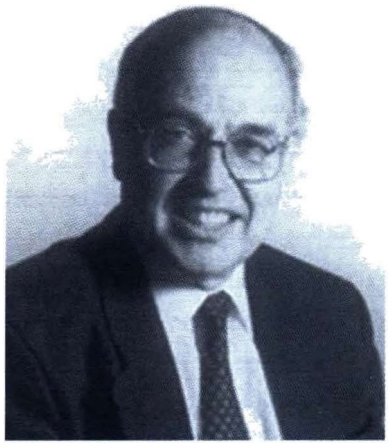
تحقیق ریاضی چگونه انجام می‌شود•

مایکل اتیا

ترجمهٔ امیرحسین اصغری



مایکل اتیا

از ابتدا باید به صراحت بگویم که من مسؤول عنوان پرابهت این سخنرانی نیستم. اصلاً روشن نیست که منظور واقعی از این عنوان چیست، و می‌توان حداقل دو تعبیر برای آن ارائه کرد. چگونگی انجام شدن تحقیق را می‌توان به روش اجرای آن تعبیر کرد؛ چنین تعبیری با بررسی فرایندهای ذهنی ریاضیدانان حین انجام دادن تحقیق ارتباط دارد که مسألهٔ جذابی در روانشناسی انسان است و عده‌ای از ریاضیدانان معروف مانند آدامار و پوانکاره مطالبی دربارهٔ آن نوشته‌اند. گمان می‌کنم آدامار بود که از تجربهٔ خود در مورد دو بار استحمام پیاپی با آب داغ در حین انجام تحقیق یاد می‌کرد و پوانکاره بود که می‌گفت بهترین ایده‌هایش به هنگام سوار و پیاده شدن از اتوبوس به ذهنش خطور کرده است.

تعبیر دوم به سبک تحقیق مربوط می‌شود ــ اینکه تحقیق ریاضی چیست و افراد مختلف با دیدگاههای متفاوت چه برداشتهایی از آن دارند. من برای این سخنرانی تعبیر دوم را برگزیده‌ام چرا که گمان می‌کنم همکارم جان همرزلی[1] اولی را انتخاب خواهد کرد؛ خوب است ما کمی مسیرهایمان را از هم جدا کنیم. به‌علاوه، بد نیست در این اولین سخنرانی کنفرانس کمی در مورد چیستی تحقیق ریاضی صحبت شود و در سخنرانیهای بعدی جنبه‌های متعدد دیگر آن مورد بررسی قرار گیرد.

در این سخنرانی مایلم به ذکر جنبه‌هایی از تحقیق بپردازم که به نوعی در تقابل با هم قرار دارند. هدفم بحث در مورد این تقابلها و تمایزهاست بدون اینکه بخواهم جانب یکی از دو طرف را بگیرم. تلاش خواهم کرد که تعادل را حفظ کنم و نظر شخصی خودم را در بحث دخالت ندهم. قبل از هر چیز باید از یک تقسیم‌بندی عمده یعنی تقسیم ریاضیات به محض و کاربردی صحبت کنم. ادعا نمی‌کنم که این تمایز واضح و دقیق است. اما بهتر است قبول کنیم که کار ریاضیدانان محض با کار ریاضیدانان کاربردی، علی‌رغم اشتراکات زیاد، تفاوتهای عمده‌ای دارد. امیدوارم جان همرزلی نظر کاربردیها را بیان کند چون آنچه من خواهم گفت تأملات یک ریاضیدان محض است.

اولین چیزی که مایلم ذکر کنم تقابل بین حل مسأله و نظریه‌پردازی است. البته می‌توان دلایلی به نفع هر یک از آنها آورد: نظریه به چه درد می‌خورد اگر نتوان با آن مسأله‌ای را حل کرد؟ فایدهٔ مجموعه‌ای نامتناهی از مسائل جدا از هم ــ هرچند هر یک از آنها بسیار جالب باشند ــ چیست؟ اما شاید بهتر باشد این گونه به موضوع نگاه کنیم: شما با مسائلی روبه‌رو هستید که بسیاری از آنها ریشه در زمینه‌های فیزیکی دارند. برای حل یک مسأله، نیازمند ایده‌ای هوشمندانه، نوعی شگرد، هستید. اگر این شگرد به اندازهٔ کافی خوب و تعدادی مسأله از نوع مشابه در دسترس باشد، پای خود را فراتر می‌گذارید و با تعمیم شگرد، آن را به تکنیک تبدیل می‌کنید. اگر تعداد آن نوع مسأله‌ها زیاد باشد، یک روش، و بالاخره اگر حوزهٔ بسیار گسترده‌ای از آنها داشته باشید، یک نظریه به دست می‌آورید؛ این است فرایندِ تکامل مسأله به نظریه.

---

۱. John Hammersley، ریاضیدان انگلیسی که مخالف نظریه‌پردازی و طرفدار مسائل مشخص بود و شرح زندگی و عقاید او را در شمارهٔ گذشتهٔ نشر ریاضی خوانده‌اید ــ م.

البته،هدف نظریه محدود به جمع‌بندی همهٔ واقعیتهای به دست آمده از حل مسائل نیست. ما باید به خاطر داشته باشیم که ریاضیات فعالیتی انسانی است، و هدف از حل مسأله یا اصولاً کار ریاضی،انتقال اطلاعات به دست آمده به آیندگان است.اما،ذهن انسان متناهی است و نمی‌تواند تعداد بیشماری مسأله را یکی بعد از دیگری جذب کند و همهٔ آنها را به یاد بسپارد. هدف اصلی نظریه، سازماندهیِ روشمندِ تجربهٔ گذشته است به‌گونه‌ای که نسلهای آینده،شاگردان ما و شاگردانِ شاگردان ما،بتوانند تا حد امکان با کمترین دشواری جنبه‌های اساسی آن را درک کنند؛ تنها از این راه است که دستاوردهای فعالیت علمی بر هم افزوده می‌شود بدون اینکه سرانجام به بن‌بست برسیم. ما باید تجربهٔ گذشته را به‌صورت فشرده‌ای درآوریم که به آسانی قابل درک باشد و این وظیفهٔ اصلی نظریه است. در اینجا بد نیست نظر پوانکاره را در این مورد بیان کنم:«علم از واقعیتها ساخته می‌شود و خانه از سنگ،اما علم به همان اندازهٔ مجموعه‌ای از واقعیتهاست که خانه تلی از سنگها».

دومین موضوعی که مایلم به آن اشاره کنم تمایز میان صورت و دقت است. این تمایز نیز تاریخی طولانی در ریاضیات دارد. وقتی به‌شیوهٔ صوری به ریاضیات می‌پردازید، دغدغهٔ چندانی دربارهٔ معنای دقیق کارهایی که انجام می‌دهید ندارید؛ کافی است جواب را به دست دهند. لابد خواهید گفت که این رویکرد را فقط کاربردیها دارند. ولی این حرف کاملاً درست نیست. به نظر من در ریاضیاتِ محض هم پیش می‌آید. خُب، مثالهای تاریخی مشهوری از روش صوری در دست است. بدون شک،اویلر با تولید آن همه فرمولهای خیره‌کننده، معروف‌ترین دست‌اندرکارِ این روش بوده است. او سری‌ای به واگرایی $\sum_1^\infty n$ را «محاسبه» می‌کرد و مقدار $-\frac{1}{12}$ را به دست می‌آورد! در حدود یک قرن بعد بود که به چنان فرمولهایی معنای دقیق دادند. در حوزه‌ای دیگر، می‌توان از کارهای معروف هویساید و بعد از او دیراک دربارهٔ توابع تعمیم‌یافته نام برد که تا همین اواخر مبنای دقیقی نداشت. پس در ریاضیات صوری تا وقتی تکنیکهای هوشمندانهٔ شما جوابهای مطلوب را به دست می‌دهند، آنها را بدون دغدغهٔ زیاد دربارهٔ دقت به کار می‌برید و امیدوار خواهید ماند که دقت بعداً فراهم شود.

اکنون طرح این سؤال مناسب است که هدف از دقت چیست؟ در نظر بعضی از شما، پایبندی به دقت باعث جمود می‌شود و ریاضیات محض از این طریق جلو فعالیت همهٔ آنهایی را که خوب می‌دانند چگونه جوابها را به دست آورند می‌گیرد. دوباره باید یادآوری کنم که ریاضیات فعالیتی انسانی است،و هدف ما فقط کشف چیزها نیست بلکه انتقال آن به دیگران نیز هست. کسی مثل اویلر که خوب می‌داند چگونه با سریهای واگرا کار کند و جوابهای درستی به دست آورد باید شناخت درستی هم از آنچه باید انجام داد و آنچه نباید انجام داد داشته باشد. اویلر شهودی داشت که از تجربیات بسیار وسیع او نشأت می‌گرفت. اما چنین شهودی را به سختی می‌توان انتقال داد. به این ترتیب، نسل بعدی نخواهد دانست که نتایج چگونه به دست آمده است مگر اینکه با عبارات دقیق ریاضی بیان شده باشد. هدف از چنین دقتی در وهلهٔ اول این است که آنچه ذهنی و بسیار مبتنی بر شهود شخصی است، عینی و قابل انتقال شود. من به هیچ‌وجه مایل نیستم که این نوع از شهود را نفی کنم. فقط می‌خواهم تأکید کنم که اگر قرار است چیزی به دیگران انتقال داده شود باید در نهایت به‌صورتی عرضه شود که بی‌ابهام باشد و کسی هم که الزاماً از بینشی مانند پدیدآورندهٔ اصلی برخوردار نیست آن را درک کند. علاوه بر این، همه می‌دانیم که وقتی روی حوزهٔ مشخصی از مسائل کار می‌کنیم شهود قادر است ما را به جواب درستی رهنمون شود که نمی‌دانیم چگونه آن را توجیه کنیم.اما وقتی می‌خواهیم کار خود را توسعه دهیم و بر مبنای آنچه تا آن زمان ساخته‌ایم مسائل پیچیده‌تری را حل کنیم بسیار مهم است که زیربنای اولیهٔ کار خود را به درستی درک کرده باشیم. بنابراین، ما نیازمند استدلالهای دقیق هستیم زیرا استحکام ساختاری که مایل به ایجاد آنیم وابسته به پایه‌های درست و قابل اعتماد است.

موضوع بعدی که می‌خواهم دربارهٔ آن صحبت کنم تمایز میان عمق و وسعت در ریاضیات است. شما می‌توانید با وسواس زیاد همهٔ ریزه‌کاریهای یک حوزهٔ خاص یا یک مسأله را مطالعه کنید، عمیق و عمیق‌تر در آن کند و کاو کنید و نتایج سخت و سخت‌تری به دست آورید، یا می‌توانید خود را رها کنید و خیلی سطحی‌تر به جاهای مختلف ریاضیات سر بزنید و در نهایت بنشینید و ببینید با آنچه فهمیده‌اید چه می‌توان کرد.

هر کدام از این دو دیدگاه مزایا و معایب خود را دارد که اطلاع از آنها به‌خصوص برای دانشجویانی که شروع به تحقیق می‌کنند مهم است: آیا بهتر است در یک زمینهٔ خاص، با تمام جزئیات آن، متخصص شد یا قبل از شروع به تحقیق تا آنجا که ممکن است دانشی از زمینه‌های مختلف به دست آورد؟ البته تصمیم‌گیری در این باره بسیار سخت است و در واقع نقطهٔ تعادل در جایی میان این دو قرار دارد. بد نیست بعضی از مشکلات را تشریح کنم. فرض کنید که شما درست و حسابی در یک حوزهٔ خاص متخصص می‌شوید، مثلاً فقط تلاش می‌کنید مسأله‌ای فوق‌العاده سخت همچون فرضیهٔ ریمان را حل کنید. در این صورت، ممکن است همهٔ عمر خود را صرف این کنید که تکنیکهای خاصی را به دست آورید و اصلاح و تکمیل کنید. اگر خوش‌شانس باشید مسأله را حل می‌کنید و احتمالاً تا ابد معروف خواهید شد. اگر بدشانس باشید، بدا به حالتان، هیچ موفقیتی به دست نیاورده‌اید. خطر چنین تخصصی در این است که شاید آن مسأله واقعاً در زمان شما غیر قابل حل باشد که در این صورت وقت خودتان را هدر داده‌اید، یا اینکه شاید مُدِ ریاضی تغییر کند و مسأله‌ای که در شروع کار شما هیجان‌انگیز و مهم جلوه می‌کرد وقتی بالاخره آن را حل کردید، مسأله‌ای جانبی محسوب شود. اکنون تصمیم می‌گیرید حوزهٔ کاری خود را عوض کنید؛ اما افسوس، متوجه می‌شوید برای چنین تغییری خیلی دیر شده است.

در مورد مزایای شروع کار در زمینه‌ای گسترده می‌توان گفت که دانشجویان جوان چیزهای جدید را نسبتاً آسان یاد می‌گیرند و اگر در حد معقولی که می‌توانند، مطالبی دربارهٔ حوزه‌های گوناگون یاد بگیرند، منابع بیشتری برای استفاده‌های آتی در دست خواهند داشت. به این ترتیب، اگر مُدها یا مسائل ریاضی تغییر کند قادر خواهند بود جهت کار خود را در راستای آنها تغییر دهند. خُب، لابد عده‌ای بر خلاف این نظر خواهند گفت که حل مسأله در ریاضیات از هر کار دیگری مهم‌تر است و چنین «وسعتی» نوعی انحراف است، پس بهتر است نشست و سخت کار کرد. اما باز به نفع وسعت می‌توان گفت که جوهر ریاضیات، هنرِ کنار هم گذاشتنِ چیزهایِ بسیار دور از هم است. هرچه باشد، ریاضیاتْ مجردترین رشتهٔ علمی است و هر ادعایی در آن در مورد پدیده‌های بسیار متنوع و متعددی صادق است. بد نیست دوباره

گفته‌ای از پوانکاره را نقل کنم که به بسیاری از آنچه گفتم مربوط است: «آن واقعیتهایی در ریاضیات ارزش مطالعه کردن دارند که همانندی آنها با واقعیتهای دیگر ما را به سوی یک قانون ریاضی راهنمایی کند، همچنان که واقعیتهای تجربی ما را به سوی یک قانون فیزیکی راهنمایی می‌کنند. آنها شباهتهای غیر منتظره و ناشناخته‌ای را بین واقعیتهای دیگری آشکار خواهند کرد که هر یک از مدتها قبل شناخته‌شده بوده‌اند ولی به اشتباه به نظر می‌رسیده است که هیچ ربطی به هم ندارند». تلفیق واقعیتهای کاملاً متفاوتی که از علوم تجربی یا از درون خود ریاضیات سرچشمه می‌گیرند یکی از اجزای اصلی فعالیت ریاضی است. ما هم نیازمند افرادی هستیم که تلاش می‌کنند بخشهای مختلف ریاضی را به هم پیوند دهند، و هم نیازمند افرادی که توجه خود را به یک حوزه محدود می‌کنند و تلاش می‌کنند تا آنجا که می‌توانند آن را به جلو برانند.

دو راهی دیگر نه به محتوای ریاضی بلکه بیشتر به سلیقهٔ کاری ریاضیدانان مربوط می‌شود، که آیا آنان مایل‌اند به تنهایی کار کنند یا با دیگران همکاری کنند. این هم از شخصی به شخص دیگر کاملاً فرق می‌کند. بعضی مایل نیستند و یا گاهی قادر نیستند با ریاضیدانان دیگر همکاری کنند. آنها به تنهایی بهتر فکر می‌کنند، به تنهایی می‌نویسند، و شیوهٔ کارشان این است. عده‌ای دیگر ترجیح می‌دهند بیشتر کارهای خود را با همکاری دیگران انجام دهند؛ به نظر من دلایل زیادی در تأیید این نوع کار کردن وجود دارد و در آینده دلایل بیشتری نیز وجود خواهد داشت. در وهلهٔ اول، همکاری با ریاضیدانان دیگر امکان استفاده از فنون موجود و دیدگاههای متفاوت را در پرداختن به هر مسأله‌ای بسیار افزایش خواهد داد. با توجه به گسترش و تنوع روزافزون ریاضیات نمی‌توان به راحتی دستی در همهٔ زمینه‌ها داشت، و چون، همچنان که گفتم، بسیاری از مسائل جالب ریاضیات از تعامل میان شاخه‌های مختلف آن نشأت می‌گیرند، بنابراین بیشتر و بیشتر لازم خواهد شد تا ریاضیدانان گرد هم آیند و منابع خود را در حمله به مسائل هر حوزهٔ خاص به اشتراک بگذارند. البته نمی‌توان ریاضیدانانی با دیدگاههای کاملاً متفاوت را دور هم جمع کرد. شما به افرادی نیاز دارید که اصولاً مشترکات زیادی با یکدیگر داشته باشند، مثلاً به شیوهٔ کم و بیش یکسانی فکر کنند و علایقی شبیه به هم داشته باشند و در عین حال، آنقدر تنوع در میان آنها باشد که هر یک قادر به خلق چیزی اختصاصی باشند. همکاری مزیت بزرگ دیگری نیز دارد. خیلی از وقتها در حملهٔ مستقیم به یک مسأله به بن‌بست می‌رسید، هر کاری می‌کنید به نتیجه نمی‌رسد و آرزو می‌کنید ای کاش می‌توانستید آن طرف‌تر را هم نگاه کنید چرا که شاید راه حل ساده‌ای در آنجا باشد. در واقع، هیچ چیزی بهتر از این نیست که کسی در کنار شما باشد، زیرا معمولاً او می‌تواند کمی آن طرف‌تر را هم نگاه کند. گاهی، تنها یک مانع ممکن است شما را سالها از حل یک مسأله باز دارد؛ شاید یک مانع ذهنی یا حتی یک دلیل احمقانهٔ ساده به شما اجازه نمی‌دهد قدم بعدی را ببینید، و شخصی که در کنار شماست به راحتی می‌تواند به آن اشاره کند. این یکی از رایج‌ترین و مفیدترین جنبه‌های همکاری است. همکاری فایدهٔ دیگری هم دارد که بسیار اساسی است؛ همهٔ ما مستعد خطا و با عجله سر هم کردن استدلالهای ناکامل هستیم. همکاری با فردی که بتواند استدلالهای ما را نقادانه بررسی و ایرادهای آن را پیدا کند بسیار مفید است. خُب، البته پیدا کردن ایرادِ استدلالهای دیگران بسیار آسان‌تر از پیدا کردن ایراد استدلالهای خودمان است!

و بالاخره نکته‌ای وجود دارد که نمی‌توان از آن چشم پوشید: زندگی در یک زندان انفرادی بسیار زجرآور است! حقیقتاً، تحقیق در ریاضیات کاری بسیار شاق است. بنابراین، به نظر من مزایای همکاری از نظر انسانی نیز قابل توجه است، زیرا فرایند تفکر ریاضی را بسیار لذت‌بخش‌تر می‌کند. بعد از گفتن همهٔ این چیزها دربارهٔ مزایای همکاری، باید اعتراف کنم که در مواقعی هیچ چیزی جای این را نمی‌گیرد که آدم بنشیند و در تنهایی عمیقاً دربارهٔ مسألهٔ خود فکر کند.

همچنان که گفتم، اگر به آیندهٔ ریاضیات نگاه کنیم، در واقع اگر ریاضیات اصلاً آینده‌ای داشته باشد، به سختی می‌توان پیش‌بینی کرد که مثلاً در ۵۰۰ سال بعد به چه شکلی خواهد بود. با این شتاب سریع تحقیقات ریاضی، با این تعداد فوق‌العاده زیاد انتشارات و با این تنوع روزافزون، ما چگونه قادر خواهیم بود که کنترل کار را حفظ کنیم و قسمتهای مختلف ریاضی را به هم پیوند دهیم؟ به نظر می‌رسد که ما ناگزیر از کار دسته‌جمعی در ریاضیات هستیم.

مقایسهٔ بعدی من میان ریاضیاتِ نامعمول و ریاضیاتِ غالب است. ما عقیده داریم ریاضیات دارای نوعی هستهٔ مرکزی است، مسائل اصلی آن زیاد و زیادتر می‌شوند، الک می‌شوند، و مهم‌ترین آنها باقی می‌مانند. جریان اصلی ریاضیات جاری است، اما بسیاری جریانهای فرعی و جانبی نیز وجود دارند که وارد جریان اصلی می‌شوند و آن را تغذیه می‌کنند. شما باید تصمیم بگیرید که خود را تا آنجا که ممکن است نزدیک به مرکز نگه دارید یا از آن دور شوید و به جستجوی حوزه‌های جالبی بپردازید که تا کنون از دید دیگران پنهان مانده است. بدون شک ما به ریاضیدانانی از هر دو نوع نیاز داریم. پیشتازان اصیل راه خود را در پیش می‌گیرند و به آنچه قبلاً انجام شده نمی‌پردازند. آنها از نو آغاز می‌کنند و از منظری کاملاً بدیع به یک موضوع می‌نگرند. بدون شک، ابداعات واقعاً جدید و حوزه‌های واقعاً جدیدی که وارد ریاضیات می‌شوند محصول کار چنین ریاضیدانانی است. اما این راهِ پرخطری است زیرا پیشتازان موفق، کم‌شمارند و بسیاری موفق نمی‌شوند. وقتی عده‌ای به جستجوی طلا می‌روند یک نفر آن را می‌یابد و دیگران دست خالی می‌مانند. بنابراین باید حواستان باشد که وقتی از مسیر اصلی دور و وارد سرزمینی بکر می‌شوید و کاری در ریاضیات انجام می‌دهید، اگر خوش‌شانس باشید شاید کار شما موضوعی جدید و عالی در ریاضیات شمرده شود، اما در ۹۹ درصد اوقات، واکنش دیگران چیزی شبیه این است: «جالب است، اما به نظر نمی‌رسد راه به جایی ببرد». خُب، شانس خود را امتحان کنید؛ این نوعی قمار است که یا شما را به یک معدن طلا می‌رساند یا به یک زمین ناهموار. ولی ماندن در جریان اصلی ریاضیات هم این اشکال را دارد که در گذشته معروف‌ترین ریاضیدانان در آن کار کرده‌اند و بنابراین، کسب دستاوردهای جدید در هستهٔ اصلی ریاضیات بسیار بسیار سخت است. اما اگر بتوانید در این حوزه‌ها مشارکتی داشته باشید، چون کار شما در جریان اصلی ریاضیات است از این شانس برخوردار خواهد بود که بسیار مهم شود.

آخرین تقابلی که مایلم از آن صحبت کنم میان «قدرت» و «زیبایی» در استدلالهای ریاضی است. همهٔ ما کم و بیش می‌دانیم این تمایز به چه معنی است. استدلال قوی لزوماً زیبا نیست. استدلال شما ممکن است فاقد ظرافت باشد، تکنیکی که همچون بولدوزر با زور و زحمت راه خود را از میان چندین

صفحه فرمول باز می‌کند؛ به نظر زشت می‌رسد، زشت هم هست، اما بالاخره به نتیجه می‌رسد. اما با ارائهٔ یک استدلال زیبا به نظر می‌رسد هیچ زحمتی به خود نداده‌اید؛ در انتهای چند صفحه‌ای که نوشته‌اید یک نتیجهٔ درخشان در میان تعجب همگان ظاهر می‌شود. باز، ما به ریاضیدانانی از هر دو نوع نیاز داریم. در این باره هیچ شکی نیست. بسیاری از نتایج در وهلهٔ اول فقط با زور و زحمتِ صرف اثبات می‌شوند. یک نفر با پشتکار زیاد بدون اینکه به زیبایی کار فکر کند یک خروار محاسبه انجام می‌دهد تا پاسخ را به دست آورد. سپس افراد دیگر که تحت تأثیر نتیجهٔ به دست آمده قرار گرفته‌اند، آن را وارسی می‌کنند، سعی می‌کنند آن را درست درک کنند و بالاخره آن را بزک می‌کنند تا جذاب و زیبا به نظر برسد. اما این کار فقط یک ظاهرسازی ساده نیست چرا که زیبایی معیار مهمی است که ریاضیات را زنده نگه می‌دارد. اگر می‌خواهید دیگران اجزای اساسی یک استدلال را درک کنند، باید آن را ساده و زیبا ارائه دهید. سادگی و زیبایی مطلوب ذهن ریاضی ما هستند و به خوبی قابل درک‌اند. پوانکاره زیبایی را همچون یک نیروی راهنما در نظریه‌های ریاضی می‌داند که ما را وادار می‌کند یک مسیر را انتخاب کنیم و مسیر دیگر را انتخاب نکنیم. بنابراین، زیبایی بسیار مهم است ولی معمولاً نه در وهلهٔ اول، بلکه بعداً ظاهر می‌شود.

تصور می‌کنم مطالب مختلفی گفتم که بعداً سخنرانان دیگر این کنفرانس دربارهٔ آنها بحث خواهند کرد. به خصوص، با توجه به عنوان سخنرانی پروفسور پنروز[1]، انتظار دارم که موضوع زیبایی در سخنرانی او با تفصیل بیشتری بررسی شود. اگر درست فهمیده باشم، یک سخنرانی هم در مورد انتقال ریاضیات خواهیم داشت. بیشتر چیزهایی که من الان گفتم به همین موضوع، در معنای کلی آن، مربوط بود. در وهلهٔ اول، انتقال ریاضیات به معنی چاپ مطلب در مجلات ریاضی، ریاضی نوشتن و ریاضی خواندن است. اما به معنی عام‌تر، رساندن و فهماندن ریاضیات به معاصران و آیندگان است تا این رشته از فعالیت بشری زنده بماند. بقای ریاضیات نیازمند آن است که جنبهٔ نظری‌اش بسیار قوی و کارامد بماند. حتی اگر شما بیشتر به ابداع و توسعهٔ تکنیکهای حل مسأله علاقه‌مندید و می‌خواهید کارهایتان را ریاضیدانان نسلهای بعدی بفهمند، باید آنها را چنان ساده و منسجم تدوین کنید که در نهایت قابل فهم برای دانشجوی سال اول کارشناسی باشند. از هر چه بگذریم، باید گفت که این هدف ماست. حسابان، آن دستاورد بزرگ نیوتن و لایب‌نیتس، هم‌اکنون به بچه‌های ۱۴ ساله درس داده می‌شود؛ نظریهٔ نسبیت اینشتین، مسلماً به دانشجویان سالهای اول کارشناسی و شاید حتی به دانش‌آموزان سال آخر دبیرستان ارائه می‌شود. مثالهایی از این دست فراوان‌اند. ریاضیات خیلی سختِ پیشینیان ما چنان فشرده شده که می‌توان آن را به ریاضی‌خوانان خیلی جوان درس داد. این تنها راهی است که ما می‌توانیم همهٔ تجارب ریاضی خود را به شکلی قابل جذب برای وارثان خود بگذاریم تا آنها بتوانند آن را ادامه دهند. واقعاً درون‌مایهٔ اصلی صحبت من همین است. متأسفم که دربارهٔ فرایندهای ذهنی، چگونگی خطور کردن ایده‌ها به ذهن ما، استحمام با آب داغ، یا سوار و پیاده شدن از اتوبوس خیلی حرف نزدم. اما گمان می‌کنم به رسمیت شناختن تنوع زیادِ تواناییهای ریاضی، شیوه‌های حل مسأله یا ساختن نظریه‌های ریاضی نیز به همان اندازه مهم است. نباید چنین برداشت شود که همهٔ ریاضیدانان یک کار می‌کنند. آنها ممکن است در یک حوزهٔ یکسان فعالیت کنند. اما این به آن معنی نیست که به شیوه‌ای یکسان کار می‌کنند. انواع بسیار زیادی ریاضیدان وجود دارد و ما به همهٔ آنها نیاز داریم.

******

1. Roger Penrose

• M. F. Atiyah, "How research is carried out", *Bull. IMA*, **10** (1974) 232-234.