ریاضیات در سیاره‌ای دوردست•

ریچارد همینگ
ترجمهٔ سیامک کاظمی

این مقاله مبتنی بر سخنرانیی است که ریچارد همینگ (۱۹۱۵ـ۱۹۹۸) در سال ۱۹۹۷ در یک اجلاس جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) ایراد کرده است. همینگ از معروفترین ریاضیدانان کاربردی عصر حاضر محسوب می‌شود. اصطلاح «کُد همینگ» را همهٔ کسانی که با نظریهٔ کدگذاری آشنایی دارند شنیده‌اند. همینگ نظراتی تُند و بعضاً نامتعارف در مورد شاخه‌های گوناگون ریاضیات و فلسفهٔ ریاضی داشت که گاه آنها را به زبان گزنده‌ای بیان می‌کرد. نوشتهٔ حاضر نیز از این قاعده مستثنا نیست. مقالهٔ بعدی این شماره تا حدی مکمل آرای این نوشته است.

هدف این سخنرانی واداشتن شما به تأمل جدی در این باره است که ریاضیات دربارهٔ چیست، تا چه حد دلبخواه و «من درآوردی» است و تا چه حد الزامی و اجتناب‌ناپذیر.

مضمون این سخنرانی خیلی قبل در دوران آغازین «برنامهٔ جستجو برای یافتن هوشمندان فرازمینی»[1] به ذهن من خطورکرد؛ درآن زمان از آنتن بشقابی عظیمی در آرسیبو[2] برای این جستجو استفاده می‌شد. اکنون که سالهای زیادی از آن زمان گذشته است، با تجهیزات بسیارکارامدتری مشغول جستجو هستیم ولی هنوز نشانه‌های مشخصی از حیات در سیاره‌های دیگر نیافته‌ایم.

ریاضیات سه جنبه دارد. اول، چیزهایی که می‌توان آنها را اصول یا اصول موضوع یا مفروضات ـــ هر کدام که دوست دارید ـــ نامید. رهیافت بورباکی بیشتر معطوف به اینها بوده است. دستگاههای مختلفی از اصول که ریاضیات واحدی را توصیف می‌کنند، متفاوت به حساب نمی‌آیند.

دوم، تعریفها هستند که مقدار زیادی از ریاضیات را تعیین می‌کنند. مثلاً تعریف فعلی تابع، چیزهای عجیب و غریب زیادی را مجاز می‌دارد. اگر من یک تابع پیوستهٔ دندانهٔ اره‌ای با شیبهای متناوب $\pm 45^\circ$ داشته باشم و مختصات را 45° دوران بدهم، آن تابع دیگر پیوسته نیست، و حتی تابع هم نیست! نه اویلر و نه فوریه هیچ‌یک نمی‌توانسته‌اند با چنین چیزی موافق باشند! مفهوم پیوستگی برخاسته از ایدهٔ ترسیم خم بدون برداشتن قلم (ایده‌آل) از روی کاغذ بود و هیچ ارتباطی با مختصات انتخاب شده نداشت. تحریف ایدهٔ اولیه و شهودی پیوستگی به‌نحوی که اکنون وابسته به مختصات شده است به نظر من کار بیهوده‌ای است. پس تابع و خم، امروز مفاهیم متمایزی هستند.

سوم، انواع استنتاجهای منطقیِ مجاز هستند. الگوهای استدلال در این روزها به‌ندرت مورد بررسی و بازنگری قرار می‌گیرند و من هم در این سخنرانی به اختصار، و فقط از یک لحاظ، به آنها خواهم پرداخت.

اما پیش از ادامهٔ صحبت لازم است به چند رویدادِ زندگیم که عقاید مرا شکل داده‌اند اشاره کنم. اولی در لُس آلاموس در جریان جنگ جهانی دوم و هنگامی که بمب اتمی را طراحی می‌کردیم رخ داد. کمی پیش از نخستین آزمایش میدانی (توجه دارید که در دست بودن جرم بحرانی در این مورد ضروری است، هیچ آزمایش کوچکْ‌مقیاسی ممکن نیست)، شخصی از من خواست محاسباتی را که انجام داده بود بازبینی کنم، و من هم قبول کردم با این فکر که آن را به یکی از زیردستانم محول کنم. وقتی پرسیدم محاسبه دربارهٔ چیست، پاسخ داد: «دربارهٔ احتمال اینکه بمب آزمایشی تمام جوّ را به آتش بکشد.» این بود که تصمیم گرفتم خودم آن را بازبینی کنم! روز بعد وقتی برای گرفتن جواب آمد، به او گفتم «محاسبات ظاهراً درست است ولی من در مورد فرمولهای سطوح مقطع جذب اکسیژن و نیتروژن اطلاعی ندارم ـــ به هر حال، نمی‌توان آزمایشی در سطوح انرژیِ مورد نیاز انجام داد.» و او، همچون فیزیکدانی که با ریاضیدانی حرف می‌زند، پاسخ داد که از من

1. SETI (search for extraterrestrial intelligence)
2. Arecibo

خواسته است محاسبه را بازبینی کنم نه فیزیک مربوط به آن را. با خودم گفتم: «چکار کرده‌ای همینگ، تو در کاری که ممکن است تمام حیات را در عالم به مخاطره اندازد درگیرشده‌ای بدون اینکه از یک جزء اساسی موضوع اطلاعی داشته باشی.» در راهرو قدم می‌زدم که دوستی از من پرسید از چه چیزی ناراحتی. وقتی قضیه را به او گفتم، پاسخ داد: «اهمیت نده، هیچ‌کس به خاطر این موضوع یقهٔ تو را نخواهد گرفت.» بله، ما تمام حیاتِ شناخته‌شده در عالم شناخته شده را بر مبنای نوعی ریاضیات به مخاطره می‌انگندیم. ریاضیات فقط یک فُرم هنری بی‌هدف و بیهوده نیست بلکه جزئی ضروری از جامعهٔ ماست.

از آن روز به بعد، به خصوص وقتی در آزمایشگاههای تلفن بل کار می‌کردم، بسیار پیش آمده است که پیش‌بینیهایی مشابه، البته نه آنقدر هیجان‌انگیز، براساس ریاضیاتِ مرسوم انجام داده‌ام: اگر اندازهٔ بال پرتابه را $\frac{1}{2}$ کنید و پرتاب را به طور مورب انجام ندهید، به نتیجهٔ بسیار بهتری دست خواهید یافت و می‌توانید هدف بسیار دورتری را بزنید؛ اگر ترانزیستوری را به این طریق طرح کنید نه به آن طریق، این مزایا را خواهد داشت؛ تحت بار ترافیک در نظر گرفته شده، این طرح برای ساختمان ادارهٔ مرکزی باعث راه‌بندان کمتری خواهد شد تا آن یکی طرح، و غیره. بسیاری اوقات براساس محاسباتی که پشت میز تحریرم انجام داده‌ام، پیش‌بینیهایی در بارهٔ دنیای واقعی کرده‌ام. مسلماً طبیعت نه اطلاعی از آنچه من می‌نویسم و اصول ریاضیی که به‌کار می‌برم دارد و نه اهمیتی به آنها می‌دهد. با این حال، پیامدهای کار من جدی است. پس این پرسش اهمیت زیادی دارد که «به چه انواعی از ریاضیات می‌توانم اعتماد کنم و به چه انواعی نمی‌توانم؟» مسأله این است!

به موضوع اصلی برگردیم. یادتان باشد که فرض مبنایی ما این است که ارتباطی دوطرفه از طریق امواج رادیویی با تمدنی در یک سیارهٔ دور برقرار کرده‌ایم. ما عقیده داریم که دنیای فیزیکی و شیمیایی آنها نظیر دنیای ماست و بنابراین دنیای آنها نیز گرانش، لختی، گرما، بقای انرژی، پدیده‌های ترمودینامیکی، آنتروپی، و سایر ویژگیهای دنیای ما را دارد. آنها هم با همان مسائل مربوط به دنیای واقعی روبه‌رو هستند که ما هستیم، و باید با این مسائل مقابله کنند. اگر شما به آفرینش، طبق نظر تورات معتقد باشید، البته [خواهید گفت که] خداوند می‌توانسته است ساکنان سیاره‌های دیگر را خیلی متفاوت با ما آفریده باشد، ولی اگر به نظریهٔ تکامل اعتقاد داشته باشید، آنها نیز باید با همان قوانین فیزیکی حاکم بر ما، در جهت سازگاری هر چه بیشتر با محیط، مرحله به مرحله تکامل یافته باشند و از حالات سادهٔ اولیه به حالت پیچیدهٔ فعلی رسیده باشند. گالیله زمانی گفته است: «ریاضیات زبان علم است.» پس چون قوانین فیزیکی حاکم بر دنیای آنها و ما یکی است، ریاضیات آنها هم باید تشابه زیادی با ریاضیات ما داشته باشد.

پرسشی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که انتظار داریم چه نوع ارتباطی با این موجودات فضایی داشته باشیم. مسلماً آنها به هیچ‌یک از زبانهای طبیعیِ رایج در روی زمین صحبت نمی‌کنند. در روی زمین با آنکه زبانهای طبیعیِ متفاوتِ بسیاری رایج است، اساساً فقط یک زبان برای ریاضیات داریم. آیا آنها هم اساساً همین زبان را دارند؟

من در دیدارهای دوهفته‌ای که هر تابستان به‌عنوان مشاور از آزمایشگاههای علمی لُس‌آلاموس به عمل می‌آوردم، شروع کردم به در میان گذاشتن این پرسش با دوستان فیزیکدان. با توجه به فرضی که در بالا عنوان شد، آنها همه موافق بودند که موجودات فضایی باید اساساً همین ریاضیات ما را داشته باشند. اما کلمهٔ «اساساً» نیاز به توضیح دارد. همهٔ فیزیکدانها می‌دانند که مکانیک کوانتومی به سه صورتِ متفاوت توصیف می‌شود: صورت موجی، صورت ماتریسی، و نیز با رهیافت مبتنی بر نظریهٔ گروهها؛ بنابراین، مجموعهٔ مفروضی از داده‌های تجربی، یا اگر ترجیح می‌دهید خود طبیعت، لازم نیست در نظریهٔ یگانه‌ای صدق کنند. صحبت این بود که ساکنان آن سیارهٔ دور مثلاً باید چیزی معادل با معادلات ماکسول داشته باشند. اما این معادله‌ها خود مستلزم حساب دیفرانسیل و انتگرالی هستند که کم و بیش شبیه مالِ ما باشد، و نظایر اینها.

افرادی که تخیل قوی دارند می‌توانند تقریباً هر چیزی را در این زمینه به تصور درآورند، و در داستانهای علمی‌ـتخیلی مثلاً صحبت از ابرهایی از گاز به میان می‌آید که همچون موجودات ذیشعور عمل می‌کنند، اما اگر از این افراد بخواهید به حدسهای توخالی قناعت نکنند و به بررسی احتمال این چیزها بپردازند، بیشتر این تخیلات زیبا بر باد می‌رود. در مورد فرود سفینه‌ها در کرهٔ ماه، بعضیها ادعا می‌کردند که سطح ماه تا ارتفاع ۱۷ فوت از خاک پوشیده شده است و سفینه‌ای که بر ماه می‌نشیند ممکن است در آن فرو رود. ولی معلوم شد سطح کرهٔ ماه بسیار شبیه همان است که انتظار داشتیم ــ در پیش‌بینیهای ما در نظر گرفته شده بود که فرسایش ناشی از ذرات و باد خورشیدی بیشتر از فرسایش ناشی از آب و هواست زیرا جو ماه بسیار بسیار رقیق است. من تمایل به این دارم که حدسهای خام و دور از ذهن را نادیده بگیرم. درواقع وقتی این‌گونه حدسها [در مورد فرود بر ماه] روی هم جمع می‌شدند مجموع احتمالات منسوب به آنها آنقدر کوچک بود که ما آنها را نادیده گرفتیم و فرض کردیم سطح ماه شباهت زیادی به سطح زمین دارد.

با نظریه‌پردازیهای بیهوده به جایی نمی‌توان رسید: برای شروع کار به مبنایی نیاز است. دکارت وقتی شروع به اندیشیدن در بارهٔ جهان کرد، چون پی برد بیشتر آموخته‌هایش نادرست است، این جمله را مبنا قرار دارد: «من می‌اندیشم، پس هستم». و من تصمیم گرفتم با این جملهٔ معروف کرونکر آغاز کنم: «خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی کار انسان است.» شما ممکن است ادعا کنید که به چیزی جز این اعتقاد دارید ولی ضرورتِ زیستن، بقا، و تمایز گذاشتن بین اشیا در نظر من به این معنی است که شما احتمالاً یک دستگاه شمارش گسسته و نامحدود دارید ــ عددهای صحیحِ متناهی و به‌طور خطی مرتب‌اند، اما دستگاه عددهای صحیح بیکران است.

اصول پئانو برای اعداد صحیح پذیرفته شده‌اند ولی هیچ‌کس واقعاً فکر نمی‌کند که عددهای صحیح از این اصول به‌دست می‌آیند، و درواقع اگر معلوم شود که این اصول نارسا هستند، آنها را تغییر می‌دهیم تا آنچه را می‌خواهیم به‌دست آوریم. ایده‌های ما در بارهٔ اعداد صحیح مستقل از اصول پئانو هستند.

هندسهٔ اقلیدسی کاملاً وابسته به کمیات پیوسته است. یونانیان سرانجام با معضل دو رهیافتِ پیوسته و گسسته روبه‌رو شدند و درواقع به طرز بدی آن را حل کردند، تقریباً به همان بدی که ما کرده‌ایم. در آن دوران دو نگرش فلسفی وجود داشت. گروهی از فیلسوفان به عدم تغییر اعتقاد داشتند (هیچ چیزی

نمی‌تواند تغییر کند و همچنان خودش باشد) وگروه دیگر، تغییر را اساس عالم می‌دانستند (هراکلیتوس: همه چیز در جریان است، و نمی‌توان دو بار در یک رودخانه قدم گذاشت). به نظر من، پارادکسهای زنون تلاش چشمگیری است برای نشان دادن تعارضات ذاتی بین دو دیدگاه گسسته و پیوسته. به‌عنوان مثال، پارادکس «تیر پرتاب شده» را در نظر بگیرید. اگر زمان مرکب از لحظه‌ها باشد، همان‌طور که محور حقیقی را مرکب از نقطه‌ها می‌دانند، آنگاه تیر در هر لحظه در مکانی قرار دارد و بنابراین هرگز حرکت نمی‌کند. ما شبیه همین حرف را در بارهٔ محور می‌زنیم: محور مرکب از نقطه‌هایی است که بعد ندارند ولی خود محور بعد دارد! آیا این حرف معقول است؟ از طرف دیگر کسانی که به تغییر اعتقاد داشتند بالاخره مجبور شدند بگویند که امکان تقسیم‌کردن حدی دارد، و بنابراین جهان مرکب از اتمهای تقسیم‌ناپذیر است. دیدگاه گسسته به این منطق اتکا داشت که هیچ تغییری ممکن نیست؛ تغییر فقط توهم است چون در غیر این صورت هیچ چیزی مشخص و ثابت نمی‌بود. پیوسته و گسسته، مانند نفت و آب، با هم مخلوط **نمی‌شوند**.

من به این عقیده گرایش دارم که ساکنان سیارهٔ دوردستِ فرضی هم به همین نوع منطقی دست یافته‌اند که ما به کار می‌بریم حتی اگر حیات آنها مبتنی بر ترکیبات سیلیکون باشد نه کربن؛ هر چه باشد، آنها ظاهراً با همان عالم فیزیکی سروکار دارند که زمین ما هم جزئی از آن است، و بنابراین، همان گرفتاریهایی را که زنون به طرز چشمگیری نشان داد، دارند. و باز، همان‌طور که گالیله خاطرنشان کرد، ریاضیات زبان علم است و چون دنیای فیزیکی آنها همان قوانین دنیای ما را دارد، ممکن نیست از ریاضیاتی که ما داریم زیاد منحرف شده باشند. ممکن است؟

یونانیان از عدد صحیح به کسر یا عدد نسبت یعنی عدد گویا رسیدند[1] و گمان می‌کنم ساکنان سیارهٔ دور نیز چنین کرده باشند. ولی یونانیان وقتی پی بردند که قطر مربع واحد یک عدد گویا نیست، به این نتیجه رسیدند که اصلاً عدد نیست و در بهترین حالت یک کمیت است، و قسمت بزرگی از اصول اقلیدس، از مقالهٔ ۵ به بعد، به نظریهٔ ائودوکسوس در باب کمیتها پرداخته است. ما ظاهراً در قرون وسطی، با پیدایش دستگاه شمار اعشاری، به این نتیجه رسیده‌ایم که عدد گنگ، عدد است. آیا ساکنان آن سیاره هم باید چنین مسیری را پیموده باشند؟ احتمالاً، و در غیر این صورت باید مانند اقلیدس دو نظریهٔ موازی پرورانده باشند. عددهای متعالی مانند π، γ، و e احتمالاً قابل اجتناب نیستند، و آنها مجبور بوده‌اند به نحوی به این عددها بپردازند.

تورینگ در ۱۹۵۷ ماشینِ (خیالی، نه واقعیِ) تورینگ را وارد منطق کرد تا به آرزوی هیلبرت در مورد دستیابی به اثباتهای مکانیکی جامهٔ عمل بپوشاند، اثباتهایی که به نظر هیلبرت اثباتهای کامل، و معتبر در همهٔ اعصار هستند. تورینگ در جریان این کار تعریف عدد را تغییر داد! پیش از آن، ظاهراً عدد را همان نمایش آن می‌دانستند (که تقریباً همیشه به صورت اعشاری بود و به‌ندرت به‌صورت دودویی). توجه تورینگ معطوف بود به آنچه ماشین می‌تواند با استفاده از برنامه تولید کند، برنامه‌ای که رشته‌ای متناهی از دستورالعملها (به‌صورت ارقام دودویی، برای راحتی کار) است و وقتی در ماشین محاسب اجرا می‌شود، اگر توقف کند می‌توان جواب را دانست. به این ترتیب، عدد محاسبه‌پذیر عددی است که برنامه‌ای وجود داشته باشد که بتوان آن عدد را با ماشین تورینگ تا هر تعداد رقم دلخواه محاسبه کرد (البته این تعداد ضرورتاً متناهی است). بنابراین تورینگ در تلاش برای یافتن اثباتهای مکانیکیِ (البته، ایده‌آلی)، مفهوم عدد را از نمایش آن به فرایند به‌دست آوردن تعداد دلخواه از ارقام آن تبدیل کرد. عدد π اکنون یک برنامه است، مثلاً برنامه‌ای که شش میلیارد رقم آن را تولید می‌کند، و دیگر نمایش نامتناهی اولیه نیست. پس تورینگ گامی در جهت دوری از نامتناهیِ بالفعل و بازگشت به متناهی، اما بیکران، برداشت: بینهایت بالقوهٔ ارسطو در مقابل بینهایت بالفعل کانتور. ظاهراً بیشتر ریاضیدانان از این تغییر آگاه نیستند، ولی کسانی که در زمینهٔ محاسبه کار می‌کنند آن را طبیعی می‌دانند. این تغییر تعریف، بعضی اثباتها و نتایج قدیمی را ضایع می‌سازد ولی اثباتهای دیگری از چیزهای دیگر را ممکن می‌کند.

این تحول از نامتناهی به متناهی، با بسیاری از اجزای دیگر ریاضیات مانند فرایند اپسیلن‌ـدلتا همسوست. در این مورد هم نمی‌توانم تصور کنم که ساکنان سیارهٔ دوردست توانسته باشند از مواجهه با مسائل گسسته و پیوسته و گرفتاریهای ناشی از آنها در مورد بینهایت اجتناب کنند. آنها نیز احتمالاً زنون خودشان را با پارادکسهایش، و نیز گرفتاریهای دیگر، داشته‌اند. هر چه باشد، ما ظاهراً در عالَمی متناهی زندگی می‌کنیم و ایدهٔ قدیمی ۰٫۳۳۳··· = ۱/۳ (تا بینهایت) مغایر با باورهای ما و احتمالاً آنهاست.

بدون اینکه اثباتی بیاورم ــ اندکی بعد به این موضوع دقت ریاضی و اثبات برمی‌گردم ــ می‌توانید دریابید که چون برنامه به‌صورت دنباله‌ای متناهی از دستورالعملها تعریف می‌شود، هر یک از برنامه‌های کامپیوتریِ ممکن لزوماً متناهی است هر چند مجموعهٔ همهٔ برنامه‌ها بیکران است، و این مجموعه شمارش‌پذیر است، و درواقع با ترتیب مناسبی حتی خوش‌ترتیب است، پس مجموعهٔ عددهای محاسبه‌پذیر نیزکه زیرمجموعه‌ای از آن است، شمارش‌پذیر است. توجه کنید که این مجموعهٔ مرکب از برنامه‌ها که زیرمجموعهٔ مجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی از رشته‌های دستورالعملهاست، خوش‌تعریف نیست به این معنا که ــ چنانکه بعداً نشان داده می‌شود ــ نمی‌توانید بگویید یک رشتهٔ دلخواهْ برنامه است یا نه. اما بیشتر شما اعتقاد دارید که عددهای ۰ تا ۱ شمارش‌پذیر نیستند، چون به شما این‌طور گفته‌اند و نوعی اثبات هم برای آن آورده‌اند.

حالا توجه کنید به قضیهٔ معروف لوونهایم‌ـاسکولم در منطق، که می‌گوید هر مجموعهٔ متناهی از اصول، مدلی شمارش‌پذیر دارد ــ و باز بدون اینکه اثباتی بیاورم تا حدی می‌توانید بفهمید که چرا این قضیه درست است؛ نکته اینجاست که ما اثباتهای بینهایت طویل را نمی‌پذیریم. ولی اگر چنین است، چگونه می‌توان با استفاده از تعدادی متناهی اصل، شمارش‌ناپذیریِ عددهایی را که به‌وسیلهٔ آن اصول تعریف می‌شوند ثابت کرد، چون مسلماً آنچه می‌توانید صرفاً از اصول استنتاج کنید باید در مورد هر مدلی از آنها صادق باشد. حالا اثباتی را که کانتور عرضه کرد، و فرایند قطری‌سازی او را به‌یاد آورید که در آن از نمایشهای اعداد استفاده شده است. شما کدام‌یک را ترجیح می‌دهید: اثباتِ شهوداً واضحی از این حکم را که هر تعداد متناهی از اصولْ مدلی شمارش‌پذیر دارد یا فرایند قطری‌سازی را که برای اثبات شمارش‌ناپذیری به‌کار می‌رود؟ ساکنان آن سیاره که در مرحله‌ای با این مسأله روبه‌رو شده‌اند در

۱. در انگلیسی، نسبت [ratio] وگویا [rational] از یک ریشه‌اند.

این مورد چه تصمیمی گرفته‌اند؟ من گمان می‌کنم آنها کانتورشان را در روزگار پیری روانهٔ تیمارستان کرده باشند. بعداً به فرایند قطری‌سازی او برمی‌گردم.

متوجه خواهید شد که من از ورود به عمقِ منطق متداول پرهیز کرده‌ام. زمانی‌که دانشجوی دورهٔ تحصیلات تکمیلی بودم، قوانین تفکر بول را خواندم و آن را جالب توجه، ذیربط، و معقول یافتم. ولی وقتی حتی مقدمات منطق ریاضی را بررسی می‌کنم می‌بینم حاوی موشکافیهای نامعقولی است؛ من نمی‌توانم باور کنم که هیچ‌یک از این موشکافیها و تمایزات ظریف، یا حتی همهٔ آنها روی هم، بتواند عدد اولی را به عدد مرکب تبدیل کند، یا قضیهٔ انتگرال کوشی را باطل سازد، و یا باعث شود پرتابه‌ای به جای برخورد به هدف، یک مایل دورتر بیفتد. به نظر من کارهای منطقدانان ظاهراً ربطی به ریاضیات ندارد، و منطق یک بازی ذهنی است که ریاضیدانان برای سرگرمی خودشان به آن می‌پردازند.

مادامی که فقط دنباله‌ها و مجموعه‌های مرتب را در نظر دارید، راه طبیعی برای محاسبهٔ چگالیِ، مثلاً، عددهای صحیح زوج، به‌دست آوردن نسبت حدیِ عددهایِ دارای این خاصیت به کل عددهای موردنظر است، و البته نسبت ۱/۲ را برای چگالی عددهای صحیح زوج به‌دست می‌آورید، و به این ترتیب از حکمهای متناقض‌نما [مبتنی بر جفت‌سازی] پرهیز می‌کنید، حکمهایی که اشخاص را گیج می‌کند مگر آنکه برایشان روشن شود که شما روشی خاص، و نسبتاً غیرطبیعی، برای مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌های مرتب اختیار کرده‌اید. حتی گالیله هم متوجه پارادکسی شد که از جفت‌کردن یک به یکِ [عددهای موردنظر] با عددهای صحیح پدید می‌آید و به‌خصوص ملاحظه کرد که با روش جفت‌کردن، تعداد مربعهای کامل و تعداد عددهای صحیح مثبت برابر می‌شود. اگر سروکارتان با مجموعه‌های مرتب و چگالیهای اعداد در بازه‌ها باشد به چنین نتایج غریبی نمی‌رسید. دلیل اینکه کانتور از تعریف یک به یک برای برابری اندازهٔ مجموعه‌ها استفاده کرد این بود که می‌خواست به مجموعه‌های نامرتب نامتناهی بپردازد. من به هیچ‌وجه مطمئن نیستم که ساکنان سیارهٔ دوردست چنین انتخابی کرده باشند، و این موضوع پیامدهای جدی برای انتگرالگیری لبگ دارد که اندازهٔ ۰ را به هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر و در نتیجه به همهٔ عددهای محاسبه‌پذیر، و بنابراین به عقیدهٔ من، به تمام واقعیتی نسبت می‌دهد که می‌توانیم از آن نام ببریم و در باره‌اش صحبت کنیم. درواقع بیش از ۴۰ سال است که من ادعا کرده‌ام اگر امکان پرواز هواپیمایی به این بستگی داشته باشد که تابعی که در طراحی آن مطرح شده انتگرالپذیر لبگ باشد نه انتگرالپذیر ریمانی، من با آن هواپیما پرواز نخواهم کرد. آیا شما می‌کنید؟ آیا طبیعت این تفاوت را تشخیص می‌دهد؟ شک دارم! شما البته می‌توانید هر نظری که دلتان می‌خواهد در این مورد داشته باشید، اما من متوجه شده‌ام که انتگرالگیری لبگ و درواقع همهٔ نظریهٔ اندازه، سال به سال نقش کوچکتر و کوچکتری در سایر زمینه‌های ریاضیات ایفا می‌کند و در زمینه‌هایی که فقط با کاربرد ریاضیات سروکار دارند، نقشی ندارد. اخیراً نشان داده‌اند که انتگرال هنستاک[1]، که تعمیمی ساده و بسیار طبیعی از انتگرال ریمانی است، بسیار کلیتر از انتگرال لبگ است که چنان ویژگیهای عجیب و غریبی دارد.

می‌دانم که هیلبرتِ کبیر گفته است: «هیچ‌کس ما را از بهشتی که کانتور برایمان خلق کرده است بیرون نخواهد راند.» اما من پاسخ می‌دهم: «دلیلی

1. Henstock

برای واردشدن به این بهشت نمی‌بینم!» درواقع، گمان می‌کنم مردم هر چه بیشتر و بیشتر با کامپیوتر دمخور می‌شوند، بالاخره ما ساکنان زمین به این نتیجه خواهیم رسید که عددهای محاسبه‌پذیر برای ما کفایت می‌کنند. ظاهراً هرگز به عددی محاسبه‌ناپذیر نیاز نخواهیم داشت! مثلاً محور حقیقی ۰ تا ۱ را در نظر بگیرید و عددهای محاسبه‌پذیر را از آن بردارید. تعدادی شمارش‌ناپذیر عدد باقی می‌ماند که هیچ‌یک، را هرگز نمی‌تواند توصیف کنید (چگونه می‌توانید عددی را به‌طور کامل توصیف کنید اگر نتوانید، دست‌کم به‌طور ضمنی، راهی برای یافتن آن به‌دست دهید)! با این حال، اصل موضوع انتخاب می‌گوید که می‌توانید یکی را انتخاب کنید! آیا می‌توانید؟ کدام‌یک را؟ در حالی که نمی‌توانید آن را چنان توصیف کنید که شخص دیگری بفهمد در بارهٔ چه صحبت می‌کنید؟ آیا اصل موضوع انتخاب معقول است؟ آیا می‌توان در دنیای واقعی به این اصل اتکا کرد؟ همان‌طور که فیزیکدانها پس از سالها بحث در بارهٔ ویژگیهای اتر بالاخره به این نتیجه رسیدند که اتر قابل اندازه‌گیری نیست، من هم عقیده دارم که بهتر است آنچه را نمی‌توان در باره‌اش صحبت کرد یا اندازه‌اش گرفت، کلاً فراموش کرد. بعضی چیزها خاستگاه طبیعی ندارند!

سالها پیش، روزی مقاله‌ای در بارهٔ عددهای محاسبه‌ناپذیر به‌دست گرفتم که بخوانم. ناگهان به این فکر افتادم که ممکن نیست کسی وارد اتاقم شود و سراغ عدد محاسبه‌ناپذیری را ازمن بگیرد. وقتی این عددها هرگز [در عمل] مطرح نمی‌شوند چرا زحمت [مطالعهٔ آنها را] به خود بدهیم؟ این بود که مقاله را نخوانده در سطل آشغال انداختم.

در اینجا باید روشن کنم که به نظر من قضیه‌ها واقعاً ثابت نمی‌شوند. همان‌طور که جی. اچ. هاردی مدتها قبل گفته است، ما علامتهایی می‌فرستیم، شخص دیگری آنها را می‌خواند و آن علامتها یا او را قانع می‌کند و یا نمی‌کند. برای افراد ساده‌ای که هر چه را می‌خوانند باور می‌کنند و در بارهٔ چیزها از خودشان سؤالی نمی‌کنند، اثباتْ اثبات است، ولی برای دیگران، اثبات فقط راهی برای اندیشیدن در بارهٔ قضیه به‌دست می‌دهد و به خود شخص بستگی دارد که چه عقیده‌ای در بارهٔ آن پیدا کند. اثباتهای صوری، که عمداً فاقد معنی هستند، فقط صورتگرایان را قانع می‌کند و نتایجی هم که به‌دست می‌دهند ظاهراً از نظر خود آنها فاقد هر نوع معنی است. آیا این است ریاضیاتی که می‌خواهیم آن را برای فهم دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم به‌کار بریم؟

وقتی شانون نظریهٔ اطلاعات خود را برای نخستین بار (در ۱۹۴۷) انتشار داد، بیشتر صاحب‌نظران تشخیص دادند که قضیه‌ها درست‌اند اما اثباتها نارسا هستند. پروفسور دوب[1] در ایلینوی اثباتها را از دیدگاه دقیق بررسی کرد و در مقاله‌ای در مث ریویوز آشکارا در مورد صداقت ریاضی شانن ابراز تردید کرد. پس باز با دو دیدگاه در بارهٔ معنای واقعی ریاضیات روبه‌رو هستیم، و من راهی برای پی بردن به اینکه کدام‌یک از آنها در سیارهٔ دوردست غالب است ندارم؛ شاید هم، همان‌طور که در روی زمین می‌بینیم، هر دو دیدگاه در کنار هم رواج دارند بدون آنکه تفاهم چندانی میان آنها وجود داشته باشد. در نظر من، درست یا غلط بودن قضیه‌ها کاملاً مستقل از اثباتهای آنهاست؛ وقتی با یک حکم ریاضی روبه‌رو می‌شوم، داور نهایی در پذیرش یا رد کردن آن اعتقاد قلبی من است. ولی ریاضیدانان محض عقیده دارند که تکلیف

1. Doob

این چیزها را اصول موضوع، تعریفها، و منطق پذیرفته شده معلوم می‌کند!

حال از نظریه‌های تخیلی و رازآمیز که تعیین صحت و سقم آنها در واقعیت ممکن نیست به هندسهٔ اقلیدسی و اصول موضوع آن برگردیم. اثباتی متعارف، مبتنی بر روشهای پذیرفته شده، برای این گزاره وجود دارد که همهٔ مثلثها متساوی‌الساقین هستند، و به‌عنوان فرع این حکم نتیجه گرفته می‌شود که همهٔ مثلثها متساوی‌الاضلاع‌اند. این اثبات، همان‌طور که بی‌شک می‌دانید، متکی بر شکلی است که نادرست رسم شده است. هیلبرت پی برد که اقلیدس چیزهایی را در بارهٔ تقاطعها و میانبود [بینیّت] فرض کرده اما ثابت نکرده است، و برای مقابله با این‌گونه اثباتها اصول بسیار بیشتری را به اصول اقلیدس افزود! من نخستین بار هنگامی که دانشجوی دورهٔ تکمیلی بودم در این مورد مطالعه کردم و این حقیقت جالب توجه را دریافتم که هیچ‌یک از حدود ۴۰۰ قضیهٔ اقلیدس نیست که به این ترتیب غلط از آب دربیاید! پس از تأمل بسیار پی بردم که هیلبرت این اصول را اضافه کرده است تا قضایا درست باشند — یعنی قضایا مستقل از نارسایی اثباتشان (از همان اثبات قضیهٔ ۱ به بعد) درست به‌حساب می‌آمده‌اند — و از آنجا دریافتم که اقلیدس هم در موقعیت مشابهی قرار داشته است: او قضایای زیادی، از جمله قضیهٔ فیثاغورس، در دست داشت که «می‌دانست درست‌اند»، و می‌بایست اصولی پیدا کند که مؤید آنها باشند. ریاضیات این نیست که صرفاً چند اصل دلخواه را کنار هم بگذارید و استنتاجهایی از آنها به عمل آورید، بلکه بیش از اینهاست؛ شما از چیزی که دوست دارید شروع می‌کنید و سعی می‌کنید اصولی بیابید که مؤید آنها باشند! حال بورباکی هر چه می‌خواهد بگوید!

اکنون می‌رسیم به مسألهٔ اثبات و دقت. من مدتهاست استدلال کرده‌ام که با سیر صعودیِ معیار دقت، امروز نمی‌توانیم به هیچ اثباتی اطمینان داشته باشیم. مسلماً بیشتر اثباتهای فعلی ما ترمیم خواهند شد، همان‌طور که من هم در زمان خودم مجبور شده‌ام اثباتهایی متعلق به بعضی از بزرگترین ریاضیدانان را اصلاح کنم. گاوس در رسالهٔ دکتریش پس از نشان دادن اینکه اثباتهای قبلیِ قضیهٔ بنیادی جبر قابل اعتماد نیست، خودش اثباتی ارائه کرد — درواقع در طول عمرش چندین اثبات ارائه کرد — ولی احتمالاً همهٔ آنها از دیدگاه توپولوژیدانان امروزی نارساییها و نواقصی دارد! آیا گاوس قضیهٔ بنیادی جبر را هرگز ثابت کرده است؟ به نظر شما به چه معنایی این کار را کرده است؟ در بحثی با یک ریاضیدان بسیار خوب در اتاق استادان بخش ریاضی آزمایشگاههای بل، من مسألهٔ سطح صعودی دقت در اثبات را پیش کشیدم. او مدعی شد که در حال حاضر (دههٔ ۱۹۶۰) به غایتِ دقت در اثبات رسیده‌ایم و دیگر نیازی به ترمیم و اصلاح اثباتهای قدیمی نیست! البته او پس از اینکه آرام گرفته و افکارش را منظم کرده است، احتمالاً عقیده‌اش را تغییر داده است! شاید هرگز نتوان قضیه‌ای را به‌طور قطعی اثبات یا ابطال کرد!

در مورد سیارهٔ دور هم با همین مسأله روبه‌رو هستیم. آیا آنها توانسته‌اند ریاضیاتِ قطعی و مطمئنی پیدا کنند که در آن لازم نباشد اثبات قضیه‌ها دائماً تجدید شود؟ آیا چنین ریاضیاتی می‌تواند وجود داشته باشد؟ کاش می‌دانستم!

باز به هندسه برگردیم. ما زمینیان آگاهانه تصمیم گرفته‌ایم که عدم تقارن را نادیده بگیریم. مثلاً در مورد شکلهای قابل انطباق، ممکن است دو مثلث مسطحه را قابل انطباق بدانیم در حالی که برای این انطباق لازم باشد یکی را در فضای سه‌بعدی برگردانیم. محتمل به نظر می‌رسد که موجودات سیارهٔ دوردست ترجیح داده باشند مفهوم جهت را در وهلهٔ اول بپذیرند و نه آنکه اغلبِ کاربران هندسه را مجبور کنند که بعداً به این مفهوم بپردازند. در هندسهٔ اقلیدسی متعارف ما، نمی‌توانیم این قضیهٔ مهم را داشته باشیم که در فضای سه‌بعدی فقط دو جهت وجود دارد، یکی از آنِ پیچ چپگرد و دیگری از آنِ پیچ راستگرد.

حالا یکی از معروفترین قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی را در نظر بگیرید که می‌گوید نمی‌توان یک زاویهٔ دلخواه را با خط‌کش نامدرج و پرگار به سه قسمت برابر تقسیم کرد. این قضیه به مفهومی درست است، ولی اگر گذاشتن دو علامت روی خط‌کش را مجاز بدانید، غلط می‌شود (ارشمیدس هم این را می‌دانست)! این دو حالت در عمل تفاوت ناچیزی دارند. آیا ساکنان آن سیارهٔ دور هم افلاطونی داشته‌اند که ذهنش آنقدر متوجه ایده‌آلها بوده که هیچ وسیلهٔ فیزیکی بجز پرگار و خط‌کش نامدرج را در هندسه مجاز نمی‌دانسته و حتی گذاشتن دو علامت را روی این خط‌کش برنمی‌تافته است؟ اینکه ریاضیدانان این همه از قضیه‌ای یاد می‌کنند که درستی یا نادرستی آن به چنین تفاوت بی‌اهمیتی در تعریف وابسته است، معقول نیست! این قضیه ربطی به دنیای واقعی ندارد.

در همین زمینه از شما می‌خواهم به این موضوع توجه کنید که چند ریشهٔ برابر تابع را ریشهٔ چندگانه به حساب می‌آوریم (عاملها و ریشه‌ها را عمداً خلط می‌کنیم!)، این بحث را می‌توان به گرافهای دوگان کشاند و اینکه گرافهای خوددوگان را دوبار به حساب می‌آوریم و در نتیجه به این قضیه دست می‌یابیم که در فضای سه‌بعدی، شش چندوجهی منتظم وجود دارد و نه پنج تا. هر چه باشد، شش عدد تام است! اینها الفاظی صرف است؛ هیچ چیز تغییر نکرده، ولی صورت قضیه کاملاً متفاوت است!

مقدار زیادی از ریاضیات ما از همین نوع است، بنابراین نمی‌توان تصور کرد که آن موجودات فضایی همین مسیر محدود و مشخصی را پیموده باشند که ما طی کرده‌ایم. بدون اینکه ریاضیات «مستحکم» را تعریف کنم، ادعا می‌کنم بخشهای «مستحکم» ریاضیات عموماً قابل اتکا هستند به شرط اینکه دقت کافی در تطابق اجزای دنیای واقعی و ریاضیاتِ متناظر به‌کار رفته باشد (و نیز مفروضات زیربنایی، ساختار کلی و سودمندی در جاهای دیگر به دقت بررسی شده باشد) و بخشهای «نامستحکم» برای ما بی‌فایده‌اند همان‌طور که مفهوم اتر برای فیزیکدانان بیفایده از آب درآمد، و بهتر است فراموش شود.

حالا احتمالاً از من می‌خواهید که بگویم به چه چیزی اعتقاد دارم تا به خاطر همهٔ حرفهای نامتعارف و تکان‌دهنده‌ای که در بارهٔ ریاضیاتتان زدم، به من حمله کنید. با این گفتهٔ ارمیت شروع می‌کنم که: «ما ارباب ریاضیات نیستیم، خدمتکار آن هستیم.» من خیلی وقتها خلاف این را گفته‌ام: «ما ارباب ریاضیات هستیم نه خدمتکار آن؛ ریاضیات کاری را می‌کند که ما خواسته‌ایم بکند.» ولی درواقع به آمیزه‌ای از این دو اعتقاد دارم: گاهی

ریاضیات ما را به دنبال خود می‌کشاند و گاهی ما ریاضیات را هدایت می‌کنیم. موجودات فضایی هم خودشان را در چنین وضعیتی خواهند یافت و چون در همان نوع دنیای فیزیکی زندگی می‌کنند که ما می‌کنیم و با ما ارتباط رادیویی برقرار کرده‌اند، ریاضیات مفید «مستحکم» آنها کم و بیش با مال ما مشابه است ولی بخشهای «نامستحکم» ریاضیاتشان ممکن است خیلی با آنچه ما داریم تفاوت داشته باشد. آیا موجودات فضایی اصلاً اطلاعی از قضایای پیش پاافتادهٔ ما دارند یا اهمیتی به آنها می‌دهند؟ آیا قضیهٔ مشهور فرما، با آنکه تصور عمومی بر این است که با مفروضات، تعریفها، و روشهای استدلال ما به اثبات رسیده است، در ریاضیات آنها هم صادق است؟ آیا لازم نیست بررسی کنیم که آنها چه چیزی را اثبات می‌دانند و چه چیزی را نمی‌دانند، یا حتی اینکه گزارهٔ معنی‌دار در نظر آنها و در نظر ما چیست؟

برای اینکه فکر نکنید من قسمت اعظم ریاضیات عالی را کنار می‌گذارم، به مطلب دیگری که مدتهاست گفته‌ام توجه کنید. اگر وارد اتاق کار من شوید و به من نشان دهید که قضیهٔ انتگرال کوشی غلط است، توجه من بسیار جلب خواهد شد اما در آخر کار به شما خواهم گفت که باید بروید و مفروضات دیگری پیدا کنید تا قضیه درست شود زیرا من «می‌دانم» که «درست» است. این قضیه لازمتر از آن است که غلط باشد، و دست‌کم از قضیهٔ گرین نتیجه می‌شود. قضیهٔ انتگرال کوشی، علاوه بر چیزهای دیگر، تابع پتانسیل میدانهای برداری را به‌دست می‌دهد و مبنای بحثهای ما در مورد متغیرهای مختلط است، هر چند همه می‌دانیم که دست‌کم سه رهیافت متمایز به متغیرهای مختلط وجود دارد: (۱) قضیهٔ انتگرال کوشی، (۲) رهیافت لاگرانژ و وایرشتراس مبتنی بر سریهای توانی، و (۳) رهیافت مبتنی بر تابعهای همساز که در آن هیچ‌گاه از $i = \sqrt{-1}$ استفاده نمی‌شود، و باز این نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که من بارها گفته‌ام: لازم نیست نظریهٔ یکتایی در کار باشد تا کارهایی که فرض می‌کنیم موجودات فضایی توانسته‌اند انجام دهند براساس آن صورت گرفته باشد؛ پایه‌های ریاضی متفاوت، و نیز جزئیات سطحی متفاوت، می‌توانند وجود داشته باشند ولی همه باید زمینه‌ساز نتایجی باشند که مورد نیاز دنیای واقعی‌اند.

و بالاخره، فقط اصول و تعریفها نیستند که نیاز به بازبینی دارند، بلکه منطقی نیز که در ریاضیات به‌کار می‌رود نیازمند بررسی است. من نمی‌توانم در این فرصت کوتاه در بارهٔ اغلب مشکلات موجود در منطق بحث کنم و در اینجا فقط به نقش «ارجاع به خود» در ریاضیات اشاره می‌کنم. این گزاره برای همه آشناست: «این گزاره غلط است.» این جمله از لحاظ دستوری درست است و هیچ اشکالی ندارد مگر اینکه آن را در مورد خودش به‌کار ببرید که در این صورت اگر درست باشد غلط است و اگر غلط باشد درست! مثالهای متعدد دیگری می‌توان آورد، از قبیل این عبارت معروف: «میانه‌روی در همهٔ امور». کلمهٔ «همه» خود حاکی از افراط و دوری از اعتدال است و بنابراین، در اینجا هم تناقضی درونی می‌بینیم. یکی از دوستان من دفترچه‌ای حاوی این‌گونه گزاره‌های رایج تهیه کرده است.

پارادکس راسل مثال متعارفی است که در منطق می‌آورند تا خطرات ارجاع به خود را در تعریفها نشان دهند و راسل خودْ برای گریز از این مشکلات نظریه‌ای در باب سلسله مراتب طبقات پرداخت، اما ظاهراً بعدها آن را پس گرفت؛ تا جایی که من دیده‌ام، نظریهٔ طبقات او مورد استقبال گسترده قرار نگرفته است، و ما هنوز با معضلِ رسیدن به تناقضات بر اثر ارجاع به خود دست به گریبانیم، تناقضاتی که البته ممکن است دیر به‌دست آیند.

نوع دیگری از ارجاع به خود که ممکن است شک‌برانگیز باشد، در منطقِ مورد استفاده در اثباتها دیده می‌شود. ابتدا حکم اصلی تورینگ را در مورد مسألهٔ توقف در نظر می‌گیریم که حاکی است برنامه‌ای وجود ندارد که بتواند تعیین کند یک برنامهٔ دلخواه توقف خواهد کرد یا نه. تورینگ اثبات آن را با این فرض شروع می‌کند که این برنامه را دارد، برنامه‌ای که البته به وجود آن اعتقاد ندارد! وی چون نمی‌تواند اطلاعی از محتوای برنامه داشته باشد، تنها کاری که می‌تواند بکند وررفتن با ورودی و خروجی است؛ او خروجیهایِ «توقف می‌کند» و «توقف نمی‌کند» را برعکس می‌کند. سپس یک برنامه، برنامهٔ تغییرنیافته، را بر برنامهٔ تغییریافته اِعمال می‌کند (که معلوم نیست وجود داشته) و به تناقض می‌رسد! از اینجا عدم وجود برنامه را نتیجه می‌گیرد. آیا این‌گونه اثبات قابل قبول است؟ شما را قانع می‌کند؟

در بسیاری از اثباتهایِ امکان‌ناپذیری، فرض اولیهٔ ما این است که چیزی که عدم وجودش را می‌خواهیم ثابت کنیم، وجود دارد! مثلاً در اثباتِ متعارفِ این حکم که ریشهٔ دوم ۲ یک کسر نیست، فرض می‌کنیم کسری [برابر با ریشهٔ دوم ۲] داریم که در ساده‌ترین صورت خود است، دو طرف برابری را به توان دو می‌رسانیم و به تناقضی متضمن بخش‌پذیری بر ۲ می‌رسیم. ولی ساکنان سیاره دوردست کاملاً ممکن است این قضیهٔ کلی را ترجیح داده باشند که هیچ کسری اگر به توانی صحیح رسانده شود حاصلش نمی‌تواند عدد صحیح باشد. در روی کرهٔ زمین، هم قضیهٔ تورینگ و هم گنگ‌بودن ریشهٔ دوم ۲ معمولاً اثبات‌شده به حساب می‌آیند هر چند یکی از آنها خودْ راجع است.

حال نظری به فرایند قطری‌سازی کانتور می‌اندازیم که به نظر می‌رسد بین دو مثال بالا قرار داشته باشد. در اینجا هم کانتور فرض می‌کند که اگر عددهای موردنظر شمارش‌پذیر باشند می‌توان آنها را به ترتیبی در یک فهرست قرار داد، آنگاه اولین رقم اولین عدد، دومین رقم دومین عدد، و . . . را تغییر می‌دهد و همین‌طور ادامه می‌دهد تا به انتهای این فهرست بی‌انتها برسد! سپس ادعا می‌کند که رقمهای تغییریافته عددی تشکیل می‌دهند که در فهرست نیست. پس چنین فهرستی نمی‌تواند وجود داشته باشد و اعداد بین ۰ و ۱ شمارش‌پذیر نیستند. و باز، در این اثبات با بینهایتِ بالفعل سروکار دارد نه با بینهایتِ بالقوهٔ ارسطو. هر چه باشد، او تصوری از عددهای محاسبه‌پذیر نداشت و نمی‌توان وی را زیاد سرزنش کرد؛ او از نمایش مرسوم عدد در زمان خودش استفاده کرده است و ما (دست‌کم بعضی از ما) مبنایی را که کار او بر آن استوار بوده، تغییر داده‌ایم.

مسأله این است که چه درجه‌ای از ارجاع به خود در اثباتهای «خودراجع» قابل قبول است. می‌دانیم که بعضی از انواع سادهٔ ارجاع به خود می‌توانند به نتایجی متناقض با خود بینجامند. احساس می‌کنیم اثبات سادهٔ گنگ بودن ریشهٔ دوم ۲ استدلال قابل اطمینانی است زیرا فقط عبارت موردنظر از لحاظ جبری به‌صورت دیگری نوشته می‌شود بدون آنکه تغییرات دیگری داده شود. ولی دست‌کم من، در بارهٔ اثبات تورینگ به‌صورتی که عرضه می‌شود تردیدهایی دارم و در بارهٔ صدق خود قضیه چیزی نمی‌گویم. فرایند قطری‌سازیِ کانتور، که مستلزم تغییری در اشیای مورد بحث است، مبتنی

است بر این فرض که می‌توانیم بی‌نهایتِ بالفعل را بپذیریم، و نسبت به اثبات تورینگ درجهٔ بسیار خفیفتری از ارجاع به خود را به‌کار می‌برد و بنابراین بین دو مثال بالا قرار می‌گیرد. پارادکس لوونهایم-اسکولم ظاهراً استدلال کانتور در مورد شمارش‌ناپذیری را مخدوش می‌کند. چگونه می‌توانید آن را بیازمایید؟ به یاد بیاورید که ما ظاهراً تعریف عدد را از نمایشِ گاه نامتناهیِ آن (مثلاً با استفاده از برشهای ددکیند) تبدیل کرده‌ایم به فرایندی که در هر مرحله رقمی از آن را به‌دست می‌دهد. آیا فرایند قطری‌سازی کانتور هنوز هم برقرار است؟ قضیهٔ تورینگ که قبلاً ذکر شد (اگر به آن معتقد باشید) نشان می‌دهد که هیچ راه مشخصی برای انتخاب برنامه‌هایی که به عددهای محاسبه‌پذیر می‌انجامند وجود ندارد، پس فهرست‌بندی اولیهٔ کانتور حتی برای اعداد محاسبه‌پذیر چگونه می‌تواند انجام شود در حالی که هیچ روش مکانیکی برای شناخت یک برنامه وجود ندارد؟ حتی اگر قضیهٔ تورینگ را باور نداشته باشید، فهرست‌بندی دقیقاً چگونه انجام می‌شود؟ آیا حاضرید زندگی خود را براساس اعتقاد به درستی آن در زندگی واقعی به مخاطره اندازید، یا این قضیه یکی از فراورده‌های مصنوعی ریاضیات معاصر است که ربطی به واقعیت ندارد؟ اگر شق دوم را قبول دارید، به نظر من غیرممکن است که بتوانیم جداً اعلام کنیم که موجودات فضایی چنین ریاضیاتی خواهند داشت یا نه. هر استدلالی در بارهٔ توافق ریاضیات ما و آنها باید مبتنی بر این باشد که این دو ریاضیاتْ توضیح‌دهندهٔ دنیای فیزیکی واحدی هستند و نه مبتنی بر تخیلات واهی.

به نظر من چنین می‌رسد که ارجاع به خود در این اثباتها درجاتی دارد چون بعضی از این اثباتها مرا قانع می‌کنند و بعضی نمی‌کنند. آیا ساکنان سیارهٔ دوردست روشی عینی برای تشخیص این درجات مختلف یافته‌اند که مرا از این حالت ابهام ــ که بعضی از این اثباتها برایم قابل قبول است و بعضی نیست بدون آنکه بتوانم مرز دقیقی بین آنها بکشم ــ نجات بخشند؟ به تعارضی برگردیم که من در مورد شمارش‌ناپذیری اعداد محور حقیقی مطرح کردم؛ در اینجا اثبات متعارفی که با آن مأنوس‌اید، فرایند قطری کانتور است. فرض کنید من پیشنهاد کنم که عددهای دودویی را به این ترتیبْ مرتب کنیم: نخست همهٔ عددهای یک رقمی، سپس عددهای دورقمی، بعد سه‌رقمی، و همین‌طور. پس داریم

۰, ۱, ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱, ۰۰۰, ۰۰۱, ۰۱۰, ۰۱۱, ...

شما هر رشته‌ای از رقمهای دودویی که به من بدهید، این رشته در این عالم باید متناهی باشد چون عالم ظاهراً متناهی است و من می‌توانم بگویم آن رشته درکجا واقع است! هر رقم دلخواه از هر درایه در هر رشتهٔ متناهی را که تغییر بدهید، من می‌توانم به شما بگویم که رقم تغییر یافته کجاست! البته این کاری نیست که کانتور کرد! او کل بی‌نهایت را در نظر گرفته و فرض کرده است می‌تواند کاری بکند که هیچ برنامه‌ای نمی‌تواند، در حالی که من به این دیدگاه توسل می‌جویم که هر عدد یک فرایند است و شما [در هر مرحله] فقط رقم دیگری از نمایش آن را می‌توانید به من بدهید نه رشتهٔ مرکب از همهٔ ارقام نمایش نامتناهی آن را. موجودات فضایی در این مورد چه تصمیمی گرفته‌اند؟ راستی، شما دوست دارید چه تصمیمی بگیرید اگر زندگی شما احتمالاً به نتیجهٔ این تصمیم بستگی داشته باشد؟

نمی‌خواهم این فکر را در شما القا کنم که ریاضیات فقط از لحاظ سودمندیش جالب توجه است و جنبهٔ زیبایی‌شناختی آن فایده‌ای ندارد ــ به‌خصوص که در تدریس، زیبایی به ادراک کمک می‌کند. ولی توجه کنید که با دو برابرشدن نتایج ریاضی در تقریباً هر ۱۷ سال، آلان در هر سال بیش از ۱۰۰۰۰۰ قضیهٔ تازه داریم (براساس برونیابی از براوردی که مدتها قبل اولام[1] انجام داده است؛ به کتاب تجربهٔ ریاضی[2] اثر دیویس و هرش مراجعه کنید). رالف بواس[3] در زمانی که ویراستار مث. ریویوز بود اظهار داشته بود که اغلب نتایج نو در مقاله‌های مورد بررسی درست‌اند ولی اثباتهای آنها شاید در نیمی از موارد به‌وضوح غلط‌اند! بعضیها ادعا کرده‌اند که افزایش زیادِ نتایج منتشرشده ناشی از تجدید انتشار نتایج قدیمی به‌صورتی مبدّل است که تشخیص آنها در زبان جدید ریاضی مشکل است. با این حال مجبوریم با این مسأله کنار بیاییم. باز سعی می‌کنم این موضوع را براساس مفهوم ریاضیات از دیدگاه ایده‌آلیسم افلاطونی توضیح دهم.

در دنیای افلاطونی ریاضیات که ظاهراً بیشتر ریاضیدانان به آن معتقدند، ریاضیدانْ قضایا را که گویا از بعد از وقوع مهبانگ وجود داشته‌اند «کشف می‌کند»؛ در مقابلش این دیدگاه قرار دارد که ریاضیدان قضیه را «خلق می‌کند». من وقتی اعتقاداتم را در این باره بدون پیشداوریهای رایج بررسی می‌کنم، می‌بینم که اگر قضیه به نظرم مهم برسد آن را کشف کرده‌ام و اگر پیش‌پاافتاده به نظر برسد آن را خلق کرده‌ام! نظر ساکنان سیارهٔ دوردست در این باره چیست؟ ریاضیدانان زمینی عموماً تشخیص می‌دهند که دیدگاه افلاطونی از لحاظ منطقی قابل دفاع نیست اما به هر حال از آن دست نمی‌کشند مگر وقتی با اصرار از آنان پرسیده شود ریاضیات چیست و در آن وقت به موضع قابل دفاعی می‌روند و ادعا می‌کنند که ریاضیاتْ بازی بیهوده‌ای با نمادهاست و هیچ معنای ذاتی ندارد. به گفتهٔ هیلبرت: «وقتی دقت وارد می‌شود، معنا بیرون می‌رود». ولی به هر حال، ریاضیدانان سیارهٔ دوردست نیز مانند ما نیاز به حمایت مالی بیرونی برای ادامهٔ کار، و درواقع افزایش این حمایت، دارند. احتمال می‌دهم که آنها نیز مشکلات منطقی مشابهی در مورد تعریف ریاضیات و محتوای آن داشته باشند. ریاضیات هم در اینجا و هم در آنجا باید چیزی بیش از عملیات نمادی بی‌معنا باشد و گرنه نمی‌توانستیم از طریق امواج رادیویی که به‌وسیلهٔ معادلات ماکسول پیش‌بینی شده‌اند با آنها ارتباط برقرار کنیم، ولی اینکه ریاضیات به معنایی ایجابی‌تر چیست، گفتنش دشوار است.

در هنگام نوشتن کتابی (*کاربرد روشهای ریاضیات در حساب دیفرانسیل و انتگرال، احتمال، و آمار*) ناچار نوشتم که جوهر ریاضیات عبارت است از توسیع، تعمیم، و تجرید. این سه جنبهٔ ریاضیاتْ مشابه ولی متمایزند، و به نظر من اساس ریاضیات، هم در روی زمین و هم در سیارهٔ دوردست، هستند. اما شاید ریاضیات «فقط تفکر روشن» باشد و نه چیز دیگر.

وقتی ریاضیاتْ درس می‌دهیم، همواره باید به این سرشت دوگانهٔ ریاضیات توجه داشته باشیم: زیبایی انتزاعی آن، و جنبهٔ عملیش که به آن نیاز داریم زیرا به ما کمک می‌کند بر مشکلات عالَمی که در آن هستیم غلبه

1. S. Ulam

2. *The Mathematical Experience*, Davis and Hersh, pp. 20-21.

3. Ralph P. Boas

کنیم. ولی باید از این عقیدهٔ قدیمی یونانی که ریاضیاتْ دانش مطمئن و قطعی است اجتناب کنیم.

هدف این سخنرانی، کندوکاو در این موضوع و برانگیختن حساسیت شما نسبت به آن بود که کدام بخشهای ریاضیات فعلی دلبخواه‌اند و کدام بخشها، به دلیل سودمندی آنها در تبیین دنیای واقعی، الزامی و اجتناب‌ناپذیرند.

همچنین می‌خواهم قویاً پیشنهاد کنم که اگر می‌خواهید در آینده از کمکهای مالی و حمایت دولتی برخوردار شوید، باید به این نوع دوم ریاضیات توجه زیادی مبذول دارید، اما نه اینکه مسألهٔ ظرافت و زیبایی در ریاضیات کلاً نادیده گرفته شود. این استدلال که درگذشتهٔ تحقیق در ریاضیات محض (در مقابل کاربردی)، مقدار زیادی ریاضیات سودمندی پدید آورده است، درست است اما اگر جداً کارهایی را که به دلیل اشتغال ریاضیدانان به ریاضیات محض، به جای ریاضیات سودمند، انجام نشده است تخمین بزنید، این استدلال اعتباری ندارد و ریاضیدانها باید از توسل به آن شرمسار باشند. از آن گذشته، با رشد سرسام‌آور نتایج، بیش از ۱۰۰۰۰۰ قضیهٔ جدید (؟) در هر سال (به همهٔ کتابهایی که در هر ماه فقط در ارتباط با رشتهٔ خودتان بیرون می‌آید نگاه کنید)، احتمال اینکه مطلب تازه‌ای در ریاضیات محض بشناسید که وقتی نیاز دارید در اختیارتان باشد، و نه اینکه لازم باشد در هنگام نیاز ابداع شود، به طرز فزاینده‌ای کم می‌شود؛ در عوض ما در بسیاری اوقات، ریاضیات مورد نیاز را در هنگام نیاز خلق می‌کنیم. خلق دوبارهٔ مفاهیم قدیم روز به روز آسانتر از بازیافتِ آنها از متون موجود می‌شود. حتی امروز، در بسیاری از موارد ابداع دوبارهٔ مفهوم آسانتر از یافتن شرح آن در نوشتگان موجود است — و این خود به افزایش «نتایج جدید» کمک می‌کند!

لازم نیست همهٔ چیزهایی را که من گفتم قبول کنید؛ این حرفها برای برانگیختن و راهنمایی شما بود تا علی‌رغم آنچه کتابها و متخصصان در بارهٔ ریاضیات می‌گویند، اندیشه‌هایتان را در بارهٔ اینکه ریاضیات چیست و در آیندهٔ نزدیک چه باید باشد، بازبینی کنید. این‌گونه بررسی به نظر من خیلی روشنگر و ارزشمند است. من همیشه به دانشجویانم می‌گویم: «در علم و ریاضیات مرجعی نداریم که به آن متوسل شویم بلکه خودتان مسؤول اعتقاداتتان هستید.» بررسی عقایدتان در بارهٔ ریاضیات را به خودتان واگذار می‌کنم.

* * * * * *

- R. W. Hamming, "Mathematics on a distant planet", *Amer. Math. Monthly*, (7) **105** (1998) 640-650.