نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، صص ۷ـ۲۰

گرایشهای موجود در فلسفهٔ ریاضیات

حمید وحید*

«بدین ترتیب ما ثابت کرده‌ایم که چیزی وجود ندارد که حاوی همه چیز باشد یا، به تعبیری چشمگیرتر، جهان وجود ندارد.[۱]»

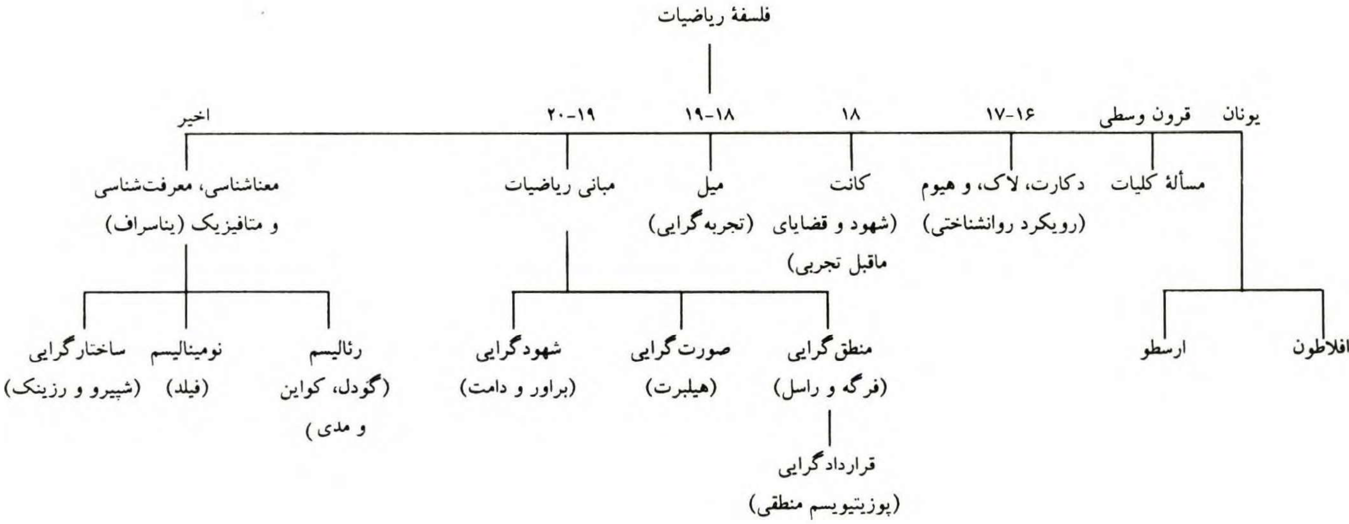
مقدمه

علوم ریاضی از دیرباز قطعی‌ترین و یقینی‌ترین علوم شمرده می‌شدند. در حالی‌که قضایای علوم تجربی همواره در معرض باژگونی قرار داشتند، کسی در این شک نداشت که، مثلاً «۱۲ = ۵ + ۷» یا «مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است». حقایق ریاضی از این نظر در مرتبهٔ بالاتری نسبت به حقایق تجربی قرار داشتند زیرا علاوه بر داشتن عینیت، برخلاف قضایای علوم تجربی، واجد صفت ضرورت نیز شمرده می‌شدند. اما اگر قضایای ریاضی صادق هستند، از چه حقایقی سخن می‌گویند؟ به عبارت دیگر، چه چیز صدق یک قضیهٔ ریاضی را تأمین می‌کند؟ چه چیزی است که مثلاً «۱۲ = ۵ + ۷» را قضیه‌ای صادق می‌سازد؟ نخستین پاسخی که به ذهن متبادر می‌شود این است که بگوییم ریاضیات به مطالعهٔ اعداد می‌پردازد همچنان‌که فیزیک به مطالعهٔ اشیاء می‌پردازد. چنین تصویری از مسألهٔ صدق در ریاضیات را رئالیسم می‌خوانند که با رئالسیم فیزیکی یا عرفی شباهتی تام دارد. بدین ترتیب، بنابر رئالیسم ریاضی، این اعداد، مجموعه‌ها و روابطشان با یکدیگر است که موجبات صدق و کذب قضایای ریاضی را فراهم می‌آورد. ریاضیدانان نیز معمولاً دارای چنین تصوری از مسألهٔ صدق ریاضی هستند و هدف خود را کشف حقایق گوناگون در حوزه‌های مختلف ریاضی می‌دانند.

اما این اعداد و مجموعه‌ها چه نوع موجوداتی هستند و دارای چه خصوصیاتی می‌باشند؟ بنابر نظر مشهورْ آنها موجوداتی مجرد هستند که خارج از قلمرو زمان و مکان قرار دارند. اما به نظر می‌آید که چنین امری معرفت ریاضی را ناممکن می‌سازد زیرا علم ما به حقایق عالم خارج از طریق حواسمان و، به‌طور کلی، تجربهٔ حسی به‌دست می‌آید، در حالی که اعداد و مجموعه‌ها، بنابر طبیعتشان، نمی‌توانند با ما رابطهٔ علّی داشته باشند. بدین ترتیب به نظر می‌آید آنچه برای عینیت حقایق ریاضی ضرورت دارد، یعنی استقلال وجود موضوعات آنها، علم ما به آن حقایق را ناممکن می‌سازد. قائلین به رئالیسم ریاضی می‌باید توضیح دهند که، بنابر مبانی آنها، معرفت ریاضی چگونه ممکن است.

به یک معنا می‌توان تاریخ فلسفهٔ ریاضیات را تاریخ کوششهایی دانست که در پی رفع تنش ناشی از طرح پرسشهای فوق بوده‌اند. این پرسشها اختصاص به ریاضیات نداشته بلکه در هر قلمرو معرفتی مطرح هستند. به‌طور کلی، درکنار هر پرسش متافیزیکی در بارهٔ یک موضوع، خود به خود پرسشی معرفتی نیز در بارهٔ آن مطرح می‌شود. پاسخگویی به یکی از این دو پرسش بدون پرداختن به پرسش دیگر، مانع از ارائهٔ تصویری جامع از موضوع مورد نظر خواهد شد. به‌عنوان مثال، در قلمرو علوم تجربی، گفته می‌شود این یک حقیقت عینی است که خورشید به زمین گرما می‌بخشد. این حقیقت را از آن جهت عینی می‌دانیم که دو جرم سماوی، مستقل از تمایلات، خواسته‌ها، باورها و زبان ما دارای روابط فیزیکی خاصی با یکدیگرند. به تعبیر دیگر این وجود و هویت مستقل موضوعات یک قضیه است که عینیت آن را تضمین می‌کند. به دنبال این پرسش متافیزیکی، اما، پرسشی معرفتی نیز مطرح می‌شود: از کجا می‌دانیم که این اجرام و به‌طور کلی اشیاء عالم خارج وجود دارند؟ این پرسش، سرآغاز معرفت‌شناسی است. یا در زمینهٔ ذهن با این سؤال متافیزیکی روبه‌رو می‌شویم که ذهن چگونه در بدن تأثیر می‌کند (مسألهٔ «ذهن و بدن»). اما درکنار این پرسش متافیزیکی می‌باید به پرسشی معرفتی نیز بپردازیم: ازکجا می‌دانیم اذهان دیگر (بجز ذهن خودمان) وجود دارند (مسألهٔ «دیگر اذهان»). پرسشهای عمده‌ای را که تاریخ فلسفهٔ

1. Halmos, *Naive Set Theory*, pp. 6-7.



ریاضیات را شکل داده‌اند می‌توان به شرح ذیل بیان کرد.

۱. ریاضیات دربارهٔ چیست؟ چه چیز صدق قضایای ریاضی را تأمین می‌کند؟

۲. از کجا می‌دانیم که قضایای ریاضی صادق هستند؟

۳. چرا ریاضیات بر عالم خارج قابل تطبیق است؟

در این نوشتار کوشش خواهد شد تا، با مروری بسیار اجمالی بر سوابق تاریخی بحث، دورنمایی از گرایشهای موجود در دوران اخیر ترسیم گردد. گفتن ندارد که در چنین دورنمایی از جغرافیای بحث بسیاری از جزئیات و دقائق مسائل نادیده گرفته خواهد شد. [۱]

۱. پیشینهٔ تاریخی فلسفهٔ ریاضیات

۱.۱ یونان: افلاطون و ارسطو

افلاطون در درجهٔ اول علاقه‌مند به علم اخلاق بود که آن را عینی[۱] می‌دانست. در عین حال کاملاً واقف بود که تبیین عینی بودن اموری از قبیل «عدالت»، «زیبایی» و امثال آنها چندان ساده نیست. از طرف دیگر ریاضیات موجبات خوش‌بینی او را در تحقق این امر فراهم می‌کرد زیرا، از نظر او، علاوه بر آنکه به اخلاق کاملاً شبیه بود کسی منکر معرفت ریاضی نبود. در مورد ریاضیات، افلاطون ادعا می‌کرد که مفاهیم ریاضی از تجربهٔ حسی اخذ نشده بلکه از بدو تولد با ما هستند زیرا ما، در آنچه او «حیات قبلی» انسانها می‌خواند، دارای نوعی تماس بی‌واسطه با موجودات ریاضی بوده‌ایم. در حیات کنونی، کار ما تنها یادآوری آن آموخته‌های پیشین است. در نگرش افلاطونی به ریاضیات باید عناصر ذیل را از یکدیگر تمییز داد. یکی *هستی‌شناسی افلاطونی* است که بنابر آن موجودات ریاضی مستقل از باورها، زبان و توصیفات ما وجود دارند و دیگر *معرفت‌شناسی افلاطونی* است که علم به این موجودات را ماقبل تجربی می‌داند.

ارسطو، به‌عنوان واکنشی در برابر افلاطون، منکر هر دو عنصر نگرش افلاطونی بود. از نظر او صور افلاطونی تنها در مصادیقشان وجود دارند و این در مورد مفاهیم ریاضی نیز صادق است. بنابراین در ریاضیات ما در واقع دربارهٔ همین عالم فیزیکی خارج است که صحبت می‌کنیم منتها به‌صورتی کلیتر و انتزاعیتر. به‌علاوه، معرفت ریاضی محصول تجربه و استقراء است. (ارسطو هیچ‌گاه توضیح نمی‌دهد که معرفت حاصل از تجربه چگونه می‌توان ضروری باشد.) یکی از دشواریهای عمدهٔ نگرش ارسطویی (و به‌طور کلی رویکردهای غیرافلاطونی) محدود بودن تعداد اشیاء فیزیکی و ذهنی است در حالی که تعداد اعداد نامحدود است. علی‌رغم تفاوتهای آشکار نگرش افلاطونی و ارسطویی شاید تلفیقی از عناصر آن دو ناممکن نباشد. (همچنان‌که خواهیم دید فلسفهٔ ریاضی کواین را می‌توان تلاشی در تلفیق هستی‌شناسی افلاطونی و معرفت‌شناسی ارسطویی دانست.)

۲.۱ قرون وسطی: مسألهٔ کلیات

در قرون وسطی موجودات ریاضی را از سنخ «کلیات»[۱] می‌دانستند اما تصورات متفاوتی از آنها داشتند. رئالیستها از نظری شبیه به افلاطون‌گرایی دفاع می‌کردند در حالی که مفهوم‌گرایان[۲] کلیات را موجودات ذهنی قلمداد می‌کردند و نومینالیستها اساساً منکر آنها و، بالتبع، موجودات مجرد بودند. عصر حاضر شاهد ظهور مجدد گرایشهای نومینالیستی بوده است که، همچنان‌که خواهیم دید، به دو شکل مطرح می‌شوند. یکی *نظریهٔ خطاست* که بنابر آن قضایای ریاضی واقعاً کاذب هستند زیرا موضوع آنها به چیزی اشاره ندارد و دیگری *نظریهٔ تحویلی* است که آنها را تنها در قالب صورتهای تحویلی‌شان می‌پذیرد.

۳.۱ رویکرد روانشناختی: دکارت، لاک و هیوم

دکارت، لاک و هیوم موجودات ریاضی را از سنخ ایده‌ها و مفاهیم ذهنی می‌دانستند اگرچه دربارهٔ نحوه حصولشان آراء متفاوتی داشتند. دکارت این مفاهیم را فطری می‌دانست در حالی که لاک و هیوم آنها را محصول انتزاع از تجربه می‌دانستند. از نظر آنها شناسایی حقایق ریاضی تنها از طریق شناسایی روابط و نسبتهای میان ایده‌ها میسر بود، اگرچه هیچ‌یک دربارهٔ

1. objective

1. universals 2. conceptualists

نحوهٔ شناسایی روابط میان ایده‌ها سخنی به میان نیاورد. در مورد ایرادات واردشده به این نظریه نیز عکس‌العملی نشان داده نشد. یکی از این اشکالات، که ابتدا افلاطون و بعدها فرگه مطرح کرد، شخصی[1] بودن ایده‌ها در برابر عینی بودن اعداد بود. اشکال دیگر مربوط به محدود بودن تعداد ایده‌ها و نامحدود بودن رشتهٔ اعداد بود.

۴.۱ کانت و قضایای ترکیبی ماقبل تجربی

علاقهٔ اصلی کانت به متافیزیک و امکان آن به‌عنوان یک علم ماقبل تجربی بود و ریاضیات برای او، همچون افلاطون، موردی روشنگر در این زمینه به‌شمار می‌رفت. اما او در عین حال معتقد بود که این معرفتِ ماقبل تجربی نیاز به تبیین دارد زیرا حقایق آن از سنخ قضایای ترکیبی هستند و نه تحلیلی. معرفت ریاضی، به‌عنوان یک معرفت ماقبل تجربی، از آن‌جهت ممکن است که در واقع بیانگر نقشی است که ما خود در تفسیر تجاربمان ایفا می‌کنیم. این نظریه ریشه در فلسفهٔ عمومی کانت دارد. از نظر او عالم خارج تنها به دلیل فعالیتهای ذهن است که دارای ساختاری است که عموماً بدان نسبت داده می‌شود (زمانی/مکانی بودن حوادث، ارتباطات علّی آنها، جوهر و عرض بودن موجودات و . . .). اگر فعالیتهای ذهن را نادیده بگیریم هیچ‌یک از این خصوصیات واقعیتی نخواهد داشت. البته این بدان معنا نیست که ذهن در خلأ کار می‌کند بلکه این ساختارها بر تأثیرات حسی ــ که «اشیاء فی‌نفسه» در ما پدید می‌آورند ــ افکنده می‌شوند. بدین ترتیب جهان خارج، از نظر کانت، به لحاظ تجربی واقعی اما از نظر استعلایی[2] ایده‌آل و غیر واقعی است. از نظر او ادراک اشیاء در زمان و مکان شرط لازم ادراک آنها و، به‌طور کلی، داشتن تجربه است. کانت زمان و مکان را صورتهایی شهودی می‌داند که بر تجربه تحمیل می‌شوند. (شهود از نظر کانت شهود به معنای متعارف آن نیست بلکه عبارت است از ادراک اشیاء در حس یا تخیل.) بدین ترتیب ما زمان و مکان را مستقل از تجربه ــ و در نتیجه به‌صورت ماقبل تجربی ــ درک می‌کنیم. از نظر او حساب و هندسه علومی هستند که، به ترتیب، بر شهود ماقبل تجربی ما از زمان و مکان بنا شده‌اند.

۵.۱ میل و تجربه‌گرایی

در برابر رویکرد عقل‌گرایانهٔ کانتی، جان استوارت میل کمر به احیای سنت تجربه‌گرا در تبیین معرفت ریاضی بست. از نظر میل اعداد چیزی جز صفات یا خصوصیات مرکبات فیزیکی[3] نیستند. (مرکب فیزیکی را نباید با مجموعه اشتباه کرد. مرکب فیزیکی یک موجود خاص فیزیکی است که دارای اجزاء منفصل از یکدیگر می‌باشد مانند یک درخت، میز و امثال آنها.) از طرف دیگر معرفت ریاضی، مانند سایر معرفتهای تجربی، جز از طریق استقراء حاصل نمی‌شود و بنابراین ضروری نیز نخواهد بود. هنگامی که پس از تجربه‌های مکرر، مثلاً با سیب، مداد و غیر آنها، دریافتیم که با افزودن پنج سیب به هفت سیب، دوازده سیب خواهیم داشت، نتیجه خواهیم گرفت که «۷ + ۵» برابر ۱۲ خواهد بود. کلیهٔ قضایای ریاضی محصول تجربه و استقراء هستند.

آراء میل به نحو کاملاً مؤثری هدف نقادیهای تیز و تند ریاضیدان و فیلسوف آلمانی، گوتلوب فرگه، در کتاب *مبانی حساب* او ــ که عموماً از آن به‌عنوان مهمترین کتاب در زمینهٔ فلسفهٔ ریاضیات یاد می‌شود ــ قرار گرفت.

1. private 2. transcendental 3. physical aggregates

به برخی از ایرادات فرگه ذیلاً اشاره می‌شود. از نظر فرگه عدد نمی‌تواند صفتی مانند سایر صفات معمولی اشیاء (مثل سرخی) باشد زیرا وقتی، به‌عنوان مثال، می‌گوییم هزار برگ روی درخت قرار دارد چیزی به برگها یا مرکب فیزیکی آن نسبت داده نمی‌شود. برعکس وقتی می‌گوییم برگهای درخت سبز هستند، این صفت به خود برگها تعلق می‌گیرد. دلیل دیگر آن است که اگر مثلاً یک جعبه کفش در برابر ما قرار داده شود و از وزن آن سؤال شود پاسخ ما کاملاً مشخص خواهد بود. اما اگر از عدد آن سؤال شود که چند تا هستند، در جواب خواهیم گفت، چند تا چی؟ چند جفت کفش یا چندتا لنگه کفش؟ به‌علاوه به یک شیءواحد ممکن است اعداد متفاوتی تعلق بگیرد: دو جفت کفش، چهار لنگه کفش، میلیونها اتم و غیر آنها. از طرف دیگر به نظر می‌آید هر امر قابل تصوری قابل شمارش باشد. نه تنها میزها و صندلیها قابل شمارش‌اند بلکه ایده‌ها، مفاهیم، قضایا و حتی خود اعداد نیز می‌توانند شمارش شوند. بنابراین عدد نمی‌تواند یک صفت فیزیکی باشد زیرا به موجودات ذهنی و مجرد ــ که بنابر تعریف فاقد خصوصیات فیزیکی هستند ــ نیز تعلق می‌گیرند. این تفاوتها، به گفتهٔ فرگه، به نحو کاملاً بارزی نقاط ضعف گرایشهای خام تجربه‌گرایانه را برملا می‌کنند.

تصویر مجملی که در این صفحات از گرایشهای غالب فلسفهٔ ریاضیات تا قرن نوزده داده شد، بیانگر وضعیت این بخش از معرفت تا آغاز این قرن است. در ادامهٔ این مقاله به بحث دربارهٔ گرایشهای متأخرتر فلسفهٔ ریاضیات خواهیم پرداخت و برای این منظور از مجادلات مربوط به مبانی ریاضیات آغاز خواهیم کرد که تا مدتها محور اصلی منازعات فلسفی به شمار می‌رفتند.

۲. مبانی ریاضیات

مقدمه

پرسش دربارهٔ مبانی یک قلمرو معرفتی معمولاً به دنبال بروز بحران در آن قلمرو مطرح می‌شود، هنگامی که مشخص می‌شود که هیچ‌یک از راه‌حلهای معمول، چاره‌ساز بحران نیست. در این شرایط ذهن خودبه‌خود متوجه ریشه‌ها و اصولی می‌شود که تا آن زمان مسلم و قطعی انگاشته شده‌اند. دقیقاً همین‌جاست که پرسش دربارهٔ مبادی و مبانی و اعتبار آنها به میان می‌آید. فلسفه نیز خودبه‌خود، به‌عنوان مبحثی که با اساسیترین پرسشها سروکار دارد، درگیر ماجرا می‌شود. به‌عنوان مثال امروزه مکانیک کوانتومی شدیداً دچار بحران است زیرا به‌نظر نمی‌آید تصویر قابل فهمی از آن وجود داشته باشد و به همین دلیل فلسفه نیز خود را درگیر آن کرده است. هفته یا ماهی نیست که مقاله یا کتابی تحت عنوان «فلسفهٔ مکانیک کوانتومی» یا «مبانی مکانیک کوانتومی» چاپ و ارائه نشود. ریاضیات نیز در دورانهایی در چنین وضعیتی به سر می‌برده است.

اولین بحران در ریاضیات با کشف اعداد اصم توسط یونانیان پدید آمد. یونانیان با اعداد گویای مثبت (غیر از صفر) آشنا بودند. بعدها صفر نیز به واسطهٔ فواید عملی آن به رشتهٔ اعداد اضافه شد. اما کشف اعداد اصم، منفی و مانند آنها با منازعات و مجادلات زیادی همراه بود. بحران دوم در ریاضیات مربوط به مبانی متزلزلی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال از دل آنها رشد پیدا کرده بود. اشکال اولیهٔ آن البته (در نظریه‌های نیوتن و لایب‌نیتس) از توفیق چندانی در توجیه روشهای به‌کار گرفته شده برخوردار

نبود به‌خصوص که از مفهوم اعداد بینهایت کوچک نیز سود می‌جست. این مفهوم به سختی از جانب بارکلی مورد انتقاد قرار گرفت. در چنین شرایطی همهٔ ریاضیدانان لزوم وضوح و روشنی بیشتر را احساس می‌کردند. این مهم سرانجام توسط کوشی و وایرشتراس عملی شد که در نهایت به حذف بینهایت کوچکها از ریاضیات منجر گشت.

بدین ترتیب قرن ۱۹ شاهد تزریق دقت و وضوح بیشتر به بدنهٔ آنالیز بود. به‌عنوان واکنشی در برابر کانت، بولتسانو سعی در اجتناب از تمسک به مفهوم شهود در آنالیز نمود. «حسابی شدن» آنالیز منجر به تحلیل ددکیند از اعداد حقیقی برحسب «برشهای ددکیند» گشت. اعداد حقیقی ابتدا برحسب مجموعه‌ها یا رشته‌های اعداد گویا و آنها نیز، به نوبهٔ خود، برحسب مجموعهٔ اعداد طبیعی بازسازی شدند. به‌دنبال همین تحولات بود که کرونکر اظهار کرد که «اعداد طبیعی را خدا آفرید و مابقی کار انسان است». ددکیند همچنین برای اولین بار سیستم اصول موضوعی اعداد طبیعی را ارائه کرد (که اکنون «اصول موضوع پئانو» خوانده می‌شود).

این تحولات همگی به مدد مفهوم «مجموعه» صورت گرفت که نظریهٔ آن توسط کانتور در حال پی‌ریزی بود. اما به زودی معلوم شد که نظریهٔ طبیعی[1] کانتور حاوی تناقض و پارادکس است. کشف پارادکسهای نظریهٔ مجموعه‌ها سومین بحران ریاضیات به‌شمار می‌آید. این کوششها، از طرف دیگر، به ظهور و تولد منطق ریاضی منجر گشت. در حالی‌که بولتسانو آنالیز را از شهودهای کانتی بی‌نیاز کرده بود، چنین کاری برای نظریهٔ اعداد توسط فرگه صورت گرفت. او کوشید نشان دهد که برای اثبات قضایا در نظریهٔ اعداد نیازی به شهودهای کانتی نیست. برای حصول این معنا فرگه بر آن شد تا نشان دهد که چگونه می‌توان مفهوم عدد را برحسب مفاهیم منطقی تعریف کرد و اثباتها را بدون تمسک به شهود عملی نمود. برای این کار نیاز به صوری کردن استدلال و ایجاد یک زبان صوری بود تا بتوان استدلالهای یادشده را با آن بیان نمود. بدین ترتیب، تولد منطق ریاضی مدیون کوششهای مستمر جهت یافتن مبانی مطمئنی برای ریاضیات می‌باشد. در ادامهٔ این بخش به بررسی اجمالی سه مکتب مهم در مبانی ریاضیات، منطق‌گرایی، صورتگرایی و شهودگرایی، خواهیم پرداخت.

۱.۲ منطق‌گرایی

منطق‌گرایی توسط فرگه و راسل پایه‌گذاری شد و بعدها با تغییراتی به خدمت برنامهٔ تحقیقاتی پوزیتیویست‌های منطقی درآمد. فرگه بر آن بود تا نشان دهد که علم حساب، قبل تحویل به منطق است، بدین صورت که موضوع، یعنی اعداد، قابل تعریف برحسب موضوعات منطقی است و قضایایش نیز از منطق قابل استنتاج است. منطق‌گرایان امیدوار بودند که با تحویل ریاضیات به منطق مبنای مطمئنی برای ریاضیات فراهم کنند زیرا در استواری و قطعیت منطق دیگر کسی تردید نداشت. به این ترتیب یکی از اساسیترین پرسشهای فلسفهٔ ریاضیات دربارهٔ طبیعت این علم پاسخ شایسته‌ای می‌یافت. از طرف دیگر از آنجا که امکان حصول معرفت منطقی کمتر مورد مناقشه است، منطق‌گرایان امیدوار بودند مشکل معرفت ریاضی را به‌نحو قابل‌قبولی حل کنند. منطق‌گرایی دو ادعای عمده داشت.

الف) تحویل مفاهیم ریاضی به مفاهیم منطقی: تعریف عدد

1. naive

پیش از فرگه و راسل ریاضیدانان به اجمال نشان داده بودند که کلیهٔ مفاهیم علم حساب قابل تعریف (و تحویل) برحسب اعداد طبیعی هستند. مشکل عمدهٔ استخراج اعداد طبیعی بود و نکته‌ای که فرگه را بر آشفته بود این بود که اکثر تعاریف ارائه شده دربارهٔ اعداد بدون التفات به مسألهٔ روش‌شناختی تعیین معانی الفاظ صورت گرفته بود. رسم این بود که رقم یا نام عددی[1] را از متن و مقامش در جملات ریاضی خارج ساخته، آنگاه از معنای آن سؤال می‌کردند. از نظر او برای تعیین معانی نامهای عددی می‌باید انواع جملات حاوی آنها را در نظر گرفت و نحوه‌های مختلف کاربردشان را از نظر گذراند. فرگه در اینجا اشاره به اصلی دارد که آن را اصل زمینهٔ معنایی[2] می‌خواند. مطابق این اصل هرگز نباید از معنای یک کلمه به‌صورت منفرد و در انزوا سؤال کرد بلکه می‌باید معنای آن را در متن یک قضیه جستجو نمود. تحلیل فرگه از مفهوم عدد از قله‌های رفیع فلسفهٔ ریاضی و منطق محسوب می‌شود.

فرگه نخست معلوم می‌کند که احکام عددی (یعنی جملاتی که اشاره به اعداد دارند) در واقع احکامی دربارهٔ مفاهیم هستند. به تعبیر دیگر عدد اولاً و بالذّات صفت یک مفهوم است. به‌عنوان مثال، با اشاره به دو جفت کفش هم می‌توان گفت که «اینجا دو جفت کفش وجود دارد» و هم «اینجا چهار لنگه کفش وجود دارد». فرق این دو حکم در این است که در یکی حکم عددی به مفهوم «جفت کفش در این مجموعهٔ فیزیکی» و در دیگری به مفهوم «لنگه کفش در این مجموعهٔ فیزیکی» تعلق گرفته است. این مسأله به‌خصوص در مواردی که تعداد شیء مورد نظر صفر است واضحتر است. مانند وقتی‌که می‌گوییم «تعداد ماههای زهره صفر است». در اینجا منظور این نیست که زهره دارای ماهی است که صفت صفر به آن تعلق می‌گیرد بلکه منظور آن است که مفهوم «ماههای زهره» فاقد مصداق است.[۲]

به دنبال بیان این نکته فرگه همچنین ادعا می‌کند که اعداد شیءاند. شیءاز نظر او عبارت است از چیزی که توسط یک نام مفرد[3] به آن اشاره می‌شود. در توجیه این ادعا فرگه به رفتار نحوی و معنایی ارقام و نامهای عددی در جملات اشاره می‌کند. نامهای عددی معمولاً به دو صورت اسم خاص، «پنج عدد اول است»، یا صفت، «حداقل پنج سیب روی میز وجود دارد»، در جملات ظاهر می‌شوند. جملات نوع دوم در واقع قابل بازسازی برحسب جملات نوع اول هستند: «عدد سیبهای روی میز بزرگتر یا مساوی با پنج است». بدین ترتیب نامهای عددی از آنجا که در شرایط و ضوابط نحوی اسامی خاص صدق می‌کنند (با حروف تعریف نامعینی همراه نمی‌شوند، حاوی متغیر آزاد نیستند و به‌صورت محمول ظاهر نمی‌شوند) و به‌خصوص به دلیل آنکه در دو طرف علامت اینهمانی، '$=$'، قرار می‌گیرند ($۶۳ = ۹ \times ۷$) می‌باید از جمله اسامی خاص قلمدادشان کرد. [۳]

حال اگر اعداد شیءاند باید دارای شرایط اینهمانی[4] باشند. این شرایط کدام‌اند؟ در اینجا فرگه به اصلی مهم در متافیزیک اشاره می‌کند که اطلاق شیئیت را مسبوق به داشتن شرایط اینهمانی می‌داند. برای یافتن پاسخ، فرگه مفهوم راستا را مثال می‌زند. چه وقت می‌گوییم دو خط همراستا هستند؟ وقتی‌که با یکدیگر موازی باشند. به‌همین صورت می‌توان شرایط اینهمانی اعداد را بیان کرد.

1. numeral 2. context principle 3. singular term

4. identity conditions

(N) عدد Fها عین عدد Gهاست اگر و فقط اگر بین F و G تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

N به ما کمک می‌کند که چگونه بفهمیم دو عدد یکی هستند اما نمی‌گوید خود عدد چیست. به‌عنوان مثال N نمی‌تواند مشخص کند که ژولیوس سزار یک عدد است یا خیر. (این همان اشکال معروف «ژولیوس سزار» است که فرگه آن را مطرح کرد.) این نکته را بدین صورت نیز می‌توان بیان داشت که N شرط کافی برای عدد خاصی بودن را به ما نمی‌دهد زیرا شرایط اینهمانی عدد Fها و عدد Gها عین شرایط اینهمانی «عدد Fها $+1$» و «عدد Gها $+1$» است.

علی‌رغم این ناتوانی، شناسایی شرایط اینهمانی می‌تواند برای تعریف عدد راهگشا باشد. مثال «راستا» را بار دیگر در نظر بگیریم. a موازی b است اگر و فقط اگر هرچه موازی a است موازی b هم باشد و بالعکس یا، به تعبیر دیگر، مصداق[1] دو مفهوم «موازی با a» و «موازی با b» یکی باشد. پس می‌توان گفت که a با b موازی است اگر و فقط اگر مصداق مفهوم «موازی با a» عین مصداق مفهوم «موازی با b» باشد. از این طریق شروط صدق جملهٔ «راستای a عین راستای b است» به‌دست خواهد آمد. (به عبارت دیگر «موازی بودن» یک رابطهٔ هم‌ارزی است.) به همین سیاق می‌توان در مورد N عمل کرد: F و G تناظر یک‌به‌یک دارند اگر و فقط اگر مصداق «تناظر یک‌به‌یک با F» عین مصداق «تناظر یک‌به‌یک با G» باشد. بدین ترتیب به تعریف دلخواه از اعداد می‌رسیم.

عدد F (عدد متعلق به مفهوم F) $\stackrel{\text{ت}}{=}$ مصداق مفهوم «همقوه با F»

به‌عنوان مثال، عدد متعلق به مفهوم «عقربه‌های ساعت (یعنی دو) عبارت است از مصداق مفهوم «همقوه با مفهوم عقربه‌های ساعت». اما عدد دو را نمی‌توان برحسب مفهوم «عقربه‌های ساعت» تعریف کرد زیرا این مفهوم به منطق تعلق ندارد و به‌طور کلی معلوم نیست که به‌ازاء هر عدد یک مفهوم تجربی یا مشاهداتی وجود داشته باشد. به این دلیل فرگه مفهوم منطقی «نامعادل با خود» یا «غیر خود» را انتخاب می‌کند. صفر عبارت خواهد بود از عدد متعلق به مفهوم «غیر خود» (زیرا این مفهوم فاقد مصداق است). عدد یک عبارت است از عدد متعلق به مفهوم «معادل با صفر» و الخ.

با تعریف اعداد طبیعی می‌توان سایر اعداد را نیز تعریف کرد. برای تعریف اعداد حقیقی فرض می‌کنیم که سلسلهٔ کسرها را در اختیار داریم. در این صورت برخی از اعداد حقیقی ــ اعداد گویا ــ با این کسرها مطابقت پیدا می‌کنند و مابقی ــ اعداد اصم ــ بنابر تعریف ددکیند، با رخنه‌های این کسرها. از آنجا که هیچ کسری به ازاء این برشها وجود ندارد آنها را «رخنه» می‌خوانند و از آنجا که هر برش منحصراً توسط طبقهٔ پایینتر خود مشخص می‌گردد، عدد حقیقی به‌عنوان طبقهٔ پایینتر برش در سلسلهٔ کسرها تعریف می‌گردد. به همین ترتیب می‌توان سایر مفاهیم آنالیز را تعریف کرد.

ب) استنتاج حقایق ریاضی از اصول منطقی

علاوه بر تعریف مفاهیم ریاضی برحسب مفاهیم منطقی، منطق‌گرایان ناچار بودند نشان دهند که حقایق ریاضی نیز از اصول منطقی قابل استخراج هستند. برای حصول این معنا نیاز به منطقی قوی وجود داشت و نظریهٔ مجموعه‌ها

1. extension

را بخشی از منطق قلمداد کردند. این مسأله که آیا نظریهٔ مجموعه‌ها می‌تواند بخشی از منطق باشد بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت. در هرحال اندراج نظریهٔ مجموعه‌ها در منطق منجر به پیدایش دو مشکل عمده برای منطق‌گرایی گشت.

I) احکام وجودی

در طی استخراج حقایق ریاضی از اصول منطقی لازم بود به اصولی تمسک شود که به هیچ روی منطقی نمی‌نمودند.

اصل موضوع بینهایت: به ازاء هر عدد طبیعی، عددی بزرگتر وجود دارد یا، به تعبیری دیگر، یک مجموعهٔ بینهایت وجود دارد: $(\exists x)[0 \in x \wedge (\forall z \in x) z' \in x]$، که در اینجا z' تالی z است یعنی $z' = z \cup \{z\}$.

اصل موضوع انتخاب: به‌ازاء هر مجموعهٔ حاوی مجموعه‌های جدا از هم و غیر تهی، (لااقل) یک مجموعه وجود دارد که با هریک از مجموعه‌ها دقیقاً در یک عضو مشترک است.

اصول فوق هر دو از سنخ احکام وجودی هستند، وجود چیزی را در عالم تصدیق می‌کنند. در حالی‌که تصدیق وجود یا عدم چیزی در عالم در شأن منطق نیست.

راسل بعداً راهی برای رفع این مشکل یافت که قضایای ریاضی را به قضایای شرطی تبدیل می‌کرد به این نحو که مقدم آنها همان اصول موضوع بود و تالی‌شان را قضایای مستخرج از آنها تشکیل می‌داد. این روش بعدها (توسط پاتنم) به روش «اگر-آنگاهی» شهرت یافت. با توجه به این نکته راسل دیگر اصرار نورزید که اصول موضوع بینهایت یا انتخاب از منطق قابل استنتاج‌اند. آنچه می‌توان نتیجه گرفت احکامی شرطی است که مقدم آنها اصول موضوع یادشده و تالی‌شان قضایای مستخرج از آنهاست (که البته این از نتایج «قضیهٔ استنتاج» است). واضح است که تثبیت منطق‌گرایی به‌کمک شرطی ساختن قضایای ریاضی، صدق ریاضی را امری بسیار پیش پاافتاده می‌سازد. آنچه منطق‌گرایی در پی انجامش بود عبارت بود از استخراج قضایا و اصول موضوع ریاضی از اصول منطقی و نه قضایای شرطی حاوی آنها به کمک «قضیهٔ استنتاج». زیرا در این صورت نه تنها ریاضیات از منطق قابل استخراج است بلکه، همچنان‌که کواین اشاره می‌کند، جامعه‌شناسی و اسطوره‌شناسی نیز از منطق قابل استنتاج خواهند بود. در واقع هر علم تجربی را که بتوان اصل موضوعی کرد می‌توان با شرطی ساختن قضایایش، به‌کمک قضیهٔ استنتاج، از منطق نتیجه گرفت. به‌علاوه باید توضیح داد که چرا از میان امکانات متعدد، ریاضیدانان تنها به بررسی یک سیستم اصل موضوعی خاص می‌پردازند و اساساً، با شرطی دانستن قضایای ریاضی، پیشنهاد و ارائهٔ اصول موضوع جدید چه معنایی می‌تواند داشته باشد.

II) پارادُکسهای منطقی

مشکل دوم از این قرار بود که نظریهٔ به‌اصطلاح طبیعی مجموعه‌ها که به گمان منطق‌گرایان منطقاً صحیح بود، نادرست و ناسازگار از آب درآمد. این واقعیت با کشف پارادُکسهای کانتور و راسل برملا گشت. کانتور نشان داد که به‌ازای هر مجموعهٔ x، مجموعهٔ توانی آن، $p(x)$، اعضای بیشتری از x دارد یعنی $x \prec p(x)$. حال اگر مجموعهٔ جامع[1] یعنی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها

1. universal

را در نظر بگیریم، باز به مجموعهٔ بزرگتری می‌رسیم و این پارادُکس‌نما است. پارادُکس راسل پیامد منطقی اصل موضوع انتزاع مجموعه یا اصل شمول[1] بود. براساس این اصل به ازاء هر صفت $\varphi(x)$ مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دارای آن صفت هستند یعنی مجموعهٔ y وجود دارد به نحوی که $x \in y \leftrightarrow \varphi(x)$. برای رسیدن به پارادُکس کافی است صفت $x \notin x$ را در نظر بگیریم. بنابر اصل فوق باید مجموعه‌ای (R) وجود داشته باشد به نحوی که $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. حال کافی است فرض کنیم که $x = R$. در این صورت خواهیم داشت $R \in R \leftrightarrow R \notin R$.

راسل برای حل پارادُکسهای منطقی نظریهٔ سادهٔ انواع را ارائه کرد. به موجب این نظریه اشیاء (موجودات) به انواع و مراتب متفاوت منطقی تقسیم می‌شوند به نحوی که پایینترین مرحلهٔ آنها حاوی کلیهٔ افراد، مرحلهٔ بعدی حاوی کلیهٔ صفات (مجموعه‌های) افراد و مرحلهٔ بالاتر شامل کلیهٔ صفات صفات (مجموعهٔ مجموعه‌های) آنهاست و الی آخر.

. . . .

. . . .

نوع ۲ : $F_2, G_2, H_2, \ldots$

نوع ۱ : $F_1, G_1, H_1, \ldots$

نوع ۰ : $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$

شرط دیگر آن است که حوزهٔ فعالیت متغیرها باید تنها محدود به یک نوع (i) باشد. یعنی $x^i \in y^j$ عبارتی درست‌ساخت است اگر و فقط اگر $j = i + 1$. این بدان معناست که قضایای مربوط به عضویت b در مجموعهٔ c تنها در صورتی معنی دارند که نوع b یک درجه از نوع c پایینتر باشد. بدین ترتیب پارادُکس راسل حتی آغاز هم نمی‌شود، زیرا جملهٔ $x^i \in x^i$ دیگر درست‌ساخت نخواهد بود. مجالی نیز برای پارادُکس کانتور نخواهد بود زیرا اگرچه می‌توان در هر مرحله مجموعهٔ جامعی تشکیل داد لکن دیگر مجموعهٔ جامع همهٔ مجموعه‌ها را نمی‌توانیم تشکیل دهیم. اگر هر نوعْ k عضو داشته باشد نوع بعدی 2^k عضو خواهد داشت، اما این واقعیت به هیچ تناقضی منجر نخواهد گشت.

ولی راسل به نظریهٔ سادهٔ انواع بسنده نکرد زیرا علاوه بر پارادُکسهای منطقی پارادُکسهای به اصطلاح معنایی نیز وجود داشتند (پارادُکس دروغگو، ریچارد و غیر آنها). هدف راسل آن بود که کلیهٔ پارادُکسها را به یکباره حل کند. بدین منظور اصل «دور باطل» را پیشنهاد کرد. بنابر این اصل هیچ کل نمی‌تواند حاوی اجزایی باشد که تنها قابل تعریف برحسب آن کل باشد. او پیدایش همهٔ پارادُکسها را ناشی از نادیده گرفتن این اصل می‌دانست. واضح است که این اصل با معنی یا تعریف الفاظ سروکار دارد نه با صدق و کذب قضایا. از این جهت باید آن را اصلی دربارهٔ معنی‌داری دانست. این مسأله باعث شد که راسل به جای اینکه جملاتی از قبیل «$a \in a$» را صرفاً جملاتی کاذب بداند، بی‌معنی قلمدادشان کند. بدین‌ترتیب راسل «نظریهٔ انشقاقی انواع[2]» را پیشنهاد کرد. در این نظریه صفات متعلق به نوع یک به صفات مرتبهٔ اول، مرتبهٔ دوم و ... تقسیم می‌شوند. صفات مرتبهٔ اول آن دسته از صفات هستند که در تعریف آنها عبارت «کلیهٔ صفات» اخذ نشده باشد. صفات مرتبهٔ دوم حاوی آن دسته از صفات‌اند که در تعریف آنها عبارت «کلیهٔ صفات مرتبهٔ اول» اخذ شده باشد و الی آخر. همان‌طور که نظریهٔ ساده انواع ما را از سخن گفتن دربارهٔ صفات برحذر می‌داشت و تنها اجازهٔ سخن‌گفتن دربارهٔ کلیهٔ افراد یا کلیهٔ صفات افراد را می‌داد، به همین نحو سلسله مراتب یادشده نیز ما را از سخن گفتن دربارهٔ کلیهٔ صفات یک نوع برحذر داشته تنها اجازهٔ سخن گفتن دربارهٔ همهٔ صفات مرتبهٔ اول یا همهٔ صفات مرتبهٔ دوم یک نوع خاص را می‌دهد.

1. comprehension principle 2. ramified type theory

اشکال اساسی نظریهٔ انشقاق انواع آن است که نه تنها مانع استنتاج پارادُکسها می‌شود بلکه استنتاج ریاضیات را نیز ناممکن می‌کند. همچنان‌که دیدیم اعداد حقیقی برحسب صفات کسرها تعریف شدند، اما از آنجا که استعمال عبارت «به ازاء کلیهٔ صفات» بدون اشاره به مرتبه‌ای نامعین ناممکن گردید، عبارت «به ازاء کلیهٔ اعداد حقیقی» تنها می‌تواند به اعداد حقیقی یک مرتبهٔ خاص راجع شود. در نتیجهٔ این «انشقاق» بسیاری از مهمترین تعاریف و قضایای اعداد حقیقی از دست می‌روند. بسیاری از قضایای اساسی نه تنها قابل اثبات که حتی قابل بیان نیز نخواهند بود. به‌علاوه «اصل دور باطل» قرار بود مانعی بر سر راه تعاریف غیرمحمولی باشد، حال آنکه بسیاری از مفاهیم (مانند مفهوم کوچکترین کران بالایی) بدین‌گونه تعریف می‌شوند. برای رفع این مشکل، راسل اصل موضوع «تحویل‌پذیری» را مطرح کرد تا به کمک آن مراتب متفاوت یک نوع را (از برخی جهات) به پایینترین مرتبهٔ آن تحویل کند. بنا بر این اصل موضوع به‌ازاء هر صفت، یک صفت متحدالمصداق[1] در پایینترین مرتبه وجود دارد. یعنی

$$(\forall\varphi)(\exists\psi)(\forall x)(\varphi x \leftrightarrow \psi!x)$$

مخالفین منطقگرایی به‌درستی اظهار داشتند که نمی‌توان این ادعا را به‌عنوان اصلی منطقی پذیرفت و بعدها خود راسل نیز آن را کنار گذاشت. به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که برنامهٔ منطق‌گرایی، در شکل ارائه شده‌اش، توفیق چندانی نداشت.

نتیجه

قبلاً اشاره شد که منطق‌گرایان نظریه مجموعه‌ها را به‌عنوان بخشی از منطق قلمداد می‌کردند. اما این ادعایی است که از جانب بسیاری مورد مناقشه قرار گرفته است. کواین، به‌عنوان مثال، معتقد است که یکی دانستن نظریهٔ مجموعه‌ها با منطق ناشی از مبالغه در شبیه دانستن مفاهیم «عضویت» («$\in$») و «محمول» است. منطق محمولات مرتبهٔ بالاتر، به‌گمان کواین، در واقع همان نظریهٔ مجموعه‌هاست که به واسطهٔ نحوهٔ تقریرش شباهتی ظاهری با منطق پیدا کرده است. از نظر او منطق در حد همان منطق محمولات درجهٔ اول متوقف می‌شود و سورهای مرتبهٔ بالاتر یا «$\in$» را نباید مفاهیمی منطقی قلمداد کرد. مشکل عمدهٔ منطق‌گرایی توضیح این نکته بود که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها به چه معنا حقایقی منطقی‌اند. دیدیم که راسل خود به این امر اذعان داشت که اصول موضوع انتخاب و بینهایت را نمی‌توان از منطق نتیجه گرفت. واقعیت این است که راسل هرگز به اندازهٔ کافی به این نکته توجه نکرد که نظریهٔ مجموعه‌ها منطق محض نبوده بلکه دارای اصول

1. coextensive

موضوع مربوط به وجود مجموعه‌هاست، نکته‌ای که بعدها در نظریهٔ اصل موضوعی تسرملو کاملاً بر آن تصریح شد. حتی در قلمرو معرفت‌شناسی نیز توفیق منطق‌گرایی محدود بود. استخراج قضایای ریاضی از منطق، با جملات پایان‌ناپذیر و طولانی آن، دارای چنان درجه‌ای از پیچیدگی شده بود که با تصور شهودی ما از ریاضیات بسیار بیگانه می‌نمود. در حل مشکل امکان معرفت ریاضی، این گامی به عقب بود نه به جلو. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برنامهٔ منطق‌گرایی در تحقق اهدافش توفیق نیافت. موستوسکی این نکته را چنین بیان می‌کند:

> واقعیت این است که هیچ منطقی که توانایی در برگرفتن کل ریاضیات را داشته باشد وجود نداشت. بدین ترتیب آنچه از این برنامه (منطق‌گرایی) برجای ماند تنها تحویل ریاضیات به نظریهٔ مجموعه‌ها بود. این را به دشواری می‌توان راه‌حل رضایت‌بخشی برای مسألهٔ مبانی ریاضیات دانست زیرا از میان همهٔ نظریه‌های ریاضی، نظریهٔ مجموعه‌ها خود بیش از بقیه به داشتن مبانیی استوار نیازمند است [۴].

۱.۱.۲ قراردادگرایی همچنان‌که دیدیم، برخلاف کانت، فرگه معتقد بود که قضایای ریاضیات (حساب) تحلیلی هستند زیرا از تعاریف و اصول منطقی نتیجه می‌شوند. بدین‌ترتیب با چنین تعریفی از تحلیلی بودن قضایا، دیگر نمی‌شد سؤال کرد که آیا حقایق منطقی نیز تحلیلی هستند یا خیر. (در واقع تصور فرگه از منطق کاملاً افلاطونی بود.) با قبول اصول منطق‌گرایی، پوزیتیویست‌های منطقی کوشیدند تا با توسعهٔ تعریف «تحلیلی‌بودن» حقایق منطقی را، هماهنگ با مفروضات پوزیتیویسم، تحلیلی به شمار آورند. مطابق با این تعریف جدید، قضیهٔ تحلیلی قضیه‌ای است که محصول قراردادهای صریح ما باشد. حقایق منطقی بدین‌ترتیب تحلیلی خواهند بود زیرا، از نظر پوزیتیویست‌ها، اصول موضوع یا قواعد منطقی همگی محصول قراردادهای ما هستند. اما قراردادگرایی، به روایت پوزیتیویستی آن، خیلی زود آماج انتقادات مؤثر منطقدانان قرار گرفت. از جملهٔ این انتقادات یکی این بود که صرف قرارداد لزوماً تضمین‌کنندهٔ صدق و درستی نخواهد بود. مثال معروف پرایور، «tonk»، کاملاً روشنگر این معناست. اگرچه ثابت منطقی «tonk» را می‌توان توسط قواعد استنتاج قراردادی

$$\left(\frac{p}{p\,\mathrm{tonk}\,q},\qquad \frac{p\,\mathrm{tonk}\,q}{q}\right)$$

به زبان منطقی افزود اما این قواعد نمی‌توانند، مانند دیگر قواعد منطقی کلاسیک، حافظ صدق باشند زیرا از این دو قاعده نتیجه خواهد شد که $\frac{p}{q}$. بدین ترتیب هر قضیه‌ای از قضیه‌ای دیگر قابل استخراج خواهد بود (به خصوص به‌ازای هر p، $\neg p$ از p قابل استخراج خواهد بود) و این به ناسازگاری سیستم منجر خواهد گشت. (همین نکته را می‌توان با ترسیم جدول صدق و کذب «tonk» نشان داد.) اشکال مهم دیگر توسط کواین مطرح شد. تعداد حقایق منطقی بینهایت است در حالی که تعداد قراردادهای صریح محدود می‌باشد. بنابراین باید گفت که قضیهٔ تحلیلی قضیه‌ای است که یا قراردادی صریح باشد و یا از قراردادهای صریح قابل استخراج باشد. اما برای استخراج آنها از قراردادهای صریح نیاز به منطق داریم و این مستلزم دور است.

۲.۲ شهودگرایی

مکتب شهودگرایی توسط براور و شاگردان او پایه‌گذاری شد. ادعای عمدهٔ این مکتب آن است که یک مفهوم ریاضی زمانی قابل‌قبول خواهد بود که ریشه و پایه در شهود داشته باشد. این ایده، همچنان‌که دیدیم، به کانت برمی‌گردد که زمان و مکان را صورتهایی شهودی می‌دانست که ذهن بر داده‌های حسی تحمیل می‌کند. از نظر شهودگرایی، ریاضیات کلاسیک دارای دو اشکال عمده است، یکی استفاده از مجموعه‌های بینهایتِ بالفعل و دیگری اصل طردشق ثالث ($p \vee \neg p$). از نظر شهودگرایی چنین نیست که در مورد هر جملهٔ ریاضی (p) بتوان گفت که صادق یا کاذب است زیرا معلوم نیست که به ازاء هر p بتوان اثبات یا ابطالی برای آن یافت. به‌عنوان مثال قضیهٔ ذیل را در نظر بگیرید: رشتهٔ ۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹ جایی در بسط عدد π ظاهر می‌شود. بنابر منطق و ریاضیات کلاسیک، این جمله یا صادق است یا کاذب زیرا این رشته یا در بسط π ظاهر می‌شود و یا نمی‌شود. اما شهودگرا چنین چیزی را منکر می‌گردد. از نظر او تصدیق یک قضیه تنها در صورتی ممکن است که اثباتی برای آن در اختیار باشد و بالعکس تکذیب آن در حالی ممکن است که ابطالی از آن وجود داشته باشد.[۱]

همچنان‌که ملاحظه می‌شود شهودگرایی انگیزه‌ای کاملاً معرفت‌گرایانه دارد و هدف آن دسترس‌پذیر ساختن ریاضیات به لحاظ معرفتی است. شهودگرایی از این نظر با گرایشهای عامتر ایده‌آلیستی و آنتی‌رئالیستی مشابهت دارد. ریاضیات یک فرایند سازنده[۲] است و برخلاف عالم فیزیکی در خارج از ذهن وجود ندارد. به همین دلیل شهودگرایی تعبیرهایی کاملاً معرفتی از صدق و کذب به‌دست می‌دهد. صدق عبارت است از اثبات‌پذیری سازنده و کذب عبارت است از ابطال‌پذیری سازنده. بدین‌ترتیب معناشناسیِ کلاسیک انکار می‌گردد. همچنان‌که ملاحظه می‌شود تعبیر شهودگرایانه از ریاضیات در واقع به بازسازی و تغییر آن منجر می‌شود. با توجه به محدودیتهای فوق نظریهٔ مجموعه‌های کانتور شدیداً دستخوش تحول می‌گردد و آنالیز نیز دگرگون می‌شود. به‌عنوان مثال بعضی نتایج کلاسیک رشته‌های کوشی و برشهای ددکیند (به دلیل اتکایشان به مجموعه‌های بینهایتِ بالفعل) انکار می‌شوند. جبر نیز دستخوش دگرگونی می‌گردد و ... بدین ترتیب ریاضیات شهودگرایانه آنچنان قوی و غنی نخواهد بود که بتواند در خدمت علوم دیگر مانند فیزیک قرار بگیرد.

در زمان حاضر شهودگرایی توسط مایکل دامت[۳] احیا و از آن دفاع شده است. تفاوت عمدهٔ دامت با اسلاف او در این است که استدلالهای او برگرفته از نظریاتش در باب فلسفهٔ زبان و نظریه‌های معنی‌داری است. دامت، به تبع ویتگنشتاین، معنای یک لفظ را منحصر در استعمال و کاربرد آن می‌کند. بدین ترتیب معنی یک لفظ (یا جمله) تنها به دنبال کاربرد آن است که آموخته می‌شود و فهم آن نیز تنها با استعمال آن است که آشکار می‌گردد. از آنجا که کاربرد صحیح جملات ریاضی تنها زمانی‌که تصدیق یا تکذیب می‌شوند امکان‌پذیر است و تصدیق یا تکذیب یک قضیه نیز منوط به وجود اثبات یا ابطالی برای آن است، دامت نتیجه می‌گیرد که تصدیق یک قضیه، و بالنتیجه

۱. از قضا اخیراً در محاسبات ارقام اعشاری π این رشته ظاهر شده است ولی می‌توان احکام مشابه دیگری ارائه کرد.

2. constructive 3. Michael Dumett

فهم آن مسبوق به داشتن اثباتی برای آن است. از اینجا نتیجه می‌شود که نمی‌توان ادعای فهم آن دسته از جملات ریاضی را داشت که روشی برای تعیین صدق وکذبشان وجود ندارد. بدین‌ترتیب، اما، دامت کاربرد و استعمال را تنها منحصر به تصدیقات[1] می‌سازد و اما این نکته از نظر طرفداران منطق کلاسیک مقبول نیست. از نظر آنها «کاربرد» فراتر از تصدیق است. جملات را می‌توان به انحاء متفاوت به‌کار برد. مثلاً وقتی با معنی ثوابت منطقی آشنا می‌شویم آنچه برای فهم آنها اهمیت دارد این است که بدانیم چه قضیه‌ای از دیگری نتیجه می‌شود (مثلاً p از $\neg\neg p$). اگر این را بپذیریم، در آن صورت می‌توان منطق کلاسیک را هم فهمید و هم آن فهم را آشکار کرد. دامت در پاسخ اظهار می‌کند که این امر ما را متعهد به کل‌گرایی[2] می‌کند اما معلوم نیست این نوع از کل‌گرایی فاقد اعتبار باشد [5].

در اینجا لازم است به مفهوم کلیدی شهودگرایی یعنی «اثبات» اشاره‌ای هرچند کوتاه بشود زیرا به هیچ‌وجه مشخص نیست که شهودگرایی بتواند آن را به‌صورتی کاملاً آزادانه به‌کار گیرد. وقتی شهودگرا می‌گوید «اثباتی برای p وجود دارد» یا وقتی در تعیین شروط صدق قضایای شرطی می‌گوید که این قضایا صادق‌اند اگر هر اثباتی از مقدم آن را بتوان به اثباتی از تالی آن تبدیل کرد، چه معنایی از اثبات اراده می‌کند؟ هرچه موردنظر او باشد، شهودگرا ناچار است روی «اثبات» سور بگذارد. این افلاطون‌گرایی دربارهٔ «اثبات» باید به همان اندازه از نظر او مذموم باشد که افلاطون‌گرایی دربارهٔ اعداد.

۳.۲ صورت‌گرایی

در اوایل دههٔ ۱۹۰۰ پارادُکسهای متعددی در منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها کشف شده و از طرف دیگر تحویل ریاضیات به منطق شکست خورده بود. این عقیده در میان ریاضیدانان رواج داشت که ظهور پارادُکسها می‌باید ناشی از اتکای ریاضیات به مجموعه‌های بینهایت بالفعل باشد. از طرف دیگر به نظر می‌آمد که ریاضیات بدون توسل به چنین موجوداتی (مانند مجموعهٔ اعداد طبیعی یا حقیقی) قادر به رشد و فعالیت نیست. در چنین شرایطی هیلبرت کوشید مبنایی برای ریاضیات فراهم کند که فاقد دشواریها وکاستیهای منطق‌گرایی و شهودگرایی باشد. او نمی‌خواست استفاده از مجموعه‌های بینهایت را ممنوع نماید، اما در عین حال احساس می‌کرد که ریاضیات می‌باید مبتنی بر ملاحظات محدودگرایانه[3] باشد. به این منظور مبانی صورت‌گرایانه را برای ریاضیات پیشنهاد کرد. از نظر این مکتب ریاضیات باید از روی روش و نه موضوع آن شناسایی و معرفی شود. موضوعات ریاضی مشخص نیستند و یا اگر هستند طبیعت واقعی آنها مورد توجه نیست.

بنابر صورت‌گرایی، ریاضیات تنها با علائم و سمبلها سروکار دارد. این علائم فاقد معنی هستند و بنابراین جملات ریاضی نه صادق‌اند نه کاذب. پرسشهای ریاضی چیزی بیش از این نیستند که آیا فرمولهایی به‌خصوص (در یک سیستم صوری) قابل استخراج هستند یا خیر. بنابراین اگرچه کتابی درباره نظریهٔ مجموعه‌ها به نظر می‌آید دربارهٔ موجوداتی با اندازه‌های بینهایت به بحث پرداخته باشد، اما می‌توان تمامی کاری را که کتاب انجام می‌دهد تبدیل یک سری از علامات (اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها) به علائمی دیگر (قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها) قلمداد کرد. بدین‌ترتیب هر دو پرسش متافیزیکی و معرفتی فلسفهٔ ریاضیات پاسخی در خورِ خود خواهند یافت.

البته هیلبرت تصدیق می‌کند که استدلالهای متناهی خاصی وجود دارند که از قطعیت کامل برخوردار هستند (مانند احکام اصلی و پایهٔ نظریهٔ مقدماتی اعداد) و هستهٔ مرکزی ریاضیات را تشکیل می‌دهند. اما در مورد آن بخش از ریاضیات که به حوزه‌های نامتناهی می‌پردازد چه باید گفت؟ از آنجا که هیلبرت، برخلاف شهودگرایان، قصد انکار این بخش عظیم از ریاضیات را نداشت، مشکل را به طریق زیر حل کرد. کلیهٔ مفاهیم ترامتناهی ریاضی ساختارهای ایده‌آلی بیش نیستند که ذهن بر آن هسته مرکزی بنا می‌کند. اما این امر باعث تجریدی‌شدن ریاضیات و بروز مشکل ذیل خواهد شد. غیر از در هستهٔ مرکزی، هیچ ضمانتی وجود ندارد که پارادُکسها بار دیگر ظاهر نشوند. چگونه می‌توان این ضمانت را به‌دست آورد؟ هیلبرت اظهار داشت که بخش ایده‌آل را می‌توان آزادانه ساخت مشروط بر اینکه دارای صفت سازگاری باشد. او دو روش برای اثبات سازگاری پیشنهاد کرد:

سازگاری نسبی

در این روش سازگاری یک سیستم را نسبت به سازگاری سیستمی دیگر اثبات می‌کنیم. این امر به کمک یافتن مدلی برای اصول موضوع سیستم مورد نظر عملی می‌شود به نحوی که هریک از آن اصول موضوع به حکمی صحیح دربارهٔ آن مدل مبدل می‌شود. به‌عنوان مثال، سازگاری هندسه‌های غیراقلیدسی (مثلاً هذلولوی) را می‌توان براساس سازگاری هندسهٔ اقلیدسی اثبات نمود. برای این کار مدلی اقلیدسی فراهم می‌کنیم به نحوی که هریک از اصول موضوع هندسهٔ هذلولوی به قضیه‌ای در هندسه اقلیدسی تبدیل گردد. به این ترتیب اصول موضوع هذلولوی تبدیل به قضایایی در هندسهٔ اقلیدسی می‌شوند. اشکال این روش آن است که مسالهٔ سازگاری را یک گام به عقب می‌راند زیرا حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی خود سازگارند یا خیر.

سازگاری مطلق

به‌دنبال این مسأله، هیلبرت روش سازگاری مطلق و نظریهٔ اثبات را پیشنهاد کرد. برای این منظور ابتدا نظریهٔ مورد نظر را صوری می‌کنند به‌نحوی که بتوان اثباتها را به‌دقت تشخیص داد. سپس با تأمل در ساختار اثبات سعی می‌شود تا نشان داده شود که هیچ اثباتی منتهی به تناقض نمی‌گردد. اما چنین استدلالی دربارهٔ اثباتها خود از روشهای ریاضی سود می‌جوید (مثلاً استقراء روی طول اثبات). بنابراین هیلبرت برای پرهیز از دور ناچار شد که روشهای مجاز را در روشهایی که محدودگرا هستند منحصر کند که، از نظر او، با همان هستهٔ مرکزی و حقیقی ریاضیات مطابقت داشت. اما او هیچ‌گاه مفهوم «محدودگرایی» را تعریف نکرد. اثبات سازگاری به‌کمک این روش را «مطلق» می‌خوانند زیرا سازگاری هیچ سیستم دیگری از قبل فرض نمی‌شود.

برنامهٔ هیلبرت

هیلبرت احساس کرد که بدین‌ترتیب خواهد توانست سیستمهای صوری ریاضیی بنا کند که، ۱) تصمیم‌پذیر باشند؛ ۲) تمام باشند؛ ۳) سازگار باشند. این برنامه توسط برخی نتایج محدودکنندهٔ ریاضی که مهمترین آنها قضایای ناتمامیت گودل بود متزلزل گشت. بنابر قضیهٔ اول ناتمامیت گودل هر سیستم صوری (S) که حساب (نظریهٔ مقدماتی اعداد) در آن قابل بیان باشد باید حاوی جمله‌ای (G) باشد به‌طوری که اگر S سازگار باشد، نه G و نه نقیض

1. assertoric uses 2. holism 3. finitary

آن هیچکدام جزء قضایای S نباشند. به تعبیر دیگر G در S تصمیم‌پذیر نیست. قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل سپس اظهار می‌کند که اگر S سازگار باشد، سازگاری آن در S قابل اثبات نخواهد بود. قضایای ناتمامیت گودل برای برنامهٔ هیلبرت همان نقشی را بازی کردند که پارادکس راسل برای منطق‌گرایی فرگه [۶]. البته قضیهٔ اول ناتمامیت چندان مخل برنامهٔ هیلبرت نیست. زیرا هیلبرت صدق را عین اثبات‌پذیری نمی‌دانست و مدعی نبود که هر قضیهٔ ریاضی یا صادق است یا کاذب. بنابراین او می‌توانست وجود قضایای تصمیم‌ناپذیر را در یک سیستم صوری بپذیرد. اما قضیهٔ دوم ناتمامیت تأثیر نامطلوب‌تری بر برنامهٔ هیلبرت دارد. با توجه به این قضیه، سازگاری حساب پئانو در خود این سیستم قابل اثبات نخواهد بود. باید توجه داشت که این نتیجه ایجاب نمی‌کند که هیچ اثبات محدودگرایانه‌ای از سازگاری حساب پئانو امکان ندارد. در واقع مدتی بعد گنتسن اثباتی از سازگاری نظریهٔ مقدماتی اعداد ارائه کرد که (جز استقراء ترامتناهی) تنها از اصول محدودگرا سود جسته بود. در هر حال به نظر می‌آید در غیاب تعریف دقیقتری از اثبات محدودگرایانه نمی‌توان به نحو قاطعی دربارهٔ امکان توفیق یا عدم توفیق برنامهٔ هیلبرت قضاوت کرد. اما صرفنظر از سرنوشت برنامهٔ هیلبرت لازم است ایدهٔ اصلی مکتب صورت‌گرایی را جدا از سایر جنبه‌های آن ملاحظه نمود. ایدهٔ اصلی صورت‌گرایی این است که ریاضیات محض را باید مجموعه‌ای از سیستمهای اصل موضوعی تفسیر ناشده در نظر گرفت که در آن جایی برای کاربرد مفهوم صدق نیست و اگر به آن اشاره‌ای هم می‌کنند منظور تنها بیان این نکته است که چه چیزهایی از اصول موضوع سیستم قابل استخراج‌اند [۷].

پس از نگاهی اجمالی به گرایشهای عمده در مبانی ریاضیات اکنون نوبت آن فرا رسیده است که به ترسیم دورنمایی از تحولات فلسفهٔ ریاضیات در طی چند دههٔ اخیر بپردازیم. برای انجام این کار بی‌فایده نخواهد بود اگر به بررسی این گرایشها در متن و زمینهٔ چند مقالهٔ اثرگذار از پال بناسراف فیلسوف آمریکایی بپردازیم، اگر چه برخی ازین گرایشها، به لحاظ تاریخی، مقدم بر (و مستقل از) آراء بناسراف بر صحنهٔ مجادلات ظاهر شده‌اند.

۳. معناشناسی، معرفت‌شناسی و متافیزیک

مقدمه: بناسراف و مسألهٔ صدق در ریاضیات

در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ دو مقالهٔ اثرگذار از پال بناسراف منتشر شد که برخی از تحولات فلسفی اخیر دربارهٔ طبیعت ریاضیات را می‌توان عکس‌العملهایی در قبال آنها قلمداد کرد. در مقالهٔ اول، «آنچه که اعداد نمی‌توانند باشند»، بناسراف ادعا می‌کند که برخلاف نظریهٔ فرگه اعداد نمی‌توانند شیء [۸] باشند. خلاصهٔ برهان او از این قرار است. اگر اعداد شیءباشند، مثلاً، بنابرنظر منطق‌گرایان، از سنخ مجموعه‌ها، در آن‌صورت باید مجموعه‌هایِ به‌خصوصی باشند. اما مجموعه‌های متفاوتی را می‌توان عینی یا معرف یک عدد خاص دانست. می‌توان، مثلاً با استناد به نظر تسرملو، عدد ۳ را با مجموعهٔ $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ یا، مطابق با رأی فون‌نویمان، آن‌را با مجموعهٔ $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ یکی دانست. در واقع می‌توان از بینهایت ساختار نظریهٔ مجموعه‌ای برای معرفی یک عدد استفاده کرد. از طرف دیگر هیچ راه اصولیی برای ترجیح یک ساختار، به‌عنوان عدد ۳، بر دیگری وجود ندارد. کلیهٔ ساختارها به‌لحاظ ریاضی هم‌طراز و هم‌ارزند. با توجه به این عدم قطعیت، که فقط معرفتی نیست بلکه اولاً و بالذّات یک عدم قطعیت معنایی است، بناسراف نتیجه می‌گیرد که اعداد نمی‌توانند شیءباشند.

مقالهٔ دوم، و مهمتر، بناسراف، «صدق ریاضی»، در سال ۱۹۷۳ منتشر شد و همان دو پرسش اصلی فلسفهٔ ریاضی را در قالبی دقیقتر و منسجمتر مطرح کرد. از نظر او دو نوع انگیزهٔ کاملاً متفاوت معمولاً بر نظریات صدق در ریاضیات اثر گذاشته‌اند. یکی تمایل به ارائهٔ معناشناسی یکنواختی برای کل زبان است به نحوی که معناشناسی جملات ریاضی با معناشناسی سایر جملات زبان هماهنگ باشد و دیگری تمایلی ناشی از این اعتقاد که هر نظریه‌ای دربارهٔ صدق ریاضی می‌باید با معرفت‌شناسی معقولی همراه باشد. می‌توان گفت که کلیهٔ نظریات موجود دربارهٔ صدق ریاضی معمولاً یکی از این‌دو شرط را به نفع دیگری قربانی کرده است. نظریاتی که معناشناسی مشابهی را برای جملات ریاضی و سایر جملات زبان اختیار می‌کنند معمولاً معرفت ریاضی را امری غیرممکن می‌سازند و آن دسته که شروط صدق قابل حصولی را (به لحاظ معرفتی) به جملات ریاضی نسبت می‌دهند، عموماً قادر به توضیح این معنا که به چه دلیل شروط یاد شده شروط صدق آن قضایا هستند نمی‌باشند. به گمان بناسراف، در مورد ریاضیات، تنشی میان بهترین نظریهٔ معناشناسی ما (که معناشناسی تارسکی است) و بهترین نظریهٔ معرفتی (که نظریهٔ علّی علم است) وجود دارد. مطابق معناشناسی تارسکی اگر جمله‌ای صادق باشد آنگاه کلیهٔ نامهای مفرد آن اشاره‌ای خواهند بود (یعنی به چیزی اشاره می‌کنند) و هر متغیری توسط مقادیر خاص ارضا خواهد شد. در این‌صورت با توجه به، مثلاً، صدق قضیه یا جملهٔ «یک عدد اول بعد از ۱۰ وجود دارد» ناچار خواهیم بود موجوداتی را به‌عنوان اعداد در هستی‌شناسی خود منظور کنیم. اما این موجودات، بنابر نظر مشهور، باید مجرد و خارج از ظرف زمان و مکان باشند. اگر چنین چیزی صحیح باشد در آن‌صورت علم ما به این موجودات و خصوصیات آنها، یعنی معرفت ریاضی، ناممکن خواهد گردید زیرا با توجه به بهترین نظریهٔ ما دربارهٔ علم، یعنی نظریهٔ علّی، علم تنها می‌تواند محصول ارتباط علّی فاعل شناسایی با موضوعات خود باشد. این در حالی است که موجودات مجرد، بنابر تعریف، با ما تعامل علّی نمی‌توانند داشته باشند. (نظریهٔ علّی علم مدتهاست که اعتبار خود را از دست داده است اما می‌توان اشکال بناسراف را مستقل از اعتبار نظریهٔ معرفتی خاص مطرح کرد. [۹])

مشکل اشاره[1]

با توجه به نظریه‌های اخیر در زمینهٔ مکانیزم اشاره، مشابه این اشکال معرفتی در خصوص نحوهٔ اشاره به اعداد نیز مطرح شده است. در اینجا مسأله عبارت است از اینکه یک اسم چگونه به مسمای خود راجع می‌شود یعنی چگونه می‌شود که ما با به‌کاربردن یک اسم موفق می‌شویم دربارهٔ شیئی معین و خاص سخن بگوییم. بنابر نظر فرگه هر اسمی با وصفهای معینی همراه است (که یا معنی آن‌را به‌دست می‌دهند و یا مصداقش را معین می‌کنند) و تنها شیءخاصی در آن وصفها صدق می‌کند. اما کریپکی[2] نشان داده است که علم به وصفهای معینی برای اشاره به شیئی خاص نه لازم است و نه کافی. مطابق نظریهٔ او دلیل توفیق ما در اشاره به افراد از طریق استعمال اسامی آنها این است که ما در طول یک سلسلهٔ علّی-تاریخی قرارگرفته‌ایم که اسم

1. reference 2. S. Kripke

مذکور در طی آن دست‌به‌دست گشته تا سرانجام به‌دست ما رسیده است. این سلسله در شروع خود با شخص یا اشخاصی آغاز می‌شود که در مراسم نامگذاری اولیهٔ فرد مذکور حضور داشته‌اند. حال اگر نظریهٔ علّی‌ـتاریخی کریپکی را بپذیریم در آن‌صورت در توضیح اینکه چگونه می‌توان به اعداد اشاره کرد و دربارهٔشان سخن گفت دچار اشکال خواهیم شد زیرا اعداد و مجموعه‌ها، به‌دلیل تجردشان، نمی‌توانند با ما ارتباط علّی داشته باشند. با توجه به پرسشهایی که ذکر آنها در این مقدمه آمد، اکنون به بیان برخی از واکنشهای مطرح شده در قبال آنها می‌پردازیم. مهمترین گرایش جاری در فلسفهٔ ریاضیات را می‌توان در سه رویکرد رئالیستی، نومینالیستی و ساختارگرایی خلاصه کرد.

۱.۳ رئالیسم

رئالیستها جملات ریاضی را نیز مشمول معناشناسی استاندارد تارسکی می‌دانند و بنابراین می‌کوشند تا راه‌حلی برای مشکل معرفتی ناشی از آن ارائه نمایند. حداقل سه نوع راه‌حل مهم را می‌توان در این خصوص ذکر کرد.

۱.۱.۳ گودل و ادراک موجودات ریاضی. از نظر گودل علی‌رغم دسترس‌ناپذیر بودن موجودات ریاضی در تجربهٔ حسی، به‌نظر می‌آید که ما بالاخره آنها را به‌نحوی ادراک می‌کنیم. این از آنجا معلوم می‌شود که، مثلاً، هنگامی که در اطراف نظریهٔ مجموعه‌ها تأمل می‌کنیم به‌نظر می‌آید که اصول موضوع آن «درستی و صدق خود را بر ما تحمیل می‌کنند». بنابراین آنچه گودل برای حل مشکل معرفتی رئالیسم ریاضی پیشنهاد می‌کند، مفروض گرفتنِ قوه‌ای ادراکی (شهود ریاضی) است که ما را به‌نحوی به تعامل علّی با موجودات مجرد ریاضی وادارد. اشکال عمدهٔ این «راه‌حل» آن است که سخن از «تحمیل صدق اصول موضوع بر ما» مجاز و استعاره‌ای بیش نیست. باید توضیح داده شود که ارتباط با این موجودات دقیقاً چگونه حاصل می‌شود و از چه مکانیزمی برخوردار است.

۲.۱.۳ کواین و اجتناب‌ناپذیر بودن ریاضیات. کواین با مشکلات معرفتی اعداد و مجموعه‌ها آشناست، اما نظریهٔ افلاطون‌گرایی را همچنان تنها نظریهٔ قابل‌قبول دربارهٔ ریاضیات می‌داند. در عین حال او معتقد است که حصول معرفت ریاضی نیازی به ارتباط علّی با موجودات ریاضی ندارد. معرفت ریاضی، به گمان او، به همان طریق حاصل می‌شود که معرفت علمی. نظریهٔ او در خصوص حصول معرفت ریاضی نظریه‌ای کل‌گرا[1]ست و از دو مقدمه تشکیل می‌شود. مقدمهٔ اول همان تز معروف دوهم‌ـکواین[2] است که به موجب آن هیچ فرضیهٔ علمی به‌صورت منفرد و جداگانه تحت آزمایش واقع نمی‌شود. مقدمهٔ دوم عبارت است از تز «اجتناب‌ناپذیر بودن ریاضیات» که بنابر آن، صرف‌نظر از مرحله‌ای مقدماتی، نمی‌توان بدون استفاده از ریاضیات به بررسیهای علمی پرداخت. علوم طبیعی جز با تمسک به ریاضیات قادر به ارائهٔ تبیینهای عمیق نمی‌باشند. از این دو مقدمه نتیجه می‌شود که با تأیید نظریه‌های علمی توسط صحت پیش‌بینی‌هایشان، ریاضیات نیز ــ که بخشی از پیکرهٔ آن نظریه‌ها را تشکیل می‌دهد ــ تأیید می‌گردد. (باید توجه داشت که کل‌گرایی مورد نظرِ (و نیاز) کواین کل‌گرایی معنایی (که به موجب

1. holistic 2. Duhem-Quine thesis

آن واحد معنا کل زبان است) نمی‌باشد بلکه منظور او کل‌گرایی تأییدی (یا معرفتی[1]) است که به موجب آن نظریه‌های علمی همواره به منزلهٔ یک کل تحت آزمون و بررسی قرار می‌گیرند.)

استدلال کواین در واقع نوعی از «استنتاج بر اساس بهترین تبیین» است که شالودهٔ معرفت تجربی ما را تشکیل می‌دهد. بنابر این نوع استدلال، اگر حکم یا ادعایی نقشی غیرقابل انکار در تبیین مشاهدات ما داشته باشد در آن‌صورت، صرف‌نظر از آنکه حکم مشاهداتی باشد یا از موجودات مشاهده‌ناپذیر سخن بگوید، اعتقاد ما به آن مجاز خواهد بود. نظریهٔ کواین، همچنان‌که خواهیم دید، موضوع بسیاری از مباحثات منطقی و فلسفی قرار گرفته و از آن انتقادات فراوانی شده است. یکی از اشکالاتی که به‌خصوص در سالهای اخیر مورد توجه قرارگرفته است منسوب است به الیوت سوبر [۱۰]. از نظر سوبر ریاضیات نه تنها، به‌نحوی غیرقابل اجتناب، در نظریه‌های خوب و صحیح فیزیک ظاهر می‌شود بلکه در نظریه‌های بد و نادرست فیزیکی نیز حضور پیدا می‌کند. (به‌عنوان مثال قانونی را در نظر بگیرید که نیروی جاذبه را با عکس مکعب فاصله مرتبط می‌کند.) در این‌صورت آیا با عدم تأیید این قبیل نظریه‌ها توسط تجربه، باید ریاضیات را نیز تکذیب شده دانست؟ آیا صحیحتر نیست که گفته شود شواهد تجربی سبب افزایش یا کاهش احتمال صدق اصول ریاضی نمی‌گردند زیرا این اصول در کلیهٔ فرضیات رقیب به یکسان ظاهر می‌شوند؟ بنابراین معرفت ریاضی را به‌دشواری می‌توان از سنخ معرفتهای علمی قلمداد کرد به‌خصوص که هنگام برخورد با مشاهدات تجربی، برخلاف نظریه‌های علمی، مورد تجدیدنظر قرار نگرفته بلکه نظریهٔ ریاضی کاملاً متفاوتی به‌خدمت گرفته می‌شود (مانند مورد هندسهٔ اقلیدسی).

۳.۱.۳ مَدی و افلاطون‌گرایی فیزیکالیستی. جدیدترین نوع افلاطون‌گرایی نظریه‌ای است که پنلوپ مدی در سالهای اخیر از آن دفاع کرده است. او با قراردادن اعداد و مجموعه‌ها در سلسلهٔ علل می‌کوشد تا روایتی فیزیکالیستی از افلاطون‌گرایی ارائه کند. ابتدا باید توجه داشت که ارضای شرط معناشناختیِ بناسراف، مسبوق و منوط به صحت و درستی افلاطون‌گرایی استاندارد، یعنی مجرد و غیرمادی دانستن موجودات ریاضی، نیست. تا زمانی که موجودات و اشیائی در دامنهٔ مدل برای صادق‌کردن فرمولها فرض می‌شوند، شرایط تحقق معناشناسی تارسکی فراهم است. نحوهٔ وجود این موجودات و اشیاء برای منظورهای معناشناختی اهمیتی ندارد. مدی با ردّ رویکردهای روانشناختی مدعی می‌شود که این موجودات، موجوداتی فیزیکی هستند. از نظر او مجموعه‌ها بیرون از ظرف زمان و مکان قرار ندارند. مجموعهٔ تخم‌مرغهای یک کارتن دارای مکان است و دقیقاً همانجایی وجود دارد که مرکب فیزیکی تخم‌مرغها قرار دارد. او همچنین ادعا می‌کند که مغز ما، از لحاظ نورولوژیک، دارای یک «مجموعه‌یاب» است و دقیقاً به‌همین دلیل است که ما موفق به ادراک یک مجموعه می‌شویم.

آیا ادعای مدی همان نظر میل است که اعداد و مجموعه‌ها را از سنخ مرکبات فیزیکی می‌دانست؟ پاسخ او منفی است. وی، با اشاره به دلایل فرگه علیه میل، تصدیق می‌کند که مجموعه را نمی‌توان با مرکب فیزیکی یکی دانست و اضافه می‌کند که اگر این دو را یکی بدانیم دیگر قادر به تفکیک مجموعهٔ تخم‌مرغهای یک کارتن و مجموعهٔ مجموعهٔ آن تخم‌مرغها

1. conformational (epistemic)

نخواهیم بود و، در نتیجه، ساختن سلسله‌مراتب مجموعه‌ها امکان‌پذیر نخواهد بود. بنابراین، از نظر مدی، علی‌رغم آنکه، به‌عنوان مثال، مجموعهٔ یک سیب و مرکب فیزیکی آن سیب از مادهٔ واحدی ساخته شده‌اند و زمان و مکان واحدی را اشغال می‌کنند با یکدیگر فرق دارند زیرا از ساختارهای متفاوتی برخوردارند. (با توجه به خصوصیات فیزیکی این مجموعه‌ها مدی اصرار دارد که آنها را همچنان مجرد بخواند.) افلاطون‌گرایی فیزیکالیستی مدی دارای لوازم و تبعاتی است که پذیرششان چندان آسان نیست. ذیلاً به برخی از آنها اشاره می‌شود.

۱. بنابر نظریهٔ مدی، به‌عنوان مثال، غیر از مدادی که روی این میز است، منفردهٔ[1] آن، {مداد}، نیز روی میز است و همچنین {{مداد}} . . . بدین‌ترتیب ما تعداد بینهایت شیء خواهیم داشت که در زمان و مکان واحدی قرار دارند.

۲. این منفرده همان لحظه‌ای پا به عرصهٔ وجود می‌گذارد که خود مداد. از طرف دیگر دارای خصوصیات آن مداد نیز هست. می‌شود آن‌را جابه‌جا کرد، حرکت داد و الی آخر. از آنجا که ما جز آن مداد چیز دیگری در جایش روی میز نمی‌بینیم، پس {مداد}، با توجه به تمایزش با مداد، از چه شکل و شمایلی برخوردار است؟ و اگر همان شکل و شمایل مداد را دارد پس تفاوتشان از کجا ناشی می‌شود؟ آیا {مداد} مانند مداد جرم هم دارد؟ اینها پرسشهایی است که پاسخ آنها چندان آسان نیست.

۳. اگر قبول کنیم که مجموعه‌ها همانجایی هستند که اعضایشان قرار دارند، در آن‌صورت دربارهٔ مجموعهٔ تهی چه می‌باید گفت؟ با انکار این مجموعه، مدی خودبه‌خود باید نظریه‌های استاندارد مجموعه‌ها، مانند ZF، را انکار کند و نظریهٔ مجموعه‌های جدیدی بسازد که فاقد مجموعهٔ تهی باشد. او سعی می‌کند این‌کار را به کمک مجموعه‌های ناخالص (مجموعه‌هایی که لااقل یک غیرمجموعه در بستار تراگذر[2] خود دارند) انجام دهد.

۴. اگر مجموعه‌ها با مرکبات فیزیکی فرق دارند، در آن‌صورت چگونه می‌توان تفاوت ساختاری آنها را ادراک کرد؟ اگر هر دوی اینها از یک ماده ساخته شده‌اند باید تأثیر واحدی روی شبکیه بگذارند. پس چگونه است که ما می‌توانیم هم مرکب فیزیکی را ادراک کنیم و هم‌مجموعهٔ مربوطه را؟ مدی در پاسخ اظهار می‌کند که موردِ مجموعه/مرکب فیزیکی شبیه موردِ تصویرهای مبهمی (مانند تصویر خرگوش/مرغابی) است که به دو شکل متفاوت قابل ادراک‌اند. او این تمثیل را با تبیین علمی نیز همراه می‌کند: هرگاه ما شیئی از نوع x را شناسایی می‌کنیم، بدان دلیل است که ساختارهای سلولی x در مغز ما فعال می‌شوند. این ساختارها در نتیجهٔ ادراک مکرر اشیاء در مغز ما پدید می‌آیند. ادعای مدی آن است که ادراک یک مجموعه یا مرکب فیزیکی در لحظه‌ای خاص بستگی به آن دارد که در آن لحظه، کدام ساختار سلولی فعال شده باشد. اما هیچ‌یک از این پاسخها قانع‌کننده نیست. تصویرهای مبهم چارهٔ مشکل نیستند زیرا در این موارد تصاویر دیده شده، تصاویر یک شکل‌اند در حالی‌که در مورد مجموعه/مرکب فیزیکی ما واقعاً با دو شیء‌طرف هستیم. تمسک به ساختارهای سلولی نیز بی‌مورد است زیرا این ساختارها تنها پس از ادراک مکرر اشیاء است که حاصل می‌شوند در حالی‌که سخن دقیقاً در همین نکته است که یک مجموعه چگونه ادراک می‌شود.

1. singlton 2. transitive closure

۲.۳ فیلد و نومینالیسم

نومینالیسم، به‌معنای امروزیتر آن، عبارت است از نظریه‌ای که به‌موجب آن هیچ موجود مجردی وجود ندارد. در زمان حاضر این نظریه توسط هارتری فیلد در یک سری از مقالات و کتابها مطرح و از آن دفاع شده است. نومینالیسم فیلد عکس‌العمل مستقیمی در برابر افلاطون‌گرایی کواین است. او ابتدا اظهار می‌کند که پذیرش معناشناسی تارسکی برای جملات ریاضی تنها زمانی منجر به پذیرش وجود موجودات ریاضی می‌گردد که آن قضایا صادق باشند. اما چرا باید صدق قضایای ریاضی را پذیرفت؟ یکی از این دلایل همان استدلال کواین است که به دلیل درگیری ریاضیات در نظریه‌های علمی و به‌دنبال تأیید تجربی آن نظریه‌ها، ریاضیات نیز مشمول تأیید قرار می‌گیرد. فیلد این استدلال را رد می‌کند. و ادعا می‌کند برای اینکه ریاضیات مفید و قابل استفاده باشد لازم نیست که حتماً صادق باشد. از نظر او قضایای ریاضی همگی کاذب‌اند زیرا موجودات ریاضیْ تخیلاتی بیش نیستند. «۱۲ = ۵ + ۷» به همان نحو و به همان اندازه صادق است که جملهٔ «شرلوک هلمز در خیابان بیکر در لندن زندگی می‌کرد». (این همان «نظریهٔ خطا»ست که جان مکی[1] برای اولین بار آن را در مورد قضایای اخلاقی مطرح کرد.)

توضیح فیلد برای این ادعا که مفیدبودن ریاضیات مسبوق به صدق آن نیست متکی به قضیهٔ «توسیع محافظه‌کارانه» است. به موجب این قضیه (C) هر نتیجهٔ نومینالیستی که بتوان از یک نظریهٔ نومینالیستی به‌کمک ریاضیات (ZF) اخذ کرد، بدون کمک آن نیز قابل اخذ است. یعنی اگر داشته باشیم که «اگر $N + \mathrm{ZF} \vdash S$ آنگاه $N \vdash S$» در آن صورت $(N + \mathrm{ZF})$ توسیع محافظه‌کارانهٔ N خواهد بود. اما اگر قرار باشد از این قضیه در مورد مسألهٔ اجتناب‌ناپذیربودن ریاضیات کمکی گرفته شود، لازم است که ابتدا نظریه‌های علمی را به‌صورت $(N + \mathrm{ZF})$ بازسازی کرد. فیلد این کار را در مورد نظریهٔ گرانش نیوتن PNP (یعنی صورت افلاطون‌گرایانهٔ فیزیک نیوتنی) انجام می‌دهد. در صورت نومینالیستی فیزیک نیوتنی (NNP) به‌جای اعداد و توابع از نقاط زمان‐مکان و حوزه‌های چنین نقاطی استفاده می‌شود. بدین ترتیب سورهای مرتبهٔ اول روی چنین نقاطی و سورهای مرتبهٔ دوم روی حوزه‌های آن نقاط تغییر می‌کنند. فیلد این نقاط را مانند اتمها و ملکولها، فیزیکی می‌داند. حال با تمسک به (C) او ادعا می‌کند (PNP) توسیع محافظه‌کارانهٔ (NNP) است.

نومینالیسم فیلد هم به دلیل فنی و هم به دلیل فلسفی در معرض انتقادات بسیار قرار گرفته است که به برخی از آنها اشاره می‌شود.

۱. آیا واقعاً نقاط زمان‐مکان را می‌توان موجودات فیزیکی و هم‌ارز الکترون و پروتون دانست؟ آنها از نظر کارکرد بیش از آن اندازه به اعداد شبیه هستند که بتوان آنها را موجوداتی متفاوت دانست به‌خصوص که، برخلاف موجودات نظری علوم تجربی، برای تبیین مشاهدات فرض نشده‌اند.

۲. فیلد برای توجیه نظریهٔ ابزارانگارانهٔ خود از ریاضیات نه تنها می‌باید مفید بودن ریاضیات در علوم تجربی را تبیین کند بلکه باید همچنین توضیح دهد که چرا ریاضیات تا این حد در منطق مورد استفاده قرار می‌گیرد. او در طی توضیحات خود از قضایای منطق ریاضی (تمام‌بودن منطق محمولات درجهٔ اول و قضایای ناتمامیت گودل)، نظریهٔ مدلها و اثبات کمک می‌گیرد که در همهٔ آنها از ریاضیات استفاده شده است.

1. John Mackie

۳. فیلد در اثبات قضیهٔ توسیع محافظه‌کارانه به نظریهٔ مجموعه‌ها تمسک می‌کند و در توجیه این اقدام می‌گوید که این امر بر اعتبار ادعای او که ریاضیات را قابل اجتناب می‌داند خدشه‌ای وارد نمی‌سازد، بلکه فقط نشان می‌دهد که افلاطون‌گرایی موضع پایداری نیست زیرا اجتناب‌پذیر بودنش از خودش نتیجه می‌شود. اما این سخن فقط وقتی صحیح است که از (C) تنها برای ابطال استدلال افلاطون‌گرایی استفاده شود در حالی‌که فیلد از آن برای تبیین مفیدبودن ریاضیات افلاطون‌گرایانه استفاده می‌کند. پرسش این است که چگونه می‌توان تبیینی را تصدیق یا باور کرد در حالی‌که معتقدیم بخش عمدهٔ آن نادرست است.

۴. فیلد از چارچوب منطق مرتبهٔ دوم در برنامه‌اش سود می‌جوید. اما برای این کار او ناچار است تفسیر کلاسیک از سورهای مرتبهٔ دوم را (که روی مجموعه‌ها یا صفات تغییر می‌کنند) انکار نماید.

۵. اخیراً فیلد اظهار داشته است که اعداد، اشیائی مجردند که تنها برحسب اتفاق در این عالم موجود نیستند اما در جهانهای ممکن دیگر وجود دارند. آنچه او را به ایراد چنین سخنی واداشته به‌نظر می‌آید این باشد که او در اثبات (C) از مفهوم «لازمهٔ منطقی» استفاده می‌کند که برخلاف سنت شایع، مفهومی در نظریهٔ مدلها نیست بلکه در منطق موجهات است. بنابراین او ناچار است برای اینکه ببیند p از q نتیجه می‌شود یا خیر، جهان ممکنی را تصور کند که p در آن صادق است. هنگامی‌که سخن از لوازم نظریات علمی که حاوی نظریه‌های ریاضی هستند در میان است، باید جهانهایی را در نظر گرفت که دعاوی ریاضی در آنها صادق‌اند. در چنین جهانهایی اعداد وجود دارند. به‌واسطهٔ چنین ملاحظاتی است که فیلد وجود اعداد را ممکن می‌داند. اما معلوم نیست که چگونه می‌توان برای موجودات مجرد (که به فرض وجود ضروری هستند) وجود امکانی قائل شد.

۶. از آنجا که از نظر فیلد حقایق ریاضی وجود ندارند، معرفت ریاضی باید از سنخ معرفت منطقی باشد، یعنی علم به اینکه چه احکام ریاضیی از کدام احکام ریاضی دیگری به لحاظ منطقی قابل نتیجه‌گیری‌اند. این موضع تا حدود زیادی شبیه به رویکرد «اگر-آنگاهی» است که ذکر آن گذشت.

۳.۳ ساختارگرایی

جدیدترین گرایشی که در فلسفهٔ ریاضی مطرح شده و به‌دلیل تازگیْ همهٔ ابعاد آن هنوز شناخته نشده، ساختارگرایی است که واکنش مستقیمی است در برابر مقالهٔ بناسراف، «آنچه اعداد نمی‌توانند باشند». همچنان‌که دیدیم بناسراف استدلال می‌کند که هیچ‌یک از اشیاء یا موجودات نظریهٔ مجموعه‌ای را نمی‌توان با اعداد یکی دانست زیرا علی‌الاصول هیچ راهی برای انتخاب میان آنها وجود ندارد. در همین مقاله، که در عین حال نطفهٔ اولیهٔ ساختارگرایی در آن منعقد می‌شود، وی اظهار می‌کند که راه‌حل معما در آن است که اساساً آن دسته از خصوصیات اعداد را که ناشی از حضورشان در یک توالی نیست فاقد اهمیت بدانیم. عدد سه بودن، به‌گفتهٔ او، چیزی است نه بیشتر و نه کمتر از ادامهٔ ۱ و ۲ بودن و قبل از ۴ و ۵ قرار گرفتن، بنابراین باید گفت که موضوع علم حسابْ اعداد نبوده بلکه ساختارهایی هستند که ما به‌الاشتراک کلیهٔ توالیها می‌باشند [۱۱].

مشکل عمدهٔ ساختارگرایی توضیح طبیعت ساختارهاست. تصور معمول از یک ساختار یک تصور نظریهٔ مدلی است که بنابر آن یک ساختار دامنه‌ای از اشیاء است همراه با توابع و نسبتهایی که روی آن تعریف می‌شوند. این در واقع مفهومی نظریهٔ مجموعه‌ای از ساختار است. اما از نظر ساختارگرایان، نظریهٔ مجموعه‌ها نظریه‌ای مانند سایر نظریه‌های ریاضی است و مجموعه‌ها نیز اشیائی ریاضی مانند اعدادند. بنابراین برای بیان نظریهٔ ساختارگرایی احتیاج به مفهومی از ساختار است که عاری از خصوصیاتی باشد که این نظریه نادرست می‌پندارد. از جانب دیگر معلوم نیست ساختارگرایی از نظر حل مشکل معرفتی ریاضیات گامی به جلو باشد زیرا ساختاری که کلیهٔ توالیها در آن شریک‌اند در هر حال ساختار انتزاعی است [۱۲].

کلام آخر

همچنان‌که اشاره شد هدف این مقاله تنها ترسیم دورنمایی از مباحث مربوط به پرسشهای متافیزیکی و معرفتی در فلسفهٔ ریاضیات بوده و بنابراین از پرداختن به پرسشهای دیگر خودداری شده است. یکی از مباحث اساسی که در طی این بحث کاملاً نادیده انگاشته شد مربوط می‌شود به پرسش هرمنوتیکیِ تبیین فعالیت ریاضیدانان و ارائهٔ تفسیری از تحول فکر ریاضی، پرسشی که دستمایهٔ یکی از اثرگذارترین آثار فلسفهٔ ریاضیات معاصر، یعنی کتاب *اثباتها و ابطالهای* لاکاتوش، بوده است. در هر حال تا جایی که به بحثهای متافیزیکی و معرفت‌شناسی ریاضیات مربوط می‌شود می‌توان ادعا کرد که، همچنان‌که همین گشت‌وگذار کوتاه در جغرافیای بحث به‌خوبی نشان می‌دهد، پرسشهایی که این مقاله با آنها آغاز کرد همچنان با ما هستند و بعید می‌نماید که در آینده نیز پاسخهایی درخور بیابند. صرف‌نظر از پیچیدگیهای معمول مباحث فلسفی که به‌صورت طبیعی مانع از حل قطعی آنها می‌شود، مسائل فلسفهٔ ریاضیات، به‌طور اخص، با عمیقترین مؤلفه‌های معرفتی، متافیزیکی و معنایی تفکر بشری سروکار دارند. تا زمانی که سؤالات بسیاری در قلمروهای معرفت‌شناسی و متافیزیک پاسخهایی قابل قبول نیابند، انتظار یافتن راه‌حل برای مسائل فلسفهٔ ریاضیات و اینکه ریاضیات چیست نامعقول و دور از واقع خواهد بود. چیزی که تنها می‌توان بدان امیدوار بود آن است که در طی این فرایند حداقل دریابیم که ریاضیات چه چیزی نیست و یا، به‌صورتی خوش‌بینانه‌تر، چه چیزی نمی‌تواند باشد.

توضیح و سپاسگزاری

متن حاضر از سخنرانی نگارنده در سمینار یکروزهٔ فلسفهٔ ریاضیات (۷۷/۱۲/۱۳) در مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات تهیه گردیده و سعی شده لحن محاوره‌ای آن محفوظ بماند. در اینجا لازم است از راهنماییها و تشویقهای آقای دکتر شهشهانی تشکر کنم. این مقاله، با توجه به شرایط تحریر آن، به هیچ‌وجه ادعای جامعیت، حتی به‌معنای نسبی آن، را نداشته و نمی‌تواند داشته باشد.

یادداشتها

۱. برای اطلاع از برخی مسائل مربوط به پرسش سوم (که مورد توجه این مقاله نخواهد بود) رجوع کنید به مقالهٔ

M. Steiner (1989), "The application of mathematics to natural science", *Journal of Philosophy*, **86**.

۲. در اینجا فرگه به شباهت مهمی با مفهوم وجود اشاره می‌کند. وجود نیز، از نظر فرگه، صفت یا یک محمول نیست. وقتی می‌گوییم «خدا وجود دارد»، وجود صفتی از صفات خدا قلمداد نمی‌شود بلکه به مفهوم خدا تعلق می‌گیرد. با تصدیق قضیهٔ مذکور می‌خواهیم بگوییم که مفهوم خدا تهی یا فاقد مصداق نیست. وجود از نظر فرگه یک سوریا مفهوم مرتبهٔ دوم است.

۳. به نظر می‌آید میان دو ادعای اخیر تعارضی وجود داشته باشد. اگر عدد صفت یک مفهوم است چگونه می‌تواند شیء باشد؟ اما در واقع تعارضی وجود ندارد. در احکام عددی، اعداد تنها به‌عنوان بخشی از محمول ظاهر می‌شوند نه خود محمول. مثلاً وقتی می‌گوییم «پنج نفر به کره ماه رفته‌اند» منظورمان این است که «پنج نفر وجود دارند که به کرهٔ ماه رفته‌اند». در اینجا مفهوم مرتبهٔ بالاتر «پنج نفر وجود دارند» بر مفهوم «افرادی که به ماه رفته‌اند» حمل شده است. «پنج» در اینجا بخشی از محمول است نه کل محمول.

۴. رجوع کنید به

A. Mostowski (1966), *Thirty Years of Foundational Studies*, Blackwell.

۵. گفتن ندارد که موضع دامت بسیار ظریفتر و دقیقتر از آن است که در طی یک پاراگراف به آن پرداخته شود. برای تفصیل بیشتر رجوع کنید به منابع مربوطه.

۶. قضایای ناتمامیت گودل، شهودگرایی را نیز در وضعیت نامطلوبی قرار می‌دهد. اگر قرار باشد، بنا به نظر شهودگرایان، مفهوم صدق برحسب اثبات‌پذیری تعریف شود، مفهوم اثبات نمی‌تواند همان مفهوم اثبات در یک سیستم صوری باشد زیرا جملات گودلی دقیقاً جملاتی هستند که صادق‌اند اما قابل اثبات در سیستم صوری نیستند. بنابراین، شهودگرا ناچار است به مفهوم کاملاً مبهم اثباتی که از نظر شهودی قابل‌قبول باشد تمسک کند.

۷. فرگه که خود اولین نمونه‌های یک سیستم صوری را ارائه کرده بود به‌شدت با ادعای صورت‌گرایان مبنی بر بی‌محتوا بودن پرسشهای ریاضی مخالفت می‌ورزید. از نظر او حتی پس از صوری‌سازی یک سیستم ریاضی باز هم می‌توان پرسشهای معنی‌داری *دربارهٔ* سیستم مطرح کرد مانند اینکه آیا سیستم سازگار است، تمام است و امثال آنها. این پرسشها و پاسخهای آنها همگی بامعنا خواهند بود.

۸. تعریف شیء یکی از مسائل غامض متافیزیکی است و دو پاسخ عمده دربارهٔ آن مطرح شده است. یکی پاسخی معناشناختی است (منسوب به فرگه و کواین) که شیء را چیزی می‌داند که موضوع اشارهٔ یک نام مفرد قرار گرفته یا ارزش ممکن یک متغیر پابند باشد. پاسخ دوم یک پاسخ متافیزیکی است که شیء را چیزی می‌داند که دارای شرایط اینهمانی معین باشد. این دو تعریف لزوماً از مصادیق واحدی برخوردار نیستند.

۹. رجوع کنید به

H. Field (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Blackwell.

۱۰.

E. Sober (1993), "Mathematics and indispensability", *Philosophical Reviews*, **102**.

۱۱. ساختارگرایان ادعا می‌کنند که زمانی/مکانی بودن یک صفت یا خصوصیت ساختاری نیست. اما چرا؟ با توجه به صفات ساختاری اعداد می‌توانیم ثابت کنیم که، مثلاً بینهایت عدد اول وجود دارد. از طرف دیگر چون تعداد موجودات فیزیکی بینهایت نیست، نتیجه می‌شود که اعداد موجوداتی غیرفیزیکی و مجرد یعنی بیرون از ظرف زمان و مکان‌اند. بدین‌ترتیب این صفت از صفات ساختاری نتیجه می‌شود. آیا این امر آن را ساختاری نمی‌سازد؟

۱۲. جرولد کتس در کتاب اخیر خود و در رد برهان بناسراف، اظهار داشته است که، بنابر تصور شهودی ما، اعداد چیزهایی نیستند که دارای عضو باشند و بنابراین به‌راحتی می‌توان یکی‌بودن آنها را با مجموعه‌ها مردود دانست. اعداد از نظر او موجوداتی غیرقابل تحویل به مجموعه‌ها یا چیزهای دیگر هستند و برهان بناسراف اساساً موضوعیت ندارد. اما این استدلال خیلی سریع است. ما از پاتنم و کریپکی آموخته‌ایم که یک صفت ممکن است دارای خصوصیاتی باشد که در مفهوم مربوطه منعکس نیست. به‌عنوان مثال مفهوم حرکت به ما نمی‌گوید که پای انرژی جنبشی در کار است. بدین‌صورت صفت عددبودن ممکن است خصوصیاتی داشته باشد که در مفهومی که از آن داریم منعکس نشده باشد. بنابراین، این ادعا که اعداد چیزهایی هستند که فاقد عضوند ممکن است تنها بیانگر فهم ما از عدد باشد و نه واقعیت عدد.

مراجع منتخب

مجموعه‌های مفید

J. van Heijenoort (ed.) (1967), *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic*, Harward U. Press.

P. Benacerraf & H. Putnam (eds.) (1983), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge U. Press.

W. D. Hart (ed.) (1996), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford U. Press.

افلاطون و ارسطو

Phaedo, 72e-77d.

Meno, 80d-86b.

J. Lear (1982), "Aristotle's philosophy of mathematics", *Philosophical Reviews*, **91**, 161-192.

کلیات: رئالیسم، مفهوم‌گرایی، نومینالیسم

B. Russell (1912), *Problems of Philosophy*, Oxford U. Press.

دکارت، لاک، هیوم

Hume, *Enquiry Concerning Human Understanding*, sec 20.

کانت

P. Kitcher (1975), "Kant and the foundations of mathematics", *Philosophyical Reviews*, **84**, 23-50.

میل

G. Frege (1950), *Foundations of Arithmetic*, English translation, J. L. Austin, Blackwell.

منطق‌گرایی

B. Russell (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin.

H. Putnam, "The thesis that Mathematics is logic", reprinted in Putnam's *Philosophical papers*, vol I, Cambridge. U. Press, pp. 12-20.

قراردادگرایی

A. Ayer (1963), *Language, Truth, and Logic*, ch. 4, this chapter is reprinted in B & P, *op. cit.*

W. Quine (1936), "Truth by convention" reprinted in B & P, *op. cit.* pp. 329-354.

شهودگرایی

L. E. J. Brouwer, "Intuitionism and formalism" in B & P, *op. cit.* pp. 77-89.

[ترجمهٔ فارسی با عنوان «شهودگرایی و صورتگرایی» در *نشر ریاضی*، سال ۹، شمارهٔ ۱، صص ۳۰-۳۵.]

M. Dummett (1977), *Elements of Intuitionism*, Oxford U. Press.

صورتگرایی

D. Hilbert, "On the infinite" in B & P, *op. cit.* pp. 183-201.

M. Detlefsen (1986), *Hilbert's Program*, Dordrecht.

رئالیسم

K. Gödel, "What is Cantor's continuum problem" reprinted in B & P, *op. cit.* pp. 470-485.

[ترجمهٔ فارسی با عنوان «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟» در *نشر ریاضی*، سال ۲، شمارهٔ ۱، صص ۴۶ـ۵۴.]

P. Benacerraf (1973), "Mathematical truth", reprinted in B & P and in Hart, *op. cit.*

[ترجمهٔ فارسی با عنوان «صدق ریاضی» در *نشر ریاضی*، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص ۳۳ـ۴۰.]

H. Putnam (1972), *Philosophy of Logic*, Allen and Unwin.

P. Maddy (1993), *Realism in Mathematics*, Oxford U. Press.

W. Quine (1951), "Two dogmas of empricism", *Philosophical Reviews*, **60**.

نومینالیسم

H. Field (1980). *Science Without Numbers*, Blackwell.

J. Burgess and G. Rosen (1997), *A Subject With No Object*, Oxford U. Press.

ساختارگرایی

P. Benacerraf (1965), "What numbers could not be", reprinted in B & P, *op. cit.* pp. 272-294.

S. Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics* Oxford U. Press.

C. Parsons (1990), "The structuralist view of mathematical objects", reprinted in Hart, *op. cit.* pp. 329-354.

* * * * * *

* حمید وحید، پژوهشگاه دانشهای بنیادی

h-vahid@ipm.ac.ir