریه خمهای گویا، نظریه فضاهای همگن^۴، و نظریه گراسمانیها^۵: هیچ چیزی نمی‌تواند ملموس‌تر و متعارف‌تر از اینها باشد، به همه اینها می‌توان از دیدگاه جبری یا هندسی نگریست، در عین حال هریک از آنها نخستین مورد در رده بزرگی از مثالهاست که سپس تبدیل به نظریه می‌شوند. جنبه دیگر مثالها این است که می‌توانند به مسیرها و جهت‌های گوناگونی رهنمون شوند. مثال می‌تواند به شیوه‌های متفاوت زیادی تعمیم یابد یا اصول متفاوت زیادی را به تصویر بکشد. به عنوان نمونه، مخروط متعارف در آن واحد خمی گویا، مربعی، و گراسمانی است.

اما مثال خوب، بیش از هر چیز، نمونه‌ای از زیبایی است، می‌درخشد و قانع‌کننده است. بینش و درک و آگاهی می‌بخشد. شالوده باور را فراهم می‌آورد.

1. twisted cubic

2. quadric surface

3. Klein representation of lines in 3-space

4. theory of homogeneous spaces 5. theory of Grassmannians

برهان

همگی آموخته‌ایم که «برهان» مشخصه اصلی ریاضیات است، و هندسه اقلیدسی با آرایه دقیق از اصول موضوع و گزاره‌ها چارچوب اساسی را برای اندیشه نوین در دوره پس از نوزایی (رنسانس) فراهم آورده است. ریاضیدانان به قطعیت مطلق نتایج ریاضی در مقایسه با موقتی بودن نتایج علوم تجربی، چه رسد به تفکرات مغشوش در رشته‌های دیگر، می‌بالند.

درست است که، از زمان گودل، قطعیت مطلق متزلزل شده است، و یورش برهانهای دراز و بیش با افتاده رایانه‌ای از منزلت آن کاسته است، ولی علی‌رغم اینها، برهان نقش اصلی‌اش را در ریاضیات ایفا می‌کند، و رخنه جدی در برهان شما منجر به رد مقاله شما خواهد شد.

اما اشتباه است که پژوهش در ریاضیات را با فرایند تولید برهان یکی بگیرید. در واقع، می‌توان گفت تمام جنبه‌های خلاقانه تحقیق ریاضی مقدم بر صحنه برهان است. اگر این صحنه را به صحنه تئاتر تشبیه کنیم، باید با ایده شروع کنید، نقشه‌ای بکشید، دیالوگها را بنویسید، و دستورالعملهای نمایش را تهیه کنید. به حاصل کار می‌توان به دیده «برهان»، نگریست که همان «اجرای» ایده است.

در ریاضیات، نخست ایده‌ها و مفاهیم، و سپس پرسشها و مسأله‌ها می‌آیند. در این مرحله جستجو برای راه حل شروع می‌شود، شخص به دنبال شیوه یا راهبردی می‌گردد. وقتی خود را قانع کرده باشید که مسأله خوب طرح شده است، و ابزارهای مناسب کار را در دسترس دارید، آنگاه شروع به سخت فکر کردن درباره جزئیات فنی برهان می‌کنید.

به زودی، شاید با یافتن مثالهای ناقض، ممکن است دریابید که مسأله نادرست تنظیم شده بوده است. گاهی شکافی بین ایده شهودی اولیه و بیان مسأله موجود است. فرضی نهانی را جا انداخته‌اید، جزئیات فنی را نادیده گرفته‌اید، خیلی کلی به مسأله پرداخته‌اید. در این صورت باید برگردید و صورت‌بندی مسأله را اصلاح کنید. اغراق و نامتصفانه است که بگوییم ریاضیدانها عمداً پرسشهایشان را طوری طرح می‌کنند که بتوانند به آنها پاسخ دهند، اما بی‌تردید رگه‌ای از حقیقت در این گفته وجود دارد. هنر ریاضیات خوب (در ضمن، ریاضیات هنر هم هست) در این است که مسائلی را مشخص می‌کند و به آنها می‌پردازد که هم جالب و هم حل‌پذیر هستند.

برهان محصول نهایی بدهستانی طولانی بین خیال‌پردازی خلاق و استدلال نقادانه است. بدون برهان برنامه کار ناقص می‌ماند، ولی بدون اندیشه خیال‌پردازانه برنامه هیچ‌گاه آغاز نمی‌شود. اینجا می‌توان تشابهی با کار هنرمند خلاق در رشته‌های دیگر، چون نویسنده، نقاش، آهنگساز، یا معمار، دید. نخست بینش و بصیرت سر برمی‌آورد، به ایده‌ای که به گونه‌ای تجربی، موقتی، و شرطی ترسیم می‌شود گسترش می‌یابد، و در نهایت، فرایند فنی و طولانی مدت برپا کردن اثر هنری فرا می‌رسد. اما شیوه فنی و بصیرت باید در ارتباط باشند تا هر یک دیگری را بنابه قواعد خودش اصلاح کند.

راهبرد

در بخش پیشین، فلسفه برهان و نقش آن در کلیت فرایند خلاقانه تولید ریاضی را توضیح دادم. اکنون بگذارید به ساده‌ترین و عملی‌ترین پرسش

مورد علاقه ریاضیدان جوان بپردازم. شخص چه راهبردی را باید اتخاذ کند؟

عملاً چگونه برهان را می‌یابیم و به سرانجام می‌رسانیم؟

این پرسش در عالم تجرید چندان معنایی ندارد. همان‌طور که در بخش پیشین توضیح دادم، مسأله خوب همواره پیشینه‌ای دارد: یعنی ریشه‌هایی دارد و از پیش‌زمینه‌ای برمی‌خیزد. برای پیشرفت در مسأله باید ریشه‌هایش را دریابید. به همین دلیل بهترین است که مسأله خودتان را بیابید، و پرسشهای خودتان را بکنید، نه اینکه آن را حاضر و آماده از استاد راهنمایان بگیرید. اگر می‌دانید که مسأله از کجا می‌آید، یعنی چرا مطرح شده است، در آن صورت در میانه راه به سوی حل مسأله قرار دارید. در واقع، پرسیدن سؤال درست اغلب به همان اندازه حل مسأله سخت است. یافتن زمینه مناسب نخستین گام ضروری است.

خلاصه اینکه، باید آگاهی کافی از تاریخ مسأله داشته باشید. باید بدانید که چه نوع شیوه‌هایی برای مسأله‌های مشابه به‌کار گرفته شده‌اند و محدودیت‌هایشان چه‌ها هستند. خوب است به محض فهم کامل یک مسأله شروع کنید به اندیشیدن جدی درباره آن. برای اینکه از پس مسأله برآیید، هیچ راهی ندارید جز اینکه عملاً دست به‌کار شوید. باید حالت‌های ویژه را بررسی کنید و سعی کنید ببینید که مشکل اساسی کار کجاست. هرچه بیشتر درباره پیشینه و شیوه‌های گذشته بدانید، فوت‌وفتهای بیشتری را برای حل مسأله می‌توانید بیازمایید. از سوی دیگر، گاهی نادانی هم نعمتی است! گفته‌اند که لیتل‌وود به هر یک از دانشجویان پژوهشگرش روایتی مبدل از فرضیه ریمان را برای کار پژوهش واگذار می‌کرد و تنها پس از گذشت شش ماه به آنها می‌گفت که چه کرده است. استدلال او این بود که دانشجو اعتماد به نفس لازم را برای درگیر شدن مستقیم با چنین مسأله معروفی ندارد ولی در صورتی که از شهرت حریف بی‌خبر باشد ممکن است ره به جایی ببرد! این شیوه به حل فرضیه ریمان منجر نشد ولی قطعاً به تربیت دانشجویانی رزم‌دیده و خستگی‌ناپذیر انجامید. رویکرد خود من خودداری از یورش مستقیم و جستجو برای روشهای غیرمستقیم بوده است. این رویکرد بین مسأله شما و ایده‌ها و فتهای موجود در دیگر حوزه‌ها، که ممکن است مسأله شما را حل کنند، ارتباط برقرار می‌کند. اگر این راهبرد به موفقیت بینجامد، می‌تواند برهانی ساده و زیبا به‌بار آورد، که «تبیین‌کند» چرا مطلبی درست است. در واقع، من بر این باورم که هدف باید جستجو برای تبیین، جستجو برای درک مطلب، باشد. برهان تنها بخشی از این فرایند و گهگاه نتیجه آن است.

به عنوان بخشی از جستجو برای شیوه‌های جدید، خوب است که افقهای دید خود را بسط دهید. گفتگو با دیگران دانش شما را توسعه می‌دهد و گهگاه شما را با ایده‌ها و فوت‌وفتهای نوی آشنا می‌کند. هر از گاهی ممکن است به ایده سودمندی در ارتباط با پژوهش خود یا اصلاً به مسیری جدید در پژوهش دست یابید.

اگر نیاز به آموختن موضوعی جدید دارید، به نوشتگان موجود مراجعه کنید یا بهتر از آن، متخصصی خوش‌مشرب و صمیمی را بیابید و مطلب را در آن زمینه از سرچشمه کسب کنید—با این روش، بصیرت بیشتری را سریع‌تر به‌دست می‌آورید.

همان‌گونه و همان‌قدر که به پیش می‌نگرید و نسبت به پیشرفت‌های نو هشیارید، گذشته را نباید به فراموشی بسپارید. بسیاری از نتایج توانمند ریاضی متعلق به دوره‌های گذشته گردوغبار سالیان را بر چهره دارند و به فراموشی

(iv) مطلب را چنان بنویسید که تا آنجا که ممکن است موجز و مختصر، و در عین حال روشن و به آسانی قابل درک، باشد. این توازن به سختی حاصل می‌شود.

(v) مقالاتی را که از خواندن آنها لذت برده‌اید مشخص کنید و سبک آنها را تقلید کنید.

(vi) آنگاه که نگارش قسمت عمده مقاله‌تان را به پایان آوردید برگردید و مقدمه‌ای بنویسید که به روشنی ساختار، نتایج اصلی، و زمینه کلی مقاله را توضیح دهد. از اصطلاحات تخصصی غیرضروری دوری کنید و هدف را خواننده عمومی ریاضی قرار دهید و نه یک فرد حرفه‌ای باریک‌نگر.

(vii) اگر برای چاپ مقاله عجله ندارید، آن را برای چند هفته به کناری بگذارید و روی مطلب دیگری کار کنید. سپس به مقاله‌تان برگردید و آن را با ذهنی تازه بخوانید. خوانش مقاله متفاوت خواهد بود و ممکن است دریابید که چگونه آن را بهتر کنید.

(ix) دریغ نکنید از اینکه مقاله را، شاید از یک زاویه کاملاً نو و تازه، دوباره بنویسید به این شرط که قانع شده باشید که این سبک جدید مقاله را روشن‌تر و در عین حال ساده‌خوان‌تر می‌کند. مقالات خوب نوشته شده کلاسیک می‌شوند و بسیاری از ریاضیدانان آتی آنها را خواهند خواند. مقالات بد نوشته شده نادیده گرفته می‌شوند یا، اگر به قدر کافی مهم باشند، دیگران آنها را دوباره می‌نویسند.

۲. بلا بلوباش^۱

به گفته هاردی: «در این دنیا هیچ جای دائمی برای ریاضیات زشت وجود ندارد». من بر این باورم که به همین ترتیب در این دنیا جایی برای ریاضیدانهای بی‌اشتیاق و بی‌حوصله موجود نیست. تنها در صورتی ریاضی بورز که بدان مشتاقی، تنها در صورتی ریاضی بورز که این کار را بکنی حتی اگر تنها وقتی که برای آن داری پس از یک روز کامل اشتغال به کار دیگری باشد. بسان شعر و موسیقی، ریاضیات حرفه و پیشه نیست بلکه علاقه و دلمشغولی است.

حسن سلیقه و شمع قوی مهم‌تر از هر چیزی است. معجزه ریاضی این است که به نظر می‌آید توافقی عمومی مبنی بر اینکه ریاضیات خوب چیست وجود دارد. باید در زمینه‌هایی کارکنی که مهم‌اند و نامحتمل است که تا مدتی طولانی، از لحاظ ایده، بخشکنند. و باید روی مسأله‌هایی کارکنی که زیبا و مهم‌اند، در زمینه خوبی که انبوهی از این مسأله‌ها موجودند و نه معدودی مسأله معروف. در واقع بلندپروازی مدام ممکن است به دوره‌های دراز عقیمی و بی‌ثمری بینجامد: این دوره‌های طولانی سترونی در مرحله‌ای از زندگی شما قابل تحمل است ولی در سرآغاز زندگی حرفه‌ای‌تان بهتر است که از آنها بپرهیزید.

بکوشید که در فعالیتهای ریاضی‌تان به تعادل برسید: برای ریاضیدان واقعی پژوهش مقدم است و باید باشد، ولی علاوه بر پژوهش، بسیار بخوانید و خوب تدریس کنید. از ریاضیات در هر سطحی لذت ببرید، حتی اگر (تقریباً) هیچ ارتباطی با پژوهش شما نداشته باشد. تدریس نباید باری بر دوش شما، بلکه باید سرچشمه الهام شما باشد.

پژوهش (برخلاف نوشتن نتایج پژوهش) هرگز نباید مانند یک کار عادی و روزمره باشد: باید مسأله‌هایی را انتخاب کنید که فکر نکردن درباره آنها برایتان

سپرده شده‌اند و تنها پس از اینکه دوباره به طور مستقل کشف شوند دوباره به چشم می‌آیند. این نتایج به آسانی به چشم نمی‌آیند، بعضاً به این دلیل که اصطلاحات و سبک بیان در طول زمان تغییر می‌کنند، اما آنها ممکن است معدن طلا باشند. همانند جستجوی معادن طلا، باید خوش‌شانس باشی تا به یکی از آنها برخوردی، و پاداش البته نصیب پیشگامان می‌شود.

استقلال

در آغاز پژوهش، رابطه شما با استاد راهنمایان ممکن است اهمیت حیاتی داشته باشد. پس با دقت، با در نظر داشتن موضوع کار، شخصیت، و پیشینه کاری استاد او را انتخاب کنید. اساتید کمی در هر سه زمینه نمرات بالایی می‌گیرند. به علاوه، اگر کارها در خلال نخستین سال بر وفق مراد پیش نرفت یا علائق شما به طور چشمگیری تغییر کرد، بی‌درنگ استاد راهنما یا حتی دانشگاهتان را تغییر دهید. استاد راهنمای شما دلخور نمی‌شود و ممکن است حتی راحت هم بشود!

گاهی ممکن است بخشی از گروه بزرگی باشید و با دیگر اعضای دانشکده بده‌بستان داشته باشید به طوری که در عمل بیش از یک استاد راهنما داشته باشید. این وضع می‌تواند از این لحاظ مفید باشد که افکار گوناگون و روشهای کاری دیگری را در اختیارتان می‌گذارد. ممکن است از همکاران دانشجوی نیز بسیار بیاموزید، و به این دلیل انتخاب یک بخش تحصیلات تکمیلی که دانشجویان زیادی داشته باشد کار خوبی است.

آنگاه که دکتری‌تان را با موفقیت پشت سر می‌گذارید، وارد مرحله جدیدی می‌شوید. هر چند ممکن است هنوز به همکاری با استاد راهنمایان ادامه دهید و هنوز عضوی از همان گروه پژوهشی باقی بمانید، برای پیشرفتهای آینده شما مفید است که به جای دیگری برای یک سال یا بیشتر نقل مکان کنید. این امر در تأثیرات و تواناییها و فرصتهای جدید را به روی شما می‌گشاید. حال زمان آن فرا رسیده است که اثری از خود در دنیای ریاضی باقی بگذارید. به طور کلی، فکر خوبی نیست که مدت زیادی در خطوط بسیار نزدیک به پایان‌نامه دکتری‌تان طی طریق کنید. باید استقلال خود را با گسترش علائق نشان دهید. این تغییر مسیر لزومی ندارد که ریشه‌ای و افراطی باشد اما باید به وضوح تازگی داشته باشد و ادامه سرراست پایان‌نامه‌تان نباشد.

سبک

در نگارش پایان‌نامه‌تان، استاد راهنما به طور طبیعی در روش ارائه و سازماندهی مطلب به شما یاری خواهد داد. اما به دست آوردن یک سبک شخصی بخشی مهم از پیشرفت ریاضی شماست. هر چند نیازها بسته به نوع ریاضیات متفاوت است، بسیاری از جنبه‌ها برای همه موضوعها یکسان‌اند. در اینجا چند رهنمود درباره چگونه نوشتن یک مقاله خوب می‌آورم.

(i) پیش از شروع نگارش درباره ساختار منطقی کلی مقاله بیندیشید.
(ii) برهانهای پیچیده و طولانی را به گامهای میانی کوتاه (لمها، گزاره‌ها، و غیره) بشکنید. این کار به خواننده کمک می‌کند.

(iii) به زبانی که از نظر منطقی و زیباشناسی و ارتباط بین اجزا سازگار و روان باشد بنویسید. به یاد داشته باشید که ریاضیات هم نوعی از ادبیات و سخنوری است.

ممکن است توانایی‌تان را در به خاطر سپاری دستاوردها دست بالا بگیرید. بهترین کار این است که حتی نتایج خیلی جزئی‌تان را بنویسید: احتمال خوبی وجود دارد که بعداً یادداشت‌هایتان باعث صرفه‌جویی زیادی در وقت شما شوند.

اگر به قدر کافی خوش اقبال باشید که پیشرفتی چشمگیر به دست آورید، طبیعی است که احساس کنید از پروژه‌تان خسته شده‌اید و بخواهید به همان دستاورد تکیه کنید. در برابر این وسوسه پایداری کنید و ببینید که آن پیشرفت چه چیزهای دیگری به شما ارزانی می‌دارد.

برتری عمده شما به عنوان ریاضیدان جوان این است که وقت کافی برای پژوهش دارید. ممکن است این امر را درنیاورید، ولی بسیار بعید است که بعداً هرگز به اندازه آغاز زندگی حرفه‌ای‌تان وقت برای پژوهش داشته باشید. هرکسی احساس می‌کند که وقت کافی برای ریاضی ورزیدن ندارد، اما با گذر سالیان این احساس شدید و شدیدتر و موجه و موجه‌تر می‌شود. اما در مورد خواندن، افراد جوان از لحاظ مقدار ریاضیاتی که خوانده‌اند در موقعیتی ضعیف قرار دارند، پس برای جبران این ضعف، تا آنجا که می‌توانید بخوانید، هم در زمینه عمومی پژوهستان و هم در ریاضیات به طور کلی. در زمینه پژوهشی‌تان، مطمئن شوید که مقالات زیادی از بهترین ریاضیدانان را می‌خوانید. چنین مقالاتی اغلب با دقت مطلوب نوشته نشده‌اند، اما کیفیت ایده‌ها و نتیجه‌ها در این مقالات، پاداش کافی برای زحماتی است که برای خواندن آنها متحمل می‌شوید. در مورد هر چه می‌خوانید، هشیار باشید: سعی کنید پیشاپیش دریابید که نویسنده چه خواهد کرد و مسیر بهتری را طراحی کنید. اگر نویسنده در مسیری که شما پیشاپیش اندیشیده‌اید برود، خشنود خواهید شد، و اگر مسیری دیگر را اختیار کند، می‌توانید چشم به راه دریافتن دلیل آن باشید. از خود درباره نتیجه‌ها و برهانها پرسش کنید، حتی اگر ساده‌انگارانه به نظر آید: این پرسشها درک شما را از مطلب بسیار بالا می‌برند.

از سوی دیگر، بسیاری اوقات مفید است که همه‌چیز را درباره مسئله حل‌نشده‌ای که می‌خواهید حل کنید، نخوانید: وقتی عمیقاً درباره آن اندیشیدید و ظاهراً به جایی نرسیدید، می‌توانید (و باید) شرح تلاشهای شکست‌خورده دیگران را بخوانید.

امکان شگفت‌زده شدن را برای خودتان نگه دارید، پدیده‌ها را بدیهی نگیرید، قدرشناس ایده‌ها و نتیجه‌هایی که می‌خوانید باشید. بسیار آسان است که فکر کنید موضوع را فهمیده‌اید. ولی هر چه باشد شما تنها برهان را خوانده‌اید. افراد برجسته اغلب زمان زیادی برای هضم اندیشه‌های نو صرف می‌کنند. برای ایشان کافی نیست که زنجیره‌ای از قضیه‌ها را بدانند و برهانهای آنها را دریابند بلکه می‌خواهند آنها را در خون خود حس کنند.

همچنانکه زندگی حرفه‌ای‌تان به پیش می‌رود، همواره ذهنتان را به روی اندیشه‌های نو و مسیرها و جهت‌های نو باز نگه دارید: چشم‌انداز ریاضی همواره در تغییر است، و شما هم، اگر نمی‌خواهید عقب بمانید، احتمالاً باید تغییر کنید. همواره ابزار کارتان را تیز کنید و مطالب نو را یاد بگیرید.

ورای هر چیزی، از ریاضیات لذت ببرید و نسبت به آن شور و اشتیاق داشته باشید. از پژوهستان لذت ببرید، چشم به راه خواندن نتیجه‌های نو باشید، عشق به ریاضی را در دیگران پیروانید، و حتی در فراغت، با اندیشیدن درباره

سخت باشد. به این دلیل، خوب است خودتان را در مسئله غرق کنید نه اینکه روی مسئله چنان کار کنید که گویی کاری بر شما تحمیل شده است. در سرآغاز زندگی حرفه‌ای‌تان، آنگاه که دانشجوی تحصیلات تکمیلی در مرحله پژوهش هستید، باید به کمک استاد راهنمای باتجربه‌تان مسئله‌هایی را که یافته‌اید و دوست دارید محک بزنید، نه اینکه روی مسئله‌ای که او به شما داده ولی ممکن است با مذاق شما جور نباشد، کار کنید. در نهایت، استاد راهنمای شما، هرچند ممکن است از توانایی و سلیقه شما آگاه نباشد، باید دید نسبتاً خوبی در این مورد داشته باشد که آیا مسئله خاصی شایستگی تلاشهای شما را دارد یا نه. بعداً در زندگی حرفه‌ای‌تان، هنگامی که نمی‌توانید به استادان تکیه کنید، گفتگو با همکاران دلسوز و شفیق غالباً الهام‌بخش است.

توصیه می‌کنم که در آن واحد دو نوع مسئله برای کار کردن داشته باشید. (i) «رویا»: مسئله‌ای بزرگ که بسیار دوست دارید آن را حل کنید ولی نمی‌توانید انتظار معقولی داشته باشید که آن را حل کنید.

(ii) چند مسئله بسیار ارزنده که گمان می‌کنید با صرف وقت و تلاش کافی و بخت‌یاری، ممکن است آنها را حل کنید.

علاوه بر اینها، دو نوع دیگر از مسائل هستند که هر چند اهمیت کمتری در مقایسه با مسائل بالا دارند، باید آنها را در نظر داشته باشید.

(i) هر از گاهی روی مسائلی کار کنید که پایین‌تر از حد و شأن شماست و مطمئن هستید که به سرعت از پس آنها برمی‌آیید به طوری که وقتی که صرف آنها می‌کنید موفقیت شما را در مسائل بالا به خطر نمی‌اندازد.

(ii) حتی در سطح پایین‌تری، همواره حل مسائلی که واقعاً مسائل پژوهشی نیستند ولی آنقدر زیبا هستند که ارزش صرف وقت دارند، لذت‌بخش است (هر چند که مسئله‌های سالیان گذشته باشند). حل چنین مسائلی خوشایند است و توانایی شما را در نوآوری و ابداع بیشتر می‌کند.

صبور و سمج باشید. وقتی که درباره مسئله‌ای می‌اندیشید، شاید مفیدترین ابزاری که می‌توانید به کار بگیرید این باشد که مسئله را همواره در ذهن داشته باشید: این روش برای نیوتن کارگر افتاد و برای بسیاری دیگر نیز به کار آمده است. به خود مهلت دهید، به‌ویژه آنگاه که به مسائل بزرگ حمله‌ور می‌شوید؛ با خود پیمان ببندید که مدت زمان خاصی را روی مسئله‌ای بزرگ صرف کنید بی‌آنکه انتظار زیادی داشته باشید، و پس از آن تأمل کنید و تصمیم بگیرید که سپس چه کنید. برای موفقیت رویکردتان زمانی در نظر بگیرید، ولی در عین حال خیلی در آن رویکرد غرق نشوید تا شیوه‌های دیگر حمله به مسئله را از دست ندهید. چابک‌اندیش و سریع باشید: به قول پال اردوش، مغزتان را باز نگه دارید.

از اشتباه نترسید. اشتباه برای شطرنج‌باز مرگ‌آفرین است ولی برای ریاضیدان در حکم تساوی برای ادامه بازی است. چیزی که باید از آن وحشت کنید برگه‌ای خالی در برابر شما پس از مدتی اندیشیدن درباره مسئله‌ای است. اگر پس از یک جلسه، سطل آشغال شما از یادداشت‌هایی پر شده که حاکی از تلاشهای نافرجام شماست، احتمالاً هنوز وضع خیلی خوبی دارید. از رویکردهای مبتذل و بی‌روح بپرهیزید، اما همواره از وقت گذاشتن برای کار خشنود باشید. به‌ویژه، حل ساده‌ترین حالت‌های یک مسئله بعید است در حکم اتلاف وقت باشد و چه‌بسا بسیار مفید و مؤثر افتد.

هنگامی که مقدار قابل ملاحظه‌ای وقت صرف یک مسئله می‌کنید، به‌آسانی ممکن است پیشرفتی را که کرده‌اید دست‌کم بگیرید و به همان اندازه

مسأله‌های کوچک و زیبایی که به آنها برخورد می‌کنید یا از همکارهایتان می‌شنوید سرگرم و محظوظ شوید.

اگر بخواهم اندرزی را که همه ما به منظور موفقیت در دانش و هنر باید تعقیب کنیم جمع‌بندی کنم، به سختی بتوانم کاری بهتر از یادآوری آنچه ویتروویوس^۱ بیش از دو هزار سال پیش نگاشت، انجام دهم:

Neque enim ingenium sine disciplina aut disciplina sine ingenio perfectum artificem potest efficere.

برای اینکه نه نبوغ بدون آموختن هنرمندی کامل می‌سازد و نه آموختن بدون نبوغ.

۳. الن کن^۲

ریاضیات ستون فقرات دانش نوین است و سرچشمه‌ای بسیارکارآمد از مفاهیم و ابزارهای نو برای درک «واقعیتی» است که در آن شرکت داریم. این مفاهیم جدید خود نتیجه فرایند طولانی «عصاره‌گیری» در انبیب اندیشه آدمی است. از من خواسته شد که چند اندرز برای ریاضیدانان جوان بنویسم. نخستین نکته‌ای که می‌خواهم بگویم این است که هر ریاضیدان خود مودی خاص است، و به‌طور کلی ریاضیدانها مایل‌اند که چون «فرمیونها» رفتار کنند، یعنی از زمینه‌هایی که خیلی مرسوم‌اند احتراز می‌کنند، در حالی‌که فیزیکدانها بیشتر مانند «بوزونها» رفتار می‌کنند، که در دسته‌های بزرگ به هم می‌آمیزند، و اغلب درباره دستاوردهایشان اغراق می‌کنند—شیوه و رفتاری که ریاضیدانان آن را خوار می‌شمارند.

در ابتدا ممکن است وسوسه شویم که ریاضیات را مجموعه‌ای از شاخه‌های مجزا چون هندسه، جبر، آنالیز، نظریه اعداد، و غیره، در نظر بگیریم، که موضوع اصلی در هندسه تلاش برای درک مفهوم فضا است، در جبر هنر کار کردن با نمادها، در آنالیز دستیابی به «بینهایت» و «پوستار»، و همین‌طور الی آخر. ولی این تقسیم‌بندی حق مطلب را در مورد یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های دنیای ریاضی ادا نمی‌کند. یعنی در عمل نمی‌توان هیچ‌یک از شاخه‌های بالا را از شاخه‌های دیگر جدا کرد بدون اینکه روح و جوهرش را از آن گرفت. بدین ترتیب، مجموعه ریاضیات چون وجودی بیولوژیکی است، که تنها به‌عنوان یک کل زنده می‌ماند و اگر به تکه‌های مجزا تفکیک شود، نابود می‌گردد. زندگی علمی ریاضیدانان را می‌توان به صورت کاوشی در جغرافیای «واقعیت ریاضی» مجسم کرد که اندک اندک در چارچوب ذهنی فردی ریاضیدانان آشکار می‌شود.

این فرایند اغلب با عصیانی در برابر توصیفات جزمی در کتابهای موجود آغاز می‌شود. ریاضیدانان جوان بالقوه کم‌کم درمی‌یابند که درک ایشان از دنیای ریاضی ویژگی‌هایی می‌یابد که در باورهای جزمی موجود نمی‌گنجد. این عصیانگری آغازین، در بیشتر موارد، به ناآگاهی برمی‌گردد، اما با وجود این می‌تواند سودمند باشد، چراکه اشخاص را از کرنش در برابر قدرت و جو غالب رهایی می‌بخشد و به ایشان اجازه می‌دهد که بر شهودشان تکیه کنند، منوط به اینکه آن شهود بتواند از پشتیبانی برهانه‌ای واقعی برخوردار شود. آنگاه که

ریاضیدان به‌راستی، به شیوه‌ای «شخصی» و بکر و بدیع، شروع به دریافتن بخش کوچکی از دنیای ریاضی می‌کند، هر قدر این دریافت در آغاز مبهم و رمزآلود به نظر آید،* سفر او واقعاً آغاز شده است. البته، ضروری است که نخ آریادنه^۱ گسسته نشود: بدین‌گونه شخص می‌تواند همواره نسبت به هر آنچه در طول مسیر با آن مواجه می‌گردد هشیار باشد، ولی هر وقت احساس گم‌گشتگی کرد، به سرچشمه بازگردد. همچنین ادامه حرکت امری حیاتی است. در غیر این صورت آدمی این خطر را می‌کند که خود را در محدوده نسبتاً کوچکی از تخصص بسیار فنی محصور کند، و بدین‌گونه آگاهی‌اش را از دنیای ریاضی و از گوناگونی سترگ و، چه بسا، رازناک ریاضی محدود سازد.

از این لحاظ، نکته اساسی این است که هر چند ریاضیدانان بسیاری زندگی‌شان را صرف کاوش در بخشهای گوناگونی از دنیای ریاضی، با چشم‌اندازهای گوناگونی، کرده‌اند همگی پیرامون حدود فاصل و ارتباطات بین رشته‌ای در ریاضیات هم‌رأی هستند.

سفر ریاضیدان از هرجا آغاز شود، اگر او به‌قدر کافی گام بردارد، حتماً روزی به دیاری آشنا پا خواهد گذاشت: به عنوان مثال، به قلمرو توابع بیضوی، فرمهای مدولی، یا توابع زتا. «همه راهها به رم می‌رسند»، و دنیای ریاضی «همبند» است. البته این بدین معنی نیست که همه بخشهای ریاضی همانندند، و در اینجا شایسته است که گفتار زیر از گروتندیک را (در «کاشت و برداشت»^۲) نقل کنم که در مقام مقایسه دورنمای آنالیز ریاضی، که نخست در آن زمینه کار می‌کرد، با دورنمای هندسه جبری است، که باقیمانده زندگی ریاضی‌اش را در آن گذراند.

«هنوز این تصویر (البته کاملاً ذهنی) را به‌خاطر می‌آورم که گویی بیابانهای وسیع خشک و تیره را پشت‌سر می‌گذارم و خود را ناگاه در «سرزمین موعود» می‌یابم، سرزمینی حاصلخیز و پر از ثروت که تا بینهایت گسترده است، به هر سو که بخواهی دست می‌یازی یا زمین را حفر می‌کنی تا چیزی به‌دست آوری».

بیشتر ریاضیدانان سبک و روشی عملگراییانه اتخاذ می‌کنند و خود را کاشفان این «دنیای ریاضی» می‌بینند، دنیایی که در وجودش تردید نمی‌کنند و ساختارش را با ترکیبی از شهود و مقدار زیادی تفکر منطقی آشکار می‌کنند. شهود چندان با «تمایل شاعرانه» (آن‌گونه که شاعر فرانسوی پل والری^۳ بر آن تأکید کرده است) متفاوت نیست، در حالی‌که تفکر منطقی نیازمند دوره‌های شدید تمرکز است:

* نقطه آغازین دریافت من از دنیای ریاضی مکان‌یابی ریشه‌های چندجمله‌ایها بود. خوشبختانه، در آغاز کار برای شرکت در کنفرانسی در سیاتل دعوت شدم، که در آن با ریشه‌های تمامی کارهای آینده‌ام روی فاکتورها (عاملها) آشنا شدم.

۱. منظور، داستان گلوله نخ آریادنه (Ariadne) در اساطیر یونانی است. آریادنه همسر دیونیسوس (Dionysus) رب‌النوع شراب و میگساری، دختر شاه مینوس (Minos) و شهبانو پسیفایی (Pasiphaë) بود. اما او هنگامی که عاشق تسیوس (Theseus) آتنی شد به پیمان ازدواجش خیانت کرد. او شمشیر جادویی را به همراه یک گلوله نخ به تسیوس داد تا به وسیله آن مینوتور (Minotaur) هیولای نیمه‌انسان-نیمه‌گاو را نابود کند. تسیوس خود را به دهلیز هزار تو رساند، گلوله نخ را باز کرد و خود را به مرکز مارپیچی که مینوتور در آن زندگی می‌کرد رساند. مینوتور را کشت، و به کمک گلوله نخ آریادنه راه برگشت را پیدا کرد—م.

کار کردن تبدیل کنید. هرچند، انجام این کار همیشه آسان نیست.

تأیید اکراه‌آمیز. یکی از همکارانم زمانی گفت: «ما (ریاضیدانها) برای تأیید اکراه‌آمیز اندکی از دوستان کار می‌کنیم.» درست است، از آنجا که کار پژوهش دارای ماهیت انزوایی است، ما به‌شدت به این یا آن نوع تأیید نیازمندیم، ولی آدم واقعاً نباید خیلی انتظار داشته باشد. در واقع، تنها داور حقیقی خود شخص است. هیچ شخص دیگر در وضعیتی به‌خوبی خود فرد نیست که بداند چه کاری انجام شده است، و اهمیت دادن زیاد به گمان و پندار دیگران اتلاف وقت است: هیچ قضیه‌ای تاکنون در نتیجه رأی‌گیری ثابت نشده است. همان‌گونه که فاینمن^۱ گفته است: «چرا به آنچه دیگران فکر می‌کنند اهمیت می‌دهی؟».

۴. دوسا مک‌داف^۲

دورهٔ بزرگسالی‌ام را در وضعیتی بسیار متفاوت با هم‌سلانم شروع کردم. همواره این‌گونه بار آمدم که فکر کنم زندگی حرفه‌ای مستقلاً خواهم داشت، و در عین حال از جانب خانواده و مدرسه بسیار تشویق می‌شدم که به ریاضیات بپردازم. مدرسهٔ دخترانه‌ای که در آن تحصیل می‌کردم، برخلاف معمول، معلم ریاضی بسیار خوبی داشت که زیبایی هندسهٔ اقلیدسی و حسابان را به من نشان داد. ولی احترامی برای معلمان علوم [تجربی] قائل نبودم، و از آنجا که استادان دانشگاه هم در رشته‌های علوم چندان بهتر نبودند، واقعاً چیزی از فیزیک نیاموختم.

من که در این فضای محدود بسیار موفق بودم، انگیزهٔ زیادی داشتم که ریاضیدانی پژوهشگر شوم. در حالی که از بعضی جنبه‌ها اعتماد به نفس زیادی داشتم، از جنبه‌های دیگر احساس کاستی زیادی می‌کردم. یک مشکل بنیادی این بود که این پیام [جامعه] را جذب کرده بودم که زنان تا آنجا که به حرفهٔ ریاضی مربوط می‌شود از درجهٔ دوم هستند و در نتیجه باید نادیده گرفته شوند. دوستان مؤنثی نداشتم و واقعاً قدر هوش خودم را نمی‌دانستم، فکر می‌کردم از نوع هوش عملی برای کارهای روزمره (ویژگی زنانه) است و نه واقعاً هوش خلاق (ویژگی مردانه). این مضمون به صورتهای مختلفی بیان می‌شود: زنان اجاق خانه را روشن نگه می‌دارند ولی مردان در دنیای بیرون سیر می‌کنند، زنان منبع الهام شعر و موسیقی‌اند ولی شاعر و موسیقیدان نیستند، زنان جنم واقعی برای ریاضیدان شدن را ندارند، و نظایر اینها. این موضوع را به صورتهای دیگری هم می‌گویند. اخیراً نامهٔ جالبی بین دوستان فمینیست من دست به‌دست می‌گشت که حاوی پیشداوریهای مشترک و متناقضی در زمینه‌های مختلف علمی بود، و پیامش این بود که زنان قادر به درک چیزهای بسیار ارزشمند نیستند.

مشکل دیگری که کمی بعد آشکار شد این بود که توانسته بودم پایان‌نامهٔ موفقیت‌آمیزی بنویسم در حالی که ریاضیات بسیار کمی آموخته بودم. پایان‌نامه‌ام در زمینهٔ جبرهای فون نویمان بود، موضوعی تخصصی که به هیچ چیزی که برای من معنی واقعی داشته باشد مربوط نمی‌شد. در آن زمینه راهی به سوی جلو نمی‌دیدم و در عین حال تقریباً چیز دیگری نیز نمی‌دانستم. هنگامی که در آخرین سال تحصیلات تکمیلی‌ام به مسکو رسیدم، گلفاند مقاله‌ای در زمینهٔ کوهمولووی جبر لی میدانهای برداری روی یک خمینه داد تا بخوانم، و من

هر نسل تصویری ذهنی می‌سازد که دریافت خودش را از این دنیا منعکس می‌کند. افراد هر نسل ابزارهایی ذهنی می‌سازند که بیشتر و بیشتر در این دنیا نفوذ می‌کند تا از این رهگذر بتوانند جنبه‌هایی از آن را کشف کنند که پیش از این از نظر ایشان پنهان بود.

کار وقتی واقعاً جالب می‌شود که پلهای نامنتظره‌ای بین بخشهایی از ریاضی، که در تصویر ذهنی ایجادشده به‌وسیلهٔ ریاضیدانان نسلهای پیشین از هم دور بودند، پدیدار می‌شوند. آنگاه که این امر رخ دهد، این احساس به آدمی دست می‌دهد که ناگاه نسیمی مه حائل را، که بخشهایی از چشم‌انداز زیبای ریاضی را از دیده‌ها پنهان می‌کرد، به کنار می‌راند. در کار خودم چنین شگفتیهای بزرگی بیشتر از راه ارتباط با فیزیک پیش آمده است. مفاهیم ریاضی که به گونه‌ای طبیعی در فیزیک رخ می‌نمایند اغلب، به قول آدامار^۱، مفاهیمی اساسی می‌شوند. از نظر آدامار

«این مفاهیم دارای آن نوع تازگی زودگذری نیستند که فقط تأثیری بر ریاضیدانان فرورفته در عوالم خویش می‌گذارد، بلکه تازگی بسیار پرثمری دارند که از طبیعت و ذات اشیاء می‌جوشد.»

این مقاله را با اندرزهایی «عملی‌تر» به پایان می‌آورم. ولی به هر حال، توجه داشته باشید که هر ریاضیدان «مورد خاصی» است و نباید این اندرزها را خیلی جدی گرفت.

پیاده‌روی. یک تمرین بسیار سالم، آنگاه که با مسأله‌ای پیچیده درگیر هستید (که اغلب با محاسبات سروکار دارد) این است که (بدون کاغذ و قلم) به پیاده‌روی طولانی بروید و محاسبات را در ذهنتان انجام دهید صرف‌نظر از اینکه در آغاز ممکن است فکر کنید «خیلی سخت است که محاسبات به این صورت انجام شود». حتی اگر فرد موفق نشود، حافظهٔ در دسترس او پرورش می‌یابد و مهارتش افزون می‌شود.

دراز کشیدن. ریاضیدانها معمولاً به‌سختی می‌توانند به شریک زندگی‌شان توضیح دهند که وقتی به شدیدترین صورت کار می‌کنند که در تاریکی روی مبل دراز می‌کشند. بدبختانه، با ایمیل و دست‌یازی صفحه‌های رایانه به تمامی مؤسسه‌های ریاضی، دستیابی به فرصت تنهایی و گوشه‌گیری و تمرکز نایاب‌تر، و در عین حال با ارزش‌تر می‌شود.

بی‌پروایی. در فرایندی که به کشف ریاضیات نو می‌انجامد، چندین مرحله وجود دارد. مرحلهٔ «بررسی کردن» هر چند ترسناک است، اما تنها نیازمند تعقل و تمرکز است. مرحلهٔ نخست که مرحلهٔ خلاقیت است ماهیت کاملاً متفاوتی دارد. به یک معنی، این مرحله نیازمند نوعی ناآگاهی است، زیرا شخص به هزار و یک دلیل ممکن است به مسأله‌ای که ریاضیدانان بسیاری در حل آن ناموفق بوده‌اند، نپردازد.

شکست‌ها. برای ریاضیدان در هر مرحله از زندگی علمی‌اش (از جمله، در مراحل نخستین) بسیار پیش می‌آید که مثلاً پیش‌چاپ مقالهٔ رقیب را دریافت می‌کند و دچار یأس و ناراحتی می‌شود. تنها پیشنهادی که اینجا دارم این است که این احساس را با تزریق انرژی مثبت به انگیزه‌ای برای سخت‌تر

کاستیهای مهم دیگرشان به سکوت فرو می‌روند. اما در مواجهه با موضوعی به دشواری و به زیبایی ریاضیات، هر کس می‌تواند چیزی از دیگران بیاموزد. حالا بسیاری همایشها و کارگاههای کوچک و خوب برگزار می‌شوند که سازماندهی آنها به نحوی است که بحث دربارهٔ جزئیات نظریه‌های خاص و همچنین دربارهٔ صورتبندی جهت‌ها و پرسشهای جدید به آسانی انجام می‌شود.

هر چند این عقیده که ریاضیات ذاتاً مردانه است دیگر خیلی کمتر رایج است، مشکل برقراری آشتی بین زن بودن و ریاضیدان بودن هنوز مطرح است. فکر نمی‌کنم که ما زنان آن گونه که باید و شاید در دنیای ریاضی حضور داشته باشیم، ولی آنقدر حضور داریم که به عنوان موردهای خاص و استثنایی در نظر گرفته نشویم. من نشستهایی را که در درجهٔ نخست برای زنان در نظر گرفته شده‌اند، برخلاف انتظار، ارزنده می‌یابم؛ فضای این نشستها وقتی که اتاق سخنرانی پر از زنانی است که به بحث ریاضی مشغول‌اند دیگرگونه است. همچنین، این نکته روز به روز بیشتر درک می‌شود که مسألهٔ حقیقی این است که چگونه هر فرد جوانی در عین حالی که می‌خواهد ریاضیدان خلاق شود، بتواند زندگی شخصی رضایت‌بخشی فراهم کند. آنگاه که مردم به‌طور جدی تدابیری در این مورد بیندیشند واقعاً راه درازی را پیموده‌ایم.

۵. پیتر سرنک^۱

من طی سالیان تعداد قابل ملاحظه‌ای دانشجوی دکتری را راهنمایی کرده‌ام و بنابراین، احتمالاً به عنوان یک مربی با تجربه و اجد صلاحیت برای نوشتن این اندرزنامه هستم. وقتی دانشجویی باهوش را راهنمایی می‌کنم (و به‌قدر کافی خوشبخت بوده‌ام که سهم خودم را از این‌گونه دانشجویان داشته باشم)، تعامل من با او تقریباً مثل این است که به کسی بگویم در جایی به دنبال طلا بگردد و تنها پیشنهادهایی مبهم ارائه دهم. وقتی دانشجویان با مهارت و استعدادشان دست به‌کار می‌شوند به جای طلا الماس می‌یابند (و البته، پس از آن آدم نمی‌تواند از گفتن اینکه «من که به تو گفته بودم»، خودداری کند). در این موارد، و همچنین در موارد بسیار دیگری، نقش استاد پیشکسوت بیشتر شبیه یک مربی است: مربی تشویق می‌کند و اطمینان می‌یابد که شخص تحت تربیت او روی مسائل جالب کار می‌کند و از ابزارهای اساسی که در دسترس هستند باخبر است. سالهای سال همواره نکته‌ها و پیشنهادهای ویژه‌ای را تکرار کرده‌ام که ممکن است مفید از آب درآمده باشند. در اینجا برخی از این نکته‌ها و پیشنهادها را فهرست‌وار می‌آورم.

(i) وقتی که رشته‌ای را می‌آموزید، باید علاوه بر خواندن نوشته‌های تازه، مقاله‌های اصلی و اولیه را هم مطالعه کنید، به‌خصوص مقاله‌هایی را که استادان مسلم موضوع مورد نظر نوشته‌اند. یکی از مشکلات شرحهای جدید بعضی از مباحث این است که ممکن است بیش از حد شسته‌ورفته باشند. از آنجا که هر نویسندهٔ جدید برهانها و شرحهای هوشمندانه‌تری از یک نظریه می‌یابد، این شرحها به سوی شرحی که شامل «کوتاه‌ترین برهانها» است تکامل پیدا می‌کند. بدبختانه، این شرحها اغلب به شکلی هستند که دانشجوی تازه‌کار را به این اندیشه فرو می‌برد که «چگونه کسی این برهانها را ابداع کرده است؟» با مراجعه به متون اصلی شخص معمولاً می‌تواند سیر تکامل طبیعی موضوع را ببیند و دریابد که چگونه موضوع به شکل نوینش رسیده است. (آن گامهای نامنتظر و هوشمندانه که شخص را از نبوغ ابداع‌کننده دچار حیرت می‌کنند همچنان باقی

نمی‌دانستم که کوه‌مولوژی چیست، خمینه چیست، میدان برداری چیست، و جبر لی چیست.

هر چند که این جهل تا حدی ناشی از اشکال آموزش تخصص‌محور بود، به عدم ارتباط من با دنیای گسترده‌تر ریاضیات نیز برمی‌گشت. این مشکل را که چگونه زن بودن را با ریاضیدان بودن آشتی دهم اساساً با ترتیب دادن دو زندگی جداگانه برای خودم حل کرده بودم. انزوای من پس از بازگشت از مسکو شدت گرفت. با تغییر رشته از آنالیز تابعی به توپولوژی، از راهنمایی چندانی برخوردار نبودم، خیلی می‌ترسیدم که اگر زیاد سؤال کنم، ناشی و نادان به نظر آیم. در مرحلهٔ پست‌دکتری کودکی خردسال داشتم که مرا با مشکلات عملی بسیار درگیر می‌کرد. در آن مرحله، بدون هیچ درکی از فرایند ریاضی‌ورزیدن، بیشتر با خواندن می‌آموختم، بی‌خبر از نقشی اساسی که صورتبندی پرسشها و امتحان کردن، چه بسا، خام‌ایده‌های خود شخص ایفا می‌کند. همچنین شناختی از اینکه چگونه زندگی حرفه‌ای را بسازم نداشتم. چیزهای خوب خودبه‌خود پیش نمی‌آیند: باید برای پژوهشگری^۱ و شغلای دیگر اقدام کرد و نگاهی به همایشهای جالب داشت. قطعاً داشتن راهنمایی که روشهای بهتری برای دست و پنجه نرم کردن با چنین مشکلاتی پیشنهاد کند کمک‌کننده است.

احتمالاً لازم‌ترین کار این بود که بیاموزم چگونه سؤال خوب مطرح کنم. کار دانشجویانه تنها این است که به‌قدر کافی بیاموزد تا بتواند پرسشهای مطرح‌شده توسط دیگران را جواب دهد بلکه همچنین باید بیاموزد که چگونه پرسشهایی تنظیم کند که ممکن است به جاهایی جالب برسند. به هنگام آموختن مطلبی جدید، اغلب با استفاده از نظریهٔ پیچیده‌ای که قبلاً توسط دیگران ارائه شده بود از وسط مطلب شروع می‌کردم. اما اغلب با شروع کردن از ساده‌ترین پرسشها و مثالهاست که می‌توان جلوتر را دید، زیرا از این طریق است که فهم مسألهٔ اساسی آسان‌تر می‌شود و چه بسا که رهیافت جدیدی نیز به‌دست آید. به عنوان مثال، همواره دوست داشتم که روی قضیهٔ نافشرنگی گروموف^۲ در هندسهٔ هماتافه^۳ کار کنم، که محدودیتهایی بر شیوه‌های دستکاری یک گوی به‌صورت هماتافه تحمیل می‌کند. این نتیجهٔ بسیار اساسی و هندسی به‌طریقی در ذهن من طنین‌انداز است، و پایهٔ استواری برایم می‌سازد که از آنجا به کاوشگری می‌پردازم.

این روزها مردم خیلی بیشتر آگاه‌اند که ریاضیات حاصل تلاش همگانی است: حتی درخشان‌ترین ایده معنای خود را تنها از رابطه‌اش با کلیت موضوع می‌گیرد. وقتی که شخص درکی از زمینه دارد، بسیار مهم و شمر ثمر است که به تنهایی کار کند. ولی، مراوده با دیگران به هنگامی که شخص در کار آموختن است امری حیاتی است.

تلاشهای موفقیت‌آمیز زیادی برای آسان نمودن این ارتباط، از طریق تغییر ساختار ساختمانها، نشستها و همایشها، برنامه‌های دانشکده‌ها، و همچنین به گونه‌ای کمتر رسمی از طریق تغییر ساختار سمینارها و سخنرانها، شده است. چقدر فضای یک سمینار تغییر می‌کند وقتی که ریاضیدان پیشکسوتی، به جای چرت زدن و خسته به نظر رسیدن، سؤالی می‌پرسد که موضوع را برای دیگران روشن می‌کند و بدین‌گونه بحث را برای شرکت‌کنندگان باز می‌نماید. اشخاص (پیر و جوان) اغلب از ترس نشان دادن ناآگاهی، فقدان تخیل و

1. fellowship 2. Gromov's nonsqueezing theorem
3. symplectic geometry

برای شما نباشد. بیشتر اوقات آدمی گیر می‌افتد، و اگر این امر شامل شما نمی‌شود، یا استعداد خارق‌العاده‌ای دارید یا درگیر با مسائلی هستید که پیشاپیش می‌دانسته‌اید چگونه باید آنها را حل کنید. امکان این نوع کار وجود دارد، و ممکن است از کیفیت بالایی هم برخوردار باشد، ولی بیشتر پیشرفتهای شگرف با کار سخت و جانفرسا، با برداشتن گامهای اشتباه زیاد و طی کردن دوره‌های طولانی از پیشرفت اندک یا حتی پسرفت، به‌دست آمده‌اند. راههایی وجود دارند که این جنبه از پژوهش را کمتر ناخوشایند می‌کند. این روزها افراد زیادی با هم کار می‌کنند، که علاوه بر برتری روشن این شیوه از لحاظ کنار هم آوردن تخصصهای گوناگون به فرد اجازه می‌دهد که خستگی‌اش را با دیگران قسمت کند. برای بیشتر مردم، این امر نقطه مثبت بزرگی است (و در ریاضیات، برخلاف رشته‌های دیگر، سهم متناظر از خوشی و اعتبار به خاطر به‌دست آوردن یک پیشرفت بزرگ، دست‌کم تاکنون، به جنگ و دعوای بزرگ نینجامیده است). اغلب به دانشجویان سفارش می‌کنم که در هر لحظه، حوزه‌ای از مسائل را در دسترس داشته باشند. آسان‌ترین این مسائل باز باید آتقدر سخت باشد که به شما احساس رضایتمندی دهد (چرا که بدون این احساس، هدف چیست؟) و اگر بخت یارتان باشد، مورد علاقه دیگران واقع شود. سپس باید حوزه‌ای از مسائل چالش‌برانگیزتر داشته باشید، که سخت‌ترین آن مسائل باید مسائل حل‌نشده عمده باشند. شخص باید به این‌گونه مسائل در طی زمان بپردازد و به آنها از دیدگاههای گوناگون نگاه کند. مهم است که خود را در معرض احتمال حل مسائل بسیار سخت قرار دهید، شاید از اندکی بخت‌باری بهره‌مند شوید.

(v) هر هفته به سخنرانیهای عمومی دانشکده‌تان بروید، به این امید که برگزارکنندگان آنها سخنرانان خوبی انتخاب کرده‌اند. مهم است که آگاهی وسیعی از عرصه ریاضی داشته باشید. در این سخنرانیها علاوه بر کسب اطلاع از مسائل جالب و پیشرفتی که دیگران در زمینه‌های دیگر کرده‌اند، ممکن است هنگامی که سخنران درباره مطلبی کاملاً متفاوت سخنرانی می‌کند، اندیشه‌ای در ذهنتان برانگیخته شود. همچنین، ممکن است فن یا نظریه‌ای بیاموزید که در یکی از مسائلی که به آن می‌پردازید به‌کار آید. در دوران اخیر، تعداد قابل ملاحظه‌ای از حلهای جدید برجسته‌ترین مسائل قدیمی از ترکیبی نامنتظر از ایده‌ها از شاخه‌های گوناگون ریاضی نشأت گرفته‌اند.

• این مقاله ترجمه مطلبی با عنوان «advice to a young mathematician» در صفحات ۱۰۶-۱۵۱ از کتاب *The Princeton Companion to Mathematics* است. این کتاب در بخش نقد و بررسی این شماره با عنوان «همراهنامه ریاضی پرینستون» معرفی شده است.

می‌مانند، اما چنین گامهایی خیلی کمتر از آن هستند که ممکن است فکر کنید). به عنوان مثال، معمولاً توصیه می‌کنم که مقاله‌های اصلی وایل درباره نظریه نمایش گروههای لی فشرده و به‌دست آوردن دستور مشخصه وایل^۱ در کنار یکی از شرحهای نوین از این مطلب مطالعه شود. همچنین، کتاب «مفهوم رویه ریمن»^۲ وایل را به کسی که آنالیز مختلط را می‌داند و می‌خواهد درباره نظریه نوین رویه‌های ریمن، که اهمیت زیادی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی دارد، بیاموزد، سفارش می‌کنم. همچنین مطالعه مجموعه آثار ریاضیدانان برجسته‌ای مانند وایل آموزنده است. تقریباً همواره یک خط طبیعی فکری وجود دارد که شخص را که از یک مقاله به مقاله دیگر رهنمون می‌شود و درک می‌کند که مراحل و نتایج خاصی اجتناب‌ناپذیرند. این امر می‌تواند بسیار الهام‌بخش باشد. (ii) از سوی دیگر، باید در عقاید جزئی و «فرضیه‌های متعارف» تردید کنید، حتی اگر این فرضیه‌ها را افراد نخبه‌ای مطرح کرده باشند. بسیاری از فرضیه‌های متعارف براساس موارد خاصی که شخص درک کرده است ساخته شده‌اند. در ورای آن موارد، گاهی اوقات این فرضیه‌ها چندان فرقی با آرزو و خیال ندارند: شخص فقط امید دارد که تصویر کلی با تصویری که از موارد خاص برمی‌آید خیلی متفاوت نباشد. مواردی را می‌شناسم که افرادی شروع به اثبات حکمی کردند که باور عمومی به درستی آن گواهی می‌داد و هیچ پیشرفتی نکردند تا اینکه به‌طور جدی در درستی آن تردید کردند. از سوی دیگر، کمی ناراحت‌کننده است که می‌بینم گاهی، بدون دلیل معقولی، سایه شک و تردید بر بعضی فرضیه‌های خاص، مانند فرضیه ریمن، یا بر اثبات‌پذیری این فرضیه‌ها، افکنده می‌شود. هر چند دانشمند قطعاً باید موضع نقادانه‌ای اتخاذ کند (به‌خصوص در مورد بعضی از اشیای مصنوعی که ما ریاضیدانها ابداع کرده‌ایم)، از نظر روانی مهم است که باورهایی درباره دنیای ریاضی‌مان و درباره آنچه درست است و آنچه اثبات‌پذیر است داشته باشیم. (iii) «مقدماتی» را با «آسان» اشتباه نکنید: برهان قطعاً می‌تواند مقدماتی باشد بدون اینکه ساده باشد. در واقع، مثالهای زیادی از قضیه‌هایی موجودند که اندکی استفاده از مطالب پیشرفته‌تر برهان آنها را آسان می‌کند و ایده‌های زیربنایی را بر ملا می‌سازد، ولی در شرحی مقدماتی که شامل مفاهیم پیشرفته‌تر نیست، ماجرا پنهان می‌ماند. در عین حال، مواظب باشید که پیشرفتگی را با کیفیت یا «ملاط استدلال» یکی نگیرید (این عبارت را ظاهراً دوست دارم زیاد به این معنی به‌کار ببرم: خیلی از دانشجویان پیشینم در این باره سر به سرم گذاشته‌اند). در بین بعضی از ریاضیدانان جوان گرایشی وجود دارد که فکر می‌کنند به کار بردن زبان پیچیده و پرزرق و برق به معنای ژرف بودن کار آنهاست. با وجود این، ابزارهای نوین وقتی به‌درستی درک شوند و با اندیشه‌های نو ترکیب شوند، قدرتمندند. افرادی که در بعضی زمینه‌ها (مثلاً نظریه اعداد) کار می‌کنند و وقت و زحمت زیادی برای آموختن این‌گونه ابزارها صرف نمی‌کنند خود را در معرض ضرر و زیان بسیار قرار می‌دهند. نیاموختن این ابزارها چون خراب کردن یک ساختمان با تنها یک اسکینه است. حتی اگر در استفاده از اسکینه خیلی ماهر باشید، فردی مجهز به بلدوزر، برتری عظیمی برای این کار دارد و نیازی ندارد که آنقدرها هم ماهر باشد.

(iv) کار پژوهش ریاضی خسته‌کننده و سرشار از فراز و نشیب است. اگر نمی‌توانید به این حالت عادت کنید، ریاضیات ممکن است پیشه مطلوبی

1. The Weyl character formula

2. The Concept of a Riemann Surface