بیایید فلسفهٔ ریاضی تدریس کنیم!*

روبن هرش -

ترجمهٔ محمد صال مصلحیان و بهزاد بوستانچی

آیا ریاضیات یک رشتهٔ مرموز تخصصی است که هیچ ارتباطی با تاریخ، فلسفه، ادبیات، و هنر ندرد؟ آیا هر موضوع ریاضی، ساختاری ثابت، قائم به ذات، و مصون از تغییرات زمانه است و هیچ معنا یا ارزشی در خارج از خود ندارد؟ آیا اصول موضوع و قوانین استنتاج دستگاههای ریاضی به‌طور قطعی «معین و مقرر شده‌اند» و نباید در معرض ارزیابی، انتقاد، ردشدن، یا تغییر قرار گیرند؟

اکثر خوانندگان به همهٔ این سؤالات قاطعانه پاسخ منفی می‌دهند. بله، ریاضیات منزوی نیست، شاخه‌های گوناگون آن کاملاً در یکدیگر و در کل فرهنگ بشری تنیده شده‌اند. اصول موضوع دستگاههای ریاضی دلخواه نیستند، و از لحاظ تاریخی به این منظور وضع شده‌اند که نظمی ساختاری به یک موضوع خاص ببخشند، و برای هر موضوع ریاضی می‌توان دستگاههای دیگری از اصول موضوع و نظمهای ساختاری دیگری نیز در نظر گرفت.

با این همه، نمی‌توان سبک جزمی و آمرانه‌ای را که بر متون درسی و روشهای تدریس حاکم است، و به‌طور عمیق ریشه دوانده است، انکار کرد. این سبک، باعث شده که هر موضوع ریاضی به صورت توده‌ای از اصول و الگوریتمهای منزوی و بیروح به‌نظر آید. دانشجو پیام کوتاه و بیرحمانه‌ای دریافت می‌کند: «همین است که هست، باید قبول کنی!» بسیاری از صاحبنظران اصرار ورزیده‌اند که باید روشهای تدریسمان را دگرگون کنیم و شیوه‌ای به‌کار ببریم که مسأله‌محور و مبتنی بر سیر تاریخی مسائل و موضوعات و جنبه‌های فرهنگی آنها باشد. با این حال، تدریس به شیوهٔ آمرانه به‌زودی از میان نخواهد رفت.

یکی از گامهایی که می‌توان در جهت رسیدن به مقصود برداشت، ارائهٔ درسی با رهیافت فرهنگی-تاریخی «آزاد» است که نشان دهد ریاضیات از کجا و چگونه به‌وجود آمده است و قضایای امروزی ما جواب چه مسائل مهمی بوده‌اند. چنین درسی را می‌توان «فلسفهٔ ریاضیات» نامید و من به مدت پانزده سال، این درس را در دانشگاه نیومکزیکو ارائه داده‌ام. هدف این مقاله آن است که محتوای چنین درسی را برای مدرسین علاقه‌مندی که می‌خواهند آن را در دانشگاههای خود تدریس کنند، روشن سازد.

در اینجا لازم است چلو یک سوءتفاهم را بگیرم. درس مورد نظر من آن چیزی نیست که امروز تحت عنوان «فلسفهٔ ریاضیات» در برخی از گروههای ریاضی و فلسفه تدریس می‌شود ولی در واقع دربارهٔ «مبانی ریاضیات» است (البته گاه همین عنوان «مبانی ریاضیات» هم به آن اطلاق می‌شود) و در آن، نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، منطق مقدماتی، و مبانی یا ساختار دستگاههای اعداد تدریس می‌شود.

آن درس هرچند نام فلسفه را یدک می‌کشد، و موضوع آن هم ریشه در مفاهیم فلسفی ارائه شده در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم دارد (همان دوره‌ای که ایمره لاکاتوش آن را عصر «مبانی‌گرایی» نامیده است) اما در واقع کلیهٔ مسائل مورد توجه فلسفه را نادیده می‌گیرد. درس فلسفهٔ ریاضیاتی که معمولاً ارائه می‌شود چیزی نیست جز بحث فنی در یک مبحث ریاضی. من مخالفتی با «مبانی» ندارم بلکه آن را موضوع جذاب و مهمی برای پژوهش و نیز برای تدریس در دورهٔ کارشناسی می‌دانم. اما علاوه بر آن، ما نیاز به درسی داریم که واقعاً به فلسفهٔ ریاضیات بپردازد و مبانی فقط بخش مهمی از درس باشد نه کل آن.

در اینجا برخی از خوانندگان ممکن است بپرسند که «اگر منظور شما از فلسفهٔ ریاضیات، 'مبانی' نیست، پس چه چیزی است؟»

یک پاسخ به این سؤال این است که نگاهی به سایر رشته‌های دانشگاهی بیندازید. به‌عنوان مثال، علم در مقابل فلسفهٔ علم، هنر در مقابل فلسفهٔ هنر و حقوق در مقابل فلسفهٔ حقوق. هیچ‌کس معتقد نیست که درس فلسفهٔ علم باید دربارهٔ علم باشد و یا درس فلسفهٔ هنر باید به خود هنر بپردازد. بلکه در این دروس، مسائل مورد نظر دانشمند یا هنرمند از دید فلسفی بررسی می‌شود. اعتقاد بر این است، که چنین درسی برای دانشمند، هنرمند، و یا هر کسی که به علم یا هنر علاقه‌مند است، مفید و جالب خواهد بود.

همین‌طور، درس فلسفهٔ ریاضیات، بحث در یک شاخهٔ فنی ریاضی یا حتی بحث فنی در منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها نیست. در این درس، اگر هم قضیه‌ای اثبات شود، الگوریتمی به‌دست داده شود، و یا فوت و فن حل مسأله آموزش داده شود، به‌طور ضمنی و اتفاقی خواهد بود (همان‌طور که درس فلسفهٔ علم شامل کار آزمایشگاهی و یا درس فلسفهٔ هنر شامل کار در آتلیه نیست). به‌جای اینها، فلسفهٔ ریاضیات به مطرح کردن و بررسی معضلات فلسفی ریاضیات در گذشته و حال می‌پردازد، معضلاتی چون سرشت واقعیت ریاضی، سرشت و مفهوم بینهایت، و رابطهٔ بین ریاضیات و دنیای طبیعی. در این درس، برخی از پاسخهای داده شده به این مسائل و نارساییهای آنها عنوان می‌شود.

چنین درسی تنها برای دانشجویانی قابل فهم خواهد بود که حداقل اطلاعات لازم را از تاریخ ریاضیات داشته باشند. بنابراین در حدی که برای درک فلسفه لازم است، باید در این درس به تاریخ نیز پرداخت. باید از یونانیها (و یا حتی پیش از آنها) آغاز کرد. بدون آشنایی با اقلیدس نمی‌توان درک صحیحی از فلسفهٔ ریاضیات قرون پیشین به‌دست آورد. همچنین تا هندسهٔ اقلیدسی را نشناسیم، نمی‌توانیم دربارهٔ هندسه‌های نااقلیدسی سخن

بگوییم. ماجرای پیدایش هندسهٔ نااقلیدسی، نقشی سرنوشت‌ساز در تاریخ فلسفه، آن هم نه تنها در فلسفهٔ ریاضیات بلکه در معرفت‌شناسی به‌طور کلی، داشته است. اما در درس امروزی «فلسفهٔ ریاضیات» هیچ اشاره‌ای به آن نمی‌شود!

من در درس فلسفهٔ ریاضیِ که تدریس می‌کنم، با تخطی از ترتیب تاریخی برای سهولت تدریس، از هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی به سراغ تولد حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم بینهایت کوچک و نقد اسقف بارکلی از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن و لایب‌نیتس می‌روم. سپس به توضیح مفهوم حد به‌وسیلهٔ ϵ و δ و تشریح شیوه‌های کانتور و ددکیند در ساختن اعداد حقیقی می‌پردازم.

اما مگر اینها ریاضیات نیست؟ پس فلسفه کجاست؟ مضامین فلسفی در این درس به این شکل وارد بحث می‌شوند که مثلاً نحوهٔ ساختن اعداد حقیقی توسط ددکیند و کانتور، در چارچوب تاریخی-فلسفی‌اش و به‌عنوان راهی برای رفع یک ابهام چند صدساله که سابقه‌اش به نیوتن و بارکلی برمی‌گردد، مطرح می‌شود. ما ریاضیات را به‌عنوان بخشی از «تاریخ ایده‌ها و مفاهیم» بررسی می‌کنیم. این توجه به سیر تکامل تاریخی ایده‌ها، محتوای اساسیِ فلسفیِ درس مورد نظر است.

ساختن اعداد حقیقی با استفاده از مجموعه‌های نامتناهی از اعداد گویا، به‌ناگزیر به کارهای کانتور، مجموعه‌های نامتناهی و تناقضات نظریهٔ غیرصوری مجموعه‌ها منتهی می‌شود. در اینجا به قلب درسِ متداول مبانی می‌رسیم. ولی ما عمیقتر از حدی که در درسِ مبانی معمول است، در جنبه‌های فلسفی مبانی کندوکاو می‌کنیم. بنابراین (به اختصار) به کارهای اصلی فرگه و راسل در منطق می‌پردازیم و نیز دیدگاه فلسفی آنها یعنی «منطقگرایی» را تشریح می‌کنیم. سپس به مطالعهٔ کارهای براوئر (یا بیشاپ، و یا هر دو) و به شرح مثالهایی تفضیلی در شهودگرایی می‌پردازیم. پس از آن می‌توانیم دربارهٔ صورتگرایی هیلبرت و شکست آن برنامه به‌وسیلهٔ قضیهٔ ناتمامیت گودل بحث کنیم (برهان کوتاه و بسیار زیبایی از قضیهٔ گودل با استفاده از ماشین تورینگ در مقالهٔ مارتین دیویس با عنوان «محاسبه چیست؟» آمده است). سرانجام، بحث را با ماشینهای تورینگ، محاسبه‌پذیری، و حل‌ناپذیری به پایان می‌آوریم. این مباحث اهمیت فلسفیِ آشکار دارند و ارتباطشان با کامپیوتر نیز مناسبِ روز است.

در این سیر تاریخی، برنامهٔ مبانی‌گرایان که ناشی از پیشفرضهای فلسفی زمانِ خود بوده است، جایگاه مهمی دارد. در میان این پیشفرضها، مهمتر از همه این بود که ریاضیات باید بنیادی تزلزل‌ناپذیر داشته باشد، یعنی دارای نقش ویژه‌ای به‌عنوان ارائه‌کنندهٔ حقایق تردیدناپذیر و قطعیتِ بی‌چون‌وچرا باشد.

سابقهٔ واگذاری چنین نقشی به ریاضیات، به زمانهای بسیار دور بازمی‌گردد؛ به‌کانت، دکارت و اسپینوزا، آگوستینِ قدیس، افلاطون، و سرانجام به فیثاغورسیان. در این سنتِ مورد تکریم، هدف عبارت بود از توجیه مذهب ـ شناخت خدا ـ با استفاده از ریاضیات. عقیده بر این بود ــ و هنوز هم عدهٔ قابل ملاحظه‌ای بر این باورند ــ که ریاضیات، شناختِ تردیدناپذیری از حقایق به دست می‌دهد که مستقل از تجربه و یا حس فیزیکی است. در سراسر تاریخ مسیحیت، عالمان دین و مابعدالطبیعه بر اساس این اعتقاد، ادعا داشتند که انسان می‌تواند در مورد خداوند هم شناختِ تردیدناپذیری به‌دست آورد.

در اواخر قرن نوزدهم، ریاضیات دچار بحران شد. کشف خمهای ناقضِ شهود، مانند خم فضا پرکن پئانو و یا خمِ هیلبرت مشتقپذیر ریمان، نخستین ضربه را بر شهود بصری وارد آورد. سپس پارادوکس راسل و تناقضات دیگر، مبانی نوین [ریاضیات] را که مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها بود، سست کرد. اما چون اعتقاد راسخی وجود داشت که احکام ریاضی باید مطلقاً صحیح باشند، راسل، براوئر و هیلبرت بازسازی مبانی ریاضیات را از نظر فلسفی ضرور دانستند [و به آن پرداختند]. این هدف مشترک بعدها باعث شد که لاکاتوش همهٔ آنها را «مبانی‌گرا» بنامد. از دید امروزی، شهودگرایی براوئر، صورتگرایی هیلبرت، و منطقگرایی راسل در واقع نحله‌های رقیب از یک مکتب هستند (مکتبی که به زوال گراییده است). این نکته، آن زمینهٔ فلسفی است که محتوای درس مبانی را از لحاظ فلسفی جذاب و دلپذیر می‌سازد.

بحث هنگامی جذابتر خواهد شد که دنبالهٔ ماجرا تا عصر حاضر ذکر شود. آخرین مبحث در درس معمولی مبانی، قضیهٔ گودل است که حدود پنجاه سال از عمر آن می‌گذرد. پس از آن چه وقایعی روی داده است؟ در این مدت «مبانی گرایی» به‌عنوان یک برنامهٔ کار فلسفی راکد مانده است، اما «مبانی» به‌عنوان یکی از مباحث تخصصی ریاضیات، رونق یافته است.

البته این بدان معنا نیست که فلسفهٔ ریاضیات با رکود مواجه شده است. گرایشهای نوینی در فلسفهٔ ریاضی در حال پدیدآمدن است که دوران مبانی‌گرایی را پشت سر می‌گذارد. از نشانه‌های این امر، مجموعه مقالاتی است که توماس تیموچکو [۲۹] گرد آورده است. این مجموعه شامل مقالاتی از ۱۶ نویسنده است که هرکدام به طریقی «مبانی‌گرایی» را به مبارزه می‌طلبند یا از آن روی می‌گردانند. این تمایلات در راستای دگرگونیهایی است که در دهه‌های اخیر، تحت تأثیر کارهای کارل پوپر، توماس کون، و عده‌ای دیگر، در فلسفهٔ علم رخ داده است. البته دگرگونیهای مشابه در فلسفهٔ ریاضی هنوز در مرحلهٔ بسیار ابتدایی است و ویژگیهای آن از این قرار است: فلسفهٔ علم (یا ریاضیات) ارتباط تنگاتنگی با تاریخ آن و تجربهٔ عملی دست‌اندرکارانش دارد و مبتنی بر جزمیات پیشینی [مقدم بر تجربه] دراین‌باره که علم (یا ریاضیات) چه باید باشد، نیست. از این دیدگاه، موضوعاتِ [علمی یا ریاضی] در حال تطور و تکامل هستند و نه ثابت و ایستا؛ همچنین در فرهنگ و جامعه تأثیر می‌گذارند و از آنها تأثیر می‌پذیرند؛ و بالاخره، حقایقی به‌دست می‌دهند که مشروط است نه مطلق.

این کلاس، دانشجویانی را از رشته‌های مختلف ـ از سال اول دانشگاه تا دوره‌های پس از کارشناسی ـ به خود جذب می‌کند. بیشتر این دانشجویان از رشته‌های علوم‌تجربی و مهندسی وعدهٔ کمی از آنها از رشتهٔ ریاضی می‌آیند. افرادی هم از رشته‌هایی چون اقتصاد، روانشناسی، فلسفه و معماری، به این درس علاقه نشان می‌دهند. تعداد بسیار کمی از دانشجویان درس را تا پایان ادامه نمی‌دهند، ولی بیشتر آنها این درس را فرصت مغتنمی به‌شمار می‌آورند که طی یک نیمسال دربارهٔ ایده‌ها و مطالب جالب بیندیشند.

خواننده‌ای که به درسهایِ معمولی ریاضیات عادت دارد، ممکن است بپرسد که دانشجو در این درس چه کار عملی انجام می‌دهد، یعنی اگر مسأله به‌عنوان تکلیف داده نمی‌شود و آزمونهای کوتاه برگزار نمی‌گردد، پس چه کاری انجام می‌شود؟ در پاسخ باید گفت که درسهای زیادی در دانشگاهها و کالجها ارائه می‌شود که در آنها دانشجو با تکلیف ریاضی و آزمون کوتاه سروکار ندارد. به‌جای آن، مطالب مختلف را می‌خواند، مقاله می‌نویسد، به صحبتهای کلاس گوش می‌دهد، یادداشت برمی‌دارد، و به اظهار نظر و بحث هم می‌پردازد. در کلاس من، بسیاری از دانشجویان، گاه دربارهٔ مطالبی که

من تعیین می‌کنم و گاه دربارهٔ مطالب مورد علاقهٔ خودشان، (اخیراً، از جمله، دربارهٔ دانش نظری کامپیوتر، مبانی مکانیک کوانتومی، و روانشناسیِ یادگیری ریاضیات) کنفرانس می‌دهند.

این درس، کتاب درسی خاصی ندارد. من به‌جای آن از قطعات و گزیده‌هایی از منابع مختلف استفاده می‌کنم. کتابشناسی توصیفیِ انتهای این مقاله شامل منابع مفیدی برای استفاده در این درس، خواه برای مطالعهٔ آزاد یا تدریس در کلاس است. علاوه بر آن، نمونه‌ای از عناوین مقالات پروژه و نمونه‌ای از سؤالات آزمون پایان ترم این درس را نیز در اینجا آورده‌ام.

نمونهٔ عناوین مقالات پروژه (به هر دانشجو دو یا سه موضوع داده می‌شود)

۱. چنانکه درکلاس نشان داده شد، تعریف هندسه به‌عنوان علم مطالعهٔ (الف) اشیاء فیزیکی، (ب) دستگاههای اصل موضوعی صوری، (ج) اشیاء ایده‌آل غیرواقعی، (د) اندیشه‌هایی که در مغز افراد خاص وجود دارد، نامعقول است؛ لذا باید به این نتیجه رسید که هندسه یک، نظریهٔ ناپایدار و غیرقابل اعتماد است (این دیدگاه را نقد کنید)

۲. آیا ریاضیات کار پرارزشی است؟ اگر هست، چرا؟ و اگر نیست، چرا؟

۳. آیا ریاضیات، همان محاسبات است؟ اگر خیر، تفاوتشان چیست؟ و اگر بله، چرا مردم فکر می‌کنند که اینها متفاوت‌اند؟

۴. آیا بدون استفاده از ریاضیات می‌توانیم جهان فیزیکی را بشناسیم؟ چرا؟

۵. آیا به‌کارگیری ریاضیات در علوم اجتماعی مناسب است یا خیر؟

۶. آیا ریاضیات بخشی از منطق است؟

۷. آیا هندسهٔ اقلیدسی به همان درستیِ هندسهٔ نااقلیدسی است؟ اگر خیر، درستیش کمتر است یا بیشتر؟

۸. به چه دلیل ارشمیدس با نیوتن و گاوس در یک مرتبه قرار می‌گیرد؟

۹. وقتی گفته می‌شود یک، شیء ریاضی وجود دارد، منظور چیست؟ چگونه می‌توانیم به وجود آن پی ببریم؟

۱۰. انتقاد بارکلی از نیوتن چه بود؟ کدام‌یک درست می‌گفتند؟

۱۱. یک مقاله و یا فصلی از یکی ازکتابهای مذکور در فهرست کتابشناسی انتهای این مقاله را بخوانید و خلاصه‌برداری کنید.

نمونهٔ آزمون پایان ترم

از میان موضوعات زیر، دربارهٔ سه و یا چهار موضوع، هرچه می‌دانید بنویسید.

۱. ریاضیات پیش اقلیدسی ، اقلیدسی و ارشمیدسی.

۲. هندسهٔ نااقلیدسی؛ منشأ و ماهیت آن.

۳. اعداد: طبیعی، گویا، حقیقی، و ترامتناهی. نحوهٔ ساختن و خواص آنها.

۴. منطقگرایی، صورتگرایی و شهودگرایی (یا ساختگرایی). یکی یا همه.

۵. منطق صوری، دستگاههای اصل موضوعی، قضیهٔ گودل.

۶. وجود در ریاضیات چه معنایی دارد و چه معنایی باید داشته باشد؟

کتابشناسی توصیفی

1. Asger Aaboe, *Episodes from the Early Histoty of Mathematics*, New Mathematical Library, Mathematical Association of America. 1964.

در این کتاب، شرح تحقیقات باستان‌شناسیِ انجام شده بر روی جداول بابلی که به خط میخی نگاشته شده‌اند، همراه با مثالهایی از عددنویسی در مبنای شصت و روشهایی برای حل معادلات درجهٔ دوم با ضرایب بسیار بزرگ، آمده است. سپس فصلهایی به اقلیدس، ارشمیدس، و بطلمیوس اختصاص یافته است. در این میان، من اغلبِ مبحث مربوط به اصول موضوع و متعارف اقلیدس را با تأکید بر اصل پنجم (توازی) برمی‌گزینم. همچنین، روش مشهور ارشمیدس در تعیین نسبت حجمهای کره، مخروط و هرم نیز مورد استفادهٔ من است. در حقیقت، مؤلف در این کتاب استفادهٔ ارشمیدس از روشهای غیرمعمول (بینهایت، کوچکها، مراکز ثقل) را به‌روشنی شرح داده است.

2. E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

این کتاب مجموعهٔ بینظیری از زندگینامه‌های ریاضیدانان بزرگ است که به شکل داستان نقل می‌شود. دانشجویان مسلماً از این سبک بیان بل لذت خواهند برد و ضمناً می‌آموزند که هیچ دلیلی وجود ندارد که هر مطلب چاپ شده‌ای، حتماً صحیح باشد. [این کتاب را حسن صفاری با عنوان *ریاضیدانان نامی* به فارسی ترجمه، و انتشارات خوارزمی منتشر کرده است ــ م.]

3. Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

مجموعهٔ استانداردی از مقالات مربوط به فلسفهٔ ریاضی است، البته با تأکید بیشتر بر دیدگاه مبانی‌گرایی.

4. E. Bishop. *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.

بخش اعظم کتاب شامل مباحث فنی ریاضی است. اما فصل اول آن، بحث نسبتاً مفصلی از دیدگاه شهودگرایی-ساختارگرایی است.

5. E. Bishop, Aspects of Constructivism, Lecture Notes, New Mexico State University. 1972.

6. C. Boyer, *History of Calculus and Its Conceptual Development*, New York, 1949. Dover reprint, 1959.

این کتاب به‌تنهایی می‌تواند برای یک درس مناسب باشد. هدف اصلی آن، روشن نمودن هرچه بیشتر مفاهیم بینهایت کوچک و حد است. باید این مطالب را قبل از ارائهٔ آنالیز نااستاندارد رابینسن نوشته است، یعنی در زمانی که کنارگذاشتن بینهایت کوچکها را ضروری و مطلوب می‌دانستند.

7. H. Curry, Some aspects of the problem of mathematical rigor, *Bulletin of the American Mathematical Society* **47** (1941) 221-241.

موضع این کتاب، صورتگرایی افراطی است.

8. Tobias Dantzing, *Number, The Language of Science*, Doubleday Anchor Books, Garden City, NY, 1956.

داستان دستگاههای اعداد از طبیعی تا مختلط که به سبک شاعرانه و با ژرف‌نگری فیلسوفانه نوشته شده است. [این کتاب توسط عباس گرمان با عنوان *عدد، زبان علم* به فارسی برگردانده شده و به وسیلهٔ سازمان کتابهای جیبی انتشار یافته است ــ م.]

9. Philip J. Davis and Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.

یکی از کتابهای مورد علاقهٔ من.

10. Philip J. Davis and Reuben Hersh, *Descartes Dream*, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1986.

شرحی از تأثیر ریاضیات و علم کامپیوتر بر جامعهٔ امروزی.

11. A. Dresden, Some philosophical aspects of mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society* **34** (1928) 438-452.

تا حدودی همسو با نظریات براوئر است.

12. Howard Eves and Carrol V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Holt Rinehart and Winston, New York, 1965.

این کتاب را کمابیش می‌توان یک کتاب درسی برای این درس محسوب کرد. نویسندگان، شرحی تاریخی از مفاهیم و نتایج مهم ریاضیات از زمان یونانیان تا هیلبرت و گودل آورده‌اند. کتاب نثری زیبا و تعداد زیادی مسألهٔ جالب دارد که متأسفانه برای دانشجویانی که رشتهٔ اصلی آنها ریاضی یا علوم نیست، بسیار مشکل‌اند. من از فصلهای مربوط به هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی این کتاب استفاده می‌کنم. اما به نظر من، بحث نویسندگان در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضیات قرن نوزدهم و بیستم، نیاز به گسترش دارد.

13. Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic*, Harper and Brothers, Harper Torchbooks, New York, 1960.

منبع دست‌اولی دربارهٔ منطقگرایی، که به سبکی زنده، جدلی، و مطایبه‌آمیز نوشته شده و توجه دانشجویان را جلب می‌کند.

14. K. Gödel, What is Contor continum problem?, *American Mathematical Monthly* **54** (1974) 515-525.

نمونه‌ای از افلاطونگرایی [ترجمهٔ این مقاله با عنوان «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟» در شمارهٔ ۱ سال ۲ی نشر ریاضی آمده است ـ م.]

15. Hans Hahn, The crisis in intuition in J.R. Newman, ed, *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1956-1976.

شرح جذابی دربارهٔ کشف خمهای «نامعقول» فضا پرکن و هیچ‌جا مشتقپذیر، که ضربانی مهلک بر اعتبار شهود بصری در قرن نوزدهم وارد آورد.

16. G.H. Hardy, Mathematical proof, *Mind* **30** (1929) 1-25.

«نمونهٔ» فلسفهٔ ریاضیدان حرفه‌ای.

17. Reuben Hersh, Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, *Advances in Mathematics* **31** (1979) 31-56.

دیدگاه شخصی من در مورد نظریات اشتباه‌آمیز در فلسفهٔ ریاضی و کارهایی که باید برای رفع آنها انجام داد.

18. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford, 1972.

یک گزارش خلاصه‌وار اما عالی، دقیق و قابل اعتماد از تاریخ ریاضیات تا اوایل قرن بیستم. این کتاب، یکی از بهترین کتب تاریخ ریاضیات در زمان حاضر به‌شمار می‌رود.

19. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1983.

این کتاب حاصل باندپروازانه‌ترین تلاش برای مبتنی ساختن فلسفهٔ ریاضی بر تاریخ ریاضیات و کارهای امروزی ریاضیدانان است. به احتمال زیاد، بخشهای پایانی کتاب بیشتر از بخشهای نخستین آن برای دانشجویان قابل درک است زیرا شیوهٔ غالب در آغاز کتاب، از نظر فلسفی، فقیرتر است.

20. S. Korner, *The Philosophy of Mathematics*, Harper Torchbooks, New York, 1962.

فشرده‌ای سودمند از مباحث مربوط به سه مکتب مبانی‌گرایانه (منطقگرایی، صورتگرایی و شهودگرایی) به‌همراه نقدی بر آنها.

21. Imre Lakatos, *Proofs and Refutaions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

نقطهٔ عطفی در فلسفهٔ ریاضیات قرن بیستم. دنیایی از فراست و دانش. در این کتاب ماهیت ریاضیات با استفاده از یک گفتگوی کلاسی در مورد فرمول اویلر $V - E + F = 2$ تشریح می‌شود.

22. Jean Piaget, *Genetic Epistemology*, Columbia University Press, New York, 1970.

پیاژه نه فقط به روانشناسی و آموزش ریاضی، بلکه به فلسفهٔ آن هم می‌پرداخت. اهمیت فلسفی ایده‌های او هنوز هم شناخته نشده است.

23. J. Pierpont, Mathematical rigor, past and present, *Bulletin of the American Mathematical Society* **34** (1928) 13-53.

شرح بحرانها در مبانی ریاضیات، با لحنی مطایبه‌آمیز.

24. M. Polanyi, *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*, University of Chicago Press, Chicago, 1960.

این کتاب بیشتر فلسفهٔ علم است تا فلسفهٔ ریاضیات، اما کتاب جذاب و مهیجی است و هرکس باید آن را بخواند. در مورد ریاضیات، به این حقیقت مهم اشاره می‌کند که هر ایده یا روشی برای اینکه به‌عنوان جزئی از ریاضیات پذیرفته شود باید جالب باشد.

25. G. Pólya, *How to Solve it*, Princeton University Press, Princeton, 1945.

مانند کارهای پیاژه، تحقیقات پولیا نیز در مورد تدریس و آموختن ریاضی، اهمیت فلسفی زیادی دارد که هنوز شناخته نشده است. این کتاب یکی از بهترین آثار فکری قرن بیستم است. [این کتاب توسط احمد آرام با عنوان چگونه مسأله را حل کنیم به فارسی ترجمه شده و انتشارات کیهان آن را منتشر کرده‌است ـ م.]

26. Alfred Renyi, *Dialogues on Mathematics*, Holden Day, San Francisco, 1967.

این گفتگوها را هرکسی می‌تواند بخواند، چرا که در آنها به شکلی ساده و دقیق به سؤالات عامی همچون ریاضیات چیست، ریاضیات کاربردی چیست، و چگونه ریاضیات در علوم به‌کار می‌آید، پاسخ داده شده است. [این کتاب، توسط سعید قهرمانی با عنوان گفت و شنودهایی در ریاضیات به فارسی ترجمه شده و مؤسسهٔ انتشارات خوارزمی آن را منتشر کرده است ـ م.]

27. Rudy Rucker, *Infinity and the Mind*, Birkhäuser, Boston, 1982.

کتابی است سرگرم‌کننده که مضمون آن آمیزه‌ای از منطق، ریاضیات و عرفان است. امتیاز ویژهٔ آن، شرح گفتگوهای مؤلف با گودل است.

28. Lynn Arthur Steen (ed.), *Mathematics Today*, Vintage Books (Random House), New York, 1980.

گردآیه‌ای از مقالاتی که موضوع، سطح، و میزان اصالت آنها بسیار متفاوت است. من همیشه از مقالهٔ مارتین دیویس («محاسبه چیست؟») که در این کتاب آمده، برای تدریس ماشینهای تورینگ و قضیهٔ گودل استفاده می‌کنم.

29. Thomas Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1986.

گزیده‌ای از آثار جدید که بیشترشان سعی دارند فلسفه را بر پایهٔ عمل و تجربهٔ واقعی ریاضیدانان بنا کنند.

30. L.A. White, The locus of mathematical reality, *Philosophy of Science* **14** (1947) 289-303. Reprinted in The World of Mathematics, J.R. Newmain (ed.), Vol 4, Simon and Schuster, New York, 1956, pp. 2348-2364.

بحثی زیبا از یک مردم‌شناس معروف دربارهٔ این دیدگاه که «محدودهٔ واقعیت» در ریاضیات، ریشه در فرهنگ بشری، یعنی آگاهی مشترک جوامع، دارد.

******

• Reuben Hersh, "Let's teach philosophy of mathematics!" *College Math. J.*, (2) **21** (1990) 105-111.

* روبن هرش، دانشگاه نیومکزیکو، آمریکا.