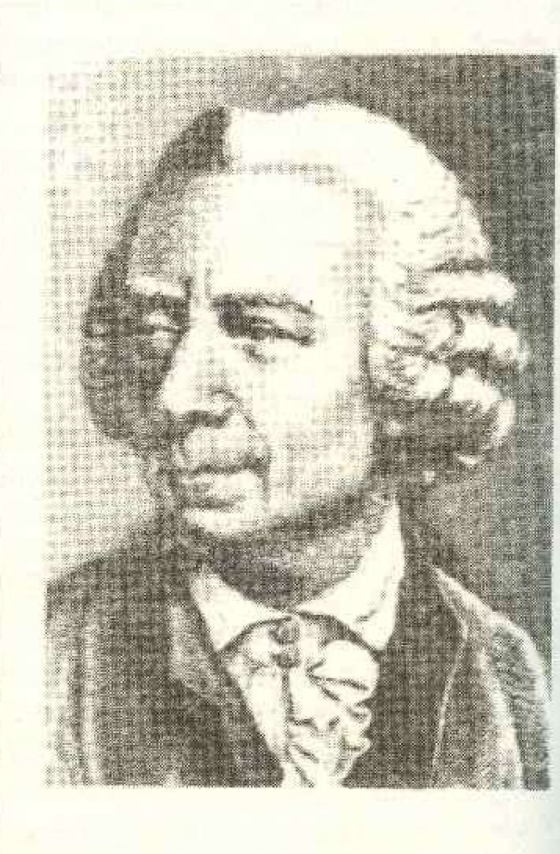
اویــلر*

آندره ویل
ترجمهٔ محمد جلوداری‌مقانی



تا اواخر قرن هفدهم، ریاضیات گاه بـه‌استادان زبردستش شهرتی بسزا می‌بخشید ولی به‌ندرت موجبات پیشرفت در جامعه و به‌دست آوردن شغل آبرومندانه‌را برای آنها فراهم می‌کرد. ویت[1] زندگانی خود را از راه وکالت می‌گذراند و فرمـا از راه قضاوت؛ حتی به‌روزگار فرما تعداد کرسیهای استادی ریـاضیات اندك، و فاصلهٔ زمانی بین تفویضِ آنها زیاد بود. البته شی‌پیونه دل‌فرو[2] دراوایل قرن شانزدهم یکی از استادان دانشگاه بلونیا[3] به‌حساب می‌آمد که درسراسر اروپا دانشگاه مشهوری بود. شغل کاردان طبابت و شغل بومبلی[4] مهندسی بود. سیمون استوین نیز درهلند مهندس بود. نپر، کاشف لگاریتم، یك ملاك اسكاتلندی بود کـه پس از بازگشت از مسافرتهای دوران جوانی، درقصر خود واقع در مرچیستون زندگی می‌کرد. در رشته‌های نزدیك به‌ریاضی هم وضع بهتر از این نبود. کوپرنیك مقام کشیشی داشت. معلم کپلر، ماستلین[5]، استاد توبینگن بود، ولی کپلر با جدیت به‌کسب وکارش یعنی طالع‌بینی و ساختن زایچه مشغول بود. نبوغ گالیله همراه با شخصیت نافذش، نخست او را به‌مقام استادی در پادوا و سپس بـه‌منصب رشك‌برانگیز تحت‌الحمایگی گراندوك توسكانی رسانـد، و درنتیجه از مصیبت بارترین نتایج برخورد با کلیسای رم نجات یـافت. شاگرد وی توریچلی به‌عنوان "فیلسوف و ریاضیدان" نزدگراندوك جـانشین وی شد، درحالی که کاوالیری[6] هم کرسی بلونا و هم ریاست صومعهٔ ژزواتی[7] درهمان شهر را داشت.

از میان آنهایی که بـا فرما مکاتبهٔ علمی داشتند، عـدهٔ کمی دارای مرتبهٔ استادی بودند. روبروال، درکولژدوفرانس (که بعد به‌کولژ رویال موسوم شد) کرسیی راکه درسال ۱۵۷۲ بنا به‌وصیت پیر دولارامه، دانشمند وفیلسوف، بنیاد نهاده شده بود، اشغال کرد. والیس از سال ۱۶۴۹ تـا زمان مرگش در سال ۱۷۰۳ صاحب کرسی ساویلی[8] در اکسفرد بـود؛ ایـن کـرسی در سال ۱۶۲۰ به‌افتخار بریگز ایجاد شده‌بود. ولی‌همکار جوان وبااستعداد والیس، ویلیام برانکر، ویکنت دوم، نجیب‌زاده‌ای بود کـه شرح دوران خدمتش درنیروی دریایی وعشقهایش، در یادداشتهای روزانه پیپز[9] درج شده‌است. تنها درسال ۱۶۶۳ بودکه آیزك‌بارو اولین استاد لوکازی[10] در دانشگاه کمبریج شد؛ وی این مقام را در سال ۱۶۶۹ به‌نیوتن واگذارکرد تا خود درخدمت چارلز دوم واعظ شود، و درمقام یك روحانی شهرت بسزایی به‌دست آورد. درهلند، زمانی که دوست و شارح آثار دکارت، اسخوتن[11]، استاد لیدن بـود، رنه دواسلوز[12]، ریاضیدانی که دربین معاصرانش بسیار محترم بود و شخصیتی جذاب داشت، در لیژ کشیش بود. دکارت، چنانکه خود

1. Viète
2. Scipione del Ferro
3. lo studio di Bologna
4. Bombelli
5. Maestlin
6. Cavalieri
7. Gesuati
8. Savilian
9. Pepys
10. Lucasian
11. Schooten
12. Sluse

گفته است، به لطف الهی[1]، خود را بی‌نیاز از شغل انتفاعی می‌دانست؛ دوستان او کنستانتین هویگنس و پسر کنستانتین، کریستیان هویگنس کبیر، نیز چون او بی‌نیاز بودند. لایب‌نیتس در استخدام دربار هانور بود، و در تمام طول زندگانی‌اش به ریاضیات عشق می‌ورزید. اما گاهی دوستانش در شگفت می‌ماندند که با آن همه اشتغالاتی که دارد چگونه برای مطالعه ریاضیات فرصت کافی به‌دست می‌آورد.

شغل این افراد هرچه بود، طرز برخوردشان با ریاضیات غالباً طوری بود که گویی ریاضیدان کاملاً حرفه‌ای هستند. آنها کوشش می‌کردند خواه به‌وسیلهٔ نوشته‌های چاپی و خواه به‌وسیلهٔ مکاتبه، افکار خود و نتیجه‌هایی را که به‌دست آورده‌اند به طرز صحیحی منتشر کنند و در جریان پیشرفتهای عصر خود قرار گیرند. برای این‌کار به‌شبکه‌ای از مخبرهای خصوصی متکی بودند. هنگامی که مسافرت می‌کردند، در جستجوی دانشمندان بیگانه بودند. در وطن، مسافرین دوستدار علم به دیدار آنها می‌شتافتند؛ زنبورهای عسل ساعی کاری جز افشاندن گرده‌های برچیده‌شده از اینجا و آنجا نداشتند. آنها مشتاقانه درپی افرادی با علایق مشابه خودشان بودند که با آنها مکاتبه کنند؛ نامه‌ها دست به‌دست می‌گردید تا به‌دست فرد ذیعلاقه برسد. داشتن یك کتابخانهٔ شخصی که به تعداد کافی کتاب داشته باشد، از ضروریات بود. کتابفروشها، ازمشتریان خود سفارش دائمی داشتند که آخرین انتشارات را در زمینهٔ انتخابی آنها، در اختیارشان بگذارند. این نظام، یا فقدان نظام، نسبتاً خوب کار می‌کرد؛ و در واقع تا امروز هم به‌صورتی برقرار مانده و با روشهای رسمیتر ارتباط تکمیل شده و از ارزش آن چندان کاسته نشده است. با این همه، حتی در قرن هفدهم، چنین نظامی کافی وکارا به‌نظر نمی‌رسیده است.

قبل از تولد اویلر در سال ۱۷۰۷، تحولاتی اساسی که اولین علایم آن حتی قبل از مرگ فرما آشکار شده بود، رخ داد. انتشار مجلهٔ دانشمند در ژانویهٔ ۱۶۶۵ آغاز شد، درست موقعی که باید خبر مرگ فرما را (که درمجله "این مرد بزرگ" نامیده شده‌است) چاپ می‌کرد. کلبرت، وزیر دوراندیش لوئی چهاردهم، در ۱۶۶۶ هویگنس را و در ۱۶۶۹ کاسینی ستاره‌شناس را به‌پاریس آورده و مستمری شاهانه‌ای از آن نوع که تا آن زمان به‌ادبا اختصاص داشت، برای هر یك مقرر کرده‌بود. درسال ۱۶۳۵ ریشلیو فرهنگستان فرانسه را بنیان نهاد. کلبرت که ذهن عملگراتری داشت و فایدهٔ پژوهش علمی را تشخیص می‌داد (و ارزش پژوهش محض را کمتر از پژوهش کاربردی نمی‌دانست) برای شکوفایی کشور، در سال ۱۶۶۱ فرهنگستان علوم را حول هسته‌ای که بیشتر اعضایش قبلاً با فرما مکاتبه داشتند، تأسیس کرد و ادارهٔ آن را به‌دوست صمیمی وهمکار قبلی فرما، کارکاوی[2]، تفویض نمود و وی اولین دبیر آن شد. در انگلستان با بازگشت چارلز دوم درسال ۱۶۶۰ ثبات سیاسی تا حدی برقرار شده بود؛ درسال ۱۶۶۲ گروه آماتورها که مدتی جلسات منظمی در کالج گرشام[3] داشت، فرمانی دریافت کرد که به‌موجب آن، انجمن سلطنتی توسط این افراد تشکیل، و برانکر اولین رئیس آن شد. درسال ۱۶۶۵ این گروه انتشار چکیده‌های فلسفی را که تاکنون نیز ادامه یافته است، آغاز کرد. به‌پیروی از آن، درسال ۱۶۹۸ فرهنگستان فرانسه انتشار یك سری مجلهٔ سالانه، به‌نامهای متفاوت تاریخ و مقاله‌های فرهنگستان علوم فرانسه را آغاز کرد. در سال ۱۶۸۲ لایب‌نیتس در ایجاد یك مجلهٔ بزرگ علمی، آکتاارودیتوروم[1] لایپزیگ، نقش مؤثری ایفا کرد و دراولین شماره‌های آن مقالاتی نوشت که حساب بینهایت کوچکها از آنها نشأت گرفت.

به‌زودی دانشگاهها و فرهنگستانها بر سر استعدادهای علمی به‌رقابت برخاستند و از هیچ کوشش و پولی برای جلب آنها دریغ نکردند. یاکوب برنولی در شهر خود بازل درسال ۱۶۸۷ استاد دانشگاه شد، و این موجب شد که تا زنده بود برادر کوچکتر و رقیب سرسختش یوهان از به‌دست آوردن شغل دانشگاهی در آن شهر قطع امید کند. یوهان نخست مجبور شد حساب بینهایت کوچکهای لایب‌نیتس را به‌نجیب‌زادهٔ فرانسوی مارکی دولوپیتال بیاموزد و حتی قراردادی غیرعادی امضا کند که به موجب آن مارکی دولوپیتال نسبت به‌تمام کشفیات ریاضی او ذیحق باشد. با این حال، درسال ۱۶۹۵ یوهان برنولی در گرونینگن استاد شد و با تدبیر ماهرانهٔ قراردادن اوترشت درمقابل گرونینگن، سرانجام موقعیت خود را در آنجا بهبود بخشید؛ و بالاخره پس از مرگ برادرش درسال ۱۷۰۵ در بازل اقامت گزید. بنابراین، تعجبی ندارد که ببینیم او در ۱۷۴۱ استخدام اویلر در برلین را، به‌خاطر جنبهٔ مالی این استخدام، تبریك می‌گوید و درهمان‌جا اشاره‌می‌کند که حاضر است (درمقابل حقوق سالانهٔ اندکی) با ارسال منظم تحقیقات خود، مجموعهٔ مقاله‌های فرهنگستان برلین را پرمایه‌تر کند. خلاصه، وضع زندگی علمی در اوایل قرن هیجدهم با آنچه که امروز شاهد آن هستیم، چندان تفاوتی نداشت.

پدر اویلر، پاول اویلر، کشیش ناحیهٔ ریهن در نزدیکی بازل بود؛ وی در دانشگاه بازل الهیات خوانده و همزمان در کلاسهای درس یاکوب برنولی نیز شرکت‌کرده بود؛ او برای پسرش شغل مشابهی را درنظر داشت؛ اما هنگامی که تمایلات و نبوغ جوان آشکار شد، هیچ مانعی بر سر راه آنها قرار نداد. در آن هنگام، هرجوانی که استعداد علمی استثنایی داشت به‌وضوح آیندهٔ روشنی درانتظارش بود.

درسال ۱۷۰۷، وقتی اویلر به‌دنیا آمد، یاکوب برنولی درگذشته و یوهان جانشین وی شده‌بود؛ دوپسر یوهان، نیکولاوس (متولد ۱۶۹۵) و دانیل (متولد ۱۷۰۰)، سنت خاندان خود را دنبال می‌کردند با این تفاوت که آنها برخلاف پدر وعموی خود، قلباً یکدیگر را دوست می‌داشتند وبسیار می‌کوشیدند این دوستی را نشان دهند. اویلر دوست صمیمی آنها، و شاگرد مقرب یوهان شد؛ او درسنین پیری، با شعف به‌یاد می‌آورد که شنبه‌ها به ملاقات استادش می‌رفته و مشکلاتی را که درطول هفته با آنها روبه‌رو می‌شده، مطرح می‌کرده‌است، و بسیار می‌کوشیده است که استادش را با طرح سؤالات غیرلازم دردسر ندهد.

سه تن از شاهان در زندگانی اویلر نقش مهمی داشتند: پتر کبیر، فردریك کبیر و کاترین کبیر. پتر، که شاید واقعاً تزار کبیری

1. *graces à Dieu* 2. Carcavi 3. Gresham

1. *Acta Eruditorum*

بود؛ درسال ۱۷۲۵ درگذشت؛ اما در زمان حیاتش توانسته بود سن‌پترزبورگ را بنا کند، بعضی از باشکوهترین ساختمانهای آن را برپا سازد، ومهمتر ازهمه برای داستان ما، برای فرهنگستان علوم طرحهایی به‌سبك آنچه که درغرب دیده بود بریزد، که همهٔ این طرحها را همسر بیوه‌اش به‌طورکامل اجراکرد. درسال ۱۷۲۵ برنولیهای جوان، نیکولاوس و دانیل، به‌پترزبورگ دعوت شدند. سال بعد، نیکولاوس گویا از بیماری آپاندیسیت درگذشت. تقریباً درهمان موقع به اویلر پیشنهاد شد که به فرهنگستان پترزبورگ بپیوندد. اویلر هنوز بیست‌سالش تمام‌نشده بود و به‌تازگی به‌خاطر نوشتن مقاله‌ای دربارهٔ کشتی‌سازی برندهٔ جایزه شده بود ــ حال آنکه درعمرش حرکت حتی یك کشتی دریاپیما را ندیده بود. او هیچ امیدی نداشت که به‌زودی شغلی در وطن خود به‌دست آورد و لذا پیشنهاد را با رغبت پذیرفت.

باکشتی از بازل از طریق رود راین به ماینتس رفت. سپس بیشتر با پای پیاده به‌لوبك سفر کرد؛ در بین راه به‌دیدن کریستین ولف که فیلسوفی پیرو لایب‌نیتس بود، رفت؛ او را (چنانکه به‌اویلر گفت) پادشاهی که از فلسفه چیزی نمی‌فهمید، از برلین تبعید کرده بود. موضوع مورد علاقهٔ ولف نظریه موناد‌های لایب‌نیتس بود، که توجه اویلر را جلب نکرد. یك کشتی، ریاضی‌دان جوان را از لوبك به‌پترزبورگ رسانید.

درآن روزگار فرهنگستانها مؤسساتی تحقیقاتی بودند که موقوفهٔ کافی، سرمایهٔ فراوان وکتابخانه‌های خوب داشتند. اعضای آنها از آزادی قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار بودند. وظیفهٔ اصلی آنان، مشارکت فعال در انتشارات فرهنگستان و اعتلای حیثیت علمی آن در عرصهٔ جهانی بود. ضمناً این افراد مشاورین علمی شاه ومقامات دولت نیز بودند و برای انجام هر وظیفه‌ای، چه با طبیعتشان سازگار بود وچه نبود، آمادگی داشتند. اگرچنین نبود، چنانکه یکبار اویلر به‌کاترین گوشزد کرده بود، هیچ دولتی زیر بار خرج گزاف این‌گونه مؤسسات نمی‌رفت. اویلر (که درپترزبورگ به‌زبان روسی خوب مسلط شده بود) در اوج شهرت خود درسال ۱۷۵۸، چند نامه راکه درعملیات نظامی علیه ارتش روسیه به‌دست آمده بود برای شاه فردریك ترجمه کرد، بدون اینکه این‌کار را دون شأن خود ویا آن را ناسازگار با رابطهٔ نزدیکش با فرهنگستان پترزبورگ بداند.

اما در سال ۱۷۲۷، زمانی که اویلر به پترزبورگ رسید، وضع سیاسی تغییرکرده بود. تحت فرمانروایی تزار جدید، تمام استخدامهای فرهنگستان متوقف شده بود. به اویلر به خاطر مقالهٔ فوق‌الذکرش [دربارهٔ کشتی‌سازی] کاری درنیروی دریایی دادند. کمی بعد عضو حقوق‌بگیر فرهنگستان شد، ولی درآغاز رتبه‌اش پایین و درسطح دستیار بود. هنگامی که دوستش دانیل در سال ۱۷۳۳ عازم بازل شد، به جای او منصوب گشت. اینك بضاعت آن را داشت تا، طبیعتاً با یکی ازمهاجرین سویسی آنجا، ازدواج کند وخانهٔ خوبی برای خود بخرد. عروس، دختر گسل[1] نقاش بود و باگذشت زمان سیزده بچه به‌دنیا آورد که از آنها تنها سه پسر بعد از اویلر زنده ماندند؛ بیش از این چیزی دربارهٔ همسر اویلر نمی‌دانیم. پسر ارشدش، یوهان آلبرت، متولد ۱۷۳۴، ابتدا یکی ازهمکاران پدر و سپس یکی از اعضای برجستهٔ فرهنگستان شد.

همینکه اویلر در پترزبورگ کاملاً مستقر شد، علی‌رغم اینکه با رفتن دانیل برنولی نسبتاً تنها شده بود، میزان تولید علمی‌اش از حدود انتظار بسیار فراتر رفت. [ولی] بیماری سخت سال ۱۷۳۵، که دراثر آن چشم راست خود را از دست داد، از این میزان به‌شدت کاست. او بدون شك ارزشمندترین عضو آکادمی شده بود و شهرتش با سرعت زایدالوصفی افزایش می‌یافت؛ ولی وقوع دوحادثه در فضای سیاسی اروپا، موجب تحول مهمی در زندگی آرام وی شد. در پترزبورگ به‌نظر می‌رسید که مرگ تزارینا درسال ۱۷۴۰، روی‌کار آمدن شورای سلطنت، وآشوبهای پس ازآن حتی موجودیت فرهنگستان را به‌خطر افکنده باشد. درست در همین زمان بحرانی، فردریك دوم به جای پدر خود (همان شاهی که به‌طور اهانت‌آمیزی کریستین‌ولف را از برلین بیرون‌کرده بود) بر تخت سلطنت پروس نشست و بی‌درنگ برای تأسیس فرهنگستان به‌سرپرستی خود اقدام کرد؛ برای این مقصود اسامی مشهورترین دانشمندان اروپایی را خواست، که البته نام اویلر دراین صورت اسامی بود. پیشنهاد سخاوتمندانهٔ فردریك و بدترشدن سریع اوضاع در پترزبورگ دست به‌دست هم دادند و اویلر پس از سه هفته مسافرت روی دریای بالتیك (که در طول آن، به‌ادعای خودش تنها کسی ازخانواده بودکه دچاردریاگرفتگی نشد) در ژوئیهٔ سال ۱۷۴۱ به برلین رسید. سال بعد، وی با خشنودی تمام توانست خانه‌ای عالی با چشم‌اندازی خوب خریداری کند و به‌دستور مخصوص شاه از مالیات معاف شود. در این خانه ۲۴ سال زندگانی کرد وظاهراً آنجا را ترك نکرد مگر درفصل مناسب برای رفتن به‌ملك ییلاقی خود در شارلوتنبرگ که آن را در سال ۱۷۵۲ خریده بود، و درسال ۱۷۵۰ که یك مسافرت خانوادگی به فرانکفورت کرد تا مادرش را که بیوه شده بود و از بازل برای زندگی به برلین می‌آمد، ببیند. پدر اویلر مأیوس از دیدار پسر درسال ۱۷۴۵ در بازل درگذشت.

با تغییر محل زندگی اویلر، انتظار می‌رفت که جریان مستمر انتشارات وی از پترزبورگ به‌برلین منتقل شود، ولی چنین نشد! او نه‌تنها مجاز به‌حفظ عضویت خود درآکادمی پترزبورگ شد، بلکه پرداخت مستمری‌اش از پترزبورگ نیز ادامه یافت، و اویلر مصمم بود پولی راکه ازهمکاران سابقش می‌گیرد [با فرستادن مقاله] جبران کند. بهترین توصیف از دوران اقامت اویلر دربرلین در اثر نوه‌اش پ. ه. فوس تحت‌عنوان "بیست و پنج سال فعالیت شگفت‌انگیز" آمده است. از محصولات فکری اویلر درآن سالها، بیش از ۱۰۰ مقالهٔ ارسالی به پترزبورگ، ۱۲۷ مقاله در تمام زمینه‌های ریاضی محض وکاربردی که در برلین منتشر شد، و در کنار آنها نه‌تنها آثار بزرگی در آنالیز، بلکه در اسلحه‌سازی، کشتی‌سازی، و در نظریهٔ ماه را می‌توان ذکرکرد. صرف‌نظر از مقاله‌های‌جایزه برنده‌ای که به‌فرهنگستان پاریس فرستاد (جایزه‌هایی که علاوه برشهرت زیاد مقدار قابل‌توجهی پاداش نقدی نیز نصیب اوکردند)، باید نامه‌هایی به یك شاهزاده خانم آلمانی (یکی از موفقترین کتابهای علمی عامه‌فهمی که تاکنون منتشر شده است) و نیز کتابی در دفاع از مسیحیت راکه درجلب توجه شاه فردریك

---

1. Gsell

به‌اصطلاح فیلسوف به‌نویسنده اثری نداشت، نام برد. در آن زمان مکاتبات علمی، شخصی و اداری اویلر بسیار زیاد و دائماً رو به افزایش بود، زیرا بار مسؤولیتهای اداری فرهنگستان بیشتر و بیشتر به‌دوش او می‌افتاد.

به‌مرور زمان اویلر و فردریك از یکدیگر دل‌آزرده می‌شدند. شاه از اعتبار وشکوهی که اویلر به‌آکادمی او می‌بخشید، ناآگاه نبود، ولی دانشمندان فرانسوی خیلی بیشتر مورد توجه او بودند. فردریك درصدد جلب دالامبر به‌برلین برآمد، و انتظار می‌رفت او را درمقام ریاست فرهنگستان مافوق اویلر قرار دهد. حیثیت اویلر ازاین خطر مصون ماند. دالامبر که شاید از رفتار فردریك با ولتر درسال ۱۷۵۳ عبرت گرفته بود، درسفر کوتاهی از الطاف ملوکانه برخوردار شد، اما برای آزادی‌اش ارزشی بیشتر از آن حد قائل بود که مدتی طولانی از آن چشم بپوشد. به‌هرحال در اوایل سال ۱۷۶۳ اویلر به‌فکر بازگشت به‌روسیه افتاد.

خوشبختانه درست در همان زمان تغییر دیگری در اوضاع سیاسی روسیه رخ داد. درسال ۱۷۶۲ همسر آلمانی تزار بعد از رهاکردن خود و روسیه از دست همسرش، به‌نام‌کاترین دوم قدرت را به‌دست گرفت. یکی از اولین طرحهای او تجدید شکوه وعظمت فرهنگستان پترزبورگ بود، و این تقریباً به‌معنی برگرداندن اویلر بود. مذاکرات سه‌سال ادامه یافت. سرانجام درسال ۱۷۶۶ به‌سفیر روسیه در برلین دستور داده شد که از اویلر خواهش کند قرارداد را خود بنویسد. فردریك که خیلی دیر به‌میزان این‌خسارت پی‌برد، سعی کرد دراین راه مانعهایی ایجاد کند، ولی به‌زودی دریافت که نباید علیاحضرت ملکه را ناراضی کند. در همان سال اویلر به‌پترزبورگ برگشت. دربین راه اقامتی بسیار موفقیت‌آمیز در لهستان داشت؛ درآنجا معشوق پیشین کاترین، شاه استانیسلاس، از وی تقریباً نظیر یك شاهزاده پذیرایی کرد.

درآن هنگام اویلر به‌تدریج بینایی خود را از دست می‌داد. دید چشم راستش را درطول اولین اقامت خود درپترزبورگ از دست داده بود. تقریباً هنگامی که برلین را ترك می‌کرد، یا مدت کوتاهی بعد ازآن، آب آوردن چشم چپش شروع شد. در سال ۱۷۷۰ درجواب نامهٔ لاگرانژ دربارهٔ نظریهٔ اعداد، حال خود را چنین توصیف می‌کند: "تمام محاسبات شما را در بارهٔ معادلهٔ $13q^2 - p^2 = 151$ برایم خواندند، و من به‌درستی آنها کاملاً یقین حاصل کرده‌ام؛ اما چون قادر به‌خواندن یا نوشتن نیستم، باید اقرار کنم که قوهٔ تصورم نتوانست دلیل همهٔ مراحلی را که شما آورده‌اید دنبال کند، و نیز نتوانستم معنای همهٔ نمادهای شما را به‌خاطر بسپارم. درست است که پیش از این، این‌گونه پژوهشها برای من لذت‌بخش بوده‌اند و من روی آنها وقت زیادی صرف کرده‌ام، اما درحال حاضر تنها به‌کارهایی می‌توانم دست بزنم که بتوانم آنها را در ذهن انجام دهم، و غالباً برای انجام محاسبات مورد نظرم مجبورم به‌دوستان رجوع کنم."

درسال ۱۷۷۱ چشمش را عمل کردند؛ عمل ابتدا موفقیت‌آمیز بود، ولی به‌زودی چشم عفونت کرد؛ و اویلر نابینا شد. صرف‌نظر ازاین اتفاق ناگوار وآتش‌سوزی سال ۱۷۷۱ که خانهٔ او و چندین خانهٔ دیگر در پترزبورگ را ویران کرد، او در رفاه می‌زیست، ومورد عزت واحترام فراوان بود. نه پیری و نه نابینایی، نتوانستند او را وادار به‌استراحت کنند، استراحتی که بسیار مستحق آن بود. دستیارانی داشت که یکی از آنها پسر خودش بود، و دستیاران دیگر با مساعدت دوست دیرینش، دانیل برنولی از بازل فرستاده شده بودند؛ توصیف زندهٔ روش کار اویلر در آخرین دههٔ زندگانی‌اش را مدیون یکی از اینها به‌نام ن. فوس هستیم که درسال ۱۷۷۳ به‌پترزبورگ آمد و بعد با نوهٔ اویلر ازدواج کرد. دراین دوره اویلر صدها مقاله نوشت وهمچنانکه او پیش‌بینی کرده بود، این مقاله‌ها برای انتشارات چندین سال فرهنگستان کافی بود. اویلر ناگهان در ۱۸ سپتامبر سال ۱۷۸۳، درحالی که ازصحت عمومی مزاج و قدرت ذهنی کامل برخوردار بود، درگذشت.

یك اثبات مقدماتی برای مجموعهای مربعها

درسال ۱۷۵۱ اویلر که ثابت کرده بود هرعدد صحیح مجموع (حداکثر) چهار مربع از اعدادگویاست چنین نوشت: "درآنالیز دیوفانتی، معمولاً قبول می‌کنند که هیچ عدد صحیحی را نمی‌توان به‌حاصلجمع چهار مربع از اعداد گویا تجزیه‌کرد، مگر اینکه به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع از اعداد صحیح قابل بیان باشد. اما من تاکنون اثبات این مطلب را درهیچ‌جا نیافته‌ام..." این در واقع سؤالی است که درمورد مجموعهای ۲، ۳ یا ۴ مربع، به‌طور طبیعی برای هرکس که‌کتاب دیوفانتوس را می‌خواند مطرح می‌شود. فرما هم درآغازکار خود زمانی که درنظریهٔ اعداد تحقیق می‌کرد، دراین‌باره اندیشیده بود وظاهراً به‌نتیجه‌ای نرسیده بود. سپس خود اویلر مسأله را به‌ویژه درمورد مجموعهای دومربع درسال ۱۷۴۵، وبعد مکرراً درمکاتبات خود با گولدباخ درمورد مجموعهای چهار مربع، مطرح کرده بود.

دراینجا برهان آوبری را می‌آوریم. این برهان مجموعهای ۲، ۳ یا ۴ مربع و چند صورت درجهٔ دوم دیگر راشامل می‌شود. نخست آن را به‌زبان هندسی برای مجموعهای ۳ مربع بیان می‌کنیم.

نقاطی از $\mathbb{R}^3$ گویا (صحیح) نامیده می‌شوند که دارای مختصات گویا (صحیح) باشند. به‌ازای هرنقطهٔ $a=(x, y, z)$ نقطه‌ای صحیح، چون $a'=(x', y', z')$، به فاصلهٔ اقلیدسی کمتر از ۱ از a وجود دارد؛ مثلاً می‌توان x'، y'، و z' را به‌ترتیب نزدیکترین اعداد صحیح به x، y، و z گرفت، که دراین حالت فاصلهٔ a تا a' حداکثر $\sqrt{3}/2$ می‌شود.

حال فرض‌کنیم عدد صحیحی چون N مجموع مربعهای ۳ عدد گویا باشد؛ به‌عبارت دیگر، روی کرهٔ S به‌معادلهٔ $N=x^2+y^2+z^2$ یك نقطهٔ گویای a_0 وجود داشته باشد. نیز فرض‌کنیم a'_0 نزدیکترین نقطهٔ صحیح (یا یکی ازنزدیکترین‌نقاط صحیح، اگر بیش از یك نقطه وجود داشته باشد) به a_0 باشد؛ فاصلهٔ این نقطه از a_0 کمتر از ۱ است. محل تلاقی دیگر S با خط واصل a_0 به a'_0 را a_1 می‌نامیم؛ این نقطه گویاست. فرض کنید a'_1 نزدیکترین نقطهٔ صحیح به a_1 باشد؛ a_2 را محل تلاقی S با خط واصل a_1 به a'_1 می‌گیریم و این عمل را ادامه می‌دهیم. اینك نشان می‌دهیم که به‌ازای یکی از nها، a_n یك نقطهٔ صحیح است.

قرار می‌دهیم $a_0=(x_0, y_0, z_0)$ وفرض می کنیم a_0 نقطهٔ صحیح نباشد، و m را کوچکترین مخرج مشترك x، y، و z می‌نامیم. اگر بنویسیم $x=n/m$، $y=p/m$، و $z=q/m$، داریم

$$Nm^2=n^2+p^2+q^2.$$

فرض می کنیم $a'_0=(n', p', q')$ نزدیکترین نقطهٔ صحیح به a_0 باشد، وقرار می‌دهیم

$$r=n-mn', \; s=p-mp', \; t=q-mq'$$
$$N'=n'^2+p'^2+q'^2, \; M=2(nn'+pp'+qq').$$

دراین صورت مربع فاصلهٔ بین a_0 و a'_0 عبارت است از

$$\frac{1}{m^2}(r^2+s^2+t^2)=N+N'-\frac{M}{m}$$

که می توان آن‌را به‌صورت m'/m، که در آن m' یك عددصحیح است، نوشت؛ چون این فاصله کمتر از ۱ است، داریم $0<m'<m$، و درعین حال داریم

$$r^2+s^2+t^2=mm', \; M=m(N+N')-m'.$$

اکنون می گوییم خط واصل a_0 به a'_0 از نقاط

$$(n'+\lambda r, \; p'+\lambda s, \; q'+\lambda t)$$

تشکیل می‌شود؛ نقطهٔ a_1 از

$$\begin{aligned}0&=(n'+\lambda r)^2+(p'+\lambda s)^2+(q'+\lambda t)^2-N\\&=mm'\lambda^2+(M-2mN')\lambda+N'-N\\&=(m\lambda-1)(m'\lambda+N-N')\end{aligned}$$

به‌دست می آید. ریشهٔ $\lambda=1/m$ متناظر با نقطهٔ a_0 است، بنابراین ریشهٔ دیگر $\lambda=(N'-N)/m'$ متناظر با a_1 است. درنتیجه m' یك مخرج مشترك مختصات a_1 است؛ چون m' از m کوچکتر است، پس کوچکترین مخرج مشترکهای مختصات a_0، a_1، a_2 وغیره یك دنبالهٔ نزولی از اعداد صحیح مثبت تشکیل می‌دهند، و ادعای ما ثابت می‌شود.

دراین برهان، تنها ازاین ویژگی صورت درجه دوم

$$F(X, Y, Z)=X^2+Y^2+Z^2$$

که به‌ازای هر نقطهٔ ناصحیح (x, y, z) یك نقطهٔ صحیح (x', y', z') وجود دارد که

$$0<|F(x-x', y-y', z-z')|<1$$

استفاده شده‌است. این استدلال درمورد صورتهایی نظیر X^2+Y^2، $X^2\pm 2Y^2$، و X^2-3Y^2 نیز صادق است. اکنون با یك دستکاری ساده درنمادگذاری، نشان خواهیم دادکه می توان این برهان را درمورد بعضی ازصورتهای درجهٔ دوم $F(X)$ در $\mathbb{R}^n$ نیز به‌کار برد. دراین موارد به‌ازای همهٔ بردارهای صحیح x مقادیر صحیح را اختیار می کنیم و به‌ازای هربردار ناصحیح x از $\mathbb{R}^n$ برداری‌صحیح چون x' می‌یابیم که $0<|F(x-x')|\leqslant 1$. مثلاً صورتهای X^2+3Y^2، $X^2+Y^2+2Z^2$، و $X^2+Y^2+Z^2+T^2$ از این مواردند. صورت دوخطی $B(x, y)$ را به‌صورت

$$F(\lambda x+\mu y)=\lambda^2F(x)+\lambda\mu B(x, y)+\mu^2F(y)$$

تعریف می کنیم. همچون گذشته یك نقطهٔ گویای a_0 را چنان‌انتخاب می کنیم که $F(a_0)=N$، ونقطهٔ صحیح a'_0 را طوری اختیار می کنیم که

$$0<|F(a_0-a'_0)|\leqslant 1.$$

فرض کنید m کوچکترین عدد صحیحی باشد که به‌ازای آن، $n=ma_0$ یك نقطهٔ صحیح است؛ می‌نویسیم $a'_0=n'$، $r=n-mn'$، $N'=F(n')$، $M=B(n, n')$. داریم

$$\begin{aligned}F(a_0-a'_0)&=F(m^{-1}r)=F(m^{-1}n-n')\\&=N+N'-\frac{M}{m}.\end{aligned}$$

با نوشتن این عدد به‌صورت m'/m، داریم $0<m'\leqslant m$؛ و m' یك عدد صحیح است.

خط واصل a_0 به a'_0 ازنقاط $n'+\lambda r$ تشکیل‌می‌شود و a_1، محل تلاقی آن با ابررویهٔ $F(x)=N$، از

$$\begin{aligned}0&=F(n'+\lambda r)-N=mm'\lambda^2+(M-2mN')\lambda\\&\quad+N'-N=(m\lambda-1)(m'\lambda+N-N')\end{aligned}$$

به‌دست می آید. مانند پیش، a_1 با ریشهٔ $\lambda=(N'-N)/m'$ متناظر است، و بنابراین $m'a_1$ یك نقطهٔ صحیح است، و m' یك مخرج مشترك مختصات a_1 است. اکنون باید $m=|m'|$، یعنی $|F(m^{-1}r)|=1$ را درنظربگیریم. اگر F را یکی از سه‌صورت بالا بگیریم، می‌توانیم فرض کنیم که a'_0 را نقطه، یا یکی ازنقاطی، اختیارکرده‌ایم که مختصاتش نزدیکترین اعداد صحیح به مختصات a_0 هستند، و درنتیجه قدرمطلقهای مختصات $m^{-1}r$ از $1/2$ نابیشترند؛ بنابراین برای اینکه $F(m^{-1}r)$ مساوی با ۱ باشد، همه باید مساوی با $\pm 1/2$ باشند، و $2a_0$ باید صحیح باشد، پس $m=2$. دراین صورت، 2^n امکان انتخاب برای a'_0 وجود دارد واین انتخاب را می‌توان چنان انجام دادکه $N-N'$ زوج باشد. چون درهمین حال m' باید ۱ یا ۲ باشد، پس a_1 صحیح است.

این اثبات را قاعدتاً اویلر می‌فهمیده است؛ شاید فرما هم که توانایی‌اش در جبر اندکی کمتر از میزان لازم برای این اثبات بوده، می‌توانسته با اندکی تلاش آن را بفهمد. اینکه چنین اثباتی این‌قدر دیر کشف شده می‌تواند مایهٔ دلگرمی کسانی باشد که در جستجوی اثباتهایی مقدماتی برای قضایای احتمالاً پیچیده هستند.

•••••••••••••••••

• André Weil, "Euler," *Amer. Math. Monthly*, (9) **91** (1984) 537-542.