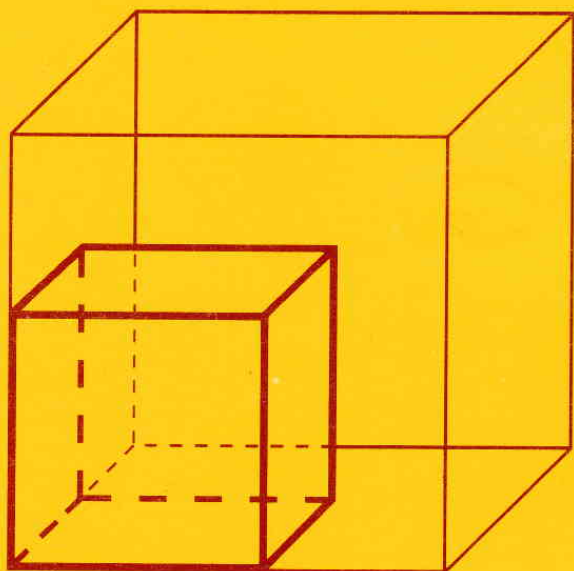


ب.ل. وان در وارن

تاریخ جبر



از خوارزمی تا امی نوتر



ترجمه

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

دکتر علیرضا جمالی

ب.ل. وان در واردن

تاریخ جبر

از خوارزمی تا امی نوتر

ترجمه

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

دکتر علیرضا جمالی

*A History of Algebra,
From al-Khwārizmī to Emmy Noether*
B.L. van der Waerden (1903 - 1996)
Springer - Verlag, 1985

شابک: ۳ - ۰۲۳ - ۴۸۶ - ۹۶۴
ISBN: 964 - 486 - 023 - 3



انتشارات مبتکران

(شماره پروانه نشر: ۱۶۷)

تهران، انتهای خیابان طالقانی، کوچه طباطبایی مقدم، شماره ۳۹، طبقه اول، کد پستی ۱۵۶۱۹
تلفن ۷۶۲۸۲۳ دورنویس ۷۶۷۵۶۴

نام کتاب	: تاریخ جبر، از خوارزمی تا امی نوتر
مؤلف	: ب. ل. لیندرت وان در واردن
مترجمان	: دکتر محمد قاسم وحیدی اصل، دکتر علیرضا جمالی
ویراستار	: دکتر محمدهادی شفیعیها
چاپ اول	: زمستان ۱۳۷۶، تهران
تیراژ	: ۳۰۰۰ جلد
حروفچینی	: مبتکران
لیتوگرافی	: صبا
چاپ	: کوروش
قیمت	۱۲۰۰ تومان

حقوق چاپ و نشر محفوظ و مخصوص ناشر است.

فهرست مطالب

قسمت اول. معادله‌های جبری

فصل ۱. سه مؤلف اسلامی	۳
بخش یکم. خوارزمی	۳
۱. شخصیت و آثارش	۳
۲. جبر و مقابله	۴
۳. دربارهٔ مساحی	۶
۴. دربارهٔ تقویم یهود	۸
۵. باب الوصایا	۹
۶. حل معادلهٔ درجه دوم	۹
۷. جغرافیا	۱۱
۸. دربارهٔ ارقام هندی	۱۱
۹. جدولهای نجومی	۱۲
۱۰. سند هند	۱۳
۱۱. روش ایرانیان	۱۳
۱۲. منابع خوارزمی	۱۶
بخش دوم. ثابت بن قره	۱۹
صائبیان	۱۹
زندگی ثابت بن قره	۲۰
دربارهٔ حرکت فلک هشتم	۲۱
تحقیق هندسی صحت حل معادلات درجهٔ دوم	۲۲
دربارهٔ اعداد متحاب	۲۶
بخش سوم. عمر خیام	۳۱
جبر عمر خیام	۳۱

۳۸	عمر خیام و نسبتها
۴۲	فصل ۲. جبر در ایتالیا
۴۲	بخش یکم. از لئوناردوی پیسایی تا لوکا پاچولی
۴۲	ارتباط بین داد و ستد و تمدن در ایتالیای سده‌های میانه
۴۳	زندگی و آثار فیبوناتچی
۴۶	۱. «لیبر آباکی»
۵۱	۲. پراکتیکا گئومتریا
۵۳	۳. کتاب «فلوس»
۵۳	۴. نامه به تنودورس
۵۴	۵. لیبر کوادراتوروم
۵۶	سه حسابدان فلورانسی
۵۶	۱. استاد بنه‌دو
۵۸	۲. استاد بیادجو
۵۸	۳. آتونو ماتسینگی
۶۰	دو دست‌نوشته مجهول‌المؤلف
۶۲	لوکا پاچولی
۶۳	بخش دوم. استاد داری پیسایی
۷۰	بخش سوم. حل معادله‌های درجه سوم و چهارم
۷۱	شیبونه دل فرو
۷۴	تارتاگلیا و کاردانو
۷۶	لودوویکو فراری
۸۰	رافائل بومبلی
۸۵	فصل ۳. از ویت تا دکارت
۸۵	فرانسوا ویت
۹۲	سیمون استوین
۹۴	پی‌یر دو فرما
۹۹	رنه دکارت
۱۰۴	فصل ۴. پیشگامان گالوا
۱۰۴	ورینگ

۱۰۵.....	واندرموند
۱۰۸.....	لاگرانژ
۱۱۱.....	مالفاتی
۱۱۴.....	روفینی
۱۱۶.....	کوشی
۱۱۷.....	آبل
۱۲۲.....	فصل ۵. کارل فریدریش گاوس
۱۲۲.....	معادله دایره‌بری
۱۲۹.....	قضیه اساسی
۱۳۰.....	اولین برهان
۱۳۳.....	برهان دوم
۱۳۵.....	برهان سوم
۱۴۰.....	فصل ۶. اواریست گالوا
۱۴۰.....	آثار علمی گالوا
۱۴۲.....	دوئل
۱۴۳.....	یادداشت ۱۸۳۱
۱۴۹.....	هیأت‌های گالوا
۱۵۱.....	انتشار مقاله‌های گالوا
۱۵۲.....	ارمیت، پوییزو، و سره
۱۵۵.....	انریکو بتی
۱۵۷.....	دومین مقاله منتشره از گالوا پس از مرگ او
۱۵۸.....	فصل ۷. کامیل ژوردان
۱۵۸.....	رسالة ژوردان
۱۶۰.....	درباره گروه‌های حرکتها
۱۶۳.....	درباره هم‌نهشتیها
۱۶۳.....	گروه‌های جانشینی تریا و اولیه
۱۶۴.....	سری ترکیبی
۱۶۵.....	جانشینیهای خطی
۱۶۸.....	شرح نظریه گالوا از سوی ژوردان

۱۶۹	کاربردهای هندسی
۱۷۳	مماس دوگانه یک خم مسطح درجه چهارم
۱۷۷	کاربرد نظریه گالوا در تابعهای متعالی
۱۷۹	درباره گروههای حلپذیر

قسمت دوم. گروهها

۱۸۳	فصل ۸. اوایل نظریه گروهها
۱۸۴	بخش (آ). گروههای جانشینها
۱۸۴	اولین قضیه‌ها درباره زیرگروههای S_n
۱۸۵	ماتيو
۱۸۶	سیلو
۱۸۸	بخش (ب). گروههای تبدیلات
۱۸۸	هندسه نااقلیدسی
۱۹۳	فلیکس کلاین و سوفوس لی
۱۹۴	تحقیقات فلیکس کلاین درباره گروههای منتهای تبدیلات خطی کسری
۱۹۵	سوفوس لی
۱۹۶	بخش (پ). گروههای مجرد
۱۹۷	لئونهارت اوپلر
۱۹۸	کارل فریدریش گاوس
۱۹۹	ارنست شرینگ
۱۹۹	لئوپولد کرونکر
۲۰۱	آرثر کیلی
۲۰۲	والتر وان دایک
۲۰۵	هاینریش ویر
۲۰۶	بخش (ت). ساختار گروههای منتهای
۲۰۷	اوتو هولدر
۲۱۰	گروههای خطی منتهای
۲۱۳	فصل ۹. گروههای لی و جبرهای لی

۲۱۳.....	بخش (آ). گروههای لی
۲۱۳.....	نظریه لی
۲۱۵.....	تبدیلات بینهایت کوچک
۲۱۷.....	سه قضیه اساسی
۲۲۰.....	بخش (ب). جبرهای لی
۲۲۱.....	سوفوس لی و فریدریش انگل
۲۲۲.....	ویلهلم کیلینگ
۲۲۳.....	الی کارتان
۲۲۴.....	ریشه‌های مشخصه
۲۲۶.....	گروههای نیمساده لی
۲۲۹.....	گروه دابل (S)
۲۳۱.....	جبرهای ساده حقیقی لی

قسمت سوم. جبرها

۲۳۵.....	فصل ۱۰. کشف جبرها
۲۳۵.....	اعداد مختلط
۲۳۷.....	کشف کواترنیونها به توسط همیلتن
۲۴۰.....	جهش به بعد چهارم
۲۴۳.....	اوکتانیونها
۲۴۴.....	فرمولهای حاصلضرب برای مجموع مربعات
۲۴۶.....	کاربردهای هندسی کواترنیونها
۲۴۷.....	حساب کواترنیونها
۲۵۰.....	دوکواترنیونها
۲۵۱.....	جبرهای تمام‌ماتریسی
۲۵۲.....	جبرهای گروهی
۲۵۳.....	حساب توسیعیهای گراسمان
۲۵۶.....	جبرهای کلیفورد و دورانها در فضاهای n بعدی
۲۵۸.....	نظریه الکترون چرخان دیراک

۲۶۰	اسپینورهای n بعدی
۲۶۱	تعمیم شوالی
۲۶۲	کواترانیوهای تعمیم یافته
۲۶۵	حاصلضربهای خارجی
۲۶۶	جبرهای دوری
۲۶۸	فصل ۱۱. ساختار جبرها
۲۶۸	مفاهیم و علامات کلی
۲۶۹	بنجامین پیرس
۲۷۱	ادوارد اشتودی
۲۷۱	گاوس، وایرشراس و ددکیند
۲۷۲	گئورگ شفرز
۲۷۳	تئودور مولین
۲۷۶	الی کارتان
۲۷۸	مکلاگان ودربرن
۲۸۰	امیل آرتین
۲۸۰	امی نوتر و مکتب او
۲۸۱	نیتن جیکوبسن
۲۸۲	جبرهای ساده نرمال
۲۸۴	ساختار جبرهای تقسیمی
۲۸۴	۱. حلقه‌های تقسیمی روی $\mathbb{R}$
۲۸۵	۲. هیأت‌های اریب متناهی
۲۸۵	۳. جبرهای ساده نرمال روی یک هیأت P -ای
۲۸۶	۴. جبرهای تقسیمی روی هیأت‌های اعداد جبری
۲۹۰	فصل ۱۲. سرشتهای گروهی
۲۹۰	بخش (آ). سرشتهای گروههای آبلی
۲۹۰	گوناها و سرشتهای فرمهای درجه دوم
۲۹۴	دوگانی در گروههای آبلی
۲۹۷	بخش (ب). سرشتهای گروههای متناهی
۲۹۷	معرفی دترمینان گروهی به توسط ددکیند

۳۰۰	مطالعات فروبنیوس دربارهٔ دترمینان گروهی
۳۰۴	قضیهٔ فروبنیوس راجع به ماتریسهای تعویضپذیر
۳۰۷	نامهٔ ۱۷ آوریل، ۱۸۹۶
۳۱۰	نامهٔ ۲۶ آوریل
۳۱۱	مقالهٔ فروبنیوس «در باب سرشتهای گروهی»
۳۱۳	برهان $e = f$ و تجزیهٔ دترمینان گروهی
۳۱۴	فصل ۱۳. نمایشهای گروههای متناهی و جبرها
۳۱۶	هاینریش ماشکه
۳۱۷	ایسانی شور
۳۱۸	نمایشهای گروه متقارن
۳۲۱	نمایش گروهها با تبدیلات تصویری
۳۲۳	امی نوتر
۳۲۳	۱. مبانی نظریه-گروهی
۳۲۴	۲. نظریهٔ ایدآلهای تعویضناپذیر
۳۲۶	۳. مدولها و نمایشها
۳۲۹	۴. نمایشهای گروهها و جبرها
۳۳۳	فصل ۱۴. نمایشهای گروههای لی و جبرهای لی
۳۳۳	الی کارتان
۳۳۴	روش فراموضعی
۳۳۶	روش بینهایت کوچک
۳۴۰	هرمان وایل
۳۴۴	جان فون نویمان
۳۴۹	ضمیمه
۳۵۱	یادمان بارتل لیندرت وان در واردن
۳۶۱	فهرست راهنما

پیشگفتار مترجمان

کتاب حاضر ترجمه فارسی کتاب ارزشمند ریاضیدان و مورخ شهر ریاضی بارتل لندرت وان در واردن^۱ (۱۹۰۳-۱۹۹۶) تحت عنوان تاریخ جبر است. وان در واردن در این کتاب به تفصیل به شرح تاریخ جبر از محمد بن موسی خوارزمی تا امی نوثر پرداخته است. یعنی دوره‌ای از تاریخ جبر را مورد مطالعه قرار داده است که از نیمه اول سده نهم میلادی تا اندکی بیش از ثلث اول سده بیستم میلادی ادامه داشته است.

تاریخ جبر، در واقع، کتابی است که ریاضیدانی برای ریاضیدانان نوشته است. مؤلف در این کتاب با تأکید بر بسط ریاضیات، به ارائه روابط بین ایده‌هایی پرداخته است که به توسط ریاضیدانان مختلف ابراز شده‌اند، و در مورد انگیزه‌هایی که منجر به تحقیقات مهم ریاضی گشته‌اند، بحث جامعی به عمل آورده است. وان در واردن با تسلط کاملی که به ریاضیات و تاریخ آن دارد، به بحث در مورد چگونگی روند کشفیات ریاضی در جبر می‌پردازد، و در این راه گاهی با طرح مفاهیم و نتایج بنیادی، خطوط کلی برهانها را ترسیم و به شرح مختصر آنها مبادرت می‌کند، گاهی نیز برهانها را به طور کامل ذکر می‌کند.

سبک ریاضی مؤلف در این کتاب گرچه غیر رسمی است، ولی کاملاً دقیق است. با اینکه خواندن کتاب مستلزم داشتن اطلاعات اساسی در زمینه جبر است، با وجود این کتاب برای قشر وسیعی از خوانندگان جامعه ریاضی قابل استفاده و مفید است، به ویژه برای جبردانان محقق و نیز دانشجویانی که در دوره‌های عالی در رشته جبر تحصیل می‌کنند مرجعی استثنایی به شمار می‌رود.

وان در واردن در این کتاب نه تنها بحثهای مهمی را از جنبه تاریخی مطرح می‌کند، بلکه توصیف بسیار زیبایی را از بعضی مباحث ریاضیات ارائه می‌دهد. بدین لحاظ، کتابش پر از مباحث متنوع ریاضی است. سرتاسر کتاب حاوی بسیاری از منابع اصیل، هم در زمینه جبر و هم سایر شاخه‌های ریاضیات است که راهگشایی بی‌نظیر برای محققان تاریخ ریاضی است. از جنبه‌های ممتاز کتاب پرداختن به موضوعاتی است که صرفاً در حوزه جبر قرار نمی‌گیرند. مؤلف در کتاب تاریخ جبر، علاوه بر معرفی آثار جبری ریاضیدانان به معرفی سایر آثار آنان نیز پرداخته است. بنابراین کتاب کمابیش شامل تاریخچه‌ای مختصر از سایر مباحث نظیر هندسه، توپولوژی، آنالیز، فیزیک، نجوم، و غیره است که به نحو شایسته‌ای در این کتاب گرد آمده‌اند.

به جرأت می‌توان گفت دانشجویانی که در دوره‌های عالی در رشته جبر تحصیل می‌کنند، حتی در درس رسمی خود با همه مطالب کتاب وان در واردن - در زمینه جبر - مواجه نمی‌شوند. از اینرو مطالعه

Bartel Leendert van der Waerden (۱)

مترجمان برای معرفی شخصیت علمی وان در واردن یادمانی را که در مجلد ۲۴ مجله هیستوریا ماتماتیکا، سال ۱۹۹۷ صص ۱۲۵-۱۳۰، مندرج است به فارسی ترجمه کرده و در ضمیمه کتاب آورده‌اند.

کتاب فرصتی استثنایی به دست می‌دهد که خواننده شایق با شاخه‌های متنوع جبر و نیز تاریخ آن آشنایی کافی پیدا کند.

تقسیم‌بندی کتاب موضوعی است و از سه قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول: معادلات جبری که نیمی از مطالب را به خود اختصاص داده است؛ قسمت دوم: نظریه گروه‌ها؛ قسمت سوم: جبرها. دو قسمت اخیر نیم دیگر کتاب را تشکیل می‌دهند. البته این تقسیم‌بندی را می‌توان در مواردی نادیده گرفت؛ مثلاً گاهی از اوقات، گروه‌ها در حل معادلات به کار می‌روند. از این نظر در قسمت اول کتاب توجه قابل ملاحظه‌ای به نظریه گروه‌های کوشی، گالوا، و ژوردان شده است؛ یعنی به نظریه گروه‌هایی که بعداً به توسط کرونگر، کیلی، و دیگران به صورت نظریه‌ای مجرد درآمد.

در قسمت اول وان در واردن بسط نظریه معادلات جبری را از محمدبن موسی خوارزمی در نیمه اول سده نهم میلادی تا اواریسست گالوا (۱۸۱۱-۱۸۳۲) و کامیل ژوردان (۱۸۳۸-۱۹۲۲) دنبال کرده است. در این قسمت مؤلف، پس از بحث جامعی که در آثار علمی خوارزمی به عمل می‌آورد، به دو ریاضیدان مسلمان دیگر نیز می‌پردازد. یکی از اینان عمرخیام است که روشهایی نظام‌مند را در حل معادلات ابداع، و معادله درجه سوم را به وسیله مقاطع مخروطی حل کرد.

وان در واردن سپس به بحث درباره کارهای مهم ریاضیدانان ایتالیایی می‌پردازد. او با لئوناردو پیسا (حدود ۱۱۷۰-حدود ۱۲۵۰) شروع می‌کند و تاریخچه جالبی را درباره کشف روشهای جبری برای حل معادلات درجه سوم و دو مجذوری که به توسط فرو، تارتاگلیا، کاردان، فواری، و بومبلی کشف شدند ارائه می‌دهد.

مؤلف سپس به ابداعات ویت (۱۵۴۰-۱۶۰۳) در مورد علامتهای ریاضی اشاره می‌کند و روشهای مختصاتی و نظریه مقاطع مخروطی فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵) و نیز دستگاههای مختصاتی دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰) را که تحولی در نظریه معادلات و جبر به وجود آوردند تشریح می‌کند. او پس از اختصاص فصلی به وارینگ، واندرموند، لاگرانژ، مالفتای، روفینی، کوشی، و آبل به بحث درباره آثار جبری گاوس و برهان او درباره قضیه اساسی جبر می‌پردازد. بالاخره قسمت اول با دو فصل زیبا درباره اواریسست گالوا، و کامیل ژوردان به پایان می‌رسد.

وان در واردن قسمت دوم کتاب تاریخ جبر را به نظریه گروه‌ها اختصاص می‌دهد و بحث خود را به چهار قسمت تقسیم می‌کند: گروههای جانشینی، گروههای تبدیلات، گروههای مجرد، و ساختار گروههای متناهی. او پس از بحثی اجمالی در گروههای متقارن، به دو مقاله ماتو در باب گروههای چندگانه تریا و قضیه‌های ساختاری سیلو اشاره می‌کند و سپس به گروههای تبدیلات می‌پردازد. او با اشاره به تحقیقات اوایلر، رودرینگر، ژوردان در باب گروههای حرکات صلب در فضای سه بعدی که در قسمت اول مطرح می‌کند، بحث را با معرفی کارهای کیلی و کلاین درباره هندسه ناقلیدسی ادامه می‌دهد و به بیان طبقه‌بندی

گروههای تبدیلات خطی کسری به توسط کلاین و تحقیقات لی در مورد گروههای پیوسته می‌پردازد.

مؤلف در این قسمت به توضیح کشفیات هولدر اقدام می‌کند؛ به کشفیات ریاضیدانی که سهم عمده‌ای در نظریهٔ گروههای متناهی در سدهٔ نوزدهم داشته است. با اینکه ژوردان بر این قضیه که شاخصها در یک سری ترکیبی گروهی متناهی صرف نظر از ترتیبشان یکتا هستند، آگاه بوده است، هولدر با معرفی مفهوم گروه عاملی [=گروه خارج قسمتی] ثابت کرد که عاملهای ترکیبی در یک سری ترکیبی قطع نظر از ترتیبشان منحصر به فردند.

در پایان قسمت دوم، وان در واریون در آثار لی، انگل، کیلینگ، و کارتان بحث می‌کند و به تشریح نظریهٔ غنی ساختاری و نظریهٔ طبقه‌بندی گروههای لی و جبرهای لی می‌پردازد. در قسمت سوم مؤلف بحث خود را با جبرها شروع می‌کند و به کشف کواترنیونها به توسط همپلتن و کشف اوکتانینونها به توسط گریوز اشاره می‌کند. سپس به بیان مفاهیم جبر گروهی و جبر گراسمان که به ترتیب به توسط کیلی در ۱۸۳۴ و گراسمان در ۱۸۷۸ معرفی شدند می‌پردازد. اولین جبر کلیفورد نوعی از جبر اخیر با بعد 2^n است که در این کتاب بدان اشاره می‌شود؛ ضمناً دومین جبر کلیفورد نیز معرفی می‌شود.

وان در واردن سپس بسط نظریهٔ ساختاری جبر را توضیح می‌دهد و نظریهٔ ودربرن (۱۸۸۲-۱۹۴۸) را مطرح می‌سازد و به تحقیقات مولین (۱۸۶۱-۱۹۴۱) و کارتان در زمینهٔ جبرهای متناهی-بعد روی $\mathbb{C}$ اشاره می‌کند. سپس به اختصار در نظریهٔ عام ودربرن که نتایج کارتان را به جبرهای متناهی-بعد روی هیاتهای دلخواه تعمیم می‌دهد بحث می‌کند. در این قسمت مؤلف شرح مختصری را دربارهٔ تحقیقات آرتین و نوتر بیان می‌کند. بالاخره نظریهٔ ساختاری جیکوبسن برای حلقه‌های بدون شرایط تناهی توضیح داده می‌شود.

چون جبرهای سادهٔ متناهی - بعد، جبرهای تمام - ماتریسی روی جبرهای تقسیمی متناهی-بعد هستند تعیین آنها به یافتن همهٔ جبرهای تقسیمی مانند D روی هیاتهای F برمی‌گردد. وان درواردن در چگونگی اعمال آن برای هیاتهای $\mathbb{R}$ ، متناهی، p -ای، و عددی جبری بحث می‌کند و در این مورد از نظر تاریخی، به تحقیقات فروبنیوس، ودربرن، هاسه، براوئر، و نوتر می‌پردازد.

باقی این قسمت به سرشتهای گروهی، نمایشهای گروههای متناهی و جبرها، نمایشهای گروههای لی، و جبرهای لی اختصاص دارد.

هدف مترجمان کتاب، علاوه بر معرفی این اثر گرانقدر به جامعهٔ ریاضی کشور، در دسترس قرار دادن منبعی اصیل در تاریخ جبر به زبان فارسی است. امید است این اثر مورد استفادهٔ دانشجویان و محققان ریاضی کشور قرار گیرد.

لازم به توضیح است که کتاب به زبان انگلیسی نگاشته شده است و مؤلف نام و نشانی آثار ریاضیدانان

و نیز برخی از نوشته‌ها و مکاتبات آنان را برای حفظ اصالت انشاییه زبان اصلی آورده است. مترجمان با آگاهی بر قصد مؤلف، ناچار، این موارد را که علاوه بر زبان انگلیسی به زبانهای فرانسوی، آلمانی، ایتالیایی، لاتین بوده‌اند، به فارسی برگردانده‌اند تا راه استفاده از آنها هموار شود. در اینجا فرصت را مغتنم شمرده و از ویراستار محترم کتاب جناب آقای دکتر محمد هادی شفیعیه که زحمت ویراستاری کتاب و مقابله ترجمه متنهای غیرانگلیسی را برعهده گرفته‌اند کمال تشکر را دارند. همچنین بر خود فرض می‌دانند از انتشارات مبتکران و مدیر دانش دوست آن جناب آقای دهقانی که مقدمات نشر کتاب را فراهم آوردند سپاسگزاری کنند.

محمد قاسم وحیدی اصل، علیرضا جمالی

تهران اسفند ماه ۱۳۷۶

پیشگفتار مؤلف

مجلد حاضر کتابی است قائم به خود، اما بخشی از پروژه‌ای بزرگتر. در مجلدی پیشتر از آن، با عنوان «هندسه و جبر در تمدنهای باستان»^۱، من دیدگاههای خود را درباره جبر و هندسه پیش از تاریخ از دوره نوسنگی تا برهمه‌گوته^۲ (سده هفتم پیش از میلاد) عرضه کرده‌ام. مجلد حاضر به دوره تاریخی از خوارزمی، اولین مؤلف «جبر»، تا امی‌نوتر^۳ می‌پردازد.

در این کتاب، من خود را به سه موضوع محدود می‌کنم، یعنی قسمت اول: معادلات جبری، قسمت دوم: گروهها؛ قسمت سوم: جبرها.

گرمترین سیاسهای خود را به همه کسانی که با خواندن بخشهایی از دستویس و پیشنهاد اصلاحات اساسی یاری‌ام کرده‌اند، نثار می‌کنم: ویلیس باندلر^۴ (تالاهاسی^۵، فلوریدا)، رابرت برن^۶ (کیمبریج، انگلستان)، ماکس دورینگ^۷ (گوتینگن)، ژان دیودونه^۸ (پاریس)، رافائلا فرانکی^۹ (سیه‌نا)^{۱۰}، هانس فرویدنتال^{۱۱} (اوترخت^{۱۲})، تامس هاوکینز^{۱۳} (بوستون)، اروین نوئنس شواندر^{۱۴} (زوریخ)، لورا توتی ریگاتلی^{۱۵} (سیه‌نا)، وارن وان اخمونت^{۱۶} (مونخ).

دوشیزه آن ماری فلان^{۱۷} با دقت همیشگی‌اش، دستویس را تایپ کرده است. شکلها را هم او کشیده، و همراه با اروین نوئنس شواندر، در خواندن نمونه‌های مطبعی کمک کرده است. سپاس فراوان بر هر دو برکادر ویراستاری و بخش تولید اشپرینگر-فرلاک به خاطر همکاری خوشان.

ب. ل. وان در واردن-زوریخ، مارس ۱۹۸۵

1) Geometry and Algebra in Ancient Civilizations 2) Brahmagupta 3) Emmy Noether
4) Wyllis Bandler 5) Tallahassee 6) Robert Burn 7) Max Deuring 8) Jean Dieudonné
9) Raffaella Franci 10) Siena 11) Hans Freudenthal 12) Utrecht
13) Thomas Hawkins 14) Erwin Neuenschwander 15) Laura Toti Rigatelli 16) Warren Van Egmond 17) Annemarie Fellmann

قسمت اول

معادله‌های جبری

فصل ۱

سه مؤلف اسلامی

نوشتن تاریخ جبر در کشورهای اسلامی در توان من نیست. هر سال انتشارات جدیدی دربارهٔ این موضوع در عرصه ظاهر می‌شوند. گمان می‌کنم که هنوز زمان نگارش تاریخ جامع ریاضیات اسلامی فرا نرسیده باشد. بنابراین خود را به سه تن از جالب توجه‌ترین مؤلفان محدود می‌کنم که آثار عمدهٔ آنها با ترجمه‌های امروزی در دسترس است. منظورم این سه مؤلف است:

یکم - خوارزمی،

دوم - ثابت بن قره،

سوم - عمر خیام.

بخش یکم

خوارزمی

اگر بخواهیم به تصویری از ارزش علمی و منابع آثار خوارزمی نیل یابیم، نه تنها رسالهٔ او در جبر، بلکه باید سایر آثار ریاضی، نجومی، و تقویمی او را مدنظر قرار دهیم. بخش حاضر به دوازده مقوله تقسیم می‌شود.

۱. شخصیت و آثارش

گزارشی عالی از زندگی و آثار محمد بن موسی خوارزمی را تومر^۱ در جلد هفتم زندگینامهٔ علمی دانشوران^۲ ارائه کرده است. به نقل از گزارش او:

تنها برخی جزئیات زندگی خوارزمی را می‌توان از اشارات مختصر آثار کتابشناختی اسلامی

1) G.I.Toomer

۲) با عنوان اصلی Dictionary of Scientific Biography که ترجمهٔ فارسی مجلدات آن به ویراستاری استاد احمد بیرشک از سوی انتشارات علمی و فرهنگی منتشر می‌شود و تاکنون ۳ مجلد آن به زیور طبع آراسته شده است. م.

و اظهار نظرهای اتفاقی مورخان و جغرافیدانان اسلامی خوشه چینی کرد. عنوان «خوارزمی» قاعدتاً دال بر این است که او از خوارزم (همان خیره امروزی و ناحیه اطراف آن در جنوب دریاچه آرال در آسیای مرکزی) برخاسته است. اما طبری مورخ، به او لقب اضافی القطریلی را می‌دهد که حکایت از آن می‌کند که او اهل قطریل، ناحیه‌ای بین دجله و فرات نزدیک بغداد بوده است، بنابراین نیاکانش، و نه خود وی، اهل خوارزم بوده‌اند؛ این گزارش با برخی منابع که «اصل» او را از خوارزم می‌دانند، نائید می‌شود. ...

در عهد مأمون خلیفه (خلافت بین ۸۱۳-۸۲۳) خوارزمی به عضویت «بیت‌الحکمه» در آمد که نوعی فرهنگستان علمی بود که در بغداد، احتمالاً به دست خلیفه هارون الرشید برپا شده بود، اما سرآمدشدنش مدیون دلبستگیهای مأمون، حامی عمده دانش و پژوهشهای علمی بود. به خاطر مأمون بوده که خوارزمی رساله نجومی خود را تألیف کرده، و جبر خوارزمی نیز به آن فرمانروا اهدا شده است.

۲. جبر و مقابله

حاج خلیفه تذکره‌نویس، در قاموس زندگینامه‌ای اش^۱ ذکر می‌کند که خوارزمی اولین مؤلف اسلامی بود که نوشتن «در باب حل مسأله‌ها به کمک جبر و مقابله» را وجهه همت خود قرار داد. اما معنای این دو اصطلاح چیست؟

معنای متداول جبر در رساله‌های ریاضی چنین است: افزودن جمله‌های برابر به دو طرف معادله‌ای برای حذف جمله‌های منفی. معنای کمتر رایج دیگر آن چنین است: ضرب کردن دو طرف معادله‌ای در عددی یکسان برای حذف کسرها^۲.

معنای متداول مقابله چنین است: کاهش جملات مثبت با اسقاط مقادیر مساوی از هر دو طرف معادله. اما کرجی این واژه را به مفهوم «برابر نهادن» به کار می‌برد. معنای تحت‌لفظی این کلمه چنین است: مقایسه کردن، مقابل هم نهادن.

ترکیب این دو کلمه: جبر و المقابله گاهی به معنایی کلیتر به کار می‌رود: انجام اعمال جبری. ممکن است بدین معنا نیز به کار روند: علم جبر.

می‌خواهم چند مثال از طرز استفاده از این کلمات در اثر خوارزمی بدهم. در صفحه ۳۵ ترجمه [به انگلیسی] روزن^۳ با عنوان «جبر محمد بن موسی» مسأله زیر مطرح شده است:

(۱) منظور «کشف‌الظنون فی اسماء الکتب و الفنون» تألیف مصطفی بن عبدالله کاتب چلبی معروف به حاج خلیفه است که متن عربی آن با ترجمه لاتینی به توسط فلوگل در هفت مجلد به چاپ رسیده است. م.
(۲) نگاه کنید به

George A. Saliba: The Meaning of al-jabar wa'l muquabala, Centaurus, 17; p.189-204 (1973).

من ده را به دو بخش تقسیم کرده‌ام. یکی از آن دو بخش را در دیگری ضرب کرده‌ام. پس از آن، یکی از این دو بخش را در خود ضرب کرده‌ام، و حاصل این عمل ضرب برابر با چهار برابر حاصل ضرب همین بخش در بخش دیگر است.

خوارزمی حالا یکی از دو بخش را «شیء» (چیز) و دیگری را «ده منهای شیء» می‌نامد. با ضرب کردن این دو، وی به بیان ترجمهٔ روزن، «ده شیء منهای مجذور» را به دست می‌آورد. مؤلف برای مجذور «شیء» مجهول، اصطلاح مال را به کار می‌برد. که چیزی به معنای «ثروت» یا «دارایی» است. او سرانجام معادلهٔ

«مجذوری، که با چهل شیء منهای چهار مجذور برابر است»

را به دست می‌آورد.

در نمادگذاری امروزی، می‌توانیم این معادله را به صورت

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

بنویسیم.

مؤلف سپس عمل جبر را، با افزودن $4x^2$ به دو طرف معادله، به کار می‌گیرد و در نتیجه معادلهٔ

$$5x^2 = 40x$$

یا

$$x^2 = 8x$$

و از این معادله، $x = 8$ را به دست می‌آورد.

به همین منوال، خوارزمی در صفحهٔ ۴۰ [ترجمهٔ روزن] معادلهٔ

$$50 + x^2 = 29 + 10x$$

را به دست می‌آورد که به کمک مقابله آن را به

$$21 + x^2 = 10x$$

تحویل می‌کند.

در مقدمهٔ رساله‌اش، مؤلف اشاره می‌کند که مأمون خلیفه

«مرا تشویق کرده است اثری کوتاه دربارهٔ محاسبات به کمک تکمیل و اسقاط [=جبر و مقابله] تصنیف و آن را به ساده‌ترین و سودمندترین موارد در علم حساب محدود کنم، از آن قبیل که مردمان مداوماً در قضایای ارث، وصایا، انحصار وراثت، دعاوی حقوقی، و تجارت، و در تمام دادوستدهای آنها با هم بدان نیاز دارند، یا هر جا که اندازه‌گیری زمین، کندن آبراهه‌ها، محاسبات هندسی، و دیگر مقاصد از هر نوع و هر قبیل که مطمح نظر باشد...».

عنوان کامل این رساله «مختصر من حساب الجبر و المقابله» است. این رساله مشتمل بر سه بخش است.

در اولین بخش، خوارزمی راه حل شش نوع معادله را که کلیهٔ معادلات خطی و درجهٔ دوم را می‌توان بدانها تحویل کرد، شرح می‌دهد. یعنی این معادلات:

$$ax^2 = bx \quad (۱)$$

$$ax^2 = b \quad (۲)$$

$$ax = b \quad (۳)$$

$$ax^2 + bx = c \quad (۴)$$

$$ax^2 + c = bx \quad (۵)$$

$$ax^2 = bx + c, \quad (۶)$$

که در آن a, b, c اعداد مثبت مفروضی هستند.

خوارزمی قواعد حل این معادله‌ها را می‌دهد، دلایلی بر این قاعده‌ها ارائه می‌کند، و به کمک مثالهای حل شده به تشریح آنها می‌پردازد. اینک دلایل او را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳. دربارهٔ مساحی

دومین فصل «جبر» به مساحی می‌پردازد. چون ترجمهٔ روزن رضایتبخش نبوده، سولومون گانتز^۱ متن عربی را همراه با ترجمهٔ انگلیسی جدیدی در رساله‌ای با عنوان «میشناخت‌هایمیدوت» و هندسهٔ محمد بن موسی خوارزمی منتشر کرده است.

این فصل عمدتاً مشتمل بر قواعد محاسبهٔ مساحتها و حجمهاست. مثلاً، مساحت دایره از ضرب نصف قطر در نصف محیط به دست می‌آید. برای پیدا کردن محیط، سه قاعده ارائه شده است. اگر

^۱) Solomon Gandz

قطر d و محیط p باشد، این سه قاعده عبارت‌اند از

$$p = 3\frac{1}{7}d, \quad (۷)$$

$$p = \sqrt{10}d, \quad (۸)$$

$$p = \frac{62832}{20000}d. \quad (۹)$$

توجه کنید که قاعده (۷) به ارشمیدس منسوب است که ثابت کرد p کمتر از $3\frac{1}{7}$ ضرب در d و بیشتر از $3\frac{10}{71}$ ضرب در d است. همین قاعده (۷) به وسیله هرون اسکندرانی در کتاب «متریکا»^۱ ی او، و در رساله عربی «میشنات-هامیدوت»^۲، به تصحیح و ترجمه سولومون گانتز نیز داده شده است.

قاعده (۸) در فصل هفتم برهمسپهوت سدهانت برهمگوپته نیز دیده می‌شود. ن. ک. کولیروک: جبر و حساب از سنسکریت برهمگوپته و بهاسکره^۳.

قاعده (۹) که معادل برآورد دقیق

$$\pi \sim 3,1416 \quad (۱۰)$$

است، قابل توجه‌تر از سایرین است.

خوارزمی قاعده (۹) را به منجمان نسبت می‌دهد، در واقع همین قاعده در آریبهطیه منسوب به منجم هندی، آریبهطیه (اوایل سده ششم پس از میلاد) دیده می‌شود. در بیت ۲۸ II آریبهطیه چنین آمده است:

۴ را به ۱۰۰ اضافه کن، در ۸ ضرب کن و با ۶۲۰۰۰ جمع کن. حاصل تقریباً با محیط دایره‌ای به قطر ۲۰۰۰۰ برابر است (ن. ک. کلارک^۴: آریبهطیه، صفحه ۲۸).

در آخرین فصل کتاب «هندسه و جبر در تمدنهای باستان»، نشان داده‌ام که برآورد (۱۰) بر هندسه دان چینی، لیوهوی (سده سوم پس از میلاد) نیز معلوم بوده است. ممکن است این برآورد حقیقتاً به آپولونیوس پراگایی منسوب باشد (ن. ک. صفحات ۱۹۶-۱۹۹ و ۲۰۷-۲۱۳ کتاب «هندسه و جبر در تمدنهای باستان» [متن انگلیسی]).

1) "The Mishnat ha-Middot and the Geometry of Muhammed ibn Musa Al-Khwarizmi" Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik A2 (Springer-Verlag 1932).

2) Colebrook, H. T., Algebra with Arithmetic from Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara (London 1817, reprinted 1973 by Martin Sändig, Wiesbaden), p. 308-309.

3) W. E. Clark

خوارزمی اظهار می‌دارد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، با ضرب هر یک از ساقها در خودش و اضافه کردن حاصلضربها به یکدیگر، حاصلضرب وتر در خودش حاصل می‌شود. بنابراین اگر a , b , c اضلاع مثلث باشند، داریم

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

برهان ارائه شده در متن تنها در حالت متساوی الساقین بودن مثلث ($a = b$) معتبر است. از این حقیقت می‌توانیم با اطمینان خاطر نتیجه بگیریم که منبع اصلی خوارزمی رساله‌ای از قبیل «اصول» اقلیدس نبوده است. آریستیدمارا^۱، که ترجمه‌ای از باب المساحة خوارزمی را در آنالی دی مانتیکا^۲ (شماره ۷، ۱۸۶۶) چاپ کرده است، عدم کفایت برهان را متذکر شده و افزوده است که مؤلف [خوارزمی] هرگز نمی‌توانسته وارد فرهنگستان افلاطونی شود!

رساله‌ای باستانی به عبری موجود است که در مضمون و اصطلاحات با باب المساحة خوارزمی ارتباط نزدیکی دارد. عنوان رساله «میشنات هلمیدوت»^۳ است. این رساله، همراه با ترجمه انگلیسی و تفسیری عالی، به وسیله سولومون گانتز در منابع و مطالعات تاریخ ریاضیات^۴ سری A۲ چاپ شده است. استدلالهای گانتز مرا متقاعد کرده است که مؤلف رساله، خاخام ینهم میا بوده که حدود سال ۱۵۰ پس از میلاد می‌زیسته است. مؤلف می‌دانسته که چگونه محیط دایره را به صورت $3\frac{1}{4}d$ محاسبه کند. برای محاسبه مساحت قطعه دایره، وی همان فرمول هرون اسکندرانی را ارائه می‌کند:

$$A = (c + h) \cdot \frac{1}{4}h + \frac{1}{14} \left(\frac{c}{4} \right)^2$$

که در آن c و h ارتفاع قطعه است. این فرمول در باب المساحة خوارزمی نیست، اما بجز آن شباهتهای بین این باب و میشنات هلمیدوت به قدری زیاد است که انسان ناچار می‌شود یا، مثل گانتز، وابستگی مستقیم بین آنها و یا دست کم وجود منبع مشترکی را بپذیرد. همچنین امکان دارد که، آن گونه که گانتز می‌پندارد، خوارزمی از ترجمه فارسی یا سریانی میشنات هلمیدوت استفاده کرده باشد.

۴. درباره تقویم یهود

صرف نظر از اینکه نتیجه‌گیری گانتز را که هندسه خوارزمی «کلمه به کلمه از میشنات هلمیدوت اقتباس شده است» بپذیریم یا نپذیریم، در هر حال خوارزمی با ستهای یهودیان آشنا بوده زیرا رساله‌ای درباره

[تحقیق در مقیاسها] 3) Mishnat ha-Middot 2) Annali di matematica 1) Aristide Marre

4) Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematic

تقویم یهود نوشته است. این رساله دوره ۱۹ ساله تقویم یهود و قواعد معین کردن روزی از هفته را که ماه تشرین [اولین ماه سال یهود] در آن آغاز می شود، شرح می دهد. در این رساله فاصله بین «عصر آفرینش ابراهیم» از نظر یهودیان و دوران سلوکیه نیز محاسبه می شود و قواعدی برای تعیین طول متوسط ماه و خورشید داده می شود. ن. ک. کندی: خوارزمی درباره تقویم یهود.^۱

۵. باب الوصایا

سومین و بزرگترین بخش جبر خوارزمی (صفحات ۷۴-۸۶ در ترجمه روزن) به وصایا می پردازد. این بخش سراسر مرکب از مسائلی با راه حل های آنهاست. راه حل ها تنها حساب ساده یا معادله های خطی را در بردارند، اما درک قابل ملاحظه ای از قانون ارث اسلامی نیز مورد نیاز است. ن. ک. سولومون گانتز: جبر ارث.^۲

۶. حل معادله های درجه دوم

اینک با تفصیل نسبتاً بیشتری راه حل خوارزمی برای سه نوع معادله درجه دوم آمیخته را مورد بحث قرار می دهیم. به بیان خود خوارزمی، اولین نوع از این قرار است:

جذر ها و مربعات برابر اعدادند.

مثلاً: یک مربع و ده جذر کمیتی برابر سی و نه درهم است؛ یعنی اینکه، کدام مربع است که چون به قدر ده برابر جذر خودش بر آن بیفزاییم، برابر سی و نه می شود؟

راه حل این است: تعداد جذرها را نصف کن، که در مثال حاضر حاصلش پنج است. این

را در خودش ضرب کن؛ حاصل ضرب بیست و پنج است. این را بر سی و نه بیفز، مجموع شصت و

چهار است، حالا جذر این را استخراج کن، که هشت است، و از آن نصف تعداد جذرها را کم کن، که

پنج است. باقیمانده سه است. این جذر مربعی است که آن را می خواستی؛ خود مربع نه است.

در نمادگذاری جدید، معادله

$$x^2 + 10x = 39$$

است که می توان آن را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$$

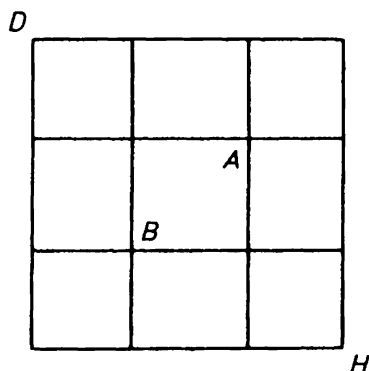
1) Kennedy, E. S.: Al-Khwarizmi on the Jewish Calendar, *Scripamathematica* 27, p. 55-59 (1964).
2) Gandz, S.: The Alsehra ot Inheritance, *Osiris* 5, p. 319-391 (1938).

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8$$

$$x = 8 - 5 = 3.$$

خوارزمی سپس برهانی را ارائه می‌کند. وی مربعی مانند AB رسم می‌کند که ضلع آن جذر موردنظر، x ، است. بر روی چهار ضلع، مستطیلهایی که پهنای هریک از آنها ربع 5 ، یا $2\frac{1}{4}$ است، بنا می‌کند (ن. ک. شکل ۱). اینک [مساحت] مربع همراه با [مساحت] چهار مستطیل برابر 39 است. برای کامل کردن مربع DH ، باید چهار برابر مربع $2\frac{1}{4}$ ، یعنی 25 را، به گفته خوارزمی، بیفزاییم. بنابراین، مساحت مربع بزرگ 64 ، و ضلع آن 8 است. لذا ضلع مربع اصلی برابر است با

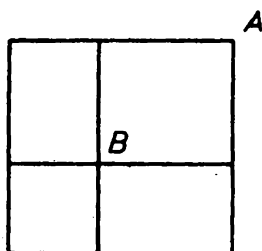
$$8 - 5 = 3$$



شکل ۱

خوارزمی سپس برهان ساده‌تری عرضه می‌کند که در آن مستطیلهای به پهنای 5 تنها بر دو ضلع مربع AB بنا می‌شوند (ن. ک. شکل ۲). البته، نتیجه همان است. یک بار دیگر، ملاحظه می‌کنیم که منبع خوارزمی، اقلیدس نیست، زیرا اولین برهان او قطعاً پیچیده‌تر از برهان قضیه ۴ است که می‌گوید مربعی بر پاره خط $a + b$ برابر است با مجموع مربعهای روی a و b و دو برابر مستطیل ab . برهان دوم خوارزمی شبیه برهان اقلیدس است.

به نظر همین توضیح برای آنکه خواننده سبک رساله خوارزمی درباره جبر و مقابله را دریابد، کافی است. طرز عمل او با دیگر انواع معادله‌های درجه دوم آمیخته بسیار شبیه همین است. انواع دیگر چنین‌اند:



شکل ۲

«مربعها و عددهایی برابر جذرها هستند».

«جذرها و عددها برابر مربعها هستند».

در این حالت، راه حلها با همانها که در مدرسه می‌آموزیم و به جوابهای مثبت محدودند، مطابقت دارند.

۷. جغرافیا

علاوه بر جبر و رساله مربوط به تقویم یهود، رساله دیگری به عربی، یعنی جغرافیا («صورت الارض») باقی است. تقریباً تمام کتاب مشتمل بر فهرستهای طولها و عرضهای جغرافیایی شهرها و جاهاست. این اثر تجدیدنظری بر «جغرافیا»ی بطلمیوس است. بسیار محتمل است که مبنای آن نقشه‌ای از جهان بوده است که به توسط هیأتی از دانشوران (احتمالاً شامل خود خوارزمی) به دستور مأمون خلیفه ساخته شده بوده است. برای اطلاعات بیشتر ن. ک. مقاله تومر در «زندگینامه علمی دانشوران».

۸. درباره ارقام هندی

رساله‌ای از خوارزمی درباره ارقام هندی تنها در ترجمه لاتین باقی است که برای اولین بار به توسط بونکومپانی^۱ تحت عنوان «درباره فن حساب هندی»^۲ و سپس به وسیله کورت فوگل^۳ با عنوان «فن حساب محمد بن موسی خوارزمی»^۴ همراه با عکس نسخه دستنویس منحصر به فرد آن به چاپ رسیده است.

1) Boncompagni 2) Algoritmi de numero indorum 3) Kurt Vogel 4) Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorithmus (Aalen, 1963).

۹. جدولهای نجومی

مجموعه جدولهای نجومی خوارزمی تنها به صورت ترجمه لاتین نسخه‌ای تجدیدنظر شده در دسترس است. این تجدیدنظر به وسیله مسleme بن احمد مجریطی، که در حدود سال ۱۰۰۰ میلادی [۳۸۰ هجری] در کوردوا [قرطبه] می‌زیسته، مورد تجدیدنظر قرار گرفته است. این نسخه با متن اصلی از چند لحاظ متفاوت است. نخست آنکه مبدأ جدولهای اصلی، عصر یزدگرد (۱۶ ژوئن ۶۳۲) است، در حالی که مجریطی عصر هجرت (۱۴ ژوئیه ۶۲۲) را به کار برده است. همچنین، جدول سینوس خوارزمی بر شعاع $R = ۱۵۰$ مبتنی است، در حالی که در جدولهای موجود $R = ۶۰$ است. این جدولها، همراه با ترجمه‌ای لاتین و تفسیر آن به توسط هاینریش سوتر^۱ چاپ شده است. اوتونوگه باوتر ترجمه‌ای انگلیسی از فصل آغازین را همراه با تفسیری جدید و ارزشمند در همان سری Skifter به چاپ رسانده است. اضافات و تصحیحاتی بر این تفسیر را در نقد تومر بر آن در ستاروس^۲ ملاحظه کنید. اگر کسی مقاله «بررسی جدولهای نجومی اسلامی» اثر کندی^۳ را مطالعه کند، متوجه می‌شود که دو نوع زیج؛ یعنی مجموعه جدولهای نجومی، موجود است: بطلمیوسی و غیربطلمیوسی. پایه جدولهای بطلمیوسی، «مجسطی» بطلمیوس یا «جدولهای سهل‌الاستعمال» وی است. جدولهای غیربطلمیوسی، که مجموعه جدولهای خوارزمی تنها نمونه موجود آن است، بر جدولهای ایرانی یا هندی و یا هر دوی آنها مبتنی هستند. جدولهای غیربطلمیوس دقت کمتری دارند ولی از جدولهای بطلمیوسی ساده‌ترند. به نظر، دلیل اینکه جدولهای خوارزمی تا مدت‌ها بعد از فراهم شدن جدولهای بهتر (بطلمیوسی)، همچنان محبوبیت خود را حفظ کرده‌اند، همین است. این قفطی در شرح حال الفزاری درباره خوارزمی چنین می‌گوید:

وی در جدولهایش حرکت‌های متوسط سند هند را به کار برده است، اما در معادله‌ها (ی سیارات) و میل (دایرة البروج) از آن دور شده است. وی معادله‌ها را مطابق روش ایرانیان، و میل خورشید را بنا به روش بطلمیوس معین کرده است.

این امر به چه معنی است؟

ابتدا به آخرین عبارت می‌پردازیم. در زیج خوارزمی جدولی برای یافتن میل خورشید موجود است (ویرایش سوتر، صفحات ۱۳۲-۱۳۶، ستون ماقبل آخر). این جدول مبتنی بر مقدار $۵۱' ۲۳''$ برای میل دایرة البروج است، و با جدولی در «جدولهای سهل‌الاستعمال» بطلمیوس موافقت دارد. بنابراین قطعاً حق با القفطی است: مؤلف جدولها [خوارزمی] میل خورشید را «بنابر روش بطلمیوس» تعیین کرده است.

1) Heinrich Suter; Kongelige Dansk Vidensk. Selsk. Hist. fill. Skrifter III, 1 (Copenhagen 1914). 2) Centaurus 3) E. S. Kennedy, "Survey of Islamic Astronomical tables", Transactions of American Philos Soc. p. 122-177 (1956).

راجع به «معادله‌ها»ی سیارات، یعنی تصحیحاتی که باید بر طولهای متوسط افزوده شوند، توجه می‌کنیم که حداکثر مقادیر این تصحیحات در جدولهای خوارزمی با مقادیر نظیر در مجموعه جدولی ایرانی «زیج شاه» موافقت دارد. برای ملاحظه این جدول، ن. ک. کندی: زیج شاه، کتابدستی نجومی ساسانیان^۱. آشکار است که وقتی القفطی سخن از «ایرانیان» بر زبان می‌راند، زیج شاه را در ذهن دارد که تا زمان بیرونی و ابن القفطی هنوز باقی بوده است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که یکی از منابع خوارزمی مجموعه جدول ایرانی «زیج شاه» بوده است.

۱۰. سند هند

اینک اولین عبارت ابن القفطی را مورد بحث قرار می‌دهم: «از در جدولهایش حرکت‌های متوسط سند هند را به کار برده است. کلمه سند هند تحریفی از کلمه سنسکریت سدهانته است، که عنوان رایج یک متن نجومی است. در واقع، حرکت‌های متوسط در جدولهای خوارزمی از جدولهای «برهمه سدهانته تصحیح شده (برهمسپهوت سدهانته) اثر برهمه گوپته^۲ اقتباس شده‌اند. این امر در مورد طولهای متوسط به وسیله بورکهارت^۳، و در مورد نقطه‌های اوج و گره‌ها [عقد‌ها] به وسیله تومر در نقد او از تفسیر نوگه باوئر از جدولهای خوارزمی، به ثبوت رسیده است.

اندکی پس از سال ۷۷۰ میلادی، یک اثر نجومی سانسکریتی که اعراب آن را سند هند نامیدند، به دربار منصور خلیفه در بغداد، به وسیله مردی به نام کنکه^۴ (یا منکه^۵) از اعضای هیأتی سیاسی از جانب هند، آورده شد. این اثر به عربی برگردانده شد. یعقوب بن طارق، که بنا بر روایتها همراه با کنکه در دربار منصور بوده، بر پایه این ترجمه، جدولی گرد آورد که زیج سند هند نامیده می‌شد. به نظر می‌رسد که زیج خوارزمی تجدیدنظری بر جدول پیشین است که بر سند هند مبتنی بوده و در این تجدیدنظر برخی عناصر و روشهای زیج شاه و «جدولهای سهل الاستعمال» بطلمیوس داخل شده است.

۱۱. روش ایرانیان

به طوری که دیدیم، ابن القفطی می‌گوید که خوارزمی «معادلات را بنابر روش ایرانیان» معین کرده است. این روش چیست؟

1) Kennedy, E. S.; The Sasanian Astronomical Handbook Zig-i Shah, Journal of the American Oriental Society, 78, p. 246-262 (1958). 2) Brahmagupta 3) J. J. Burckhardt

4) Kankah 5) Mankah

من از اصطلاحات و برخی نمادهای اثر کلاسیک کندی «بررسی جدولهای نجومی اسلامی» استفاده خواهم کرد. در صفحات ۱۴۸-۱۵۱ این بررسی، کندی چکیده‌ای از جدولهای خوارزمی را ارائه می‌کند که در آن روش خوارزمی دریافتن طولهای واقعی سیارات توضیح داده شده است. فرض کنید $\bar{\lambda}$ طول اوسط سیاره‌ای باشد. طول حقیقی آن از فرمول

$$\lambda = \bar{\lambda} + e_1 + e_2$$

محاسبه می‌شود که در آن e_1 «معادله مرکز» و e_2 «معادله آنومالی» آن است. برای خورشید و ماه تنها یک معادله e_1 را به دلیل خارج مرکزی بودن مدار داریم. در جدولهای خوارزمی برای خورشید و ماه، معادله $e_1(x)$ بر طبق فرمول

$$e_1(x) = (\max e_1) \cdot \sin x \quad (12)$$

جدولبندی شده است که در آن x فاصله متوسط خورشید یا ماه از نقطه اوج مدار خارج از مرکز است:

$$x = \bar{\lambda} - \lambda_{ap}. \quad (13)$$

برای سیاره‌های دیگر، محاسبه پیچیده‌تر است. می‌توان ابتدا مقداری مقدماتی برای تصحیح e_2 ، که بنابر مثلثات مسطحه از مثلث EPM در شکل ۳ محاسبه می‌شود، حساب کرد. در این شکل، فرض می‌شود که سیاره به وسیله یک فلک تدویر حمل می‌شود که به نوبه خود به وسیله دایره متحدالمرکز حمل می‌شود. زاویه e_2 را می‌توان به عنوان تابعی از زاویه γ (ن. ک. سوتر^۱) جدولبندی کرد.

اما، به گفته کندی، «مبتکر این نظریه ظاهراً تشخیص داده است که دو معادله مستقل نیستند». ما باید معادله $e_2(y)$ را نصف کنیم و آن را بر x بیفزاییم و بدین‌گونه

$$x' = x + \frac{1}{2}e_2(y) \quad (14)$$

را به دست آوریم.

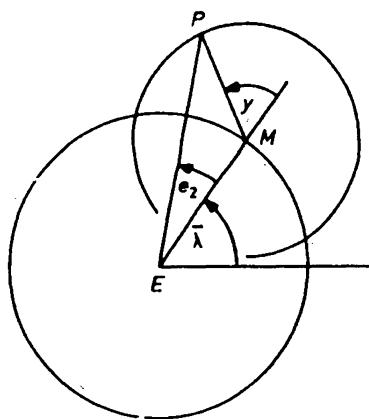
این x' برای تصحیح e_1 به کار می‌رود:

$$e_1(x') = (\max e_1) \cdot \sin x' \quad (15)$$

که از y کسر می‌شود و بدین طریق

$$y' = y - e_1(x') \quad (16)$$

1) Suter, H. "Tafeln des Muhammed ibn Musa Al-Khwarizmi", pages 131-167, Column 3.



شکل ۳

به دست می‌آید.

اینک طول λ را می‌توان به صورت

$$\lambda = \bar{\lambda} + e_1(x') + e_2(y') \quad (۱۷)$$

محاسبه کرد.

بنابراین برای یافتن e_1 باید دوبار از جدول استفاده کرد، یک بار برای یافتن $e_1(x)$ و دیگر بار برای یافتن $e_1(x')$ ، و از جدول یک بار برای یافتن $e_2(y')$ استفاده می‌شود. در مابقی کار، تنها باید جمع و تفریق ساده انجام شود. طرز عمل ساده‌تر از روش بطلمیوس است، ولی به دقت آن نیست.

به طوری که دیدیم، خوارزمی در جدولهای خود از «تاریخ یزدگردی» استفاده کرده است. بنابراین می‌توانیم با اطمینان خاطر نتیجه بگیریم که وی «روش ایرانیان» را از جدیدترین نسخهٔ زیج شاه آموخته بوده که در زمان حاکمیت آخرین پادشاه ساسانی، یزدگرد سوم (۶۳۲-۶۵۱) تصنیف شده بود. برای ملاحظهٔ تاریخ این نسخه به صفحات ۴-۵ مقالهٔ مشترک بورکهارت و نگارنده^۱ (۱۹۶۸) مراجعه کنید.

در متون قدیمتر متأثر از متون هندی، به روشی مرتبط ولی اندکی پیچیده‌تر برمی‌خوریم که ما آن را «روش هندیان» می‌نامیم. این روش بر فرمولهای زیر استوار است:

$$x' = x + \frac{1}{4} e_2(y) \quad (۱۴)$$

1) Burckhardt, J. J., and B. L. Van der Waerden, Das astronomische System der persischen Tafeln, Centaurus 13, p. 1-28 (1968).

$$e_1(x') = (\max e_1) \cdot \sin x' \quad (15)$$

$$x'' = x' + \frac{1}{\gamma} e_1(x') \quad (18)$$

$$e_1(x'') = (\max e_1) \cdot \sin x'' \quad (19)$$

$$y' = y - e_1(x'') \quad (20)$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + e_1(x'') + e_2(y') \quad (21)$$

این روش را آریبهطه (آریبهطیه ابیات ۲۲-۲۴)، برهمگوبته (برهمسپهوته سدهانته، ۳۴-۳۸)، و دیگر منجمان هندی به کار برده‌اند. اختلاف آن در مقایسه با روش ایرانی آن است که جدول مربوط به $e_1(x)$ دوبار به کار می‌رود: یک بار با متغیر x' و یک بار با متغیر x'' . اما تفاوت اندک است زیرا $\frac{1}{\gamma} e_1(x')$ در اغلب حالتها کوچک است، به طوری که x'' که در (۱۸) تعریف می‌شود، چندان تفاوتی با x' ندارد. در مقاله‌ام با عنوان «موارد تطبیق روش محاسبات نجومی ایرانی و هندی»^۱، نشان داده‌ام که روش هندیان را می‌توان به عنوان تقریبی مطلوب توصیف کرد، در صورتی که بپذیریم مؤلفی یونانی پیش از بطلمیوس، احتمالاً آپولونیوس پرگایی، کار را با مدل فلک تدویری که به وسیله یک دایره خارج مرکزی حمل می‌شود، آغاز کرده باشد. تصور می‌کنم که این مؤلف مانند مجسطی بطلمیوس، یک «نقطه فلک معدل المسیر» را مفروض گرفته است به طوری که حرکت روی فلک خارج مرکزی از نقطه فلک معدل المسیر یکنواخت به نظر برسد. وی تقریبی را ابداع کرد که استفاده‌کنندگان از جدولها را قادر ساخت که تنها از جدولهای تک مدخلی و از جمع و تفریق استفاده کنند. بطلمیوس مدل فلک معدل المسیر را پذیرفت اما از تقریب استفاده نکرد.

از سوی دیگر، مؤلفان هندی روش ساده محاسبه را، احتمالاً بدون آگاهی از اینکه این روش بر پایه فرض خارج از مرکزی با نقطه فلک معدل المسیر استوار است، در پیش گرفتند. به نظر می‌رسد این تنها فرضی است که مدل فلک معدل المسیر را توضیح می‌دهد، اما خود بطلمیوس هیچگونه توجیهی برای آن ارائه نمی‌دهد. به علاوه تنها فرض برای توجیه روش پیچیده‌تر «روش هندیان» است که مؤلفان هندی نیز برای آن توجیهی ندارند.

۱۲. منابع خوارزمی

اینک در وضعی قرار داریم که می‌توانیم به بحث درباره منابع آثار خوارزمی، به ویژه جبر او، بپردازیم.

1) Van der Waarden, B. L. "Ausgleichspunkt, Methode der Perser und Indische Planetenrechnung", Archive for History of Exact Sciences 1. p. 107-121 (1961).

سه فرضیه مطرح شده‌اند. وی ممکن است از منابع کلاسیک یونانی، یا منابع هندی، یا نوشته‌های عامه پسند متعلق به سنت یونانی مآبی یا سنت پیش از یونانی مآبی استفاده کرده باشد.

آن گونه که تومر در مقاله‌اش در زندگینامه علمی دانشوران متذکر می‌شود، هم جبر یونانی و هم جبر هندسی بسی پیشرفته‌تر از سطح مقدماتی اثر خوارزمی بوده‌اند، و هیچ یک از آثار شناخته شده در هر یک از این فرهنگها، شباهتی در شیوه عرضه مطالب به اثر خوارزمی ندارند. به طوری که دیده‌ایم، برهانهای روشهای حل معادله‌های درجه دوم با برهانهایی که در اصول اقلیدس می‌بینیم، کاملاً تفاوت دارند. همچنین، بنابه گفته تومر، جبر خوارزمی نظیر آثار جبری سنسکریت کاملاً لفظی است، و به تنها رساله جبری یونانی موجود، اثر دیوفانتوس، که به بیان نمادی بسیار نزدیک شده بود، شباهت ندارد. حس می‌کنم حق با تومر باشد که: می‌توانیم این امکان را که اثر خوارزمی از ریاضیات یونانی کلاسیک تاثیر زیادی پذیرفته است، رد کنیم.

اما به نفع فرض هندی بودن منبع اثر خوارزمی، می‌توان استدلال کرد که وی رساله‌ای درباره ارقام هندی نوشته، دو مورد از برآوردهای او برای π در منابع هندی نیز دیده می‌شوند، و اینکه در فصل ۱۸ برهمسپهوت سدهانت برهمگوپته، بیت ۱۸، قاعده‌ای کلی برای حل معادله درجه دومی از نوع (۴) ارائه شده است. برای ملاحظه این قاعده، ن. ک. کولبروک: جبر با حساب و مساحی از سنسکریت برهمگوپته و بهاسکره^۱.

خوارزمی در یک مورد، در بخش باب المساحة، اشاره‌ای به مناقش دارد. پس از ذکر برآورد $\frac{1}{7} + 3$ برای π ، که «عموماً در کارهای روزمره از آن استفاده می‌شود اما کاملاً دقیق نیست»، می‌گوید:

اما ریاضیدانان دو قاعده دیگر برای آن دارند، یکی از آنها چنین است: قطر را در خودش ضرب کن، سپس در ده ضرب کن، و سپس جذر حاصلضرب را بگیر. جذر محیط را می‌دهد. قاعده دیگر در بین منجمان آنها (تاکید از من است) به کار می‌رود و از این قرار است: قطر را در شصت دو هزار و هشت صد و سی و دو ضرب کن و سپس آن را بر بیست هزار تقسیم کن. خارج قسمت محیط را می‌دهد.

توجه کنید که آریبیطه برآورد π را دقیقاً به همان شکل به صورت

$$62832/20000$$

می‌نویسد.

قبلاً دیده‌ایم که خوارزمی روش ایرانیان و هندیان را در تصنیف جدولهای نجومی‌اش به کار برده است. می‌توانیم فرض کنیم که وی برآورد خود برای π را از یکی از این منابع اقتباس کرده است.

1) Colebrooke: Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara, p. 346.

پس از فرضهای یونانی و هندی، می‌توانیم فرض سومی را مورد بحث قرار دهیم که هرمان هانکل در کتاب «تاریخ ریاضیات»^۱ مطرح کرده و ویدمان^۲ در مقاله «خوارزمی» در دایره‌المعارف اسلام مجلد II، ص ۹۱۲-۹۱۳، از آن جانبداری کرده است. این مؤلفان هرگونه نفوذ یونانی در خوارزمی را نفی می‌کنند و از نفوذ سنت بومی سریانی-ایرانی جانبداری می‌کنند.

با توجه به ارتباط نزدیک بین رساله عبری میشتات هلمیدوت و هندسه خوارزمی، به نظر باید مفهوم «سریانی-ایرانی» را گسترش دهیم تا عبری و سایر سنتهای عامی دیگر را نیز شامل شود. باید وجود سنتی از ریاضیات عامیانه در مصر و خاور نزدیک را در دوره‌های یونانی مآبی و قبل، از یونانی مآبی بپذیریم. نمونه‌هایی از آنها، پاپیروسهای ریاضی مصری‌اند که در صفحات ۱۶۴-۱۷۰ و ۱۷۳-۱۷۷ کتاب «هندسه و جبر در تمدنهای باستان»^۳ مورد بحث قرار داده‌ام، و نیز «متریکا»ی هرون اسکندرانی است که در صفحات ۱۸۱-۱۸۸ همان کتاب از آن بحث کرده‌ام.

سالومون گانتز ویراستار «میشتات هلمیدوت» قویاً از فرض هانکل و ویدمان پشتیبانی کرده است. تصور می‌کنم بهترین کار آن باشد که بخش پایانی مقدمه وی را بر باب المساحه خوارزمی نقل کنم:

خوارزمی، مخالف نفوذ یونانی

در دانشگاه بغداد، موسوم به بیت‌الحکمه، که به دست مأمون (۸۱۳-۸۳۳) تأسیس شد، و جایی که خوارزمی تحت حمایت خلیفه سرگرم کار بود، همانجا و در آن زمان یکی از معاصران مستتر خوارزمی به نام حجاج بن یوسف بن مطر نیز شکوفایی یافت. این مرد از ممتازترین پیشکسوتان مکتب یونانی بود که برای پذیرش دانش یونانی از سوی اعراب به کار مشغول بود. وی تمام زندگی‌اش را وقف ترجمه آثار یونانی به عربی کرده بود. حجاج پیشتر در حمایت هارون الرشید (۷۸۶-۸۰۹) ترجمه عربی اصول اقلیدس را پدید آورده بود. وقتی مأمون به خلافت رسید، حجاج با آماده کردن ویرایش مذهب دیگری از ترجمه اصول قبلی، کوشید تا نظر مأمون را جلب کند. بعداً (۸۲۹-۸۳۰) وی مجسطی را ترجمه کرد. اما خوارزمی هرگز ذکری از این همکار خود به میان نمی‌آورد و هرگز اشاره‌ای به آثار او نمی‌کند. گرچه ترجمه خوبی از اثر اقلیدس و هندسه‌اش به عربی به دست این همکار در دسترس او بود، ولی وقتی وی درباره هندسه مطلب می‌نگارد، کاملاً این ترجمه‌ها را نادیده می‌گیرد. برعکس، در دیباجة کتاب جبرش، خوارزمی به روشنی بر هدف خود از نوشتن رساله عامه پسندی تأکید می‌ورزد که برخلاف ریاضیات نظری یونانی، مقاصد و نیازهای مردم را در امور مربوط به ارث، وصایا، دعاوی حقوقی، دادوستد و بازرگانی، مساحی زمینها و کندن آب‌راهها برآورده کند. بنابراین خوارزمی برای ما نه به عنوان شاگردی از مکتب یونانی بلکه، کاملاً برعکس، به عنوان

1) Hankel, Hermann, "Geschichte der Mathematik" p. 259-264, Leipzig, 1874. 2) H. Wiedemann 3) Van der waerden, B. L., "Geometry and Algebra in Ancient Civilizations", p. 181-188.

یکی از مخالفان حجاج و مکتب یونانی، و نمایندهٔ دانشهای عامی بومی جلوه می‌کند. خوارزمی در فرهنگستان بغداد، بیشتر نمایندهٔ واکنش در برابر ورود ریاضیات یونانی بود. جبر او بیشتر به عنوان اعتراضی در برابر ترجمهٔ آثار اقلیدس و در برابر تمامیت روند پذیرش دانشهای یونانی ما را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

بخش دوم ثابت بن قره

صابئیان

دانشمند بزرگ، ثابت بن قره حرانی (۸۳۶-۹۰۱) یک «صابئی» اهل حران بود. این کلمه به چه معنی است؟ من در تأویل خود از اثر دو جلدی استاندهٔ کوولسون «صابئیان و گرایش صابئی»^۱ پیروی می‌کنم. به نظر کوولسون، باید بین دو نوع صابئی تفاوت قائل شویم: صابئیان حقیقی یا صابئیان کلدانی و شبه صابئیان حرانی، که ثابت بن قره و البتانی از آنان بودند.

از صابئیان کلدانی در قرآن (سوره بقره، آیه ۶۲، و سوره حج آیه ۱۷) از جملهٔ مؤمنان به پروردگار که کتاب مقدس دارند و گرفتار عقوبت نمی‌شوند، یاد شده است.

این صابئیان چه کسانی بودند؟ به عقیده کوولسون، آنها با ماندایی‌ها یکی هستند؛ فرقه‌ای عرفانی که در جنوب بین‌النهرین نزدیک باتلاقها و دریاچه‌های بصره روزگار می‌گذرانده‌اند؛ ن.ک. کوولسون: صابئیان، صفحات ۱۰۰-۱۴۳، و دراوژ: ماندایی‌های عراق و ایران (۱۹۶۲): ۲.

صابئیان حران با صابئیان حقیقی که در قرآن از آنها یاد شده کاملاً متفاوت‌اند. مسعودی مورخ می‌گوید که صابئیان «که در واسط و در بصره عراق منزل دارند، با صابئیان حران از لحاظ صورت ظاهر تفاوت دارند» (ن.ک. کوولسون: صابئیان II، صفحه ۳۷۶). مذهب آنها هم چیز دیگری بود. از نظر ماندایی‌های جنوب بین‌النهرین، هفت ستاره و بروج دوازده‌گانه نیروهای اهریمنی محسوب می‌شدند، اما حرانیها معابدی برای خدایان اجرام آسمانی بنا کرده بودند (ن.ک. کوولسون II، صفحات ۱-۵۲، و ۳۶۶-۳۷۹).

در فصل حاضر، عمدتاً به صابئیان حرانی می‌پردازیم. شیوهٔ زندگی آنها از چندین لحاظ به «زندگی فیثاغورسیان»، آن گونه که یامبلیخوس فیثاغورسی به توصیف آن پرداخته (ن.ک. به کتاب نگارنده «فیثاغورسیان»^۲، صفحات ۳۱۹-۳۲۰)، شباهت دارد. مثلاً، صابئیان نیز مانند فیثاغورسیان مجاز به

1) Chwolson, D. "Die Ssabier und der Ssabismus", St. Petersburg 1856, reprinted by Oriental Press, Amsterdam, 1965. 2) Drower, E. S., "The Mandaean of Iraq and Iran.

(1962). 3) Van der Waerden, B. L. "Die Pythagoreer".

خوردن حیوانات نبودند.

این شباهتها تصادفی نبود: صابئیان به خوبی آگاه بودند که ادامه دهنده سنت فیثاغورسیان‌اند. می‌دانیم که ثابت بن قره دو نوشته فیثاغورسی، یعنی دیباچه مربوط به حساب نیکوماخوس گرازانی^۱، و بخشی از تفسیر پروکلوس را بر ابیات زرین فیثاغورسی^۲، از یونانی به عربی ترجمه کرد. ن. ک. کوولسون، صابئیان، مجلد I، صفحه ۵۹۹.

اینک به نقل این ماجرا می‌پردازیم که چطور شد که حرانیها خود را «صابئی» نامیدند. داستان اعجاب‌انگیز و باورنکردنی است، اما اگر شهادتهایی را که در کتاب کوولسون نقل شده بخوانیم چاره‌ای جز پذیرش آن نداریم.

مؤلفی مسیحی به نام ابو یوسف یسوع القطعی که در سالهای پایانی سده نهم می‌زیسته، کتابی به منظور روشن کردن «آموزه‌های حرانیان که در زمان ما به صابئیان مشهورند» به نگارش در آورده است. ظاهراً گزیده‌ای نقل به معنی از این کتاب در فهرست النذیم (ن. ک. کوولسون، جلد ۲، صفحات ۱۴-۱۹). در دسترس ماست. ابو یوسف حکایت می‌کند که مأمون خلیفه در هنگام لشکرکشی علیه امپراطور بیزانس به حران آمد و از ساکنان آنجا پرسید:

«مسیحی هستید؟» «نه»

«جهودید؟» «نه»

در مقابل پرسش بعدی که «آیا کتاب مقدس یا پیامبری دارید» پاسخ صریحی نگرفت. این بود که خلیفه گفت: یا به اسلام بگروید یا به یکی از ادیانی که در قرآن مباح دانسته شده است، وگرنه در بازگشت از این سفر، شما را به قتل می‌رسانم.

شیخی از حران که با شریعت اسلام آشنایی داشت (در ازای دستمزد خوبی) به آنان چنین سفارش کرد: خود را صابئی بخوانید زیرا نام یکی از مذاهب مباح در قرآن است. آنها چنین کردند و از آن پس صابئی نامیده شدند.

زندگی ثابت بن قره

بنابر فهرست النذیم، ثابت بن قره حرانی در ۹۰۱ میلادی [۲۷۰ هجری] در گذشت و ۷۷ سال شمسی زیست. از این گفته چنین برمی‌آید که او در ۸۲۴ میلادی [۱۹۲ هجری] پا به عرصه زندگی گذاشته است، اما النذیم می‌نویسد که او در ۸۳۶ میلادی [۲۰۵ هجری] به دنیا آمده است و منابع دیگر ۸۲۶ میلادی [۱۹۵ هجری] را به عنوان سال تولد او می‌دهند.

1) Nikomachos of Gerasa [نیکوماخوس الجهراسنی] 2) Phytagorean Golden Verses [در نوشته‌های فارسی قدیم: نیکوماخوس الجهراسنی]

وی در زادگاه خود حران با صراف‌ی روزگار می‌گذرانید، اما اندیشه‌هایش دربارهٔ دین، او را دچار تناقض کرد (ن. ک. کوولسون I، صفحات ۴۸۲-۴۹۰). او را نزد عالترین مقام روحانی بردند و این شخص آموزه‌های او را رفض‌منشانه اعلام و او را از ورود به عبادتگاه منع کرد. به نظر کوولسون، این فلسفه نو افلاطونی ثابت بود که حکم رفض گرفت. وی ابتدا عقاید خود را باطل اعلام کرد، اما بعداً دوباره آنها را بر زبان جاری کرد. او را تکفیر کردند و وی شهر را ترک گفت. قضا را به دیدار محمد بن موسی شاکر، یکی از سه «بنوموسا»ی مشهور: محمد، احمد و حسن، نایل آمد که آنان گردآورندگان کتاب و از حامیان دانش بودند (ن. ک. سوتر: ریاضیدانان و منجمان عرب، صفحات ۲۰-۲۱). این محمد بن موسی، ثابت را به بغداد برد، او را در خانهٔ خود پذیرفت، و به خلیفه معرفی کرد. همهٔ این وقایع باید پیش از ۸۳۷ میلادی [۲۱۶ هجری] روی داده باشد، زیرا محمد بن موسی در ژانویهٔ ۸۷۳ [۲۵۲ هجری] در گذشته است. به عقیدهٔ الندیم والقفطی (ن. ک. کوولسون، I، صفحهٔ ۴۸۳، و II، صفحهٔ ۵۳۲) ثابت توانست یک خانقاه صابئی برای سراسر عراق در بغداد تأسیس کند. با این کار، موقعیت صابیّان تثبیت شد و آنها در تمام کشور مورد احترام قرار گرفتند.

ثابت به خاطر نوشته‌هایش در زمینه‌های پزشکی، فلسفه، ریاضیات، نجوم، و احکام نجوم قدر فراوان یافت. او مترجمی بسیار توانا از زبانهای یونانی و سریانی به عربی نیز بود. وی آثار اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، اطولوقوس، بطليموس، نیکوماخوس، پروکولوس، و دیگران را ترجمه کرد (ن. ک. کوولسون I، صفحات ۵۵۳-۵۶۰).

باره‌برائوس^۱ در وقایع‌نامهٔ خود به زبان سریانی، روایت می‌کند که ثابت بن قره حدود ۱۵۰ اثر به زبان سریانی تألیف کرده است. برای ملاحظه آثار او در نجوم و ریاضیات ن. ک. سوتر: ریاضیدانان و منجمان عرب (۱۹۰۰)، صفحات ۳۴-۳۸، و تکمله، صفحات ۱۶۲-۱۶۳. من در اینجا به سه رساله قناعت می‌کنم: یکی در نجوم، یکی در جبر، و یکی در حساب.

درباره حرکت فلک هشتم

ثابت رسالهٔ بسیار جالبی نوشته است که تنها در صورت ترجمهٔ لاتینی با عنوان «دربارهٔ حرکت فلک هشتم»^۲ در دسترس است. متن لاتین به وسیلهٔ کارمودی^۳ منتشر شد: «آثار نجومی ثابت بن قره»^۴. ترجمه‌ای به انگلیسی همراه با تفسیر به توسط نوگه باوئر در گزارشهای انجمن آمریکایی فلسفه^۵ ارائه شده

1) Suter, H.: "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke," Leipzig, 1900, . p. 20. 2) Barhebraeus 3) De motu octave spere 4) Carmody 5) The Astronomical Works of Tabit b. Qurra (Berkeley, 1960, p. 84-113) 6) The American Philosophical Society (106, p. 291-299)

است.

«فلک هشتم» ثابت، فلک ثوابت است. هفت فلک ماه، خورشید و پنج «سیاره» را باید در درون این فلک تصور کرد.

در نجوم جدید، ستارگان ثابت تقریباً بی حرکت پنداشته می شوند و فرض می شود که نقاط اعتدالین حرکت راجع اندکی نسبت به ستارگان ثابت دارند که همان «تقدیم اعتدالین» است. در نظریه بطلمیوس، اعتدالین ثابت اند، و فرض می شود که ستاره ها حرکت کندی به پیش به اندازه ۱ درجه در ۱۰۰ سال دارند. ثابت متوجه شد که این مقدار اندک با رصدها مطابقت ندارد. حداقل پس از عصر بطلمیوس، در صورتی که ارسادهای بسیار دقیق انجام شده در زمان حکمرانی مأمون پذیرفته شوند، حرکت ستارگان نسبت به اعتدالین باید خیلی بیشتر باشد. برای توضیح این مطلب، ثابت بن قره حرکتی نوسانی (دوره ای) برای فلک ستارگان ثابت، موسوم به «حرکت فلکی» را مفروض گرفت.

پدیده ای دیگر که ثابت درصدد توضیح آن بود، کاهش ظاهری میل دایره البروج بود. یونانیان باستان مقدار تقریبی ۲۴° را به کار می بردند، بطلمیوس از برآورد کوچکتری منسوب به اراتستن استفاده کرده بود، و ارسادگران بغداد میل بسیار کمتر، یعنی ۲۳°۲۳' را به دست آورده بودند.

ثابت حالا مدلی ساخته بود که هر دو پدیده را توضیح می داد: حرکت ظاهری فلک ثوابت نسبت به نقاط اعتدالین، و کاهش ظاهری میل. وی دو نقطه متقابل «آغاز برج حمل» و «آغاز برج میزان» بر فلک ثوابت را دارای حرکتی کند بر دایره های صغیره ای فرض کرد به طوری که مرکزهای دایره ها، نقاط متقابلی از یک فلک ثابت اند. برای توضیح مفصل این مدل، خواننده را به مقاله فوق الذکر نوگه باوئرارجاع می دهم. رساله ثابت بن قره با دو جدول کوچک به پایان می رسد که به کمک آنها می توان حرکت دو نقطه متغیر «آغاز برج حمل» و «آغاز برج میزان» را محاسبه کرد.

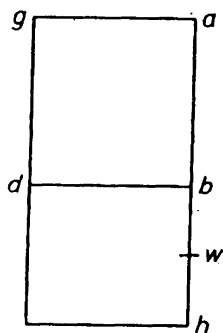
تحقیق هندسی صحت حل معادلات درجه دوم

رساله کوتاه ثابت بن قره با عنوان «دربارۀ تحقیق درستی حل مسائل جبری با برهانهای هندسی^۱»، در دستنویس منحصر به فرد ایاصوفیه ۲۴۵۷,۳ محفوظ مانده است. این رساله به ترجمه آلمانی و همراه با تفسیر به توسط لوکی^۲ در ۱۹۴۱ در گزارش مذاکرات فرهنگستان لایپزیگ منتشر شد^۳. اینک بخشهایی از ترجمه لوکی را به انگلیسی ترجمه می کنم. از آنجا که پایه منطقی رساله بی نقص است، خطری در این کار نمی بینم. نمودارها از ترجمه لوکی برگرفته شده اند و نه از دستنویس اصلی.

(۱) قول فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیه.

(۲) Luckey (۳) Berichte über die verhandlungen der Sächs. Akad. Leipzig 93, p. 93-112

اغلب مسائل جبر را می‌توان به سه صورت اصلی (اصول، ریشه‌ها یا عناصر) تحویل کرد: اولین صورت اصلی چنین است: مال و جذرهایی برابر اعدادند. راه و روش حل بنابر ششمین قضیه مقاله دوم [اصول] اقلیدس چنین است که می‌خواهم توصیف نمایم: مال را برابر مربع $abgd$ می‌گیریم (شکل ۴) و bh را برابر همان مضربی از واحد می‌گیریم که پاره‌خطهایی نظیر $abgd$ عدّه مفروض جذرها با آن اندازه گرفته شده‌اند، و سطح dh را کامل می‌کنیم. چون مال همان $abgd$ است، جذر آشکارا ab است، و در حوزه محاسبات و اعداد، این جذر برابر با حاصلضرب ab و واحدی است که پاره‌خطها با آن اندازه گرفته شده‌اند. اما عدّه‌ای از این واحدها برابر با عدّه مفروض جذرها در bh جای دارند، بنابراین حاصلضرب ab و bh برابر است با جذرها در حوزه محاسبه و عدد. اما حاصلضرب ab و bh مساحت dh است زیرا ab برابر bd است. بنابراین مساحت dh به این طریق برابر جذرهای مسأله است. در نتیجه تمامی مساحت gh برابر است با مال به علاوه جذرها.



شکل ۴

توضیح ثابت بن قره خسته‌کننده است، زیرا وی نمی‌تواند مساحت یا پاره‌خطی را با عددی برابر گیرد. بنابراین واحد طولی را مطرح می‌کند که من آن را با ϵ نشان می‌دهم. اگر معادله مفروض

$$x^2 + mx = n$$

باشد که در آن x عدد مجهول است، در جایی که m و n اعداد مفروض‌اند، وی آن را به معادله هندسی

$$x^2 + m\epsilon x = n\epsilon^2$$

برمی‌گرداند که در آن x و ϵ پاره‌خط‌اند. وی چنین ادامه می‌دهد:

اینک، مال و جذرها مجموعاً برابر عددی مفروض‌اند. بنابراین gh معلوم و برابر است با حاصلضرب ah و ab ، زیرا ab برابر ag است. لذا حاصلضرب ha و ab معلوم است، و پاره خط bh معلوم است، زیرا عده واحدهای آن معلوم است. بنابراین همه چیز به یک مسئله معروف هندسی تحویل شده است؛ یعنی مسئله: پاره خط bh معلوم است. بر آن پاره خط ab اضافه شده، و حاصلضرب ha و ab معلوم است.

اما در قضیه ۶ مقاله دوم اصول ثابت شده است که هرگاه پاره خط bh را در نقطه w نصف کنیم، حاصلضرب ha و ab همراه با مربع bw برابر با مربع aw است. اما حاصلضرب ha و ab معلوم است، و مربع bw معلوم است. بنابراین مربع aw ، در نتیجه aw معلوم است، و اگر bw معلوم را از آن کم کنیم، ab به عنوان معلوم حاصل می‌شود، و این همان جذر است. و اگر آن را در خودش ضرب کنیم، مربع $abgh$ ، یعنی مال، معلوم می‌شود که همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. اینک به جالبترین قطعه در رساله می‌رسیم:

این رویه با رویه کسانی که در حل این مسئله روش جبری را اختیار می‌کنند، موافقت دارد. وقتی آنها تعداد جذرها را نصف می‌کنند، درست مثل این است که ما نصف پاره خط bh را اختیار می‌کنیم، و وقتی آن را در خود ضرب می‌کنند، درست مثل زمانی است که مربع پاره خط نصف شده bh را برمی‌گیریم. وقتی آنها به حاصل عدد (مفروض) را اضافه می‌کنند، درست مثل آن است که ما حاصلضرب ha و ab را اضافه می‌کنیم تا مربع مجموع ab و نصف پاره خط را به دست آوریم. جذر گرفتن آنها از حاصل مثل این گفته ماست که: مجموع ab و نصف پاره خط، به محض معلوم شدن مربع آن، معلوم است.

جمله بعدی در متن مخدوش است و خوانده نمی‌شود. پایان آن از این قرار است:

... برای آنکه باقیمانده را به دست آورند، آن گونه که ما ab را به دست آوردیم. آنها باقیمانده را در خودش ضرب می‌کنند، همان گونه که ما مربع ab ، یعنی مال، را تعیین کردیم.

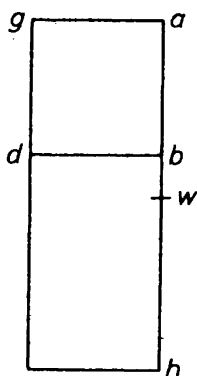
ثابت به همان طریق با دومین نوع معادله، یعنی

$$x^2 + b = ax$$

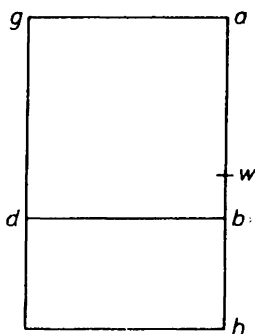
یا «مال و عددی برابر جذرهاست» عمل می‌کند. می‌گوید:

راه و روش حل بنابر مقاله دوم اقلیدس به کمک قضیه ۵ چنین است که شرح می‌دهم: مال را به شکل مربع $abgd$ (شکل ۵) در می‌آوریم و ah را برابر با آن مضرب از واحد می‌گیریم که پاره خطهای موجود در عده مفروض جذرها با آن اندازه گرفته شده‌اند. آشکار است که ah درازتر از ab است زیرا جذرها، که در حوزه محاسبه حاصلضرب ga و ah قرار دارند، از مال بزرگترند. سطح

gh را کامل و مانند قبل ثابت می‌کنیم که برابر جذرها (یعنی، برابر جمله ax) در حوزه محاسبه است. و اگر bg ، که مال (یعنی جمله x^2) است از آن کسر شود، dh باقی می‌ماند که برابر عدد (مفروض) است. پس dh معلوم، و برابر با حاصلضرب ab و bh است، و پاره خط ah معلوم است. بنابراین حالا مسأله معادل است با تقسیم پاره خط مفروض ah در b به طوری که حاصلضرب ah و hh معلوم باشد.



شکل ۵



شکل ۶

اما در قضیه ۵ مقاله دوم اقلیدس ثابت می‌شود که اگر ah را در w نصف کنیم، حاصلضرب ab و bh همراه با مجذور bw برابر با مجذور aw است. ولی aw معلوم است، و مجذور آن معلوم

است، و حاصلضرب ab و bh معلوم است. بنابراین مجذور bw به عنوان باقیمانده معلوم است، در نتیجه bw معلوم است، و هرگاه آن را از aw (شکل ۵) کسر کنیم یا بر آن بیفزاییم (شکل ۶)، ab به عنوان معلوم حاصل می‌شود، و این همانا جذر است. و اگر آن را در خودش ضرب کنیم، $abgd$ معلوم است و این همانا مال است و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. این رویه نیز با رویه اهل جبر در محاسبه مسأله سازگاری دارد. زیرا اجازه استفاده از جمع و تفریق پاره خط wb را در هر دو طرف می‌دهد.

فکر می‌کنم نیازی به ترجمه سومین بخش متن نباشد که در آن معادله «عدد و ریشه‌ها برابر مال‌اند».

به کمک قضیه II6 اقلیدس حل می‌شود و سازگاری آن با راه حل جبری مانند دو حالت پیشین ثابت می‌شود.

در رساله خوارزمی، علم جبر با دو عبارت «الجبر و المقابله» مشخص می‌شود. ثابت بن قره عبارت دوم را کنار می‌گذارد و تنها به «حل جبری» در مقابل راه حل خودش از راه هندسه، اشاره می‌کند. ثابت بن قره جبردانان را، که خوارزمی از آنان است، «اصحاب جبر» یا «اهل جبر» می‌نامد. در متن، آنان در مقابل مهندسان [هندسه‌دانان] قرار دارند که ثابت یکی از اینهاست.

به نظر ثابت، باید به تفصیل شرح داده شود که راه‌حل‌های جبری با راه‌حل‌های هندسی اقلیدس هماهنگی کامل دارند. لوکی از این مطلب نتیجه می‌گیرد که دست کم برای برخی خوانندگان او [ثابت]، این ارتباط بین هندسه و جبر تازگی داشته، و وی [لوکی] این سؤال را مطرح می‌کند: آیا موضوع برای «اهل جبر» تازگی داشته است؟ به نظرم پاسخ باید «آری» باشد، زیرا در غیر این صورت کل رساله ثابت بی‌ارزش جلوه می‌کند.

به طوری که در بخش مربوط به خوارزمی دیده‌ایم، دوگرایش یا دو دسته مخالف بین ریاضیدانان و منجمان در بغداد وجود داشته است. خوارزمی نماینده یکی از این گرایشها بود که در جدول‌های نجومی‌اش از منابع هندی و ایرانی استفاده کرده، و کتاب «جبر» را نوشته و آن را به «آنچه آسانترین و مفیدترین موارد در حساب، نظیر آنچه مردم دایماً در قضایای ارث لازم دارند» و نظایر آنها محدود کرده است. از سوی دیگر به قول گانتز، «مکتب یونانی که برای پذیرش علوم یونانی از جانب اعراب می‌کوشند» را داریم. حجاج، که آثار اقلیدس و بطلمیوس را ترجمه کرده، و ثابت بن قره به مکتب یونانی تعلق دارند.

دو باره اعداد متحاب

دو عدد طبیعی m و n را متحاب می‌نامند هرگاه هریک از آنها برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی دیگری باشد. مثلاً مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی ۲۸۴ عدد ۲۲۰ است و مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی

۲۲۰ عدد ۲۸۴ است. این زوج عدد متحاب پیشتر از آن بر یونانیان باستان معلوم بود (ن. ک. «بیداری علم»^۱ از این نگارنده^۲، جلد I، صفحه ۹۸).

ثابت بن قره «کتابی درباره تعیین اعداد متحاب» به رشته تحریر در آورده است. وی ثابت کرد: اگر $1 - p = 3 \cdot 2^{n-1}$ و $1 - q = 3 \cdot 2^{n-1}$ و $r = 9 \cdot 2^{2n-1}$ اعداد اول باشند، آنگاه

$$N = 2^n r \quad \text{و} \quad M = 2^n pq$$

اعداد متحاب‌اند.

کتاب ثابت به وسیله وپکه تفسیر و بخشی از آن با عنوان زیر ترجمه شده است: شمه‌ای درباره نظریه‌ای که ثابت بن قره بر حساب نظری یونانیان افزوده است.^۳

قاعده ثابت بن قره برای به دست آوردن زوج اعداد متحاب به وسیله پی‌یر دو فرما و رنه دکارت از نو کشف شدند. غیر از زوج مشهور ۲۲۰ و ۲۸۴، فرما زوج دیگری، یعنی

$$17296 = 2^2 \times 23 \times 47$$

$$18416 = 2^4 \times 1151$$

را یافت (مجموعه آثار^۴، صفحات ۲۰-۲۱). بی‌تردید وی آن را بنابر قاعده ثابت بن قره با $n = 4$ به دست آورده است.

دکارت قاعده ثابت بن قره را به صورتی صریحتر فرمولبندی و نمونه سومی را ارائه کرد:

$$9363584 = 2^7 \times 191 \times 383$$

$$9437056 = 2^7 \times 73727$$

(رنه دکارت، مجموعه آثار^۵، جلد II، صفحات ۹۳-۹۴ و صفحه ۱۴۸).

حال این سؤال مطرح می‌شود: ثابت بن قره چگونه این قاعده را به دست آورده است؟ زوج مشهور ۲۲۰ و ۲۸۴ تجزیه‌ای به شکل

$$2^2 r \quad \text{و} \quad 2^2 pq$$

1) Van der Waerden, B. L. Science Awakening, New York: Oxford University Press, 1961.

۲) کتاب فی الاعداد المتحابه

3) Woepcke, F. Notice sur une théorie ajoutée par Thābit ben Korra á l'arithmétique spéculative des Grecs, Journal asiatique (4) 20, p. 420-429 (1852).

4) Oeuvres 5) René Descarte, Oeuvres.

دارد که در آن p ، q ، و r اعداد اول اند. پس ببینیم آیا می‌توانیم زوجی مانند

$$N = 2^n r \quad \text{و} \quad M = 2^n pq$$

به دست آوریم به طوری که M مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی N باشد و برعکس؟

تصور می‌کنم ثابت می‌دانست که مجموع کلیه مقسوم‌علیه‌های N (از جمله خود N) برابر است با

$$(1 + 2 + \dots + 2^n)(r + 1).$$

و اینکه مجموع کلیه مقسوم‌علیه‌های M برابر است با

$$(1 + 2 + \dots + 2^n)(pq + p + q + 1).$$

اما می‌خواهیم هر دو مجموع برابر $M + N$ شود. بنابراین باید داشته باشیم

$$r = pq + p + q \quad (۱)$$

و

$$(2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1) = 2^n pq + 2^n r. \quad (۲)$$

با قرار دادن (۱) در (۲)، شرطی برای p و q به دست می‌آید:

$$(2^{n+1} - 1)(pq + p + q + 1) = 2^n pq + 2^n(pq + p + q). \quad (۳)$$

بیان نحوه به دست آوردن (۳) به زبان «جبر لفظی» که ثابت آن را به کار برد، کاری است آسان، گرچه اندکی ناهنجاری دارد. به کمک اعمال جبر و مقابله، (۳) را می‌توان به صورت

$$2^n(p + q + 2) = pq + p + q + 1 \quad (۴)$$

ساده کرد.

با قرار دادن $P = p + 1$ و $Q = q + 1$ ، (۴) را می‌توان به صورت ساده‌تر

$$2^n(P + Q) = PQ \quad (۵)$$

در آورد.

با افزودن $۲^{۲n}$ به هر دو طرف و کسر کردن $۲^n(P + Q)$ ، حاصل برابر می‌شود با

$$۲^{۲n} = PQ - ۲^n P - ۲^n Q + ۲^{۲n}$$

یا

$$۲^{۲n} = (P - ۲^n)(Q - ۲^n).$$

دو عامل واقع در سمت راست یا هر دو مثبت‌اند یا هر دو منفی. اگر هر دو منفی می‌بودند، حاصلضرب آنها کمتر از $۲^{۲n}$ می‌شد، بنابراین باید مثبت باشند. چون حاصلضرب آنها $۲^{۲n}$ است، باید با فرض $P < Q$ ، داشته باشیم

$$P - ۲^n = ۲^{n-t}$$

$$Q - ۲^n = ۲^{n+t}$$

ساده‌ترین انتخاب برای t مقدار $t = ۱$ است، که به

$$P = ۲^n + ۲^{n-۱} = ۳ \times ۲^{n-۱}$$

$$Q = ۲^n + ۲^{n+۱} = ۶ \times ۲^{n-۱}$$

و بنابراین به جواب ثابت بن قره منجر می‌شود، یعنی

$$p = ۳ \times ۲^{n-۱} - ۱$$

$$q = ۳ \times ۲^n - ۱$$

$$r = PQ - ۱ = ۹ \times ۲^{۲n-۱} - ۱.$$

امکان دیگر $n = ۸$ و $t = ۷$ است که به زوج اعدادی منجر می‌شود که لژاندر آنها را در سال ۱۸۳۰ کشف کرد: $۲۳ \times ۳۳۰ \times ۲۵۷ \times ۲۸$ و $۱۹۱ \times ۸۵۲۰ \times ۲۸$.

در محاسبات قبلی، دو اتحاد جبری را دانسته گرفته‌ایم، یعنی

$$(p + ۱)(q + ۱) = pq + p + q + ۱ \quad (۶)$$

$$(P - ۲^n)(Q - ۲^n) = PQ - ۲^n P - ۲^n Q + ۲^{۲n} \quad (۷)$$

که اثبات هر دو به کمک روشهای مقاله ۲ی اقلیدس، آسان است. بنابراین شیوة استخراجی که هم اکنون ارائه شد در محدوده روشهای جبری است که ثابت آنها را می‌دانسته است.

پس از فرما و دکارت، لئونهارت اویلر^۱ اولین ریاضیدانی بود که به مسئله اعداد متحاب پرداخت. اویلر سه مقاله در این موضوع به نگارش در آورده که عنوان هر سه «در باره اعداد متحاب»^۲ است. در اولین مقاله به سال ۱۷۴۷ (مجموعه آثار^۳) اویلر نحوه استخراج قاعده ثابت بن قره را همراه با مطالبی که در اینجا ارائه شد، و فهرستی از ۳۰ زوج اعداد متحاب عرضه کرده است. در دومین مقاله به سال ۱۷۵۰ (مجموع آثار، همان مجلد پیشین، صفحات ۲۳-۱۰۷) اویلر شرحی کامل از روشهایش را عرضه و فهرست جامعتری شامل ۶۲ زوج ارائه کرده است. وی در این شرح دو مسئله را حل کرده است:

مسئله ۱. یافتن دو عدد متحاب apq و ar به طوری که p, q, r و r اول باشند. با نشان دادن مجموع کلیه مقسوم علیه های a با A ، و قرار دادن $P = p + 1$ و $Q = q + 1$ ، مانند قبل، معادله ای مشابه معادله (۵) ما، یعنی

$$a(P + Q) = (2a - A)PQ \quad (۸)$$

به دست می آورد.

با قرار دادن

$$\frac{a}{2a - A} = \frac{b}{c}, \quad (b, c) = 1$$

اوایلر تساوی

$$(cP - b)(cQ - b) = b^2$$

را به دست می آورد.

بنابراین، برای یافتن P و Q ، باید b^2 به دو صورت تجزیه شود.

با روشهایی مشابه، اویلر مسئله ۲ را حل می کند: یافتن دو عدد متحاب apq و ars .

در مقاله سومش، که پس از درگذشت او در مجموعه آثار^۴ به چاپ رسید، اویلر چهار نمونه دیگر را ارائه می کند که همه به شکل

$$ar \quad \text{و} \quad apq$$

هستند.

برای اطلاع بیشتر درباره اعداد متحاب ن. ک. مقاله پیمایشی ادوارد اسکات^۵.

1) Leonart Euler 2) De numeris amicabilebus 3) Opera Omnia, series prima. vol. 2, p. 59-61. 4) Opera Omnia, series prima, vol. 5, p. 353-369. 5) Edward B. Escott, Scripta Mathematica, 12, p. 61-72 (1946).

بخش سوم عمر خیام

شاعر، فیلسوف، ریاضیدان، و منجم ایرانی، عمر بن ابراهیم خیامی، که عملاً عمر خیام نامیده می‌شود، در نیمه دوم سده یازدهم میلادی [نیمه اول سده پنجم هجری] می‌زیست. شهرت او در دنیای غرب عمدتاً مبتنی بر ترجمه کاملاً آزاد حدود ۶۰۰ شعر کوتاه چهار مصرعی (رباعیات) او به توسط فیتز جرالده^۱ است. در سال ۱۰۷۴ میلادی [۴۴۳ هجری]، عمر خیام به اصفهان فرا خوانده شد که در آنجا گروهی از منجمان برجسته برای بنای رصدخانه‌ای گرد آمده بودند. این اثر می‌گوید «مبلغی گزاف برای این منظور صرف شده بود». ن. ک. آیدین صایلی: رصدخانه در اسلام.^۲

در اینجا ما عمدتاً به رساله عمر خیام «در براهین مسائل جبر و مقاله» می‌پردازیم. شرحی که می‌دهم بر ترجمه فرانسوی فرانتس وپکه^۳: جبر عمر خیامی (پاریس ۱۸۵۱)، استوار است. ترجمه‌ای انگلیسی از آن در سال ۱۹۵۰ به وسیله ویترو عرفات در مجله جامعه آسیایی سلطنتی بنگال چاپ شده است.^۴ برای ملاحظه ویرایش جدیدی از متن و ترجمه‌ای جدید به زبان فرانسه و شرح آن ن. ک. رشدی راشد و احمد جبار: اثر جبری خیام.^۵

عمر خیام در دیباچه کتاب «جبر» توضیح می‌دهد هدف از «فن جبر» تعیین کمیت‌های مجهول عددی یا هندسی است. این تمایز بین اعداد و کمیت‌های اندازه‌پذیر در سرتاسر رساله حفظ شده است. مؤلف، چهار نوع کمیت اندازه‌پذیر را برمی‌شمارد. خط، سطح، جسم صلب، و زمان. وی کمیت‌های با بیش از سه بعد، نظیر «مجنور-مجدور» و «درجه دوم-مکعب» را که برخی از جبردانان به کار می‌بردند، مستثنی می‌کند.

جبر عمر خیام

جبر عمر خیام عمدتاً هندسی است. وی ابتدا معادله‌های خطی و درجه دوم را به کمک روشهای

1) E. Fitzgerald 2) Aydin Sahili: The Observatory in Islam (Turk Kūrumu Basimevi, Ankara, 1960).

3) Franz Woepcke: L'algebre. d'Omar Alkhayyami (Paris, 1851).

[این متن به توسط زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب به فارسی ترجمه و در کتاب «حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر» به چاپ رسیده است (سلسله انتشارات انجمن آثار ملی، ۳۸، تهران ۱۳۳۹ ه. ش:)]

4) Winter, H. J. J. & W. Arafat, Journal of Royal Asiatic Society of Bengal, 16 p. 27-77.

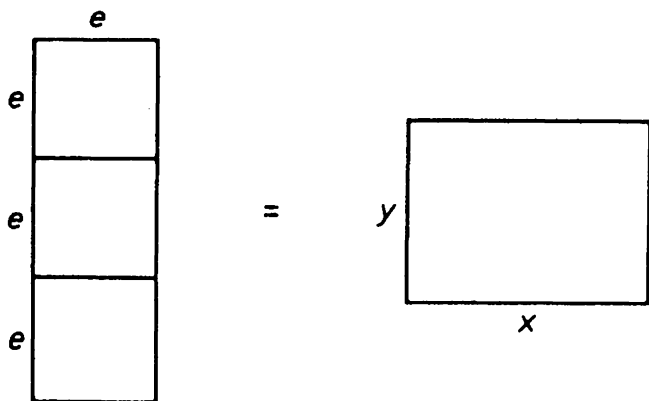
5) Roshdi Rashed and Ahmed Djebbar, L'Oeuvre algebraique d'Al-Khayyam, University of Aleppo, 1981.

هندسی که در اصول اقلیدس شرح داده شده، حل می‌کند و سپس نشان می‌دهد که معادله‌های درجه سوم را می‌توان از قطع دادن مخروطی با هم حل کرد.

خیام به خوبی می‌داند که مؤلفان قبل از او گاهی کمیت‌های هندسی را با اعداد برابر گرفته‌اند. وی به کمک ترفندی، با معرفی یک واحد طول، از این ناسازگاری منطقی دوری می‌گزیند. می‌نویسد:^۱

«هر وقت در این رساله گوئیم «عددی مساوی سطحی» است، در چنین موردی، مقصود ما از عدد سطحی است [چهار ضلعی] که زوایای آن قائمه باشند، و یکی از دو ضلع [مجاور] آن واحد باشد، و دیگری از حیث اندازه مساوی عدد مفروض باشد، بطوری که هر یک از اجزای اندازه‌ی آن مساوی ضلع دوم (یعنی آنکه واحد فرض کردیم) باشد.

در شکل ۷، من واحد طول را با e ، و اضلاع مستطیل را با x و y نشان داده‌ام. این شکل معادله $xy = 3e$ را تشریح می‌کند.



شکل ۷

عمر خیام نخست معادله‌های درجه دوم را به کمک روشهای معمول حل و سپس توجه خود را به معادلات درجه سوم معطوف می‌کند. برخی از آنها، مثل

$$x^3 + ax^2 = bx \quad (۱)$$

را می‌توان به معادله‌های درجه دوم تحویل کرد. اولین نوعی که نیاز به مقاطع مخروطی دارد.

«عددی معادل مکعبی است.»

(۱) مترجمان فارسی ترجیح داده‌اند به جای ترجمه این عبارت از متن انگلیسی، از ترجمه فارسی متن به توسط زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب (ن. ک. پانوش صفحه قبل)، بدون تغییر در رسم الخط، استفاده کنند.

یا، در نمادگذاری امروزی

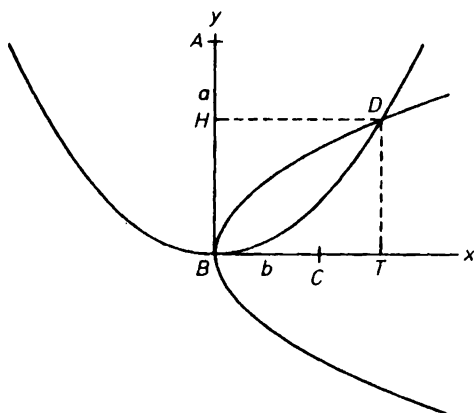
$$x^2 = N. \quad (2)$$

خیام ابتدا یک مسأله کمکی را حل می‌کند، یعنی مسأله

«یافتن دو پاره‌خط بین دو خط مفروض به طوری که چهارپاره خط یک تناسب مسلسل تشکیل دهند.»^۱

اگر دو خط مفروض $AB = a$ و $BC = b$ نامیده شوند، مسأله عبارت است از یافتن x و y ، به طوری که

$$a : x = x : y = y : b. \quad (3)$$



شکل ۸

خیام دو پاره‌خط عمود بر هم BA و BC را رسم و دو سهمی ترسیم می‌کند که رأس هر دو در B باشد. محور اولین سهمی BC و «پارامتر» آن BC است و محور سهمی دیگر BA و «پارامتر» آن BA است. در نمادگذاری امروزی، معادله‌های دو مقطع مخروطی عبارت‌اند از

$$y^2 = bx, x^2 = ay. \quad (4)$$

فرض کنید D نقطه تلاقی آنها باشد. در این صورت عمودهای $x = DH$ و $y = DT$ در (۴) و لذا در (۳) صدق می‌کنند.

(۱) می‌خواهیم دو خط بین دو خط [مفروض] بیابیم که هر چهار متوالیاً بر یک نسبت باشند. رساله عمر خیام، ترجمه فارسی دکتر غلامحسین مصاحب، صفحه ۱۸۷.

خیام سپس معادله (۲) را در نظر می‌گیرد که در آن N عدد مفروض است. او جسم متوازی‌السطوحی^۱ به قاعده e^2 و ارتفاع Ne ترسیم می‌کند. حالا او باید مکعبی معادل این جسم ترسیم کند. در حالت $N = 2$ ، این مسأله عیناً همان مسأله یونانی مشهور «تضعیف مکعب» است. هیپوکراتس خیوسی ثابت کرده بود که می‌توان این مسأله را به مسأله یافتن دو واسطه هندسی x و y بین دو پاره خط مفروض a و b تحویل کرد. خیام به همین ترتیب پیش می‌رود. او مسأله کمکی (۳) را با $a = e$ و $b = Ne$ حل، و ثابت می‌کند که اولین واسطه x ضلع مکعب مطلوب است.

همه اینها در متون یونانی از واضحات‌اند. به نوشته ائوتوکیوس، حل (۳) با قطع دادن دو سهمی به منایخموس منسوب است.

خیام سپس شش نوع معادله درجه سوم را پیش رو می‌نهد که در آنها یک دو جمله‌ای با یک تک جمله‌ای برابر گرفته می‌شوند، یعنی

$$x^3 + ax = b \quad (5)$$

$$x^3 + b = ax \quad (6)$$

$$x^3 = ax + b \quad (7)$$

$$x^3 + ax^2 = b \quad (8)$$

$$x^3 + b = ax^2 \quad (9)$$

$$x^3 = ax^2 + bx. \quad (10)$$

در اصطلاح خیام، معادله (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود،

«مکعبی و (تعدادی) اضلاع معادل عددی‌اند».

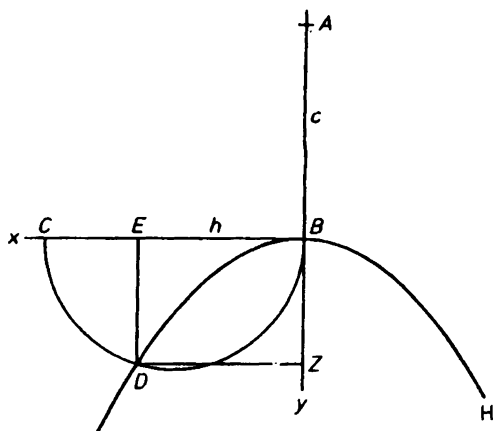
خیام ابتدا مربعی مانند c^2 را برابر با عدد مفروض b رسم می‌کند، و سپس جسم متوازی‌السطوحی به قاعده c^2 و ارتفاع h برابر با عدد مفروض b ترسیم می‌کند. این بدان معنی است که، آن گونه که قبلاً توضیح داده است، جسم متوازی‌السطوح به اضلاع c, c, h با جسم متوازی‌السطوحی با اضلاع c, c, be برابر گرفته می‌شود که در آن e واحد طول و b عدد مفروض سمت راست معادله (۵) است.

بنابراین معادله (۵) را می‌توان به صورت همگن

$$x^3 + c^2x = c^2h \quad (11)$$

نوشت که در آن $c = AB$ و $h = BC'$ پاره خطهایی مفروض‌اند.

(۱) خیام این جسم متوازی‌السطوح را مجسم می‌نامد. م.



شکل ۹

برای حل هندسی این معادله، خیام سهمی‌ای (ن. ک. شکل ۹) به رأس B ، محور BZ ، و «پارامتر» $AB = c$ ترسیم می‌کند. سپس نیم‌دایره‌ای به قطر $BC = h$ رسم می‌کند. این نیم‌دایره الزاماً یک نقطه تلاقی مانند D (غیر از B) با سهمی دارد. از نقطه D عمودهای DE و DZ را به ترتیب بر BZ و BC وارد می‌کنیم. خیام سپس ثابت می‌کند که $DZ = x$ جواب معادله (۱۱) است. در نمادگذاری نوین، فرض کنید $x = DZ$ و $y = DE$ مختصات D باشند. معادله سهمی

$$x^2 = yc \quad (12)$$

است، یا به گفته خود خیام «مربع DZ با حاصلضرب BZ و AB برابر است.» معادله دایره

$$y^2 = x(h - x) \quad (13)$$

است که خیام آن را به صورت تناسب

«نسبت BE به EB مثل نسبت ED به EC است.»

می‌نویسد.

به همین ترتیب (۱۲) به صورت تناسب زیر نوشته می‌شود:

«نسبت AB به BE مثل نسبت BE به ED است.»

خیام از این دو تناسب نتیجه می‌گیرد که $EB = x$ یکی از جوابها، و تنها جواب این معادله است.

عمر خیام به همین ترتیب معادله (۶) را به صورت همگن

$$x^2 + c^2 h = c^2 x \quad (14)$$

می‌نویسد و آن را با قطع دادن سهمی

$$yc = x^2 \quad (۱۵)$$

با هذلولی

$$y^2 = x(x - h) \quad (۱۶)$$

حل می‌کند.

سومین معادله (۷) به همین طریق حل می‌شود، تنها تفاوت در علامت جمله ثابت b است. معادله بعدی (۸) به صورت

$$x^2 + ax^2 = s^2$$

نوشته می‌شود که در آن a و s پاره‌خطهایی معلوم‌اند. خیام آن را از راه قطع دادن سهمی

$$xy = s^2$$

با سهمی

$$s(x + a) = y^2$$

حل می‌کند.

این راه حل بی‌آنکه لازم باشد، پیچیده است، زیرا مقدماً مستلزم حل معادله

$$s^2 = b$$

به کمک دو سهمی است. حل این معادله در صورت قرار دادن $b = cd^2$ و قطع دادن سهمی

$$x^2 = cy$$

با سهمی

$$(x + a)y = d^2$$

بسیار آسانتر می‌شد.

نوع بعدی (۹) با روش مشابه حل می‌شود. یک بار دیگر، جمله ثابت b برابر مکعب s^3 گرفته می‌شود. خیام متذکر می‌شود که حل معادله در این حالت همواره ممکن نیست.

نوع آخری، (۱۰)، به معادله

$$x^r = ax^r + c^r \quad (۱۸)$$

تحویل و با قطع دادن هذلولی

$$xy = ac$$

با سهمی

$$y^r = a(x - a)$$

حل می‌شود.

خیام سپس به بحث دربارهٔ هفت نوع معادلهٔ چهارجمله‌ای، یعنی معادله‌های زیر می‌پردازد:

$$x^r + ax^r + bx = c \quad (۱۹)$$

$$x^r + ax^r + c = bx \quad (۲۰)$$

$$x^r + bx + c = ax^r \quad (۲۱)$$

$$c + bx + ax^r = x^r \quad (۲۲)$$

$$x^r + ax^r = bx + c \quad (۲۳)$$

$$x^r + bx = ax^r + c \quad (۲۴)$$

$$x^r + c = ax^r + bx. \quad (۲۵)$$

روشهای حل آنها، مانند حالت‌های سه‌جمله‌ای است. برای حل (۱۹)، از یک دایره و یک هذلولی استفاده می‌شود، برای حل (۲۰) از دو هذلولی و الخ.

خیام پس از آن به بحث در معادلاتی می‌پردازد که جمله‌های $۱/x$ ، $۱/x^2$ و $۱/x^3$ در آنها ظاهر می‌شوند. اولین مثال او چنین است:

$$x^3 = ۱۰/x^3.$$

از ضرب طرفین در x^3 ، معادله

$$(x^3)^2 = ۱۰$$

و بنابراین

$$x^3 = \sqrt{۱۰}$$

به دست می‌آید و از قول خود خیام در ترجمه و پیکه:

«پس جذرده همان مکعب مطلوب است».^۱

خیام متذکر می‌شود که معادله

$$x^2 = a/x^2$$

را نمی‌توان با روشهایی که بر او معلوم بود، حل کرد، زیرا آن گونه که ابن هیثم ثابت کرده است، حل این معادله مستلزم درج چهار واسطه هندسی بین دو پاره خط است.

خیام اولین کس نبود که معادلات درجه سوم را به کمک قطع دادن مقاطع مخروطی حل می‌کرد. او در پایان رساله‌اش می‌گوید که کسی به او گفته است که محمد بن لیث ابوالجود^۲ مؤلف رساله‌ای بوده است که در آن حل معادلات درجه سوم را به مقاطع مخروطی تحویل کرده است، البته بدون آنکه همه حالتها را مورد نسبت قرار دهد.

عمر خیام و نسبتها

یوشکویچ در صفحه ۲۵۱ کتابش «تاریخ ریاضیات در سده‌های میانی» توجه خواننده را به دو فقره بسیار قابل ملاحظه درباره نسبتها در تفسیر خیام از «بحث از مشکلات اقلیدس» (ویرایش تقی ارانی، تهران ۱۹۳۶) جلب می‌کند. خانم ایوونه دولد^۳ لطف کرده این دو فقره را مستقیماً از عربی به انگلیسی ترجمه کرده است. در آنچه بعداً می‌آید، من ترجمه ایشان را دوباره می‌آورم.

به طوری که یوشکویچ متذکر شده است، خیام اظهار می‌کند که تعریف اقلیدس از تناسب درست است، اما تعریف صحیحی از مفهوم نسبت نیست. مفهوم صحیح نسبت در فرایند اندازه‌گیری کمیته به وسیله کمیتی دیگر نهفته است. حالا توضیح می‌دهم که این به چه معناست.

خیام تناسب چهار کمیت

$$A : B = C : D \quad (26)$$

را به صورت زیر تعریف می‌کند:

- (۱) مؤلف کتاب، عبارت "Donc la racine de dix sera la cube cherché" را از متن فرانسوی کتاب جبر و مقابله نقل می‌کند. ما از ترجمه فارسی متن (ترجمه دکتر غلامحسین مصاحب، صفحه ۲۳۷) استفاده کرده‌ایم. م.
- (۲) برای اطلاع از شرح زندگی و کارهای او رجوع کنید، مثلاً به زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی، تألیف ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵ (صفحات ۶۹-۷۲). م.

همه مضارب اولی از دومی برداشته می‌شوند تا آنکه باقیمانده کمتر از اولی شود، و به همین منوال کلیه مضارب سومی از چهارمی برداشته می‌شوند تا باقیمانده کمتر از سومی شود. و عده مضربهای اولی به دومی مانند عده مضربهای سومی به چهارمی است. به علاوه همه مضربهای باقیمانده دومی را از باقیمانده اولی برمی‌داریم تا آنکه باقیمانده‌ای کمتر از باقیمانده دومی بر جای ماند، و به همین منوال همه مضارب باقیمانده چهارمی را از باقیمانده سومی برمی‌داریم تا باقیمانده‌ای کمتر از باقیمانده چهارمی بر جای ماند. و عده مضربهای باقیمانده دومی مثل عده مضربهای باقیمانده چهارمی است. به همین منوال، از باقیمانده دومی همه مضارب باقیمانده اولی را برمی‌داریم و از باقیمانده چهارمی همه مضربهای باقیمانده سومی را برمی‌داریم. و عده هر دو برابر است. به همین منوال همه مضربهای باقیمانده‌ها را مطابق آنچه قبلاً توضیح دادیم، از یکدیگر برمی‌داریم و عده هر باقیمانده از اولی و دومی مانند عده نظیر آن از سومی و چهارمی است، الی غیر النهایه. بنابراین نسبت اولی به دومی ناگزیر مانند نسبت سومی به چهارمی است. و روال هندسی متناسب بودن همین است.

روند توصیف شده در اینجا همان است که یونانیان آن را *antanaresis* یا *anthypharesis* می‌نامند: تفریق پی‌درپی دو به دوی دو کمیت A و B از یکدیگر. کوچکترین کمیت بین دو، مثلاً B ، تا آنجا که ممکن باشد از A کسر می‌شود تا باقیمانده‌ای مانند R_1 کمتر از B بر جای ماند:

$$R_1 = A - q_1 B.$$

سپس، R_1 از B تا حد امکان کاسته می‌شود:

$$R_2 = B - q_2 R_1$$

و به همین ترتیب الی آخر. خارج قسمتهای صحیح

$$q_1, q_2, \dots$$

نسبت $A : B$ را به معنی زیر تعریف می‌کنند: اگر C و D همان خارج قسمت A و B را داشته باشند، تناسب (۲۶) برقرار است.

از فقره‌ای از کتاب طویقائى ارسطو، درمی‌یابیم که یونانیان این تعریف را برای نسبتها را پیش از اقلیدس به کار می‌بردند. ن. ک. بکر: پژوهش در اثودوکسوس^۲ یا فاولز: نسبت در ریاضیات اولیه یونانی^۳.

1) Topica 2) Becker, O. Eudoxos-Studien I, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B2, p. 311-333 (1933). 3) Fowler, D. H., Ratio in Early Greek Mathematics, Bulletin of American Mathematical Society (New Series) 1, p. 807-848 (1979).

خیام رابطه

$$A : B > C' : D$$

را نیز با مقایسه دنباله خارج قسمتهای

$$q_1, q_2, \dots$$

و

$$q'_1, q'_2, \dots$$

تعریف می‌کند که این نسبتها به کمک آنها تعریف می‌شوند. اگر m اولین اندیس باشد که برای آن q_m متفاوت از q'_m است و هرگاه

$$q_m < q'_m \quad \text{برای } m \text{ فرد،}$$

یا

$$q_m > q'_m \quad \text{برای } m \text{ زوج،}$$

آنگاه $A : B$ بزرگتر از $C' : D$ است.

خیام در یک سلسله از قضایا ثابت می‌کند که تعریف او از برابری نسبتها معادل تعریف اقلیدس است. خیام سپس ضرب نسبتها را تعریف می‌کند و به این ترتیب یک رخنه منطقی در اصول اقلیدس را برطرف می‌کند. ن.ک. یوشکویچ: تاریخ ریاضیات در سده‌های میانی، صفحات ۲۵۳-۲۵۴.

خیام در تعریف خود برای ضرب نسبتها، وجود جزء چهارم D ی تناسب را برای کمیتهای A ، B ، C' مفروض می‌گیرد. وی این فرض را به صورت زیر توجیه می‌کند: همواره کمیتهایی مانند M و N موجودند به طوری که

$$C' : M > A : B$$

و

$$C' : N < A : B.$$

اما به دلیل تقسیمپذیری نامتناهی کمیتهای پیوسته، باید D یی بین M و N موجود باشد به طوری که

$$C' : D = A : B.$$

اسکار بکر متذکر شده است که همین نوع استدلال: «وقتی (کمیت‌های) بزرگتر و کوچکتر موجود باشند، کمیت‌های برابر نیز موجودند» نیز به وسیلهٔ مفسران یونانی ارسطو به کار گرفته شده است. ن. ک. بکر: پژوهش در ائودوکسوس II. چرا یونانیان وجود جزء چهارم تناسب را مطبوع طبع یافته‌اند؟^۱ خیام این پرسش را نیز مطرح می‌کند که آیا می‌توان نسبت‌ها را «نوعی عدد» به مفهومی وسیعتر تلقی کرد؟ وی می‌نویسد:

اما پرسشی مربوط به نسبت کمیت‌ها مطرح است: آیا این در ذات عدد بنا بر ماهیت آن است، یا پیامد منطقی عدد است، یا آیا با چیزی به تبعیت از ماهیت آن و بدون نیاز به هیچ عامل خارجی با عدد پیوند دارد؟

خیام این پرسش «فلسفی» را بی‌پاسخ می‌گذارد، اما مؤلفان عرب [=عربی‌نویس] بعدی همچون [خواجہ] نصیرالدین طوسی همهٔ نسبت‌ها را چون «اعداد» تلقی می‌کنند. ن. ک. صفحه ۲۵۵ کتاب یوشکویچ.

1) Becker, O.: Eudoxus-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen? Quellen und Studien Gesch. Math. Bw, p. 369-387.

فصل ۲

جبر در ایتالیا

این فصل به سه بخش تقسیم می‌شود:

یکم - از لئوناردوی پیسایی تا لوکاپاچولی

دوم - استاد داری پیسایی

سوم - حل معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم

بخش یکم از لئوناردوی پیسایی تا لوکاپاچولی

روشهای جبر و مقابله در ایتالیا ابتدا با ترجمه خوارزمی به زبان لاتین به دست گاردوی کرمونایی، و سپس اثر لئوناردوی پیسایی^۱ (موسوم به فیوناتچی^۲) شناخته شدند. چندین نویسنده دیگر متنهایی مربوط به حساب در پی لئوناردو ظاهر شدند که از همه مشهورتر لوکاپاچولی^۳ است. پیش از بحث درباره این مؤلفان نخست نیاز بازرگانان ایتالیایی را به چنین متنهایی، به علت شرایط اقتصادی، شرح می‌دهم. خوشحالم که در شرح خود از مندرجات سخنرانی بسیار جالبی با عنوان «مساهمت‌های رنسانس ایتالیایی در ریاضیات اروپایی» استفاده می‌کنم که از سوی وارن وان اخمونت^۴ در سمپوزیومی در کروتونا^۵ در آوریل ۱۹۸۳ ایراد شده است.

ارتباط بین داد و ستد و تمدن در ایتالیای سده‌های میانه

در اوایل سده‌های میانی، داد و ستد عمدتاً بر مبنای معاملات پایاپای بود و نه مبادله پول. بازرگانی با

1) Leonardo da Pisa 2) Fibonacci 3) Luca Pacioli 4) Warren Van Egmond, "The Contributions of the Italian Renaissance to European Mathematics. 5) Crotona

نقاط دور دست در اختیار بازرگانان سیّاری بود که محموله‌های کالاهایشان را در بازارها و بازار مکاره‌های محلی مبادله می‌کردند. مراکز عمده این نوع داد و ستد، ونیز، جنووا، و پيسا بودند. بازرگانان از راه دریا به بنادر عربی شمال آفریقا و خاور نزدیک رهسپار می‌شدند و الوار، پشم، و دیگر محصولات غرب را با خود می‌بردند و در مقابل ابریشمهای اعلا، ادویه، جواهر، و متاعهای گرانبهای دیگر را باز پس می‌آوردند. در سده سیزدهم، ماهیت این نوع اقتصاد دستخوش تغییری اساسی قرار گرفت. پیشرفت در امور دریانوردی خطرات سفر دریایی را کاهش داد. رواج روزافزون مسکوکات موجب عمدتاً پولی شدن اقتصاد اروپا شد. ابداع اعتبارنامه‌ها، بروات، حسابداری و دفترداری، پیدایش بانکداری و امور مالی بین‌المللی را میسر ساخت. همه این پیشرفتها دست به دست هم دادند تا موجب پیدایش طبقه‌ای جدید از بازرگانان شوند که در مراکز اصلی صنعتی و تجارت زندگی می‌کردند. آنها مال‌التجاره‌ها را خریداری می‌کردند و به دیگر نمایندگیهای همان شرکت در سایر شهرها، مثلاً در شرق، می‌فرستادند که در آنجا مال‌التجاره به فروش می‌رفت یا با کالاهای دیگر مبادله می‌شد. نظارت بر این شبکه وسیع نمایندگیها از طریق مبادله نامه‌ها، صورتحسابها، و گزارشها انجام می‌شد. در اغلب موارد، دفتر مرکزی در یکی از شهرهای ایتالیا، نظیر لوقا^۱، سینا^۲، یا فلورانس دایر بود.

زندگی یک بازرگان ثابت‌جا به مراتب با زندگی سلف دائم‌السفر وی متفاوت بود. بازرگان اوائل سده‌های میانی خرده پیشه‌وری بود که سیاهه موجودی خود را در ذهن یا بر کاغذی مُشوّده نگاه می‌داشت. اما بازرگانان ثابت‌جا و بانکداران، نامه، برات، گزارش، حواله و امثالهم صادر یا دریافت می‌کردند. آنها می‌بایست قیمت‌ها را محاسبه، پرداخت‌ها را حساب، و سود و زیان را معین می‌کردند.

آنها برای همه این عملیات نیازمند یک دستگاه کارآمد برای نوشتن اعداد و انجام محاسبات مکتوب بودند. کار با اعداد رومی بسیار پرزحمت بود: دستگاه عددی هندی-عربی بسیار کارآمدتر بود. افتخار به وجود آوردن این دستگاه عددی و وفق دادن آن با امور بازرگانی از آن گروهی از مردان، موسوم به «حساب‌ورزان»^۳ است.

به قول وارن وان اخمونت، که من در اینجا از توضیحات او تبعیت می‌کنم، باید بین کلمه لاتین آباکوس^۴ [چرتکه]، که یک تخته محاسبه بود، با کلمه ایتالیائی آباکو^۵، که معمولاً به معنی «حساب عملی» است، تمایز قائل شد.

زندگی و آثار فیبوناتچی

زندگی لئوناردوی پيسایی از مقدمه کتاب مشهورش «لیبر آباکی»^۶ (۱۲۰۲) به خوبی عیان است. من

[کتاب حساب] 1) Lucca 2) Siena 3) abbacists 4) abacus 5) abbaco 6) Liber abbaci

ذیلاً توصیف بسیار خوب زندگی و آثار او را به توسط کورت فوگل^۱ در مقاله فیوناتچی در «زندکینامه علمی دانشوران» دنبال می‌کنم.

لئوناردو عضوی از خانواده یوناتچی بود، بدین سبب خود را «فیلیو یوناتچی»^۲ [پسر یوناتچی] نامید که به اختصار به صورت فیوناتچی در آمد. در حدود سال ۱۱۹۲ مسئولیت پایگاه تجارتي دولت پيسا در بوجیا^۳ (بوزی^۴ کنونی) در الجزایر به عهده پدرش که از دبیران جمهوری پيسا بود، واگذار شد. وی امیدوار بود که پسرش لئوناردو بازرگان شود، بنابراین وی را با خود به الجزایر آورد. در اینجا لئوناردو طرز محاسبه با ارقام هندی-عربی را آموخت. سفرهای بازرگانی وی را به مصر، سوریه، بیزانس، سیسیل، و جنوب فرانسه کشاند.

در حدود ۱۲۰۰ لئوناردو به پيسا بازگشت. طی بیست و پنج سال بعد از آن، وی چندین اثر تألیف کرد. پنج اثر از بین آنها محفوظ مانده است:

۱. کتاب حساب یا لیبر آباکی (۱۲۰۲)، تجدیدنظر در (۱۲۲۸)،
۲. پراکتیکا گنومتریا^۵ (۱۲۲۰)،
۳. کتابی با عنوان «فلوس»^۶،
۴. نامه‌ای به تئودورس^۷ فیلسوف که در دربار امپراتور فردریک دوم از سلسله هوهنشتاؤفن^۸ می‌زیست،
۵. لیبر کوادراتوروم^۹ (۱۲۲۵).

رساله‌ای درباره مقاله دهم «اصول» اقلیدس مشتمل بر بحث عددی گنگ بودن که اقلیدس به کمک خطها و سطوح مدلل کرده بود، متأسفانه از دست رفته است.

اهمیت لئوناردو در دربار فردریک دوم شناخته شد. در نوشته‌های لئوناردو، نام چند تن از فضلانی که در دربار سیسیل می‌زیستند ذکر شده است که از آن جمله‌اند: میکائل اسکوتوس^{۱۰} طالع‌بین که دانه^{۱۱} او را به جهنم فرستاده است (دوزخ، باب XX [کمدی الهی]، صفحه ۱۱۵)، و تئودوروس^{۱۲} فیلسوف، و جان پالرمویی^{۱۳} ریاضیدان. در حدود ۱۲۲۵، زمانی که دربار فردریک دوم در پيسا مستقر بود، دومینکوس^{۱۴} منجم او را به امپراتور معرفی کرد. در آن هنگام، جان پالرمویی چندین مسأله را مطرح کرد که لئوناردو فوراً آنها را حل کرد.

اولین مسأله، یافتن عددی مانند x بود به طوری که $x^2 + 5$ و $x^2 - 5$ اعدادی مجذور باشند. یک

1) Kurt Vogel 2) filio Bonacci 3) Bugia 4) Bougie [بجایه]

5) Practica geometriae [هندسه عملی] 6) Flos [شکوفا] 7) Theodorus 8) Hohenstaufen

9) Liber quadratorum [کتاب مجذورات] 10) Michael Scotus 11) Dante 12) Theodorus

13) John of Palermo 14) Dominicus

جواب آن، یعنی

$$x = 3\frac{5}{12}, x^2 + 5 = \left(4\frac{1}{12}\right)^2, x^2 - 5 = \left(2\frac{7}{12}\right)^2$$

بدون برهان در کتاب «فلوس» ارائه شده است که لئوناردو آن را نزد فردریک دوم فرستاد. این جواب در کتاب «لیبر کوادراتوروم» به روشی استخراج شده است که طی فصل حاضر توضیح داده می‌شود. دومین مسأله که به لئوناردو ارائه شد، حل معادله درجه سوم

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \quad (۱)$$

بود.

لئوناردو در کتاب «فلوس» ثابت کرد که جواب این معادله نه عدد صحیح، نه عدد کسری، و نه یکی از اعداد گنگی است که در مقاله دهم اصول اقلیدس تعریف شده‌اند. وی جوابی تقریبی در دستگاه شصتگانی به صورت زیر ارائه کرد:

$$۱^\circ; ۲۲', ۷'', ۴۲''', ۳۳^{IV}, ۴^V, ۴۰^{VI}.$$

به گفته فوگل (صفحه ۶۱۰ مقاله فیبوناتچی)، عدد ۴۰ آخر در بسط فوق، حدود $\frac{1}{4}$ بزرگتر از مقدار واقعی است، بنابراین دقت لئوناردو قابل ستایش است. اگر او روش «خطأین» را که خود وی در «لیبر آباکی» شرح داده است، یعنی روش درونیابی خطی بین مقدار کمتر x_1 و مقدار بیشتر x_2 را به کار می‌برد، به تقریب بسیار کوچکتري می‌رسید. امکان دارد که او روش موسوم به روش هورنر^۱ را به کار برده باشد. این روش، با تعدیل آن برای دستگاه شصتگانی، مرکب است از قرار دادن $x = ۱ + y_1$ و به دست آوردن معادله‌ای برحسب y_1 ، سپس قرار دادن $۲۲ + y_2 = ۶۰ y_1$ و به دست آوردن معادله‌ای برحسب y_2 و به همین قیاس الی آخر.

تاریخچه روش هورنر بسیار بفرنج است. این روش اساساً بر مؤلف رساله چینی «نه باب در فن حساب»^۲ (چيو چانگ سوئان شو)^۳ که در دوره هان^۴، یعنی بین ۱۵۰- و ۱۵۰+ میلادی می‌زیسته، معلوم بوده است. ن.ک. نیدهام^۵: علم و تمدن در چین^۶ (کمبریج ۱۹۵۹)، صفحات ۱۲۶-۱۲۷. این روش بر ریاضیدانان عرب [=عربی‌نویس] جمشید کاشانی نیز شناخته شده بوده است. ن.ک. لوکی: فن حساب جمشید بن مسعود کاشانی (ویسبادن ۱۹۵۱)^۷. این روش بعدها به وسیله پائولو روفینی^۸

- 1) Horner 2) Nine Chapters of the Mathematical Art 3) Chiu Chang Suan Shu
4) Hahn 5) J. Needham 6) Science and Civilization in China 7) Luckey, P.: Die Rechenkunst des Ġamsīd b. Mašūd al-Kāsi (Wisbaden). 8) Paolo Ruffini

(۱۸۰۴) و هورنر (۱۸۱۹) دوباره کشف شد. ن. ک. کاژوری: تاریخ ریاضیات، صفحه ۲۷۱.
در سال ۱۲۴۰، جمهوری پیسا در اظهار قدردانی از سودمندی‌اش برای شهر و اهالی آن از طریق آموزشها و خدمات صمیمانه‌اش، علاوه بر مقرریهای عادی، «استاد کوشا و فاضل لئوناردو بیگولی»^۲ را به مقرری سالیانه ۲۰ پوند نقره مفتخر کرد.
اینک به بحث در آثار باقی‌مانده از لئوناردو می‌پردازیم.

۱. «لیبر آباکی»

در ایتالیا خبرگان در محاسبه را «مائستری د باکو»^۳ [استادان حساب] می‌نامیدند. با این معنی می‌توان به عنوان نافذترین اثر لئوناردو پی برد. این اثر ابتدا در سال ۱۲۰۲ منتشر شده است. در ویرایش دوم سال ۱۲۲۸ «مطالبی جدید بر آن افزوده شده و مطالب زائد حذف شده‌اند». این اثر را بالداسار بونکومپانی^۴ در مجلد اول «نوشته‌های لئوناردو پیسانو»^۵ (ژم، ۱۸۵۷) ویراستاری کرده است. خلاصه‌ای از ۱۵ باب «لیبر آباکی» در مقاله فیبوناتچی از کورت فوگل در زندگینامه علمی دانشوران آمده است.

در فصلهای ۱-۷ شماره‌های [ارقام] هندی-عربی معرفی و روشهای محاسبه با اعداد صحیح و کسرها آموخته شده است.

فصلهای ۸-۱۱ شامل مسائل مورد توجه بازرگانان اند. مسأله‌ای بسیار بذله‌آمیز، «مسأله ۳۰ پرنده» است. مردی ۳۰ پرنده می‌خرد: کبک، کبوتر، گنجشک. بهای هر کبک ۳، هر کبوتر ۲، و هر گنجشک $\frac{1}{4}$ مسکوک نقره است. او ۳۰ سکه می‌پردازد. چند کبک، کبوتر، و گنجشک خریده است؟
مسأله عبارت از حل معادله‌های

$$x + y + z = 30$$

$$3x + 2y + \frac{1}{4}x = 30$$

در دستگاه اعداد مثبت x, y, z است. تنها جواب $x = 3, y = 5, z = 22$ است.

این مسأله، صورتی دیگر از «مسأله ۱۰۰ پرنده» است که در منابع چینی، هندی، و عربی دیده می‌شود. ن. ک. تروپفکه: تاریخ ریاضیات مقدماتی، I، ویرایش چهارم (ویرایش کورت فوگل و دیگران)^۶.

1) Cajori, F.: A History of Mathematics, p. 271 2) Master Leonardo Bigolli 3) maestri d'abbaco 4) Baldassare Boncompagni 5) Scritti di Leonardo Pisano 6) Joh. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik I, fourth edition (by Kurt Vogel and others), p. 613-616 (1980).

فصلهای ۱۲ و ۱۳ چندین نوع مسأله تفریحی را در بر دارند که بعضی به معادله‌ای خطی و بقیه به دو یا سه معادله خطی دو یا سه مجهولی منجر می‌شوند. به عنوان نمونه، در صفحات ۲۲۸-۲۴۳ به دنباله‌ای از مسأله‌ها درباره «خریدن یک اسب» برمی‌خوریم. لئوناردو با مورد ساده‌ای از دو نفر موضوع را آغاز می‌کند. یکی به دیگری می‌گوید: «اگر ثلث پولت را به من بدهی، می‌توانم این اسب را بخرم.» دیگری پاسخ می‌دهد: «اگر تو ربع پولت را به من بدهی، می‌توانم این اسب را بخرم.» اگر s بهای اسب باشد، دو معادله خطی برحسب دو مجهول x و y در دست داریم:

$$x + \frac{1}{3}y = s$$

$$y + \frac{1}{4}x = s.$$

مسأله از نوع معادلات سیاله است، زیرا s داده نشده است. جواب برحسب کوچکترین اعداد صحیح ممکن به صورت

$$x = (3 - 1) \times 4 = 8$$

$$y = (4 - 1) \times 3 = 9$$

$$s = 3 \times 4 - 1 \times 1 = 11,$$

است.

مورد دیگری به ۳ معادله ۳ مجهولی منجر می‌شود:

$$x + \frac{1}{3}(y + z) = s$$

$$y + \frac{1}{4}(x + z) = s \quad (2)$$

$$z + \frac{1}{5}(x + y) = s.$$

برای حل این معادله‌ها، لئوناردو مجهول جدید

$$x + y + z = t \quad (3)$$

را اضافه می‌کند. با کم کردن هر یک از معادله از (۳)، تساویهای

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D$$

به دست می‌آید و بنابراین

$$x + z = \frac{3}{2}D$$

$$x + z = \frac{4}{3}D$$

$$x + y = \frac{5}{4}D.$$

برای به دست آوردن جواب صحیح، لئوناردو قرار می‌دهد $D = ۲۴$ ، و به این ترتیب

$$x + z = ۳۶$$

$$x + z = ۳۲$$

$$x + y = ۳۰$$

$$x = ۱۳, y = ۱۷, z = ۱۹$$

را به دست می‌آورد.

این جواب معادله (۲) قبلاً به توسط دیوفانتوس به دست آمده است: آریستیکا^۱.

همین مسأله «خریدن یک اسب» در کتابی از کرجی^۲ و دیگر منابع عربی و بیزانسی دیده می‌شود. ن. ک. تروپفکه: تاریخ ریاضیات مقدماتی I (ویرایش چهارم، توسط ک. فوگل و دیگران)، صفحات ۶۰۸-۶۰۹.

از ابداعات بی‌سابقه لئوناردو «سری فیبوناتچی»

$$۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱$$

است که در آن هر جمله مجموع دو جمله قبل از خود است. لئوناردو آن را به عنوان پاسخ مسأله زیر به دست آورده است: یک جفت خرگوش در یک سال چند جفت خرگوش می‌توانند به وجود آورند هرگاه هر جفت در هر ماه یک جفت خرگوش تولیدمثل کنند و هر جفت تازه در ماه دوم پس از تولد تولیدمثل‌شان آغاز شود و مرگ و میری هم در کار نباشد؟

فصل ۱۴ به محاسبات مربوط به جذر و کعب اختصاص دارد. لئوناردو مطلب را با قضایایی از مقاله دوم [اصول] اقلیدس در صورتهای عددی آنها آغاز و برهانها را حذف می‌کند، «زیرا همه آنها در

1) Diophantos: Arithmetica I 24.

۲) ابوبکر محمد بن حسین کرجی. برای اطلاع از شرح احوال و کارهای ریاضی وی، ن. ک. مثلاً به گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی، تالیف برگرن، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۴.

[اصول] اقلیدس موجودند». وی برای محاسبه جذر، تقریب معروف

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}$$

را می‌دهد.

برای محاسبه کعب، لئوناردو تقریب اولیه

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \sim a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a_1 \quad (4)$$

و سپس تقریب ثانویه

$$a_2 = a_1 + \frac{r_1}{3a_1(a+1)}, r_1 = a - a_1^3 \quad (5)$$

را عرضه می‌کند.

به عقیده فوگل (زندگینامه علمی دانشوران، مقاله فیبوناتچی، صفحه ۶۰۸) اولین تقریب (۴) پیشتر بر نسوی^۱ معلوم بوده است. این تقریب در واقع کاربردی ساده از قاعده «خطّین» است. در مورد تقریب دوم، لئوناردو می‌گوید: «این شیوه یافتن ریشه‌ها را من ابداع کرده‌ام». مثالهایی برای اعمال با رادیکالها از لئوناردو عبارت‌اند از

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{14} \quad (6)$$

و

$$4 + \sqrt[3]{10} = \sqrt{16 + \sqrt{10} + 8\sqrt[3]{10}} \quad (7)$$

فصل ۱۵ بسیار جالب است. در بخش نخستین، لئوناردو دو معادله

$$6 : x = y : 9 \quad (8)$$

$$x + y = 21 \quad (9)$$

را به صورت زیر حل می‌کند. از (۸) معادله

$$xy = 54$$

۱) ابوالحسن علی بن احمد نسوی. برای اطلاع از شرح احوال و کارهای وی ن. ک. به مثلاً به، نسوی نامه، تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی، پژوهش و نگارش ابوالقاسم قربانی، انتشارات بنیاد فرهنگ ایران، تهران، ۱۳۵۱.

را به دست می‌آورد و سپس، با استفاده از قضیه ۵ مقاله ۲ [اصول] اقلیدس،

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{21}{2}\right)^2 - 54 = \frac{225}{4}$$

را به دست می‌آورد که در نتیجه $x-y=15$ ، $x=18$ ، $y=3$.

در بخش دوم، لئوناردو کاربردهایی از قضیه فیثاغورس را عرضه می‌کند. مثلاً، وی این مساله را حل می‌کند: بر روی خطی که پایه‌های دو برج با ارتفاعهای معلوم و فاصله معلوم را به هم وصل می‌کند، چشمه‌ای پیدا کنید که از راسهای برجها به یک فاصله باشد. لئوناردو راه حلی عددی و نیز یک راه حل هندسی عرضه می‌کند (لیبرآباکی، صفحه ۳۹۸).

سومین و طولانی‌ترین بخشها (صفحات ۴۰۶-۴۵۹)، بخشی است منظم که معادله‌های خطی و درجه دوم را دربردارد. با اشاره به کار «موامت»^۱، یعنی محمد بن موسی الخوارزمی، لئوناردو شش شکل متعارف این نوع معادله‌ها، یعنی

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx \quad (\text{دو جواب})$$

$$ax^2 = bx + c$$

را حل می‌کند.

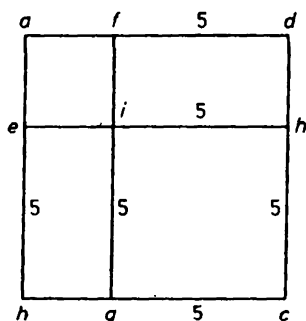
کمیت مجهول x رادیکس^۲، مربع آن کوادراتوس^۳ یا کنسوس^۴ و جمله ثابت c ، نومروس^۵ نامیده شده است. روشهای حل با مثالهای متعدد تشریح شده‌اند.

اولین مثال از یک معادله درجه دوم آمیخته درست همان مثال موجود در جبر خوارزمی است، یعنی «مالی و ۱۰ شیء برابر ۳۹ است»^۶ یا

$$x^2 + 10x = 39$$

جواب با رسم شکل زیر (شکل ۱۰) تشریح شده است:

1) Maumeth 2) radix 3) quadratus 4) census 5) numerus 6) census et decem radicis equantur 39.



شکل ۱۰

در مثالهای دیگر، باید ۱۰ را به دو جزء x و $۱۰ - x$ تقسیم کرد به طوری که در شرطی کمکی مثل

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$$

صدق کنند.

لئوناردو معادله‌هایی را هم در بحث می‌گنجاند که می‌توان به معادله‌های درجه دوم تبدیل کرد. مثلاً

مجموعه معادله‌های

$$y = \frac{10}{x} \quad (10)$$

$$z = \frac{y^2}{x} \quad (11)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

که به معادله‌ای درجه دوم برحسب x^2 منجر می‌شود:

$$x^4 + 100x^2 = 10000. \quad (13)$$

۲. پراکتیکا گئومتریا

این اثر لئوناردو در نه نسخه دستنویس موجود است که دو مورد از آنها در پاریس و چهار مورد در رم است. بونکومپانی در ویرایشش از این اثر، تنها یکی از نسخه‌های واتیکان را به کار برده است. به نقل از مقاله فیوناتیچی اثر فوگل:

قصد لئوناردو در این اثر تنها آن نیست که مسائل اندازه‌گیری را برای افراد غیر حرفه‌ای عرضه کند؛ به علاوه، وی برای اهل علم، مسائل هندسی را بنابر روشهای برهانی حل می‌کند. در نتیجه، الگوهایش از یک سو الگوهای هرون^۱ و اگریمنسورس^۲، و از سوی دیگر الگوهای اقلیدس و ارشمیدس اند. لئوناردو اثر لیبرامبادوروم^۳ از پلاتوی تیولیایی^۴ (۱۱۴۵) را با دقتی خاص خوانده و بخشهای وسیعی از آن را همراه با تعدادی از مسائل آن با همان مقادیر عددی اقتباس کرده است. این اثر پلاتو ترجمه‌ای از هندسه ساواسوردا^۵ (ابرهیم برخیا) است که به عربی نوشته شده و آن نیز بازپردازی از دانش عربی [دوره اسلامی] در این موضوع است.

پراکتیکا به هشت فصل (قسمت) تقسیم شده است که مقدمه‌ای پیشاپیش آنها می‌آید. در این مقدمه، مفاهیم اساسی، و نیز اصول موضوع و اصول متعارفی [اصول] اقلیدس و مقیاسهای طول و سطح رایج در پیسا توضیح داده شده‌اند.

در فصل اول، قضیه‌های مقاله دوم اصول اقلیدس یادآوری شده‌اند.
در فصل دوم

تضعیف مکعب به وسیله آرخوتاس^۶، فیلون بیزانسی^۷، و افلاطون^۸، بدون اشاره به منابع آنها، به روایت ائوتوکوس^۹ شرح داده شده‌اند. لئوناردو راه‌حلهای افلاطون و آرخوتاس را از دریا فیلیوروم^{۱۰} بنوموسی اخذ کرده است و این اثری است به ترجمه گِرارد کرمونایی^{۱۱}. راه‌حل فیلون نیز در دِتریانگولیس^{۱۲} اثر یوردانوس دو نموره^{۱۳} ظاهر می‌شود، و احتمالاً هم لئوناردو و هم یوردانوس آن را از منبعی مشترک اقتباس کرده‌اند. ن. ک. کلاگت^{۱۴}، ارشمیدس در سده‌های میانی I، صفحات ۲۲۴ و ۶۵۸-۶۶۰.

فصل سوم بحثی (همراه با برهانهای دقیق) از محاسبه قطعه‌ها و هویه‌های اشکال مسطحه را مطرح می‌کند: مثلث، مربع، مستطیل، لوزی واره‌ها، دوزنقه‌ها (شکلهایی که دو ضلع آنها در دور به هم می‌رسند)، چند ضلعیها، و دایره؛ برای دایره، با استفاده از چند ضلعی ارشمیدس نود و شش ضلعی، π به صورت $3/141818 \dots \sim 275 : 864$ تعیین می‌شود.

- 1) Hero 2) Agrimensores 3) Liber embdadorum [کتاب مساحات] 4) Plato of Tivoli 5) Savasorda، معروف به صاحب‌الشرطه در زبان عربی (ارشد ملازمان پادشاه)، نام لاتینی ابرهیم برخیا یا هانسی، بیشتر عمر خود را در بارسولونا گذراند و آثار مشهور علمی را از عربی به عربی ترجمه کرد. م.
6) Archytas 7) Philo of Byzantium 8) Plato 9) Eutocius 10) Verba filiorum، منظور Liber trium fratrum de geometria اشکال البسیطه و الکریه (در اندازه‌گیری مساحت شکلهای مسطح و کروی)، منسوب به بنوموسی است. بنوموسی (احمد، حسن، محمد) سه برادر بوده‌اند که در زمان خلافت مأمون، در زمرة نخستین دانشمندان اسلامی بودند که به مطالعه کتابهای ریاضی یونانی پرداختند و مکتب اسلامی ریاضیات را بنیاد نهادند. م.
11) Gerard of Cremona 12) De Triangulis [درباره مثلث] 13) Jordanus de Nemore 14) M. Clagett

برای مساحانی که رویه بطلمیوسی تعیین نیم وترها را از روی کمانهای معلوم نمی‌دانند، دستورهای مناسب، و جدولی از وترها تدارک شده است. اینجا تنها جایی که در آن اصطلاح *sinus versus arcus* [جیب مقابل کمان] که قطعاً از مثلثات عربی [دوره اسلامی] اخذ شده، ظاهر می‌شود. چهارمین فصل به تقسیم رویه‌ها اختصاص دارد؛ این فصل بازپردازی لیبرامبادوروم است که اصلاً از اثرگمشده اقلیدس با عنوان کتابی درباره تقسیمات اشکال گرفته شده است؛ این اثر اقلیدس را می‌توان از متون پلاتونی تیوولیایی و لئوناردو و از نسخه عربی آن بازسازی کرد (ن.ک. آرچیبالد^۱). در فصل ششم، لئوناردو به بحث احجام از جمله به حجم چند وجهیهای منتظم می‌پردازد و در این ارتباط به قضایای مقاله چهاردهم اقلیدس ارجاع می‌دهد.

فصل هفتم محاسبه ارتفاعهای اشیای بلند، مانند درخت، را دربردارد و قواعدی برای مساحی بر مبنای تشابه مثلثها ارائه می‌دهد؛ در این موارد زاویه‌ها به کمک نقاله محاسبه می‌شوند. فصل هشتم به عرضه آنچه لئوناردو در مقدمه لیبرآباکی آن را «ظرایف هندسی»^۲ می‌نامد، می‌پردازد.

محاسبه اضلاع پنج ضلعی و ده ضلعی برحسب قطر دایره‌های محاطی و محیطی آنها و امثالهم از جمله آنهاست.

۳. کتاب «فلوس»

قبلاً در بخش «زندگی و آثار فیونانچی» جوابهای لئوناردو را برای دو مسئله مطرح شده به وسیله جوانی پالرمویی^۳ مورد بحث قرار دادیم. این مسائل عبارت بودند از: یافتن عددی مانند x به طوری که $x^2 + 5$ و $5 - x^2$ مربع کامل باشند، و حل معادله درجه سوم (۱). لئوناردو راه‌حلهای خود را در کتابی با عنوان «فلوس» چاپ کرد که آن را برای فردریک دوم فرستاد. ذیلاً به بحث درباره راه حل او می‌پردازیم. علاوه بر این راه‌حلهای کتاب فلوس شامل مثالهایی از معادلات سیاله است. اغلب این معادله‌ها در «لیبر آباکی» نیز بحث شده‌اند. در برخی حالتها، از جوابهای منفی به عنوان قرض تعبیر شده است.

۴. نامه به تئودروس

موضوع اصلی این نامه، (نوشته‌های لئوناردوی بیسانو II، صفحه ۲۴۷-۲۵۲)^۴ «مسئله ۱۰۰ پرنده»، صورتی تغییر یافته از مسئله‌ای است که قبلاً در لیبر آباکی بحث شده است. لئوناردو در این نامه یک روش کلی را برای حل معادلات سیاله بسط می‌دهد.

1) Archibald 2) subtilitates 3) Giovanni da Palermo [جوانی یا جان پالرمویی] 4) Scritti di Leonardo Pisano

یک مسئله هندسی به دنبال آن می‌آید. یک پنج ضلعی منتظم در مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط شده است. حل آن تا آنجا که به معادله‌ای درجهٔ دوم منجر می‌شود، پیش برده می‌شود و سپس یک تقریب شصتگانی ارائه می‌شود.

۵. لیبر کوادراتوروم

موضوع اصلی این کتاب، حل یک جفت معادلهٔ دیوفانتی

$$x^2 + 5 = y^2$$

$$x^2 - 5 = z^2$$

است.

به طوری که دیده‌ایم، این مسئله یکی از مسائلی است که جوانی پالرمویی برای لئوناردو مطرح کرده بود. لئوناردو ابتدا مسئله را به صورت

$$x^2 + c = y^2$$

$$x^2 - c = z^2$$

(۱۴)

تعمیم می‌دهد.

اگر x^2 و c جوابی برای این مسئله باشند، لئوناردو عدد c را *congruum* [وفق] و مربع x^2 را *quadratus congruum* [مربع متوافق] می‌نامد.

زوج معادله‌های (۱۴) به طریق زیر حل می‌شوند. با افزودن آنها بر هم، معادلهٔ

$$2x^2 = y^2 + z^2 \quad (۱۵)$$

به دست می‌آید. با قرار دادن $y = u + v$ و $z = u - v$ این معادله را می‌توان به

$$x^2 = u^2 + v^2$$

تحویل کرد. این معادلهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی است. جواب آن را عموم می‌دانند:

$$x = a^2 + b^2, \quad u = 2ab, \quad v = b^2 - a^2.$$

اگر a و b هر دو فرد باشند، می‌توان این جواب را بر ۲ تقسیم کرد:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad u = ab, \quad v = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

بنابراین لئوناردو قضیه زیر را به دست می‌آورد:

اگر a و b اعداد صحیح و نسبت به هم متباین باشند، و $b > a$ ، داریم

(۱) اگر a و b هر دو فرد باشند آنگاه $c = ab + (b - a)(b + a)$ یک وفق است، و مربع متوافق آن

$$x^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2$$

است.

(۲) اگر a فرد و b زوج باشد یا برعکس، آنگاه $c = 4ab(b - a)(b + a)$ یک وفق است و مربع

متوافق آن

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2$$

است.

به ازای $a = ۱$ و $b = ۹$ ، لئوناردو جوابهای

$$c = ۷۲۰ = ۵ \times ۱۲^2$$

و

$$x = ۴۱, \quad y = ۴۹, \quad z = ۳۱$$

را پیدا می‌کند.

با تقسیم x, y, z بر ۱۲، لئوناردو جوابی برای مسأله خود با $c = ۵$ ، به دست می‌آورد، یعنی

$$x = ۳ + \frac{۵}{۱۲}, \quad y = ۴ + \frac{۱}{۱۲}, \quad z = ۲ + \frac{۷}{۱۲}.$$

با همین روش، لئوناردو جوابهایی برای سایر مقادیر c به دست می‌آورد. جانشینان او باز هم جوابهایی برای مقادیر دیگر c پیدا کرده‌اند. ن. ک. رافائلا فرانچی^۱.

روش لئوناردو با روش ابو جعفر محمد بن حسین [ابو جعفر خازن] که او نیز همین مسأله را حل کرده است، تفاوت دارد. رساله ابو جعفر با عنوان «در باره ترسیم مثلثهای قائم‌الزاویه با اضلاع گویا» که راه حل

1) Raffaella Franci: Numeri congru-congruenti in codici dei secoli XIV e XV, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche 4, p. 3-23 (1984).

او را در بر دارد، به وسیلهٔ وپکه در مقاله «پژوهشهایی در برخی آثار لئوناردو داپیسا III: ترجمهٔ رساله‌ای از الخازن»^۱ به فرانسه ترجمه شده است.

برای ارزیابی کلی تواناییهای لئوناردو و منابع او ن. ک. صفحات ۶۱۱-۶۱۲ مقاله فیبوناتچی از فوگل. حق کاملاً به جانب فوگل است که: «عصری نوین با لئوناردو در ریاضیات مغرب زمین آغاز شده است.»

سه حسابدان فلورانس

رافائلا فرانچی و لورا توتی ریگاتلی در مقاله‌ای بسیار جالب با عنوان «استاد بنده‌تو و تاریخ جبر»^۲، کار استاد بنده‌تو و دو تن از پیشینیان او را که در سدهٔ چهاردهم در فلورانس می‌زیستند، یعنی استاد بیادجو^۳ و آتونیو ماتسینگی^۴ را مورد بحث قرار داده‌اند. من خلاصه کار آنها را بازگو می‌کنم.

۱. استاد بنده‌تو

در سال ۱۴۶۳، بنده‌توی اهل فلورانس اثر عظیم خود «رسالهٔ حساب عملی» را مشتمل بر ۵۰۰ صفحه بزرگ کاغذ پوستی کامل کرد. جالبترین بخشهای این اثر برای ما، مقاله‌های ۱۳، ۱۴، و ۱۵ هستند که از معادله‌های جبری بحث می‌کنند.

بنده‌تو بحث را با «قواعد آشنای جبر»^۵ یعنی حل شش نوع معادلهٔ خطی و درجهٔ دوم

$$\begin{array}{ll} x^2 = px & x^2 + px = q \\ x^2 = q & x^2 + q = px \\ px = q & x^2 = px + q \end{array}$$

آغاز می‌کند.

به عقیدهٔ فرانچی و توتی ریگاتلی^۶، این بخش از متن بنده‌تو ترجمهٔ تحت‌اللفظی ایتالیایی یک ترجمهٔ لاتین جبر خوارزمی است.

1) Woepke, F. "Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonardo da Pisa III: Traduction d'un traité par Alhocain", Atti dell' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei 14, p. 301-324 & 345-356 (1861). 2) Raffaella Franci and Laura Toti Rigatelli, "Maestro Benedetto e la Storia dell' Algebra", Historia Mathematica 10, p. 297-317 (1983). 3) Maestro Biaggio 4) Antoio Mazzinghi 5) reghala de algebra amuchable

بنه‌دّو سپس نامهای مشهور برای قوای x را با اختصارات مناسبی نظیر

$$x^{\text{r}} = \text{censo} = c$$

$$x^{\text{r}} = \text{cubo} = b$$

$$x^{\text{r}} = \text{censo di censo} = cc$$

معرفی می‌کند و سپس قواعد ضرب را برای این قوه‌ها و معکوسهای آنها و نیز برای رادیکالهایی نظیر $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{a}$ ارائه می‌کند.

بنه‌دّو سپس فهرستی طولانی از معادله‌ها را معرفی می‌کند که یا می‌توان آنها را به معادله‌های درجه دوم تحویل کرد یا مستقیماً به کمک رادیکالها حل کرد، نظیر

$$x^{\text{r}} + px^{\text{r}} = qx \quad (۱۰)$$

که می‌توان آن را به

$$x^{\text{r}} + px = q$$

تحویل کرد یا به

$$x^{\text{r}} = px \quad (۱۵)$$

که می‌توان آن را به صورت

$$x = \sqrt[p]{p}$$

حل کرد.

در مقاله ۱۵، وی سه نوع معادله

$$x^{\text{r}} + px^{\text{r}} = q \quad (۳۷)$$

$$x^{\text{r}} + q = px^{\text{r}} \quad (۳۸)$$

$$x^{\text{r}} = px^{\text{r}} - q \quad (۳۹)$$

را به این فهرست اضافه می‌کند که ابتدا برحسب x^{r} و سپس برحسب x قابل حل‌اند.

۲. استاد بیادجو

بنه‌دتو در مقاله ۱۴ رساله‌اش^۱، دنباله‌ای از ۱۴۰ مسئله عددی را از اثری گم‌شده از «رسالة عملی»^۲ نوشته استاد بیادجوی فلورانسی که حدود سال ۱۳۴۰ در گذشت، ارائه می‌کند. بیست و هشت تا از آنها مسائل بازرگانی‌اند. مسائل دیگر نظری‌اند: این مسائل به معادله‌های جبری منجر می‌شوند که همه به نوع مسائلی تعلق دارند که بنه‌دتو آنها را در مقاله ۱۳ حل کرده است. یکی از این مسائل به معادله

$$\frac{1}{12}x^2 + \left(2 + \frac{1}{12}\right)x + 12 = x$$

منجر می‌شود که، به عقیده بیادجو که بنه‌دتو نیز آن را تأیید می‌کند، «لاینحل»^۳ است. در واقع این معادله ریشه‌های حقیقی ندارد.

مسئله‌ای دیگر از بیادجو به معادله

$$x^4 + x^2 = 110$$

منجر می‌شود. تنها جواب مثبت آن

$$x = \sqrt{10}$$

است.

۳. آنتونیو ماتسینگی

در مقاله ۱۵ رساله‌اش، استاد بنه‌دتو شرح حال مختصری از استاد آنتونیو را درج کرده است که عضوی از خانواده ماتسینگی بوده است. دفتر کار وی در سانتاترینیتا^۴ نزدیک فلورانس قرار داشته است. وی نه تنها در حساب و هندسه، بلکه در احکام نجوم و موسیقی نیز شهرت داشته است. او حدود سال ۱۳۹۰ در گذشت.

بنه‌دتو از رساله آنتونیو، «فیورتی»^۵ چند مسئله نسبتاً مشکل از قبیل مسئله زیر را نقل می‌کند:

مطلوب است یافتن اعدادی که تناسی مسلسل تشکیل دهند به طوری که مجموع آنها ۱۰ و مجموع مربعات آنها ۴۰ باشد.

1) Trattato 2) Trattato di Pratica 3) non puo essere 4) Santa Trinità 5) Fioretti

در نمادگذاری امروزی این شرطها برای سه عدد x, y, z عبارت‌اند از

$$x + y + z = ۱۰$$

$$x : y = y : z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ۴۰$$

از این معادله‌ها، ابتدا

$$2xy + 2xz + 2yz = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$$

$$xz = y^2$$

را استخراج می‌کند و سپس با قرار دادن y^2 به جای xz ، معادله‌های

$$2(x + y + z)y = ۶۰$$

$$y = ۳$$

و سرانجام معادله‌های

$$x + z = ۷$$

$$x^2 + z^2 = ۳۱$$

را به دست می‌آورد. بنابراین

$$x = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{13}), \quad z = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{13}).$$

به نظر می‌رسد که آنتونیو ماتسینگی کسی بوده که علاوه بر عنوان مرسوم «کوسا»^۱ [شیء] برای کمیتی مجهول، نام خاصی برای مجهول دیگر معرفی کرده است. یکی از مسأله‌های او از این قرار است: یافتن دو عدد به طوری که مجموع آنها ۱۸ و مجموع مربعات آنها ۲۷ باشد. وی سپس فرض می‌کند که نخستین عدد «یک شیء منهای ریشه دوم کمیت دیگر»، و دومی «یک شیء به علاوه ریشه دوم کمیت دیگر» باشد، یعنی، وی فرض می‌کند که دو عدد به شکل

$$x - \sqrt{y}, \quad x + \sqrt{y}$$

هستند.

به نظرم ریاضی استاد آتونو قابل تحسین است. فرانچی و توتی ریگاتلی در مقاله خود در مجله هیستوریا ماتماتیکا [تاریخ ریاضیات]، ۱۰، نتیجه می‌گیرند که بسیاری از روشهای جبری که به لوکا پاچولی نسبت داده می‌شود، قبلاً به وسیله سه حسابدان فلورانسی بیادجو، آتونو ماتسینگی، و بنه‌دو به کار رفته است.

دو دست‌نوشته مجهول المؤلف

دو دست‌نوشته ایتالیایی در کتابخانه ملی فلورانس^۱، یعنی

Fond. Princ. II. V. 152

و^۲

Conv. Sopp. G. 7. 1135

روشهای بسیار جالبی برای حل معادله‌های درجه سوم را در بر دارند. به لطف خانم رافائلا فرانچی، من نسخه‌ای از مقاله «مساهمتایی در حل معادلات درجه ۳ در سده XIV» ایشان را پیش از چاپ در فست شریفت گریکه^۳ دیده‌ام.

اولین دست‌نوشته‌ای که ذکر آن به میان آمد، دنباله‌ای از ۲۲ معادله را در بر دارد که می‌توان آنها را به معادله‌های درجه دوم یا درجه سوم محض تحویل کرد. این دنباله با سه نوع معادله که قبلاً آن را در کار بنه‌دو دیده‌ایم، به پایان می‌رسد، یعنی معادله‌های

$$ax^{\natural} = bx^{\natural} + c \quad (20)$$

$$ax^{\natural} + c = bx^{\natural} \quad (21)$$

$$ax^{\natural} + bx^{\natural} = c. \quad (22)$$

سپس به عبارتی فوق‌العاده جالب درباره معادله‌های درجه سوم از سه نوع زیر برمی‌خوریم:

$$ax^{\natural} + bx^{\natural} = c \quad (23)$$

$$ax^{\natural} = bx^{\natural} + c \quad (24)$$

$$ax^{\natural} + c = bx^{\natural}. \quad (25)$$

1) Biblioteca Nazionale di Firenze 2) Contributi alla risoluzione dell'equazione di 3° grade nel XIV secolo 3) Festschrift Gricke (Steiner-Verlag, Wiesbaden)

برای حل این معادله‌ها، نویسنده دستورالعملهایی به شرح زیر ارائه می‌کند. ابتدا معادله‌ها بر a تقسیم و بنابراین به حالت $a = ۱$ تحویل می‌شوند. در مورد معادلهٔ ۲۳، باید معادله‌ای به شکل

$$x^3 + px^2 = q$$

را حل کنیم.

سپس، $\frac{1}{3}p + x$ به عنوان مجهول جدید معرفی می‌شود که من آن را y می‌خوانم. بنابراین معادله‌ای به شکل

$$y^3 = ry + s \quad (۱۶)$$

به دست می‌آوریم.

اگر y جوابی برای معادلهٔ (۱۶) باشد، y «ریشه سوم s با متمم r » نامیده می‌شود. برای مثال، ریشهٔ سوم ۴۴ با متمم ۵ عدد ۴ است زیرا

$$4^3 = 5 \times 4 + 44.$$

اگر متمم نامعین باشد، یافتن ریشه همیشه مقدور است. صرفاً باید عددی مانند y را پیدا کرد به طوری که y^3 از s بیشتر شود. اما اگر متمم داده شده باشد، باید به روش آزمون و خطا عمل شود. در (۱۶) این امکان وجود دارد که جملهٔ s منفی شود. مثلاً معادلهٔ

$$2x^3 + 36x^2 = 704$$

به $x + 6 = y$ و

$$y^3 = 108y - 80 \quad (۱۷)$$

منجر می‌شود.

در این حالت، مؤلف می‌گوید که باید ریشهٔ سوم «بدهی ۸۰»^۲ را با متمم ۱۰۸ یافت. بنابراین اعداد منفی، بدهی تلقی می‌شوند. جواب (۱۷)، که به کمک آزمون و خطا حاصل می‌شود، $y = ۱۰$ است. دومین دستنوشته، همان بیست و دو مسألهٔ تحویلپذیر به معادله‌های خطی و درجهٔ دوم دستنوشتهٔ اول‌اند، و سپس دربارهٔ دو نوع دیگر بحث می‌کند که متناظرند با نوعهای ۲۳ و ۲۵ دستنوشتهٔ اول، اما با مثالهای عددی دیگری توضیح داده شده‌اند، یعنی با دو مثال برای نوع ۲۳:

$$24x^3 + 81x^2 = 516 \quad (\text{جواب } x = 2)$$

1) la radice cubica di s con l'aggiunta di r 2) debito

$$3x^2 + 27x^2 = 1620 \quad (x = 6 \text{ جواب})$$

و با یک مثال برای نوع ۲۵:

$$16x^2 = x^2 + 576 \quad (x = 12 \text{ جواب})$$

روش حل نظیر راه حل دستنوشته اول است.

اینک به مشهورترین مؤلف این دوره می‌رسیم:

لوکا پاچولی

اثر عمده لوکا پاچولی «مجموعه حساب، هندسه، نسبت و تناسب»^۱ که به زبان ایتالیایی در سال ۱۴۸۷ نوشته شده، در سال ۱۴۹۴ در ونیز به چاپ رسیده است. این اثر، تأثیر فراوانی از خود به جای گذاشته است.

لوکا در مقایسه با فیبوناتچی، نمادگذاری جبری ساده‌تری دارد. وی ریشه دوم را با R یا R^2 ، ریشه سوم را با R^3 ، ریشه چهارم را با R^4 یا RR (Radix Radix) نشان می‌دهد. مجهول در معادله با co (cosa)، مربع آن با ce (censo)، مکعب آن با cu (cubo)، قوه چهارم آن با $ce.ce$ (censo censo) نشان داده می‌شود. اگر مجهول دیگری مطرح باشد، آن را «کوانتیتا»^۲ [کمیت] می‌نامد. برای جمع و تفریق از علامتهای p و m استفاده می‌کند. مثلاً

$$RV^40 \tilde{m} R^320$$

به معنی $\sqrt{40} - \sqrt{320}$ است. حرف V دال بر آن است که از کل عبارت پس از آن باید جذر گرفته شود ($V = U = Universal$).

لوکا پاچولی در پایان کتابش، اظهار می‌دارد که برای معادله‌هایی که در آنها

$$\text{numero, cosa e cubo} \quad (n, x, x^3)$$

یا

$$\text{numero, censo e cubo} \quad (n, x, x^3)$$

یا

numero, cubo e censo de censo (n, x, x^3)

ظاهر می‌شوند «تاکنون ایجاد قاعده‌های کلی مقدور نبوده است».

به طوری که در بخش سوم فصل حاضر خواهیم دید، دیری نپایید که این نوع معادله‌های درجه سوم و چهارم به دست شیپونه دل فرو^۱، تارتاگلیا^۲، کاردانو^۳، و فراری^۴ حل شدند. پیش از بحث درباره کارهای این جبردانان سده شانزدهم، لازم است حسابدان مهتی را که در سده چهاردهم در پیسا می‌زیست، مورد مطالعه قرار دهیم.

بخش دوم استاد داری پیسایی

یکی از آثار کمتر شناخته شده استاد داری پیسایی با عنوان «*Aliabrabā argibra*» به وسیله وارن وان اخمونت^۵ در مقاله اخیر او «جبر استاد داری پیسایی» در هیستوریا ماتماتیکا ۱۰، صفحات ۳۳۹-۴۲۱ (۱۹۸۳) بحث شده است. تصور می‌کنیم بهترین کار، نقل چکیده مقاله وی باشد:

این مقاله فهرست ملخصی از ۱۹۸ نوع مختلف از معادله‌ها و قواعد حل آنها را که در یک متن جبری مربوط به سده چهاردهم دیده می‌شود، ارائه می‌کند که منسوب است به استاد داری پیسایی که جز این نام چیزی از وی نمی‌دانیم. این متن به ویژه از لحاظ طولانی بودن نامعمول آن، پرداخت ماهرانه معادله‌های پیچیده متضمن رادیکالها و توانهای تا درجه دوازدهم، و حل صحیح چهار معادله تحویل‌ناپذیر درجه سوم و درجه چهارم قابل ذکر است.

اهمیت رساله داری در تاریخ ریاضیات را قبلاً گیوم لیبری^۶ در جلد دوم «تاریخ علوم ریاضی در ایتالیا»^۷ است.

رساله داری در سه نسخه ایتالیایی و یک ترجمه عبری، که در سال ۱۴۷۳ به دست موردخای فینزی^۸ در مانتوا^۹ به رشته تحریر در آمده، موجود است. فینزی اظهار می‌دارد که داری رساله‌اش را در سال ۱۳۴۴ نوشته است.

فهرست مسائل داری با شش نوع معادله معروف خطی و درجه دوم آغاز می‌شود. معادله‌هایی از

- 1) Scipione del Ferro 2) Tartaglia 3) Cardano 4) Ferrari 5) Warren Van Egmond
6) Guillaume Libri 7) Hisoire des Sciences Mathematiques en Italie 8) Mordechai Finzi
9) Mantua

قبیل

$$ax^2 = n \quad (۷)$$

$$ax^2 = bx \quad (۸)$$

$$ax^2 = bx \quad (۱۲)$$

پس از آن می‌آیند که می‌توان آنها را با استخراج ریشه‌های سوم یا دوم حل کرد. داری پس از آن دنباله‌ای طولانی از معادله‌ها (اغلب متضمن رادیکال) را که به معادله‌های خالص درجه دوم و درجه سوم قابل تحویل‌اند، ارائه می‌کند، معادله‌هایی نظیر

$$n = ax + \sqrt{bx}. \quad (۳۷)$$

چهار حالت خاص که بین شماره‌های ۱۸۲ و ۱۸۳ درج شده‌اند، درخور توجه ویژه‌اند، زیرا متضمن معادله‌های تحویل‌ناپذیر آمیخته درجه سوم و درجه چهارم‌اند. در نمادگذاری نوین، این چهار معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$cx + bx^2 + ax^3 = n \quad (۱)$$

$$dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 = n \quad (۲)$$

$$dx + cx^2 + ax^4 = n + bx^3 \quad (۳)$$

$$dx + ax^4 = n + cx^2 + bx^3. \quad (۴)$$

داری قواعدی بر حل این معادله‌ها ذکر می‌کند. اما، به طوری که خود نیز می‌پذیرد، قاعده‌های او تنها در حالت‌های خاصی که در نظر گرفته شده‌اند، و نه در حالت کلی، اعتبار دارند. وی در همه حالت‌ها ابتدا به ما می‌آموزد که همه ضریبها را بر a تقسیم کنیم به طوری که، مثلاً، معادله (۱) به شکل ساده‌تر

$$x^3 + bx^2 + cx = n \quad (۱')$$

تحویل شود.

جواب (۱') به صورت

$$x = \sqrt[3]{(c/b)^2 + n} - c/b \quad (۵)$$

داده می‌شود.

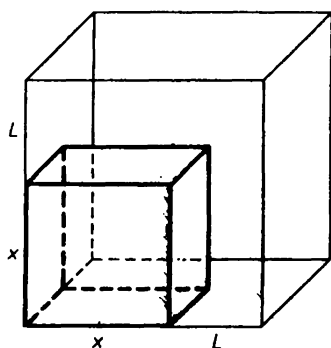
حال این سؤال مطرح می‌شود: داری چگونه به قاعده (۵) رسیده است؟

من پاسخ را نمی‌دانم، اما می‌توانم به خود جرأت ارائه فرضی را بدهم. در کار خوارزمی و نیز کار لئوناردوی پیسایی معادله درجه دوم

$$x^2 + bx = c$$

با افزودن مقدار ثابت به دو طرف به طوری که سمت چپ معادله مربع کامل $(x + b/2)^2$ شود، حل شده است. حالا بیاید افزودن مقداری ثابت به دو طرف $(\sqrt{\quad})$ را به طوری که سمت چپ معادله مکعب کامل $(x + L)^3$ شود، امتحان کنیم. این طرز عمل در چه شرایطی نتیجه‌بخش است؟

خوارزمی و لئوناردوی پیسایی هر دو این فرمول را برای مربع $(x + b/2)$ با رسم شکلی نظیر شکل (۱۰) ما تشریح می‌کنند. بد نیست رسم نموداری شبیه به آن را برای $(x + L)^3$ امتحان کنیم (شکل



شکل ۱۱

(۱۱). از نظر هندسی روشن است که مکعب بزرگتر را می‌توان به هشت قسمت زیر تقسیم کرد:

یک قسمت x^3 به نام «il cubo» [مکعب]

سه بلوک $x^2 L$

سه بلوک $x L^2$

و یک مکعب L^3 .

اگر حالا فرض کنیم که این قسمت‌ها دقیقاً برابر سه جمله سمت چپ $(\sqrt{\quad})$ به علاوه جمله ثابتی باشند که باید به دو طرف افزوده شوند، سه شرط حاصل می‌شود که باید برآورده شوند، ...

(A) جمله افزوده $L^3 =$

(B) «عدد شیءها»ی $c = 3L^2$

(C) «عدد مربعات»ی $b = 3L$

شرط (A) را همواره می‌توان با انتخاب مناسب جمله افزوده برآورده کرد. با تقسیم (B) بر (C)، تساوی

$$L = c/b$$

را به دست می‌آوریم.

حال مثال داری را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $L = c/b$ در (B) و (C) صدق کند. معادله (V) را می‌توان به صورت

$$(x + L)^2 = n + L^2$$

نوشت و جواب آن با جواب داری

$$x = \sqrt[n + L^2]{n + L^2} - L = \sqrt[n + (c/b)^2]{n + (c/b)^2} = c/b$$

کاملاً هماهنگ است.

مثال داری برای معادله (۱) معادله

$$x^2 + 60x^2 + 1200x = 4000 \quad (V)$$

است.

در این حالت کاملاً روشن است که این معادله را می‌توان به صورت

$$(x + 20)^2 = 4000 + 8000 = 12000$$

نوشت و با استخراج ریشه سوم حل کرد.

مثال (V) داری از یک مسئله وام ناشی می‌شود. همین مسئله در دستنوشته‌ای با عنوان «تراتو دوآباکو»^۱ [رساله حساب] اترپی‌یرو دلا فرانچسکا^۲، نقاش مشهور، نیز دیده می‌شود. ن.ک. جینوآریگی^۳: «یادداشتی درباره جبر پی‌یرو دلا فرانچسکا». در این رساله سه مسئله وام را می‌یابیم که دو مورد از آنها، دقیقاً با همان داده‌های عددی، در رساله داری نیز ظاهر می‌شوند.

اولین مسئله از این قرار است:

1) Trattato d'Abaco 2) Piero della Francesca 3) Gino Arrighi, "Note di Algebra di Piero della Francesca", Physics 9, p. 421-424 (1967).

کسی ۱۰۰ لیره به دیگری قرض می‌دهد، و پس از ۳ سال ۱۵۰ لیره با سرمایه‌گذاری سالانه، از وی دریافت می‌دارد. سؤال می‌شود که وام با چه نرخ بهره ماهانه داده شده است.

نرخ بهره ماهانه برحسب دنا ریوس [دینار] بر هر لیره حساب می‌شود و هر لیره ۱۲×۲۰ دینار است. بنابراین اگر نرخ بهره ماهانه x دینار برای هر لیره باشد، بهره سالانه $۱۲x$ دینار بر هر لیره، و نرخ بهره $x/۲۰$ است. بنابراین معادله

$$۱۰۰ \left(1 + \frac{x}{۲۰} \right)^۳ = ۱۵۰$$

را به دست می‌آوریم؛ یا اگر طرفین را در ۸۰۰۰ ضرب کنیم معادله

$$(x + ۲۰)^۳ = ۱۲۰۰۰$$

به دست می‌آید که دقیقاً معادله (۱') داردی است.

مسئله دوم نیز شبیه به همان است. اگر وام‌دهنده ۱۶۰ لیره پس از ۴ سال دریافت کند، معادله برحسب x به صورت

$$(x + ۲۰)^۴ = ۲۵۶۰۰۰$$

یا

$$x^۴ + ۸۰x^۳ + ۲۴۰۰x^۲ + ۳۲۰۰۰x = ۹۶۰۰۰$$

در می‌آید که معادله (۲') داردی است. می‌توان آن را با استخراج ریشه چهارم حل کرد. ظاهراً داردی مبتکر این مسئله‌هاست.

مثالهای (۳) و (۴) در معادله‌های داردی از یک نوع نیستند. مثالهای او از این قرارند:

$$x^۴ + ۲۸x^۲ + ۷۲۰x = ۲۰x^۳ + ۱۸۰۰ \quad (۳')$$

و

$$x^۴ + ۱۱۲۰x = ۲۰x^۳ + ۱۲x^۲ + ۲۸۰۰. \quad (۴')$$

مسائلی که به معادله‌های (۳') و (۴') منجر می‌شوند، هر دو به یک شکل‌اند، یعنی

مسئله P : تقسیم ۱۰ به دو جزء به طوری که حاصلضرب آنها تقسیم بر تفاضل آنها $\sqrt{g}$ باشد، با $g = ۱۸$ در (۳') و $g = ۲۸$ در (۴').

اگر یکی از جزءها را x و دیگری را $x - ۱۰$ بنامیم، خواهیم داشت

$$\frac{x(۱۰ - x)}{x - (۱۰ - x)} = \sqrt{g} \quad (۶)$$

با $g = ۱۸$ یا $g = ۲۸$. در مورد اول داریم

$$x^2(۱۰ - x)^2 = ۱۸(۲x - ۱۰)^2$$

یا

$$x^4 - ۲۰x^3 + ۲۸x^2 + ۷۲۰x = ۱۸۰۰ \quad (۷)$$

که معادله (۳') داردی است.

در مورد دوم، داریم

$$x^2(۱۰ - x)^2 = ۲۸(۲x - ۱۰)^2$$

یا

$$x^4 - ۲۰x^3 - ۱۲x^2 + ۱۱۲۰x = ۲۸۰۰ \quad (۸)$$

که معادله (۴') داردی است.

جواب داردی برای معادله (۳) با $a = ۱$ از این قرار است

$$x = \sqrt[3]{(c/۴)^2 + n} + b/۴ - \sqrt{d/۲n} \quad (۹)$$

و جواب او برای (۴) با $a = ۱$ نیز به همان قرار است.

داردی چگونه به این فرمول عجیب رسیده است؟ یک بار دیگر، به خود جرأت فرضی را می‌دهم.

معادله (۶) را می‌توان به صورت معادله درجه دوم

$$(۲۰x - ۱۰)\sqrt{g} = ۱۰x - x^2$$

یا

$$x^2 - ۲(۵ - \sqrt{g})x = ۱۰\sqrt{g} \quad (۱۰)$$

نوشت.

جواب (۱۰) عبارت است از

$$x = 5 - \sqrt{g} + \sqrt{(5 - \sqrt{g})^2 + 10\sqrt{g}}$$

یا

$$x = 5 - \sqrt{g} + \sqrt{25 + g}. \quad (11)$$

از دیگر سو، از مربع کردن (۶) معادله

$$x^2(10 - x)^2 = g(2x - 10)^2$$

یا

$$x^4 + (100 - 4g)x^2 + 40gx = 20x^2 + 100g \quad (12)$$

حاصل می‌شود که هرگاه آن را به صورت

$$x^4 + cx^2 + dx = bx^2 + n$$

بنویسیم، خواهیم داشت

$$b = 20, \quad c = 100 - 4g, \quad d = 40g, \quad n = 100g \quad (13)$$

حال اگر مقادیر (۱۳) را در فرمول (۹) داری قرار دهیم،

$$x = \sqrt[3]{(25 - g)^2 + 100g} + 5 - \sqrt{g}$$

را به دست می‌آوریم که با (۱۱) همخوانی دارد.

مسئله داری این بود: چگونه می‌توانیم جواب (۱۱) را به شکلی نظیر (۹) بنویسیم که در آن به جای اعدادی خاص نظیر ۵ و g (برابر با ۱۸ یا ۲۸) عبارتهایی ظاهر شوند که از ضریبهای (۱۳) قابل محاسبه باشند؟

سعی می‌کنیم دریابیم که داری مسئله‌اش را چگونه حل کرده است. سه جمله (۱۱) را جداگانه در نظر می‌گیریم.

اولین جمله ۵ با نصف کردن ۱۰ داده شده در مسأله P به دست آمده، و $b = ۲۰$ با دو برابر کردن این جمله پیدا شده است. بنابراین اولین جمله در (۱۱) را می‌توان تنها به صورت $b/4$ تعمیم داد. در نتیجه، جمله دوم در (۹) توضیح داده می‌شود.

جمله دوم $\sqrt{g}$ در (۱۱) جذر عدد مفروض g (برابر ۱۸ یا ۲۸) است، و ضریب d برابر $g/4$ است، بنابراین اگر d را بر $۲b = ۴۰$ تقسیم کنیم، درست g را به دست می‌آوریم. در نتیجه سومین جمله در (۹) عبارت است از

$$-\sqrt{d/2b} = -\sqrt{g}.$$

توضیح اولین جمله در (۹) مشکل‌تر است. تصور می‌کنم که داری می‌خواسته عبارتی مشابه فرمول (۵) خود به دست آورد. در (۵) اولین جمله ریشه سوم «چیزی به علاوه n » است، که در آن n جمله ثابت سمت راست معادله (۱) اوست. به همان ترتیب، داری جوابی برای (۲) به دست آورده است که در آن ریشه چهارم «چیزی به علاوه n » ظاهر می‌شده است. بنابراین تصور می‌کنم که داری می‌خواسته جمله سوم (۱۱) را به شکل

$$\sqrt[3]{\text{چیزی به علاوه } n}$$

بنویسد.

وی با گرفتن آن «چیز» برابر $(c/4)^2$ به هدف خود می‌رسد، زیرا داریم،

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(c/4)^2 + n} &= \sqrt[3]{(25 - g)^2 + 100g} \\ &= \sqrt[3]{(25 + g)^2} = \sqrt{25 + g}.\end{aligned}$$

البته، فرض من به ثبوت نرسیده است اما دست کم حقایق را توضیح می‌دهد. در هر صورت باید مهارت داری را در یافتن فرمول (۹) اش، بدون کمک نمادگذاری جبری امروزی، تحسین کنیم.

بخش سوم حل معادله‌های درجه سوم و چهارم

حل معادله درجه سوم کلی به جبردانهای سده شانزدهم ایتالیایی شبیه‌دل فرو، تارتاگلیا، و کاردانو منسوب است. من حالا کار آنها را که از لحاظ تاریخ جبر اهمیتی بنیادی دارد، توصیف می‌کنم.

شیپونه دل فرو

معادله درجه سوم کلی

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

را می‌توان با وارد کردن متغیر جدید

$$x' = x + \frac{1}{3}a$$

به شکل ساده‌تر

$$x'^3 + px + q = 0$$

در آورد.

اگر تنها ضرایب مثبت و مقادیر مثبت x قابل قبول باشند، سه نوع معادله

$$x^3 + px = q \quad (۱)$$

$$x^3 = px + q \quad (۲)$$

$$x^3 + q = px \quad (۳)$$

موجود است.

اولین کسی که معادله (۱) را حل کرده، شیپونه دل فرو است که تا زمان مرگش در سال ۱۵۲۶ استاد ریاضیات دانشگاه بولونا بود. به عقیده بورتولوتی^۱، وی در واقع هر سه مسأله (۱)، (۲)، (۳) را حل کرده است، اما از این امر کاملاً مطمئن نیستیم.

ایده اساسی در ورای حل (۳) بسیار ساده است. من توضیح کاردانو را برای روش حل معادله، که در کتاب او «فن کبیر»^۲ (اولین چاپ به سال ۱۵۴۵ در نورنبرگ) فصل ۱۱ ارائه شده، دنبال می‌کنم. کاردانو بحث را با مثال

$$x^3 + 60x = 20 \quad (۴)$$

آغاز می‌کند.

کاردانو این معادله را در زبان «جبر لفظی» اش چنین توصیف می‌کند:

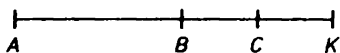
«فرض کنید مکعبی و شش برابر ضلع آن برابر ۲۰ باشد».

1) Bortolotti, E., Periodico di Matematica, serie 4, vol. 5, 1925, p. 147-184. 2) Ars

ایده کاردانو، حل معادله (۴) است با قرار دادن

$$x = u - v. \quad (5)$$

کاردانو این ایده را با اصطلاحات هندسی به صورت زیر بیان می‌کند. وی این u را با پاره خط AC و v را با $C'K$ نمایش می‌دهد، و سپس می‌گوید: «با جدا کردن BC' برابر $C'K$ ، می‌گوییم با انجام این کار خط باقی‌مانده AB برابر GH است» (یعنی GH برابر x ماست).



شکل ۱۲

با قرار دادن $x = u - v$ در (۱۴)، چنین داریم:

$$\begin{aligned} x^3 + 6x &= (u - v)^3 + 6(u - v) \\ &= (u^3 - v^3) - 3uv(u - v) + 6(u - v) = 20. \end{aligned}$$

اما، u و v مقید به شرایط زیرند:

$$u^3 - v^3 = 20 \quad (6)$$

$$3uv = 60. \quad (7)$$

از اینجا، نتیجه می‌شود که $x = u - v$ در معادله مورد نظر

$$x^3 + 6x = 20$$

صدق می‌کند.

در اصطلاحات هندسی کاردانو، تحویل کردن $(u - v)^3$ به

$$(u^3 - v^3) - 3uv(u - v)$$

بسیار پرزحمت است، اما ایده همان است.

تعیین u و v از شرطهای (۶) و (۷) آسان است. از (۷)

$$uv = 2$$

را به دست می‌آوریم و بنابراین

$$u^2 v^2 = 8.$$

حال، تفاضل و حاصلضرب دو مکعب u^3 و v^3 معلوم‌اند، و لذا

$$u^3 = \sqrt[3]{108} + 10$$

$$v^3 = \sqrt[3]{108} - 10.$$

بنابراین u و v ریشه‌های سوم اعداد معلومی هستند، و داریم

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{108} - 10}.$$

کاردانو این را به عنوان قاعده‌ای کلی بیان می‌کند:

ثالث «عدد اضلاع» (یعنی ثالث ضریب x) را به قوه سوم برسان. آن را بر مربع نصف ثابت معادله بیفزای، و جذر همه را استخراج کن. این را دو بار به کار می‌بری، و برای یکی از این دو نصف عدد را که مجذور کرده‌ای می‌افزایی و از دیگری همان نصف را کسر می‌کنی. به یک ذوالاسمین^۱ $(\sqrt[3]{108} + 10)$ و منفصل^۲ آن $(\sqrt[3]{108} - 10)$ می‌رسی. سپس ریشه سوم منفصل را از ریشه سوم ذوالاسمین کم می‌کنی، باقیمانده ضلع مطلوب است.

شیبونه دل فرو هرگز این راه حل خود را منتشر نکرد: تنها آن را به برخی دوستانش گفت. شاگردش آنتونیو ماریا فیوره^۳، از ونیز، از آن جمله بود. با ورود او به صحنه، داستانی مهیج آغاز می‌شود.

تارتاگلیا و کاردانو

در آن زمان مباحثات مبارزه جویانه، اغلب در ازای وجوهی گزاف، شکل عادی رقابت در دنیای دانش بود. یک معلم ریاضیات در ونیز، نیکولو تارتاگلیا^۱ که در سال ۱۴۹۹ در برشا^۲ به دنیا آمد، در این مسابقات موفقیتهای زیادی به دست آورد و جوایز متعددی را تصاحب کرد. لقب او تارتاگلیا، «الکن»، بود؛ ظاهراً نام واقعی او نیکولو فوتانا^۳ بوده است.

در سال ۱۵۳۵ تارتاگلیا از سوی فیوره، شاگرد شیپونه دل فرو به یک مسابقه حل مسأله به مبارزه خوانده شد. قرار بود ۳۰ سؤال مطرح شود و بازنده می بایست هزینه ۳۰ ضیافت را بپردازد. تارتاگلیا مسائل متنوعی تدارک دید، اما فیوره تنها یک تیر در آستین داشت. همه مسأله‌های او معادله‌هایی از نوع (۱) بودند. شب بین ۱۲ و ۱۳ فوریه، اندکی پیش از سپری شدن زمان تعیین شده، اندیشه‌ای ناگهانی در ذهن تارتاگلیا خطور کرد. وی روش حل معادله (۱) را کشف و هر ۳۰ مسأله را ظرف چند ساعت حل کرد. فیوره در مسابقه از عهده حل اغلب مسائل تارتاگلیا برنیامد و بازنده اعلام شد. تنها افتخار پیروزی برای راضی کردن تارتاگلیا بس بود و وی از گرفتن هزینه ۳۰ ضیافت چشم پوشید.

در اوایل ۱۵۳۹ بازیگر دیگری وارد صحنه شد: جیرولامو کاردانو، پزشک، احکامی نجومی، فیلسوف، و ریاضیدان مشهور که در میلان می زیست. زندگی او با آب و تاب به توسط اویستین اور در کتاب «کاردانو، عالم قمارباز»^۴ به شرح درآمده است. کشف تارتاگلیا به گوش کاردانو رسیده بود و او، با فرستادن زوان آنتونیوی اهل باسانویی^۵ کتابفروش به عنوان میانجی به ونیز با تارتاگلیا از در دوستی درآمد. چون تارتاگلیا نمی خواست روش خود را فاش کند، کاردانو اصرار کرد که وی به میلان بیاید و در خانه او رحل اقامت افکند، وی به تارتاگلیا قول داد که او را با مارکیز^۶ آلفونسو داوالوس^۷، فرمانده نظامی میلان آشنا کند. تارتاگلیا دعوت وی را پذیرفت. او چند اختراع نظامی کرده و مایل بود آنها را به مارکیز نشان دهد. پس از ورود تارتاگلیا به میلان، کاردانو او را ترغیب کرد تا راز حل «مکعب و شیء»، یعنی معادله (۱) را برملا کند. کاردانو سوگند یاد کرد که هرگز کشف تارتاگلیا را منتشر نکند. به روایت تارتاگلیا، مراسم سوگند در ۲۵ مارس ۱۵۳۹ به جای آمد.

بلافاصله پس از دیدار تارتاگلیا، کاردانو در توسیع روش حل معادله (۱) به انواع دیگر (۲) و (۳) توفیق حاصل کرد. در این دو حالت، جواب را به جای $u - v$ باید به صورت $u + v$ می نوشت. مابقی

1) Nicolo Tartaglia 2) Brescia 3) Nicolo Fontana 4) Oystein Ore; Cardano, The Gambling Scholar, Princeton 1953, reprinted by Dover, New York, 1965. 5) Zuan

Antonio da Bassano 6) Marchese 7) Alfonso d'Avalos

محاسبات مانند قبل است. مثلاً در حالت (۲) داریم

$$x^2 - px = q$$

$$x = u + v$$

$$x^2 - px = u^2 + v^2 + 2uv(u + v) - p(u + v) = q$$

$$2uv = p$$

$$u^2 + v^2 = q$$

$$u^2 = \frac{1}{2}q + w$$

$$v^2 = \frac{1}{2}q - w$$

با

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{4}p\right)^2} \quad (۸)$$

و بنابراین

$$x = u + v = \sqrt{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt{\frac{1}{2}q - w}. \quad (۹)$$

اما حالا مشکل جدیدی پیش می‌آید. تفاضل زیر علامت جذر در (۸) ممکن است منفی شود. در این حالت موسوم به «حالت تحویل‌ناپذیر»^۱، امکان استخراج جذر حقیقی نیست. با این حال، می‌توان معادله را در مجموعه اعداد حقیقی حل کرد. در «حالت تحویل‌ناپذیر» حتی سه ریشه حقیقی موجود است. می‌توان آنها را به صورت زیر به دست آورد.

در «حالت تحویل‌ناپذیر» می‌توانیم بنویسیم $w = \sqrt{-c}$. دو عبارت $\frac{1}{2}q + w$ و $\frac{1}{2}q - w$ مزدوجهای مختلط‌اند. برای اولین ریشه سوم در (۹) سه امکان وجود دارد: می‌توان ریشه را در ریشه سوم واحد ضرب کرد. بنابر شرط $3uv = p$ ، دومین ریشه سوم در (۹) باید مزدوج حقیقی اولی انتخاب شود، بنابراین صرف‌نظر از اینکه کدام امکان گزیده شده باشد، مجموع همواره حقیقی است.

کاردانو از این مشکل آگاهی داشت، زیرا در فصل ۱ کتاب «فن کبیر»، وی بحث کاملی از عده ریشه‌های مثبت و منفی معادله‌های درجه سوم نوع‌های (۱)، (۲)، (۳) عرضه کرده است. وی می‌دانست که در حالت‌های (۲) و (۳)، اگر $\left(\frac{1}{2}q\right)^2$ از $\left(\frac{1}{4}p\right)^2$ بیشتر شود، جمعاً سه ریشه حقیقی وجود دارد. با

1) casus irreducibilis

این حال، در توضیح راه حل به کمک ریشه های سوم، وی به دقت از «حالت تحویل ناپذیر» دوری می جوید. در کلیه مثالهایش، w همواره ریشه عددی مثبت است و تنها یک ریشه (مثبت) موجود است. در «حالت تحویل ناپذیر» باید جذر عددی منفی را استخراج کرد. چنین جذرهایی، که امروزه آنها را «انگاری» می نامیم، در فصلی دیگر نیز از «فن کبیر» ظاهر می شوند. در فصل ۳۷، کاردانو این مسأله را مطرح می کند: تقسیم 10 به دو جزء، که حاصلضرب آنها 40 است. وی می نویسد:

روشن است که این حالت غیرممکن است. با این حال چنین عمل می کنیم: 10 را به دو جزء مساوی تقسیم می کنیم، هر جزء 5 است. اینها را مجذور می کنیم، 25 به وجود می آید. 40 را، لطفاً، از 25 که هم اکنون به وجود آمده است، به گونه ای که در فصل مربوط به عملیات در مقاله ششم نشان داده ام، کسر کنید، باقیمانده 15 - برجای می ماند، که جذر آن در صورت افزودن بر 5 یا کاستن از آن، اجزائی را می دهد که حاصلضرب آنها 40 است. اینها عبارت خواهند بود از $5 + \sqrt{-15}$ و $5 - \sqrt{-15}$.

کاردانو سپس درستی این مطلب را تحقیق می کند که دو عددی که این گونه به دست آمده اند، در شرایط تعیین شده صدق می کنند. وی می نویسد:

صرف نظر از رنجهای فکری متضمن در این کار، $5 + \sqrt{-15}$ را در $5 - \sqrt{-15}$ ضرب کنید، می شود $(-15) - 25$ که همان $15 +$ است. بنابراین حاصلضرب 40 است این کاری به واقع بفرنج است (ترجمه ویتمر: فن کبیر یا قواعد جبر به توسط جیرو لامو کاردانو)^۱

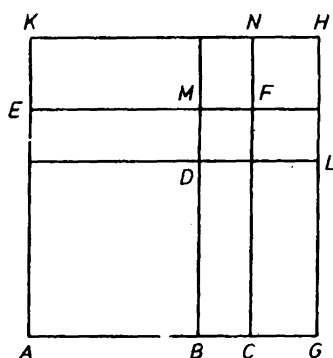
تا آنجا که می دانم، کاردانو اولین فردی بوده که اعداد مختلط به صورت $a + \sqrt{-b}$ را وارد جبر کرده است، اما درباره آن شبهات جدی داشته است.

لودوویکو فراری

در ۱۵۳۶، نوجوانی ۱۴ ساله به عنوان خدمتکار به جمع مستخدمین کاردانو پیوست. وی ریاضیات آموخت، و به ریاضیدانی برجسته، دوست و منشی کاردانو بدل شد.

فراری کشف کرد که معادله درجه ۴ کلی را می توان به یک معادله درجه سوم تحویل و بنابراین آن را به کمک ریشه های دوم و سوم حل کرد. کاردانو روش فراری را در فصل ۳۹ کتاب «فن کبیر» توضیح داد و اظهار داشت که «این روش از آن لودوویکو فراری است، که به خواهش من آن را به من داده است». شرح کاردانو از این روش، با قضیه ای درباره مربعها و مستطیلهای آغاز می شود که او آن را چنین شرح می دهد:

1) Witmer, T. R.: The Great Art or The Rules of Algebra by Girolamo Cardano, M. I. T. Press, Cambridge, Mass. 1968.



شکل ۱۳

«فرض کنید که مربع AF به دو مربع AD و DF ، و دو متمم DC و DE تقسیم شده باشد، و به من اجازه دهید غلّم KFG را دور آن اضافه کنم تا مربع کامل AH را تکمیل کرده باشم (ن. ک. شکل ۱۳). می‌گویم که این غلّم مرکب از GC^2 به علاوه دو برابر خط افزوده $CA \times GC$ است، زیرا FG ، بنابر تعریف داده شده در آغاز مقالة دوم اصول برابر $GC \times CF$ است، و CF بنابر تعریف مربع برابر CA است. چون، بنابر ۴۳، ای اصول، KF برابر FG است، دو سطح GF و FK مرکب از $GC \times CA \times 2$ است، و بنابر فرع ۴، II، ای اصول، GC^2 برابر FH است. بنابراین، قضیه آشکار است. پس، هرگاه AD برابر x^2 ، و CD و DE [هر یک] برابر x^2 باشند، و DF برابر ۹ باشد، BA برابر x^2 و BC لزوماً برابر ۳ خواهد شد. بنابراین چون خواهیم خواست چارگوشهای دیگری بر DC و DE اضافه کنیم، این چارگوشها برابر CL و KM خواهند بود. برای کامل کردن تمام مربع نیاز به LMN است. این، به طوری که نشان داده‌ایم، مرکب از مجذور GC [به علاوه $GC \times BC \times 2$]، نصف عدة مجذورها [ی اصلی] است زیرا CL ، به طوری که نشان داده‌ایم، سطح تولید شده به وسیله $GC \times AB$ است، و AB برابر x^2 است، زیرا فرض کردیم که AD برابر x^2 است، و بنابراین FL و MN ، بنابر ۴۲، ای اصول از $GC \times CB$ تشکیل شده است. بنابراین سطح LMN (این عددی است که باید اضافه شود) برابر $GC \times 2BC$ است (یعنی عدة ضرایب x^2 است، که ۶ است) به علاوه GC ضربدر خودش (یعنی، ضربدر در عدة مجذورها). این استدلال از خود ماست.»

بگذارید با استفاده از نمادگذاری جبری نوین، این را توضیح دهم. اگر قرار دهیم $AB = s$

$BC' = a$ و $C'G = b$ ، قضیه‌ای که کاردانو ثابت کرده، معادل است با اتحاد

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2.$$

کاردانو در کاربرد این اتحاد برای حل معادله درجه چهارم، $s = AB$ را مربع مجهول x می‌گیرد و لذا

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2b + 2ab + b^2 \quad (10)$$

را به دست می‌آورد.

در یک معادله درجه چهارم، جمله x^2 را همواره می‌توان حذف کرد، بنابراین تنها جمله‌های شامل x^4 ، x ، و یک جمله ثابت باقی می‌مانند. به عنوان مثال، کاردانو معادله

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x \quad (11)$$

را در نظر می‌گیرد.

برای تحویل سمت چپ به مجذوری مانند $(x^2 + a)^2$ ، وی $6x^2$ را به دو طرف اضافه می‌کند و به این ترتیب

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x \quad (12)$$

را به دست می‌آورد.

سپس می‌گوید:

حال اگر $6x^2 + 60x$ دارای جذر می‌بود، جواب را در دست داشتیم. اما چنین نیست. بنابراین باید به هر دو طرف مجذوره‌های کافی مساوی و عددی را اضافه کرد به طوری که در یک طرف یک سه‌جمله‌ای دارای یک ریشه موجود باشد و در طرف دیگر نیز چنین شود.

منظور این است: اگر $6x^2 + 60x$ مربع دو جمله‌ای $px + q$ باشد، می‌توانیم از دو طرف (۱۲) ریشه دوم استخراج کنیم. اما چون $6x^2 + 60x$ مربع کامل نیست، باید جمله $2bx^2$ و ثابتی را به هر دو طرف اضافه کنیم تا مربع کاملی در دو طرف به دست آوریم. با قرار دادن $a = 6$ در اتحاد (۱۰)، کاردانو اتحاد

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2bx^2 + 12b + b^2$$

را در دست دارد. بنابراین اگر

$$2bx^2 + 12b + b^2$$

را به دو طرف (۱۲) بیفزاییم، به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}(x^2 + 6 + b)^2 &= (6x^2 + 60x) + (2bx^2 + 12b + b^2) \\ &= (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b).\end{aligned}\quad (13)$$

حال، b چنان انتخاب می‌شود که سمت راست (۱۳) مربع کامل دوجمله‌ای مانند $px + q$ شود. شرط ممکن بودن این امر آن است که

$$(2b + 6)(b^2 + 12b) = 30^2$$

یا

$$2b^3 + 10b^2 + 72b = 900$$

یا

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450. \quad (14)$$

این، یک معادله درجه سوم برحسب b است که می‌توان آن را با روش توضیح داده شده در یکی از فصول پیشین کتاب کاردانو حل کرد. نتیجه چنین است:

$$b = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}} - 5.$$

حالا، سمت راست (۱۳) مربع کامل است، و می‌توان جذر دو طرف را استخراج کرد و به این ترتیب یک معادله درجه دوم برحسب x به دست آورد.

در این بین، کاردانو و فراری در وضعیت دشواری قرار گرفته بودند. آنها کشفیات فوق‌العاده مهمی کرده بودند، اما نمی‌توانستند آنها را منتشر کنند، زیرا کاردانو به انجیل مقدس سوگند یاد کرده بود که هرگز راه حل تارتاگلیا درباره معادلات درجه سوم را که پایه کار مشترک آنها بود، منتشر نکند.

در سال ۱۵۴۳ کاردانو و فراری تصمیم گرفتند به بولونیا بروند و از آنیاله دلا ناوه^۱ درباره صحت این شایعات که شیپونه دل فرو راه حل معادله درجه سوم را پیش از تارتاگلیا کشف کرده است، پرس و جو کنند. از آنان به گرمی استقبال و بی‌درنگ به آنها اجازه داده شد که مقالات پس از مرگ انتشار یافته شیپونه را که راه حل معادله به روشنی در آنها توضیح داده شده بود، بازبینی کنند.

این بود که کاردانو تصمیم گرفت راه حل معادله‌های درجه سوم و چهارم را در کتاب «فن کبیر» (۱۵۴۵) منتشر، و به صراحت اظهار کند که راه حل معادله (۱) را شیپونه دل فرو کشف کرده و تارتاگلیا آن را دوباره

1) Annibale della Nave

گشتف کرده، و خود وی راه حل را به معادله‌های (۲) و (۳) تعمیم داده و راه حل معادله درجه چهارم به فراری منسوب است. تارتاگلیا بسیار خشمناک شد. سال بعد ماجرای سوگند را با همه جزئیات، همراه با سوگندنامه، منتشر کرد.

رافائل بومبلی

رافائل بومبلی^۱ مؤلف اثر بسیار پرنفوذی در سه مقاله با عنوان جبر^۲ بود. این اثر ابتدا در سال ۱۵۷۲ در ونیز، و سپس در ۱۵۷۹ در بولونیا به چاپ رسید.

بومبلی از «فن کبیر» کاردانو به تحسین یاد کرده اما به نظر او بیان مطالب به توسط کاردانو از وضوح برخوردار نبود («اما باید گفت مبهم است»^۳). بنابراین تصمیم گرفت رساله‌ای بنویسد تا مبتدیان را قادر سازد بدون کمک هر کتاب دیگر، به این موضوع تسلط یابند.

مقاله ۱ جبر بومبلی به محاسبه رادیکالها، به ویژه ریشه‌های دوم و سوم می‌پردازد. تقریب جذرها با کسره‌های مسلسل بسی درخور توجه است. برای تقریب $\sqrt{2}$ ، بومبلی می‌نویسد

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y} \quad (1)$$

از این معادله وی

$$y = 1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

را به دست می‌آورد.

با افزودن ۱ به دو طرف (۱)، عبارت

$$y = 2 + \frac{1}{y} \quad (3)$$

را نتیجه می‌گیرد.

با قرار دادن (۳) در (۱)، بومبلی تساوی

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}$$

1) Rafael Bombelli 2) l'Algebra 3) ma nel dire fú oscuro

را به دست می‌آورد.

من از رسم نوشتن کسرهای مسلسل به صورت

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}$$

پیروی می‌کنم.

بومبلی با ادامه کار به این منوال، کسر مسلسل نامتناهی

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

را به دست می‌آورد.

اگر پس از چند مرحله، از $\frac{1}{y}$ صرف نظر شود، تقریبی برای $\sqrt{y}$ به دست می‌آید، مثلاً

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

یا

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

و به همین قیاس.

بومبلی همین روش را برای جذرهای دیگر مانند $\sqrt{13}$ به کار می‌برد. او نخستین تقریب

$$\sqrt{13} \sim 3 + \frac{4}{6} = 3\frac{2}{3}$$

و تقریب دومی را با قرار دادن $\frac{4}{6} + 6$ به جای ۶ در مخرج به دست می‌آورد،

$$\sqrt{13} \sim 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = 3\frac{3}{5}.$$

فصل ۲ جبر بومبلی به حل معادله‌های تا درجه ۴ می‌پردازد. در حل معادله‌های درجه سوم و چهارم وی از کاردانو پیروی می‌کند. وی برخلاف کاردانو، «حالت تحویل‌ناپذیر» را به طور کامل مورد بحث قرار می‌دهد. با حل معادله

$$x^2 = 15x + 4 \quad (4)$$

به کمک قاعدهٔ کاردانو، جواب

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (5)$$

را به دست می‌آورد.

بومبلی به تبعیت از کاردانو، ریشه‌های انگاری را «سفسطه‌آمیز»^۱ می‌نامد اما متذکر می‌شود که معادلهٔ (۴) به هیچ عنوان ممتنع نیست زیرا دارای ریشهٔ $x = 4$ است. وی در این مرحله به تحقیق در این امر می‌پردازد که آیا می‌تواند معنایی برای ریشهٔ سوم یک عدد مختلط قائل شود. به بیان دقیقتر، وی سعی می‌کند تا اولین ریشهٔ سوم در (۵) را با عدد مختلط $p + \sqrt{-q}$ برابر بگیرد:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}. \quad (6)$$

از این برابری، تساوی

$$2 + \sqrt{-121} = (p^3 - 3pq) + (3p^2 - q)\sqrt{-q}$$

حاصل می‌شود.

این معادله را می‌توان با گذاشتن

$$2 = p^3 - 3pq \quad (7)$$

و

$$\sqrt{-121} = (3p^2 - q)\sqrt{-q} \quad (8)$$

برقرار کرد.

حال اگر این دو شرط برآورده شوند، همچنین داریم

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = p - \sqrt{-q}. \quad (9)$$

بومبلی از ضرب (۶) و (۹) به دست می‌آورد:

$$\sqrt[3]{125} = p^3 + q$$

یا

$$q = 5 - p^2. \quad (۱۰)$$

با قرار دادن آن در (۷)، یک معادله درجه سوم برحسب p به دست می‌آید:

$$4p^3 - 15p = 2. \quad (۱۱)$$

یکی از جوابهای این معادله $p = 2$ است، و از (۱۰) داریم

$$q = 5 - 4 = 1,$$

بنابراین داریم

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

و

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4 \end{aligned}$$

بومبلی پس از به دست آوردن این نتیجه بسیار به وجد آمد. وی می‌نویسد: «ابتدا، به نظرم می‌رسید که پایه این چیز بیشتر بر سفسطه استوار باشد تا بر حقیقت، اما با تکاپو برهان را یافتم.»
بومبلی نمادی را برای آنچه ما $+i$ می‌نامیم، یعنی *più di meno*، و *meno di meno* را برای $-i$ معرفی کرد. وی قواعد محاسبه‌ای از قبیل

$$\textit{meno di meno uia men di meno fá meno,}$$

را ارائه می‌کند که به معنی

$$(-i) \times (-i) = -1$$

است و مثالهایی از محاسبات متضمن اعداد مختلط می‌آورد.

من مثالی از نمادگذاری بومبلی را می‌دهم. عبارت

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i},$$

که در حل معادله درجه سوم به توسط وی ظاهر می شود، به صورت

$$\text{R.c. } L \ 2p. \text{ di m. } 11 \ \bar{L}$$

نوشته می شود.

اینجا R.c. به معنی Radica cubica [ریشه سوم]. حروف L و L برعکس [بَد] در پایان نقش کרוشه را دارند: باید از تمامی عبارت بین L و L برعکس ریشه سوم استخراج شود. علامت اختصاری $p. \text{ di m.}$ به معنی $piú \text{ di meno}$ است.

فصل ۳

از ویت تا دکارت

فرانسوا ویت

زندگی فرانسوا ویت^۱ (۱۵۴۰-۱۶۰۳) را در مقاله ویت از بوزار^۲ در زندگینامه علمی دانشوران ببینید. ویت در فوتنتی لوکنت^۳ برکناره رود واند^۴ پا به عرصه زندگی گذاشت. در دانشگاه پواتیه^۵ به تحصیل حقوق پرداخت و در ۱۵۶۰ درجه کارشناسی از آنجا دریافت کرد. چهار سال بعد به عنوان منشی و آموزگار دختر آنتوانت دوبتر^۶ به نام کاترین دو پارتنی^۷ به خدمت او درآمد. خطابه‌های درسی او درباره مقدمات جغرافیا و نجوم در سال ۱۶۳۷ با عنوان «اصول کیهانشناسی»^۸ منتشر شد. اثر «همانگی افلاک»^۹ او، رساله‌ای در پنج مقاله درباره نجوم بطلمیوسی، در چندین دستنوشته از او باقی است. در سال ۱۵۷۱، ویت شروع به انتشار اثر خود «کاربرد قوانین ریاضی در مثلثات و پیوستها»^{۱۰} کرد. انتشار اولین دو مقاله، که به مثلثات مسطح و کروی می‌پردازد، در ۱۵۷۹ به پایان رسید. دو مقاله آخر قوانین، درباره نجوم، منتشر نشده است.

در ۱۵۷۳، ویت به سمت رایزن پارلمان پرتانی^{۱۱} در رن^{۱۲} منصوب شد، و در ۱۵۸۰ «مخبر شورای دولتی»^{۱۳} در پاریس شد که اداره‌ای وابسته به پارلمان بود. در ۱۵۸۴ از دربار سلطنتی اخراج شد ولی در ۱۵۸۹ مجدداً از سوی هانری سوم فرا خوانده و رایزن پارلمان در تور^{۱۴} شد.

حین جنگ با اسپانیا، ویت با گشودن رمز نامه‌های رمز نوشته که بین راه به جنگ فرانسه می‌افتاد، در خدمت هانری چهارم قرار گرفت. برای آگاهی از جزئیات این رمزگشاییها ن. ک. کان: رمزگشایان^{۱۵}. ویت در ۱۵۹۴ به پاریس و در ۱۵۹۷ به فوتنتی لوکنت بازگشت.

1) Francois Viète 2) H. L. L. Busard 3) Fontenay-le-Comte 4) Vendée 5) Poitiers
6) Antoinette d'Aubeterre 7) Catherine de Parthenay 8) principes de cosmographie
9) Harmonicon coeleste 10) Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus
11) Brittany 12) Rennes 13) Maître de requêtes 14) Tours 15) Kahn, D.: The Code Breakers, New York, 1968, p. 116-118.

از لحاظ تاریخ جبر، مهمترین اثر ویت «مدخل فنون تحلیل»^۱ (تور، ۱۵۹۱) است. هدف او آن بود که روش تحلیل پاپوس^۲ را که در اثر بزرگ او «مجموعه»^۳ تشریح شده بود احیا و آن را با روشهای دیوفانتوس ترکیب کند. ویت به دو نوع تحلیل مورد اشاره پاپوس، نوعی سومی را اضافه کرد و آن را «رتیک»^۴ یا «اگزوتیک»^۵ (از $\epsilon'\xi\eta\gamma\epsilon'\omicron\mu\alpha\iota$ = رهبری، راهنمایی) نامید و آن را به عنوان رویه‌ای تعریف کرد که به کمک آن کمیتی مجهول از حل معادله‌ای به دست می‌آید.

ویت اولین کسی بود که نه تنها حروف را برای کمیت‌های مجهول، بلکه برای کمیت‌های معلوم نیز به کار برد. او از حروف بی‌صدای $B, C, D, \dots$ برای نشان دادن کمیت‌های معلوم، و از حروف باصدای $A, E, \dots$ برای نشان دادن کمیت‌های مجهول استفاده کرد.

در فصل ۳ کتاب «مدخل»، ویت «قانون همگنی»^۶ خود را شرح می‌دهد که بنابر آن تنها کمیت‌های «هم‌جنس» را می‌توان با هم مقایسه کرد یا بر هم افزود. مثلاً، در حالی که ما یک معادله درجه دوم را به صورت

$$bx^2 + dx = z$$

می‌نویسیم، ویت می‌نویسد

“ B in A Quadratum, plus D plano in A , aequari Z solido”.

یعنی، بنابر قانون همگنی ویت، اگر A (x ما) و B (b ما) پاره‌خط باشند، D باید سطح و Z باید حجم باشد. بنابرین می‌نویسد “ D plano” و “ Z solido”. این قانون محدودیت زیادی بر صورتگرایی جبری اعمال می‌کند. به طوری که دیده‌ایم، عمر خیام توانست با وارد کردن واحد طولی مانند e این محدودیت را از پیش پای خود بردارد. خواهیم دید که دکارت نیز همین شگرد را به کار برده است.

ویت در فصل ۴، «قاعده‌های قانونی»^۷ «محاسبه انواع»^۸، یعنی محاسبه با حروف را، در مقابل با اعداد معین مدون می‌کند.

در فصل ۵، ویت قواعدی برای حل معادله‌ها ارائه می‌کند. عملی به نام «آنتی‌تز»^۹ عبارت از انتقال جمله‌ها از طرفی به طرف دیگر معادله است که نظیر همان است، که جبردانان عرب [=عربی‌نویس] آن را جبر می‌نامند. عمل دیگر تقسیم همه جمله‌های یک معادله بر یک «نوع» است و امثال آن.

ویت در ۱۵۹۳ اثر «پنج کتاب درباره یافته‌ها»^{۱۰} را منتشر کرد. وی در این اثر حل چندین معادله معین و نامعین را شرح می‌دهد. برخی از مسائل از «آریمتیکا»ی دیوفانتوس اقتباس شده‌اند. یک

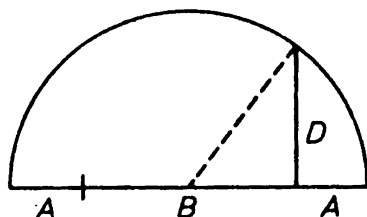
1) In artem analyticem Isagoge 2) Pappos 3) Colleection 4) rhetic 5) exegetic
6) Law ot Homogeniety 7) canonical rules 8) species calculation 9) antithesis
10) Zeteticorum libri quinque

مثال نوعی، این مسأله است: «تقسیم عددی، که مجموع دو مربع است، به دو مربع دیگر».

ویت در دو رساله دیگر به حل هندسی معادله‌های جبری می‌پردازد. در اولی با عنوان «بازنگری قانونمندانۀ عملیات هندسی»^۱ نشان می‌دهد که جوابهای معادله‌های جبری درجه دوم را می‌توان تنها با استفاده از دایره و خطهای راست ترسیم کرد. مثلاً برای حل معادله

$$A^2 + AB = D^2, \quad \text{یا} \quad A(A + B) = D^2$$

ویت دو پاره خط عمود بر هم B و D را ترسیم می‌کند، سپس نیمدایره‌ای به مرکز وسط B رسم می‌کند. دو جزء باقیمانده قطر با A برابرند (ن. ک. شکل ۱۴).



شکل ۱۴

در رساله دوم ویت «متمم هندسه»^۲ (۱۵۹۳) وی به اصول متعارفی اقلیدس برای ترسیم خطهای راست و دایره‌ها، اصل متعارفی دیگری را اضافه می‌کند، یعنی این اصل را: «رسم خطی مستقیم از نقطه‌ای مفروض واقع در خارج دو خط (دو خط مستقیم یا یک خط مستقیم و یک دایره) به طوری که پاره خط محصور بین دو خط برابر با طولی مفروض باشد». در تاریخ ریاضیات یونانی، ترسیمهای مبتنی بر این اصل متعارفی، «ترسیمهای گرایشی»^۳ نامیده می‌شوند.

ویت به کمک این اصل، ابتدا مسأله ترسیم دو واسطه هندسی بین دو پاره خط مفروض را حل می‌کند. از حل این مسأله بلافاصله مسأله تضعیف مکعب حاصل می‌شود. ویت سپس مسأله تثلیث زاویه را حل می‌کند. وی با همین روش هفت ضلعی محاط در دایره را رسم می‌کند. سرانجام نشان می‌دهد که

1) Effectuum geometricarum canonica recensio 2) Supplementum geometriae 3) neusis constructions

کلیه مسائل هندسی را که به معادله‌های درجه سوم و چهارم منجر می‌شوند می‌توان به کمک ترسیم گرایشی حل کرد.

ویت در همان سال ۱۵۹۳ تصمیم گرفت مقالة VIII اثر خود «پاسخهای گوناگون درباره موجودات ریاضی»^۱ را منتشر کند. در فصلهای ۱-۷ این کتاب بار دیگر تضعیف مکعب، تثلیث زاویه، و ترسیم یک هفت ضلعی منتظم را مورد بحث قرار می‌دهد. در فصل ۸ مربع‌ساز^۲، در فصل ۱۱ هلالیهایی را که می‌توان ترسیم کرد، مورد مطالعه قرار می‌دهد، و در فصل ۱۶ ترسیم مماسی بر مارپیچ ارشمیدس در یک نقطه را ارائه می‌کند.

فصل ۱۸، که در آن π به صورت یک حاصلضرب نامتناهی نمایش داده می‌شود، جالبترین فصل است. مساحت یک $2^n \times 4$ ضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع ۱ را می‌توان به صورت

$$\frac{2}{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}$$

نوشت با

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_1}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_2}$$

و به همین قیاس الی آخر. با میل دادن n به سمت بینهایت

$$\pi = \frac{2}{c_1 c_2 c_3 \dots}$$

به دست می‌آید.

در ۱۵۹۳ ریاضیدان هلندی آدریانوس رومانوس^۳ مسأله حل معادله درجه ۴۵ معینی را به همه ریاضیدانان عرضه کرد. سفیر هلند در دربار هانری چهارم پادشاه فرانسه، مدعی شد که هیچکس در فرانسه قادر به حل این مسأله نیست. شاه بی‌درنگ ویت را از این چالش آگاه کرد. ویت ملاحظه کرد که جواب معادله وتری، مقابل به کمان ۸ درجه در دایره‌ای به شعاع ۱ است. بنابراین می‌توان جواب را با تقسیم محیط دایره به ۴۵ قسمت حل کرد. ویت در همان جمع، یکی از ریشه‌های معادله و روز بعد همه ۲۳ ریشه مثبت آن را پیدا کرد. وی راه حل خود را در سال ۱۵۹۵ در رساله‌ای با عنوان «پاسخ راه حل

1) Variorum de rebus mathematicis responsorum 2) quadratrix 3) Adrianus Romanus

کامل همه مسائل ریاضی که آدریانوس رومانوس مطرح کرده است»^۱ منتشر کرد.

در ۱۶۱۵، پس از درگذشت ویت، دوست اسکاتلندی او آلگزاندرا اندرسن^۲ دو مقاله ویت را در مجلدی با عنوانهای «در باب شناسائی معادلات»^۳ و «در باب اصلاح معادلات»^۴ منتشر کرد. ویت در مقاله دوم چندین روش از تبدیل معادله‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد. مثلاً اگر یک ریشه D ی معادله‌ای در دست باشد، می‌توان معادله‌ای با درجه پایینتر به دست آورد. ویت برای این منظور چندین مثال می‌آورد. مثالی دیگر: معادله درجه سوم

$$BA - A^2 = Z \quad (۱)$$

برحسب A مفروض است و فرض کنید E در شرط

$$E^2 - Z = BE \quad (۲)$$

صدق کند.

برای ما، این بدان معنی است که $E -$ یک ریشه معادله اصلی (۱) است، اما ویت ریشه‌های منفی را نمی‌پذیرد. از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیرد که

$$A^2 + E^2 = B.(A + E)$$

یا

$$(A + E)(A^2 - AE + E^2) = B.(A + E).$$

حال می‌توان طرفین را بر $A + E$ تقسیم کرد و معادله‌ای درجه دوم برحسب A به دست آورد. ویت در همین مقاله به حل معادله‌های درجه سوم و چهارم می‌پردازد. وی بحث را با معادله درجه چهارمی مانند

$$A^4 = Z - BA \quad (۳)$$

آغاز می‌کند.

اگر $A^2 E^2 + \frac{1}{4} E^4$ به طرفین افزوده شود، معادله

$$\left(A^2 + \frac{1}{4} E^2\right)^2 = Z - BA + A^2 E^2 + \frac{1}{4} E^4 \quad (۴)$$

1) Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum Adrianus Romanus, responsum. 2) Alexander Anderson 3) De aequationem recognitione 4) De equationem emendatione

به دست می‌آید.

اگر E در معادله

$$Z + \frac{1}{4}E^2 = B^2/4E^2$$

یا

$$E^6 + 4ZE^2 = B^2, \quad (5)$$

که یک معادله درجهٔ سوم برحسب E^2 است، صدق کند سمت راست (۴) به صورت مربع کامل در می‌آید. روش ویت در اساس همان روش فراری است.

در فصل ۷ «در باب اصلاح معادلات»، روش جدیدی برای حل معادله درجهٔ سوم

$$A^2 + 3BA = 2Z \quad (6)$$

می‌دهد.

ویت مجهول جدید E را به کمک معادله

$$B = E(A + E) \quad (7)$$

وارد می‌کند.

با قرار دادن (۷) در (۶)،

$$A^2 + 3AE(A + E) = 2Z$$

و در نتیجه

$$(A + E)^2 = 2Z + E^2 \quad (8)$$

به دست می‌آید.

می‌توان (۷) را برحسب $A + E$ حل کرد و آن را در (۸) قرار داد. معادله درجهٔ دومی برحسب E^2

به دست می‌آید:

$$B^2 = 2ZE^2 + E^6, \quad (9)$$

که می‌توان آن را برحسب E^2 و بنابراین برحسب E حل کرد:

$$E = \sqrt[3]{\sqrt{B^2 + Z^2} - Z}. \quad (10)$$

حال A را می‌توان از (۷) به دست آورد. برخلاف روش کاردانو در فن کبیر تنها به یک بار استخراج ریشه سوم نیاز است. با این حال، نتیجه نهایی مثل روش کاردانو است، زیرا اگر مجهول دیگری مانند $E' = A + E$ وارد شود، آنگاه

$$B = E'(E' - A)$$

و مانند قبل، یک معادله درجه دوم برحسب E'^3 به دست می‌آید:

$$B^3 = E'^6 - 2ZE'^2$$

که از آن

$$E' = \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^3} + Z}$$

حاصل می‌شود.

اما $A = E' - E$ ، نظیر روش کاردانو در فن کبیر، تفاضل دو ریشه سوم است.

ویت از روابط بین ریشه‌ها و ضریبهای یک معادله آگاه است. در فصل ۱۰ «در باب اصلاح» وی این قضیه را بیان می‌کند:

Si A cubes $\overline{-B - D - G}$ in A quad. $\overline{+B}$ in $\overline{G + B}$ in $\overline{G + D}$ in $\overline{G}$ in A, aequatur B in D in G: A explicabilis est de quadlibet illarum trium B, D vel G.

معنی آن چنین است: اگر

$$A^3 + (-B - D - G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$$

برقرار باشد، آنگاه A برابر یکی از سه کمیت B ، D ، یا G است.

مقاله دیگری که به توسط اندرسن چاپ شده است، عنوان «کلترین قضایا درباره تقسیم زوایا»^۱ را دارد. در این مقاله، ویت تثلیث زاویه را در نظر می‌گیرد و آن را برای به دست آوردن یک جواب مثلثاتی یک معادله درجه سوم در «حالت تحویل‌ناپذیر» به کار می‌برد. اگر، با شعاع دلخواه R ، قرار دهیم

$$2R \cos \varphi = A$$

$$2R \cos 3\varphi = \pm B$$

1) Ad angulares sectiones Theoremata καθολικώτερα

$$A^2 = 3R^2 A \pm R^2 B$$

را به دست می‌آوریم و هر معادله درجه سوم با سه ریشه حقیقی را می‌توان به این شکل تحویل و به کمک مثلثات حل کرد.

سیمون استوین

سیمون استوین^۱ که در سال ۱۵۴۸ در بروگه^۲ [بروژ] متولد شد، در ۱۵۸۲ به لیدن^۳ آمد. در این شهر چندین کتاب درباره ریاضیات و مکانیک، همه به زبان هلندی منتشر کرد. به عقیده او زبان هلندی، در بین همه زبانها، بهترین زبان برای بیان اندیشه‌ها عموماً، و اندیشه‌های علمی به طور اخص است. چندین اصطلاح ریاضی که به توسط استوین ساخته شده، هنوز در مدارس هلندی مورد استفاده است. مثلاً، هنوز ما ریاضیات را «wiskunde»، یعنی علم هر آنچه حتمی است^۴ می‌نامیم.

استوین مهندسی برجسته بود. وی آسیای بادی، دریچه و بند سد ساخته است. موریس^۵ شاهزاده اورانژ^۶، رهبر بزرگ جنگ بر ضد اسپانیا، از استوین به عنوان مشاور در بنای استحکامات نظامی استفاده کرد. کتاب استوین در این موضوع، به نام «درباره دژهای نیرومند»^۷، محبوبیت زیادی یافت. این اثر، یوبان^۸ سازنده مشهور استحکامات نظامی فرانسه را تحت تأثیر قرار داد.

در «کتاب جهان»^۹ وی از دستگاه کپرنیکی حمایت کرد. وی در کتابهای بسیار مبتکرانه مکانیکی خود از ارشمیدس الهام گرفته است.

بانفوذترین اثر او جزوه‌ای ۳۶ صفحه‌ای با عنوان «در اعشار»^{۱۰} بود که برای اولین بار در ۱۵۸۵ منتشر شد. استوین در همان سال ترجمه‌ای فرانسوی از آن را با عنوان «La Disme» منتشر کرد. برای ملاحظه تصویری از ویرایش هلندی با ترجمه فرانسوی آن ن. ک. «آثار عمده سیمون استوین»، مجلد ۲ (آمستردام، ۱۹۵۸) صفحات ۳۷۱-۴۵۴.^{۱۱}

استوین در این جزوه واحدها را با ۰، یک دهم آنها را با ①، و به همین قیاس الی آخر نشان

1) Simon Stevin 2) Brugge 3) Leyden 4) gewis 5) Maurits 6) Orange

7) Stercktebouw 8) Vauban 9) Wereldschrift 10) De Thiende 11) The Principal

Works of Simon Stevin

می‌دهد. به عنوان مثال، من ضرب 0.000378 در 0.54 را بازپردازی می‌کنم:

		④	⑤	⑥	
		3	7	8	
			5	4	②
	1	5	1	2	
1	8	9	0		
2	0	4	1	2	
④	⑤	⑤	⑦	⑧	

کسرهای اعشاری را چینی‌ها و اعراب [دانشمندان دوره اسلامی] مدتها پیش از استوین به کار می‌بردند (ن.ک. تروپفکه: تاریخ ریاضیات مقدماتی^۱)، اما این استوین بود که آنها را در غرب متداول کرد. پس از استوین، دیری نباید که علامت ممیز اعشاری^۲ مرسوم شد. مثلاً، در صفحه ۲۱۸ اثر کلاویوس^۳ به نام «کتاب سه قسمتی شرح اسطرلاب»^۴ (ر.م، ۱۵۹۳) نماد 46.5 دیده می‌شود و نیز، که در سال ۱۶۱۴ جدولی برای لگاریتمها منتشر کرد، به طور منظم از ممیز اعشاری استفاده کرده است. البته از نماد ممیز می‌توان برای کلیه اعداد حقیقی، خواه گویا خواه گنگ، استفاده کرد. استوین، مانند مهندسان ما، تمایزی بین اعداد گویا یا گنگ قائل نمی‌شود. وی درست در آغاز کتاب «حساب»^۵ (لیدن، ۱۵۸۵) می‌گوید:

عدد چیزی است که با آن کمیت هر چیز را بیان می‌کنیم،

و

عدد به هیچ وجه کمیتی ناپیوسته نیست ... هیچ عددی گنگ، بی‌قاعد، توضیح‌ناپذیر، یا اصم نیست. بنابراین با یک چرخش قلم، محدودیت کلاسیک «اعداد» به اعداد صحیح (اقلیدس) یا کسرهای گویا (دیوفانتوس) از میان برداشته می‌شود. برای استوین، اعداد حقیقی تشکیل پیوستار می‌دادند. تصور عام او از اعداد حقیقی از سوی همه دانشمندان پس از او، تلویحاً یا صراحتاً، پذیرفته شد. به عقیده دکارت، لایبنیتس، و نیوتن، نسبت هر خط به دیگری را می‌توان به کمک «عدد» بیان کرد. برای ملاحظه جمله‌بندی تعریفهای آنها، ن.ک. تروپفکه: تاریخ ریاضیات مقدماتی، جلد ۱، صفحه ۱۳۷.

1) Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, 4th edition, p. 106 and 110-112.

۲) البته توجه شود که نماد ممیز در غرب (نقطه) است. - م.

3) Clavius 4) Astrolabium tribus libris explicato 5) L'arithmetique

استوین اعداد منفی را نیز، مانند چندین سلف خود، پذیرفت. اما جوابهای انگاری معادله‌ها را نپذیرفت زیرا «آنها در یافتن جوابهای حقیقی کمکی به ما نمی‌کنند».

استوین در کتاب جبر^۱ خود اختصاراتی برای نمادهای جبری معرفی کرده است. مثلاً، وی + و - را برای جمع و تفریق، M و D را برای ضرب و تقسیم، $\sqrt{\quad}$ را برای جذر $\sqrt{\quad}$ را برای ریشه سوم و امثالهم به کار برده است.

پی‌یر دو فرما

برای مروری بر زندگی و آثار فرما ن.ک. به. ماهونی: خط سیر پی‌یر دو فرما در ریاضیات^۲ (۱۶۵۵-۱۶۰۱). شرح دلنشینی از کار درخشان فرما در نظریه اعداد به توسط آندره وایل داده شده است: نظریه اعداد: رهیافتی در دل تاریخ^۳. ما در اینجا تنها کشف روش هندسه تحلیلی از سوی فرما را مورد توجه قرار خواهیم داد.

هندسه تحلیلی، تقریباً همزمان و مستقلاً، به توسط فرما و دکارت ابداع شد. این ابداع کار چندان مشکلی نبود، اما اهمیتی اساسی در بسط هندسه و جبر داشت. هدف اولیه آن حل مسأله‌های هندسی به روشهای جبری بود. برعکس، می‌توان این روش را برای کاربرد روشهای هندسی در مسأله‌های جبری مورد استفاده قرار داد.

شرح فرما از روش هندسه تحلیلی در «آشنایی با مکانهای هندسی مسطحه و فضایی»^۴ توضیح داده شده است. در ژانویه ۱۶۴۳، فرما این رساله را برای طرف مکاتبه خود پی‌یر دو کارکاوی^۵ فرستاد. این رساله پس از مرگش در «مجموعه آثار گوناگون»^۶ (۱۶۷۹) او و دوباره با ویرایشی بهتر در جلد اول «مجموعه آثار فرما» ۱۸۹۱ به چاپ رسیده است.

«مکانهای هندسی مسطحه و فضایی» چه هستند؟ فرما توضیح زیر را می‌دهد:

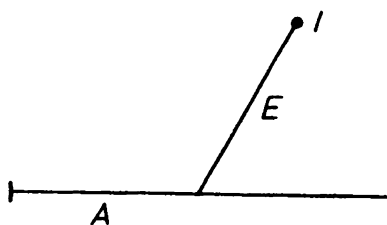
هر زمان که منتهای پاره‌خط معرف کمیته نامعلوم خطی راست یا دایره‌ای رسم کند، یک مکان هندسی مسطحه حاصل می‌شود، و زمانی که سهمی، هذلولی، یا بیضی رسم کند، یک مکان هندسی فضایی حاصل می‌شود (ترجمه ماهونی).

بگذارید این مطلب را توضیح دهم. در «مقدمه» فرما نقطه متغیری مانند I با دو مختص (متعامد یا مایل) معین می‌شود که او، با استفاده از نمادگذاری ویت، آنها را A و E نشان می‌دهد (ن.ک. شکل

1) Stelreghele 2) Michael & Mahoney: The Mathematical Career of Pierre de Fermat.

3) André Weil: Number Theory, An approach through history, Birkhäuser, Basel, 1983.

4) Introduction to plane and Solid Loci 5) Pierre de Carcavi 6) Varia Opera



شکل ۱۵

۱۵). «منتهای پاره خط معرف کمیت»، نقطهٔ انتهایی I عرض E است. بنابراین طبق توضیح فرما، یک «مکان هندسی مسطحه» دایره یا خطی راست است، و یک «مکان هندسی فضایی» یک مقطع مخروطی.

اولین قسمت «مقدمه»، که به مکانهای هندسی مسطحه می‌پردازد، در آوریل ۱۶۳۶ به پایان رسید. این امر از نامه‌ای به مرسن^۱ آشکار می‌شود که در آن فرما می‌نویسد:

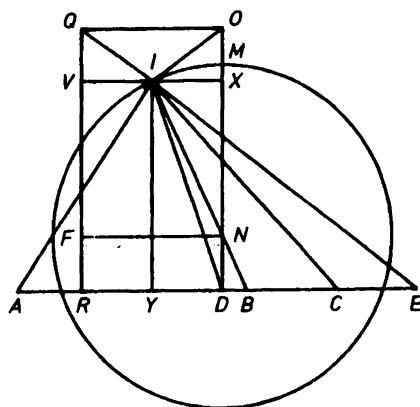
من رسالهٔ دربارهٔ مکانهای مسطحه^۲ آپولونیوس را کاملاً بازسازی کرده‌ام. شش سال قبل آن را به آقای پراد^۳ دادم. . . . این امر واقعیت دارد که زیباترین و دشوارترین مسأله‌ای، که هنوز حل نکرده بودم، در آن نیست. اینک رساله از هر حیث کامل است، و به شما اطمینان می‌دهم که در کل هندسه، چیزی قابل قیاس با این قضایا نیست (ترجمهٔ ماهونی).

این «دشوارترین مسأله» کدام مسأله بوده است؟ موضوع از نامه‌ای به روبروال^۴ آشکار می‌شود که در سپتامبر ۱۶۳۶ به نگارش در آمده و فرما در آن ابتدا کاربردهایی از مختصات خود را شرح و سپس ادامه می‌دهد:

من بهترین کاربرد روش خودم را، که برای یافتن مکانهای هندسی مسطحه و فضایی است، از قلم انداخته‌ام. این روش به ویژه در یافتن آن مکان هندسی مسطحه که پیشتر آن را بسی دشوار یافته بودم، برایم مفید بوده است. منظورم یافتن این مکان هندسی است: اگر از تعدادی از نقاط مفروض، خطهای راستی به یک نقطهٔ (متغیر) وصل شود و اگر مجموع مربعات طولهای این پاره‌خطها با سطحی مفروض برابر باشد، آن نقطه بر دایره معینی قرار دارد.

1) Mersenne 2) On Plane Loci 3) Prades 4) Roberval

راه حل این «دشوارترین» مسأله به صورت قضیه ۵ II کتاب «آشنایی» ارائه شده است. فرما ابتدا چندین حالت خاص را بررسی می کند که در آنها نقاط مفروض بر خطی راست واقع اند. سپس به حالتی می پردازد که یکی از نقاط مفروض (Q در شکل ۱۶) خارج خط AE قرار دارد. برای پرداختن به این حالت،

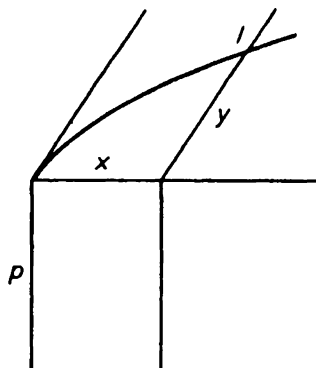


شکل ۱۶

وی مختصات متعامد را برای نقطه Q و نیز نقطه متغیر I را معرفی می کند. مختصات I عبارت اند از IX و IY . اینک حل مسأله آسان است، و مشکلی در تعمیم آن به حالت کلی نیست.

روش مختصات اصولاً پیشتر به وسیله آپولونیوس در «کونیکا»^۱ ی او به کار رفته بود. برای اطلاع از این مطلب ن. ک. اوتو نوگه باوئر: پژوهشهایی درباره آپولونیوس، منابع و پژوهشها در تاریخ ریاضیات^۲. در «کونیکا»، نقطه ای متغیر بر یک مقطع مخروطی به کمک دو پاره خط، که معمولاً «طول» و «عرض» نامیده می شوند، معین می شود. به تبعیت از تداول امروزی، من دو پاره خط را با x و y نشان می دهم (ن. ک. شکل ۱۷). اگر نقطه I بر مقطعی مخروطی تغییر کند، یک واسطه جبری مشخص بین x و y موجود است که «نشانه»^۳ خم نامیده می شود.

1) Conica [مقاطع مخروطی] 2) Otto Neugebauer: Appolonius Studien, Quellen und Studien
Gesch. der. Math. B2, p, 215-254. 3) symptoma



شکل ۱۷ سهمی

در «کونیکا»، «نشانه‌ها»ی سه مقطع مخروطی عبارت‌اند از

سهمی $y^2 = px$ (ن. ک. شکل ۱۷)

هذلولی $y^2 : x(a + x) = p : a$

بیضی $y^2 : x(a - x) = p : a$

در «آشنایی» فرما، معادله خط راستی که بر مبدأ مختصات می‌گذرد، از این قرار است:

$$D.A = B.E$$

(ن. ک. شکل ۱۸). فرما این مطلب را به صورت قضیه زیر بیان می‌کند.

اگر $D.A = B.E$ ، آنگاه مکان هندسی نقطه I خطی راست است.

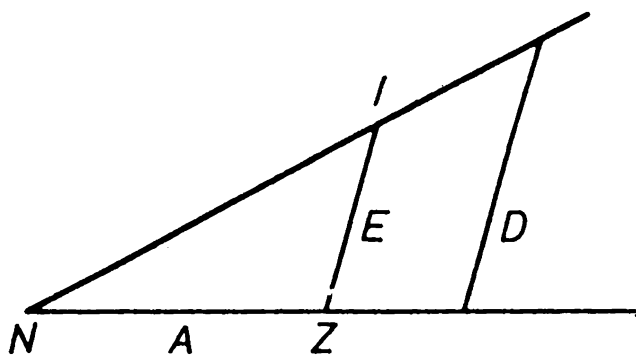
با سهمی نیز به همان نحو برخورد می‌شود (ن. ک. شکل ۱۹). فرما نشان می‌دهد:

اگر Aq (یعنی، مربع A) برابر $D.E$ باشد، نقطه I بر یک سهمی واقع است.

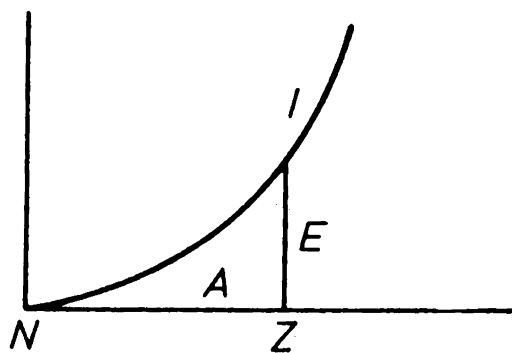
معادله دایره به صورت

$$Bq. - Aq. = Eq. \quad (۱۳)$$

نوشته می‌شود و فرما ثابت می‌کند که همه معادله‌های شامل Aq و Eq و A و E را که در کمیتهای معلوم ضرب شده‌اند، می‌توان به معادله (۱۳) تحویل کرد به شرط اینکه زاویه NZI قائمه و ضریب Aq با ضریب Eq برابر باشد.



شکل ۱۸



شکل ۱۹

فرما در پایان رساله‌اش، روشی کلی را برای تحویل هر معادله درجهٔ دوم برحسب x و y به یکی از شکلهای خاص زیر شرح می‌دهد:

$$\begin{array}{ll} ax = by & \text{خط راست} \\ xy = b & \text{هذلولی} \\ c^2 \pm xy = ay^2 & \text{یک جفت خط} \\ x^2 = ay & \text{سه‌می} \\ b^2 - x^2 = y^2 & \text{دایره} \\ b^2 - x^2 = ay^2 & \text{بیضی} \\ b^2 + x^2 = ay^2 & \text{هذلولی} \end{array}$$

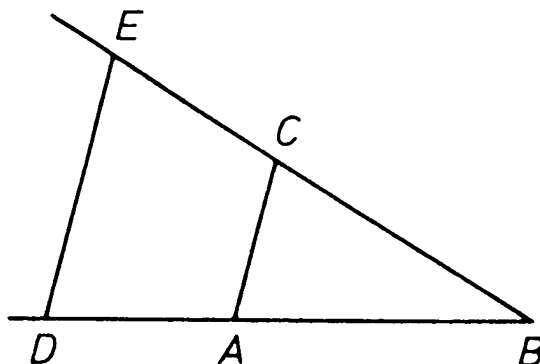
بنابراین هر معادله درجهٔ دوم برحسب x و y نمایش خطی راست یا یک مقطع مخروطی است. به طوری که هم اکنون خواهیم دید، دکارت همین نتیجه را، با روشی متفاوت، ثابت کرده است.

رنه دکارت

نمادگذاری جبری امروزی را عمدتاً به رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰) مدیونیم. دکارت این نمادگذاری را در آغاز رسالهٔ «هندسه»^۱ اش معرفی کرده است. که در آن اصول «هندسه تحلیلی» شرح داده شده‌اند. این رساله، بخشی از اثر بزرگ فلسفی «گفتار در روش»^۲ (۱۶۳۷) دکارت است. در نظر دکارت «هندسه» او به وضوح نمونه‌ای استاندارد برای روشن کردن تأملات کلی دربارهٔ روش علمی است. متن فرانسوی «هندسه» همراه با ترجمه‌ای انگلیسی به توسط دیوید یوجین اسمیت^۳ و مارشا لاثم^۴ در ۱۹۵۴ و مجدداً به توسط انتشارات داور^۵، نیویورک، چاپ شده است.

دکارت مطلب را با این بیان آغاز می‌کند که «هر مسأله در هندسه را می‌توان به عباراتی تحویل کرد که داشتن طولهای خطهای معینی برای ترسیم آن کافی است». اما اعمال استاندارد در حساب عبارت‌اند از: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشه‌های دوم. در هندسه، پس از انتخاب خطی ثابت به نام «واحد»، می‌توان پنج عمل روی پاره‌خطها را تعریف کرد که با اعمال حسابی متناظرند. برای ضرب دو پاره‌خط BD و BC' ، اگر AB را به عنوان واحد انتخاب کنیم، تنها لازم است نقاط A و C را به هم وصل کنیم، و DE را به موازات CA رسم کنیم؛ در این صورت BE حاصلضرب مطلوب است

1) La Géométrie 2) Discours de la Méthode 3) David Eugene Smith 4) Marcia Latham 5) Dover



شکل ۲۰

(ن. ک. شکل ۲۰). به عبارت دیگر: حاصلضرب $ab = c$ به کمک تناسب

$$e : a = b : c \quad (۱۴)$$

تعریف می‌شود که در آن e واحد طول است.

مزیت این نمادگذاری عیان است. در هندسه یونانی، حاصلضرب دو پاره خط، یک مساحت است: نمی‌توان آن را بر پاره خطی راست افزود: از سوی دیگر، بتایر روش دکارت، حاصلضرب دو پاره خط، باز هم یک پاره خط است. به همین روال، خارج قسمت دو پاره خط، یک پاره خط است: اگر (۱۴) برقرار باشد، b خارج قسمت c/a است.

ریشه دوم یک پاره خط چنین توصیف می‌شود: پاره خط $FG = e$ را بر GH می‌افزاییم، FH را در K به دو جزء مساوی تقسیم می‌کنیم، نیمدایره FIH به مرکز K را رسم می‌کنیم، و عمود GI را بر FH اخراج می‌کنیم. پاره خط GI جذر مطلوب است. (ن. ک. شکل ۲۱).

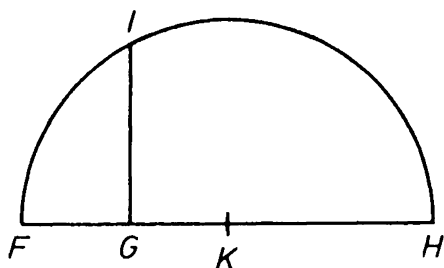
دکارت حالا پاره خطهای خود را با a ، b ، ... نشان می‌دهد و می‌نویسد

$$a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}, \sqrt{a}.$$

وی همچنین جذر $\sqrt{a^2 + b^2}$ را به صورت

$$\sqrt{aa + bb}$$

می‌نویسد. بنابراین تمام ضروریات نمادگذاری جبری ما را دکارت پایه‌گذاری کرده است.



شکل ۲۱

دکارت برخلاف استوین، نماد «عدد حقیقی» را مطرح نمی‌کند. از نظر او، خارج قسمت دو پاره خط، یک پاره خط است. بنابراین وی از کلیه دشواریهای منطقی مرتبط با اعداد گنگ دوری می‌جوید. دکارت سپس نشان می‌دهد که چگونه می‌توان معادله‌های

$$z^2 = az + b^2$$

$$z^2 = -ay + b^2$$

$$z^2 = az - b^2$$

را به روش هندسی حل کرد.

دکارت سپس به تأمل در نوعی از مسائل می‌پردازد که اقلیدس و آپولونیوس مورد بحث قرار داده بودند، یعنی «مسئله سه یا چهار خط». اگر سه خط با موضع مشخص مفروض باشند، و اگر از نقطه‌ای متغیر پاره‌خطهایی رسم کنیم که با آن خط زاویه‌های معینی بسازند، و هرگاه بدانیم که نسبت مستطیل بنا شده بر دو تا از این سه پاره خط به مربع مرسوم بر پاره خط سوم مقدار معینی باشد؛ یا هرگاه چهار خط مفروض باشند، و اگر پاره‌خطهایی از نقطه‌ای متغیر رسم شوند که با این خطوط زاویه‌های معینی بسازند، و اگر نسبت مستطیل بنا شده بر دو تا از این چهار پاره خط به مستطیل بنا شده بر دو پاره خط دیگر مقدار معینی باشد، در این صورت، مطلوب اثبات این مطلب است که این نقطه [متغیر] بر یک مقطع مخروطی مفروض واقع است.

به گفته پاپوس، آپولونیوس در مقاله سوم رساله‌اش درباره «مکان هندسی سه یا چهار خط» می‌گوید

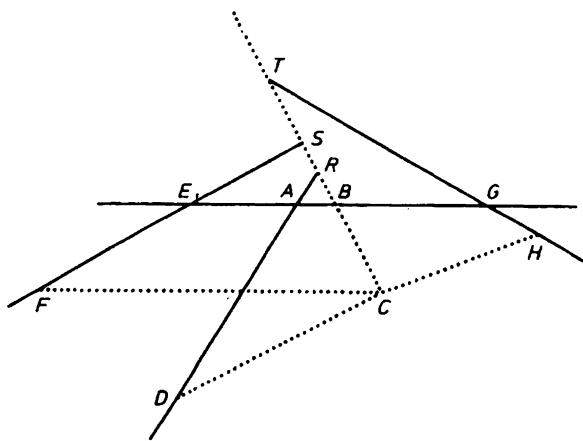
که اقلیدس این مسأله را حل نکرده بوده و خود او یا هیچ کس دیگر نیز نتوانسته‌اند آن را کاملاً حل کنند. «این امر» به گفتهٔ دکارت «مرا واداشت سعی کنم که دریابم آیا می‌توانم، با روش خودم، تا آنجا پیش روم که آنها رفته بودند.»

دکارت سپس اظهار می‌دارد که در حالت سه یا چهار خط، نقاط مطلوب همه بر یکی از مقاطع مخروطی، یا حتی در بعضی حالتها بر یک دایره یا خط راست قرار دارند. وی در این مرحله اقدام به اثبات این مطلب به کمک روش مختصاتی خود می‌کند.

فرض کنید AB ، AD ، EF و GH خطهای راست مفروضی باشند (ن. ک. شکل ۲۲). مطلوب است یافتن نقاط C به طوری که پاره‌خطهای CB ، CD ، CF و CH که از C بر چهار خط مفروض رسم می‌شوند، در این شرط صدق کنند که نسبت $CB \cdot CD$ به $CF \cdot CH$ برابر مقدار معینی باشد، یعنی

$$CB \cdot CD = \alpha \cdot CF \cdot CH. \quad (۱۵)$$

فرض کنید، به گفتهٔ دکارت، این شرط برآورده شود و پاره‌خطهای AB و BC را x و y بنامیم. بنابراین، با توجه به معلوم بودن زاویهٔ ABC ، هر نقطهٔ C با دو مختص x و y معین می‌شود. خیلی عجیب است که مختصات متعامد، از روی صورت لاتینی شدهٔ نام دکارت «مختصات کارتیزی» نامیده شده است. خود دکارت فرض نمی‌کند که زاویهٔ ABC قائمه باشد.



شکل ۲۲

دکارت سپس نشان می‌دهد که کلیهٔ پاره‌خطهای CB ، CD ، CF و CH تابعهایی خطی از x و y باشند. در نتیجه معادلهٔ (۱۵) معادله‌ای از درجهٔ دوم برحسب x و y است. به ازای هر مقدار مفروض y

(یا x)، مقدار متناظر x (یا y) را می‌توان با حل معادله‌ای درجه دوم ترسیم کرد. بنابراین، به گفته دکارت، می‌توان خم را رسم کرد.

در مقاله دوم هندسه‌اش، دکارت به بررسی ماهیت خمهایی که به این طریق به دست آورده است، می‌پردازد. نمادهای او تا حدی عاری از ظرافت‌اند. وی معادله (۱۵) را به شکل

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^2 - cgzz} \quad (16)$$

تحویل می‌کند و سپس، با اندکی ساده کردن نمادها، آن را برحسب y حل می‌کند:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}. \quad (17)$$

با معرفی $y' = y - m + \frac{n}{z}x$ به عنوان مختص جدید، دکارت (۱۷) را به صورت

$$y' = \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx} \quad (18)$$

ساده می‌کند، و با استفاده از برخی قضایای اولین مقاله کونیکای آپولونیوس، نشان می‌دهد که این خم یک مقطع مخروطی یا خطی راست است.

روش دکارت همان روش است که فرما به دست آورده است: هر معادله درجه دوم برحسب x و y معرف یک مقطع مخروطی، یا در حالت‌های استثنائی معرف خطی راست است.

فصل ۴

پیشگامان گالوا

جبر نوین با گالوا آغاز می‌شود. با ورود گالوا، ماهیت جبر دستخوش تغییری اساسی شد. پیش از گالوا، کوششهای جبردانان عمدتاً به حل معادله‌های جبری معطوف بود. شیپونه دل فرو، تارتاگلیا، و کاردانو چگونگی حل معادلات درجه سوم را نشان دادند، و فراری در حل معادله درجه چهارم توفیق حاصل کرد. گاوس ثابت کرد که معادله دایره‌بری

$$x^n - 1 = 0$$

را می‌توان به طور کامل به کمک رادیکالها حل کرد، و هر معادله جبری به کمک اعداد مختلط $a + bi$ حلپذیر است. گالوا، از دیگر سو، اولین فردی بود که به تحقیق در ساختار هیأتها و گروهها پرداخت و نشان داد که این دو ساختار ارتباطی نزدیک با هم دارند. اگر بخواهیم بدانیم که آیا می‌توانیم معادله‌ای را به کمک رادیکالها حل کنیم یا نه، باید ساختار گروه گالوای آن را تجزیه و تحلیل کنیم. پس از گالوا، تلاشهای جبردانان برجسته عمدتاً به تحقیق در ساختار حلقه‌ها، هیأتها، جبرها، و امثال آنها معطوف شد.

مهمترین پیشگامان گالوا، لاگرانژ^۱، گاوس، و آبل بودند. کار گاوس در معادله‌های جبری در فصل ۵ بحث خواهد شد. در فصل حاضر، کار ورینگ^۲، واندرموند^۳، لاگرانژ، مالفاتی^۴، روفینی^۵، کوشی، و آبل را درباره حل معادله‌های جبری مورد بحث قرار می‌دهیم.

ورینگ

اگر معادله درجه n

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + \dots = 0$$

n ریشه داشته باشد، از زمان ویت به بعد جزو معلومات شده است که ضرایب معادله همه با تابعهای

1) Lagrange 2) Waring 3) Vandermonde 4) Malfatti 5) Ruffini

متقارن مقدماتی ریشه‌ها برابرند:

$$a_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

ادوارد ورینگ در رساله «متفرقات آنالیز»^۱ (کیمبریج ۱۷۶۲)، نشان داده است که کلیه تابعهای متقارن گویای ریشه‌ها را می‌توان به صورت تابعهایی گویا از ضرایب معادله بیان کرد. وی ابتدا عبارتهایی برای مجموعهای توانهای

$$S_m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$$

و سپس برای چندجمله‌ایهای متقارن دلخواه استخراج می‌کند.

در یک رسالهٔ بعدی «تفکراتی در جبر»^۲ (آکسفورد ۱۷۷۰)، ورینگ روش دیگری برای بیان چندجمله‌ایهای متقارن استخراج می‌کند. این همان روشی است که در کتابهای درسی جدید دیده می‌شود (ن.ک. مثلاً به کتاب درسی جبر^۳ ویرایش دوم یا سوم، صفحه ۱۶۳-۱۶۷). ورینگ به تحقیق در حل «معادلهٔ دایره‌بری»

$$x^n - 1 = 0$$

نیز می‌پردازد و این مساله را مورد بحث قرار می‌دهد: یافتن معادله‌هایی که بتوان آنها را با مجموعهای به صورت

$$x = \sqrt[n]{\alpha_1} + \sqrt[n]{\alpha_2} + \dots + \sqrt[n]{\alpha_n}$$

حل کرد.

بنابراین، ورینگ مطمئناً یکی از نخستین پیشگامان نظریهٔ گالواست.

واندرموند

کار ریاضی الکساندر تفویل واندرموند^۵ در مقاله‌ای بسیار جالب از لبگ^۶ مورد بحث قرار گرفته است: «کار ریاضی واندرموند».

1) Miscellanea analytica 2) Meditationes algebraicae 3) Lehrbuch der Algebra

4) Weber 5) Alexandre-Theophile Vandermonde 6) Lebesgue: "L'oeuvre mathématique de Vandermonde", L'enseignement mathématique, New Series 1, p. 203-223 (1955)

واندرموند در ۱۷۷۰ مقاله‌ای^۱ به فرهنگستان پاریس با عنوان «درباره حل معادلات»^۲ تسلیم کرد. با شروع از راه حل مشهور معادله‌های درجه دوم و سوم، واندروموند اصول کلی را که می‌توان حل معادلات را بر آنها پایه‌گذاری کرد، بسط می‌دهد. وی جوابهای معادله درجه دوم را به شکل

$$\frac{1}{2} \left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \right]$$

می‌نویسد.

با اختیار دو علامت برای جذر، دو ریشه به دست می‌آورد. سپس این فرمول را مجدداً به صورت

$$\frac{1}{2} \left[(x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \right]$$

می‌نویسد و به این ترتیب تابعهای متقارن مقدماتی ریشه‌ها را معرفی می‌کند.

واندرموند حالا این سؤال را مطرح می‌کند که آیا معادله درجه n کلی را می‌توان با عبارت مشابه

$$\frac{1}{n} \left[(x_1 + \dots + x_n) + \sqrt[n]{(\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n)^n} + \sqrt[n]{(\rho_1^2 x_1 + \dots + \rho_n^2 x_n)^n} \right. \\ \left. + \dots + \sqrt[n]{(\rho_1^{n-1} x_1 + \dots + \rho_n^{n-1} x_n)^n} \right]$$

که در آن $\rho_1, \dots, \rho_n$ ریشه‌های n ام واحدند، حل کرد.

امروزه عبارتهایی نظیر

$$\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n$$

«حلالهای لاگرانژ» نامیده می‌شوند. به طوری که قریباً خواهیم دید، لاگرانژ همین عبارتها را در ۱۷۷۱ در مقاله‌ای به فرهنگستان برلین عرضه کرده است. مقاله واندروموند، که همین عبارتها پیشتر در همانجا دیده می‌شوند، قبلاً در سال ۱۷۷۰ به فرهنگستان پاریس تسلیم شده ولی تا سال ۱۷۷۴ منتشر نشده است. در مورد معادله درجه سوم، روش واندروموند و لاگرانژی بی‌درنگ به جواب منتهی می‌شوند. اگر i و j ریشه‌های سوم اولیه واحد باشند، آنگاه

$$(x_1 + ix_2 + jx_3)^3 = S + 3iX + 3jY$$

با

$$S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3$$

$$X = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$

$$Y = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2.$$

در اینجا S ، و $X + Y$ و XY تابعهای متقارن ریشه‌ها هستند، بنابراین X و Y ریشه‌های یک معادله درجه دوم اند. سپس، عبارتهایی نظیر $x_1 + ix_2 + jx_3$ را می‌توان به عنوان ریشه‌های سوم به دست آورد، و x_1, x_2, x_3 را می‌توان پیدا کرد.

برای معادله درجه چهارم، واندرموند رهیافت خود را اندکی اصلاح می‌کند. برای درجه‌های بیش از ۴، از روش او جوابی کلی حاصل نمی‌شود، اما در حالت‌های خاص مؤثر واقع می‌شود. مثلاً واندرموند در حل معادله

$$x^{11} - 1 = 0$$

توفیق حاصل می‌کند.

وی نخست آن را به معادله‌ای درجه ۵ با ریشه‌های

$$\rho + \rho^{-1}, \rho^2 + \rho^{-2}, \rho^3 + \rho^{-3}, \rho^4 + \rho^{-4}$$

بدل می‌کند که در آن ρ ریشه یازدهم اولیه واحد است. وی سپس این معادله درجه پنجم را با معرفی «حلالهای لاگرانژ»ش حل می‌کند. این حلالها را می‌توان به صورت

$$L = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5$$

نوشت که در آن α ریشه پنجم اولیه واحد است در حالی که $x_1, \dots, x_5$ ریشه‌های معادله درجه پنجم اند. برای اینکه بتوان L^5 را به صورت گویا بیان کرد، باید ریشه‌های x_i را به ترتیب معینی در نظر گرفت. در حالت خاص ریشه‌های یازدهم واحد، این ترتیب را می‌توان به کمک آزمون و خطا به دست آورد، اما در حالت کلی نیاز به برهان است. به طوری که در فصل مربوط به گاوس خواهیم دید، شرط اساسی، عبارت از اثبات این امر است که به ازای هر عدد اول p ، یک «ریشه اولیه» g به پیمانه p موجود است به طوری که کلیه اعداد صحیح غیر قابل تقسیم بر p با توانهای g هم‌نهشت باشند. عبارت «ریشه اولیه» به اویلر منسوب است و گاوس برای اولین بار وجود آن را ثابت کرده است. واندرموند ادعا می‌کند که جواب معادله

$$x^n - 1 = 0$$

به کمک روش او همواره آسان خواهد بود ("nous sera toujours facile"). به نظر می‌رسد که وی از مشکل ایجاد ترتیب مناسبی از ریشه‌ها غافل بوده است.

در فصل ۵، راه حل گاوس برای این مسأله را توضیح خواهیم داد.

گاوس از واندرموند نقل قول نمی کند، چرا؟ در مقاله ای درباره واندرموند که در آغاز بخش حاضر نقل قول شد، لبگ این پرسش را مورد بحث قرار داده است. وی ابتدا متذکر می شود که گاوس گزارش فرهنگستان^۱ مربوط به سال ۱۷۷۱ را که واندرموند مقاله خود را در آن منتشر کرده دیده است. به گفته لبگ، گاوس از کار واندرموند آگاهی داشته است. لبگ، فقره ای از دفتر یادداشت گاوس را نقل می کند که در آن به مقاله ای از واندرموند درباره پرسشهای توپولوژیکی اشاره می شود و در همان مجلد که مقاله واندرموند درباره معادله های جبری منتشر شده، ظاهر می شود. لبگ فرض را بر این می گیرد که گاوس تحت تأثیر کار واندرموند درباره معادله دایره بری قرار گرفته است. پس چرا ذکری از واندرموند در مقاله «تحقیقات حسابی»^۲ خود به میان نمی آورد؟ توضیح لبگ این است: واندرموند حکم خود را ثابت نکرده است و از نظر گاوس هر حکم ریاضی تنها به شرطی ارزشمند است که با یک برهان کامل همراه باشد. از نظر لبگ، این دیدگاه سختگیرانه «دور از حد غیرمنصفانه» است. به عقیده وی هیچ کشفی در ریاضیات هیچ گاه با منطق استنتاجی صورت نگرفته است. کشفیات همواره از «یک عمل آفرینش ذهنی»^۳ ناشی می شوند: برهان دقیق پس از آن می آید.

لاگرانژ

ژوزف لوئی لاگرانژ^۴ ایتالیایی تبار بود: وی در تورن^۵ در ژانویه ۱۷۳۶ به دنیا آمد. در ۱۷۷۱ مقاله ای فوق العاده جالب به فرهنگستان برلین ارائه کرد: «تأملاتی در حل معادلات جبری»^۶. این مقاله ۲۱۷ صفحه از مجلد ۳ «مجموعه آثار لاگرانژ» را (که توسط سره^۷ در ۱۸۶۹ منتشر شده) در بر می گیرد. اینک مروری به مهمترین بخشهای این مقاله خواهم داشت.

لاگرانژ ابتدا معادله درجه سوم را در نظر می گیرد که می توان آن را به صورت

$$x^3 + nx + p = 0 \quad (1)$$

نوشت.

جواب آن از «فن کبیر» کاردانو کاملاً معلوم است. می توان آن را به شکل

$$x = r + s \quad (2)$$

1) Histoire de l'Académie 2) Disquisitiones arithmeticae 3) un travail de création de l'imagination 4) Joseph Louis Lagrange 5) Torino [به ایتالیایی تورینو] 6) Réflexions sur la résolution algébrique des équations 7) Serret

نوشت که در آن r^3 و s^3 ، ریشه‌های یک معادله درجه دوم اند. لاگرانژ نشان می‌دهد که r و s را می‌توان به صورت تابعه‌ای از سه ریشه a و b و c ی معادله (۱) بیان کرد:

$$r = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c) \quad (3)$$

$$s = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c) \quad (4)$$

که در آن α ریشه سوم اولیه واحد است:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \quad (5)$$

لاگرانژ می‌گوید که این نتیجه‌ها را می‌توان به روش مستقیم نیز به دست آورد. وی کار را با معادله خطی دلخواهی از ریشه‌های a ، b ، c آغاز می‌کند

$$y = Aa + Bb + Cc. \quad (6)$$

با جایگزین دادن ریشه‌ها، مجموعه‌ای از شش عبارت به دست می‌آید که ریشه‌های معادله‌ای از درجه ۶ اند. اگر خواسته باشیم که این معادله تنها شامل توانهای y^2 باشد، می‌توان نشان داد که ضرایب A ، B ، C لزوماً با 1 ، α ، α^2 یا 1 ، α^2 ، α متناسب اند. بنابراین، یک بار دیگر، عبارت‌های (۳) و (۴) را به دست می‌آوریم.

اندیشه‌های اساسی چندی از نظریه گالوا هم اینک در این بخش رساله لاگرانژ موجود است. نخست، این اندیشه که کمیته‌های میانجی (نظیر r و s) را باید به صورت تابعه‌ای گویا از ریشه‌های a ، b ، c بیان کرد. دوم اینکه لاگرانژ نشان می‌دهد که مطالعه رفتار تابعه‌های گویایی مانند (۶) تحت جایگزین‌های ریشه‌ها سودمند است. سرانجام: عبارت‌هایی نظیر (۳) و (۴)، که از ریشه‌های واحد تشکیل می‌شوند و «حلال‌های لاگرانژ» نامیده می‌شوند، بسیار سودمندند. به طوری که دیده‌ایم، همین عبارت‌ها را قبلاً واندرموند در ۱۷۷۰ معرفی کرده است.

لاگرانژ سپس معادله درجه چهارمی را معرفی می‌کند که می‌توان آن را به صورت

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0 \quad (7)$$

نوشت. لودویکو فراری نشان داده است که جواب را می‌توان ابتدا با حل معادله درجه سوم

$$y^3 - \frac{1}{p}ny^2 - qy + \frac{1}{\lambda}(4nq - p^2) = 0 \quad (8)$$

به دست آورد.

لاگرانژ نشان می‌دهد که ریشه‌های این معادله را می‌توان به صورت تابعه‌ای از ریشه‌های a, b, c ، d ی معادله اصلی بیان کرد:

$$u = \frac{1}{4}(ab + cd) \quad , \quad v = \frac{1}{4}(ac + bd) \quad , \quad w = \frac{1}{4}(ad + bc). \quad (9)$$

اگر ریشه‌ها را جایگشت دهیم، تابع u به تنهایی سه تابع u, v, w را به وجود می‌آورد. از این مطلب آشکار می‌شود که چرا u یک ریشه معادله درجه سوم است.

بخش ۱۰۰ از دیدگاه تاریخی بسیار جالب توجه است. لگرانژ در این بخش تابعه‌ای گوئی $f(x', x'', \dots, x^{(n)})$ از ریشه‌های یک معادله درجه n ام کلی را در نظر می‌گیرد. ریشه‌ها به عنوان متغیرهای مستقل یا، به بیان امروزی، «نامعین» تلقی می‌شوند. خود لگرانژ یک بار اصطلاح «نامعین» را به کار می‌برد.

دو تابع t و y از ریشه‌ها متشابه^۲ نامیده می‌شوند هرگاه همه جایگشت‌های ریشه‌ها که t را ناوردا باقی می‌گذارند، y را نیز ناوردا باقی گذارند، و برعکس. لگرانژ در این مرحله، قضیه‌ای را ثابت می‌کند که در اینجا به عنوان «قضیه ۱۰۰» بیان می‌شود، یعنی قضیه:

اگر همه جایگشت‌هایی که t را ناوردا باقی می‌گذارند، y را نیز ناوردا باقی گذارند، آنگاه y را می‌توان به صورت تابعی گویا از t و ضرایب معادله مفروض بیان کرد.

ایده برهان به صورت زیر است. فرض کنید $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$ مقادیر متفاوتی باشند که تابع t به هنگام جایگشت دادن ریشه‌ها به خود می‌گیرد، و فرض کنید $y', y'', \dots, y^{(\pi)}$ مقادیر متناظر y باشند. عدد π یک مقسوم علیه $n!$ است، و t در معادله‌ای از درجه π مانند $\theta = 0$ صدق می‌کند. بنابراین هر تابع T از t را می‌توان به صورت

$$T = N. + N_1 t + N_2 t^2 + \dots + N_{\pi-1} t^{\pi-1} \quad (10)$$

نوشت.

فرض کنید $T', T'', \dots$ مقادیر T متناظر با مقادیر $t', t'', \dots$ برای t باشند. لگرانژ مجموع $N_{\pi-1} y' + T'' y'' + \dots$ را تشکیل می‌دهد و آن را به صورت تابعی خطی از نامعین‌های $N., N_1, \dots, N_{\pi-1}$ بیان می‌کند:

$$T' y' + T'' y'' + \dots = M. N. + M_1 N_1 + \dots + M_{\pi-1} N_{\pi-1}. \quad (11)$$

حال برای محاسبه t' ، تنها لازم است ضرایب $N, N_1, \dots, N_{\pi-1}$ را به گونه‌ای مشخص کنیم که $T''', T'' \dots$ همه صفر شوند. این بدان معنی است که مقید کنیم چندجمله‌ای (10) دارای ریشه‌های $t', t'' \dots$ باشد. اگر این چندجمله‌ای را در $t - t'$ ضرب کنیم باید بر چندجمله‌ای θ تقسیمپذیر باشد. بنابراین

$$(t - t')T = c\theta \quad (12)$$

را با ثابت c به دست می‌آوریم. این شرط مجموعه‌ای از معادله‌های خطی برحسب $N, N_1, \dots, N_{\pi-1}$ را به وجود می‌آورد که با محاسبات مقدماتی قابل حل است مشروط بر اینکه چندجمله‌ای θ ریشه مکرر نداشته باشد. لاگرانژ N را برابر 1 اختیار می‌کند، اما این کار همواره ممکن نیست و در برهان او جنبه اساسی ندارد.

لاگرانژ قضیه خود را در مورد معادله‌های درجه ۲، ۳، و ۴ به کار می‌برد. وی درباره معادله درجه پنجم می‌گوید:

به جاست که آن را برای معادلات درجه پنجم و بالاتر از آن که راه حل آنها هنوز معلوم نیست، به کار بریم اما کاربرد آن مستلزم مقدار زیادی تفحص و محاسبه است، که توفیق در آن هنوز چندان اطمینان بخش نیست.

لاگرانژ معادله‌های خاصی نظیر «معادله دایره‌بری»

$$x^n - 1 = 0$$

را نیز در نظر می‌گیرد، اما پیشرفت چندانی نمی‌کند. حل کامل این معادله به کمک رادیکالها در سال ۱۸۰۱ در اثر تحسین‌آمیز «تحقیقات حسابی» گاوس ارائه شده است.

مالفاتی

لاگرانژ «تأملات»^۱ خود را در ۱۷۷۱ به فرهنگستان برلین عرضه کرد. یک سال قبل از آن، در ۱۷۷۰، جان فرانچسکو مالفاتی^۲ رساله بسیار جالبی درباره معادله‌های درجه پنجم با عنوان «رساله تحلیلی درباره معادلات درجه پنجم»^۳ به فرهنگستان علوم سیه‌نا^۴ تسلیم کرد. این رساله در کارکردهای فرهنگستان

1) Reflections 2) Gianfrancesco Malfatti 3) De aequationibus quadratocubicis dissertatio analytica 4) Accademia delle scienze di Siena

سینه‌نا^۱ در ۱۷۷۱ منتشر شد.

به گفتهٔ رافائلا فرانچی و لورا توتی ریگاتلی^۲، رسالهٔ مالفاتی در وضع بدی به لاتین به نگارش درآمده و اغلاط چاپی فراوانی دارد به طوری که خواندن آن آسان نیست. با این حال، فرانچی و توتی ریگاتلی شرح پاکیزه‌ای از ایده‌های مالفاتی ارائه کرده‌اند. خلاصهٔ زیر مبتنی بر روایت آنهاست.

مالفاتی ابتدا معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^3 + 3ax + b = 0 \quad (۱)$$

را در نظر می‌گیرد.

وی به پیروی از اوایلر، ریشه‌ای مانند x را که در معادلهٔ خطی

$$x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0. \quad (۲)$$

صدق می‌کند، در نظر می‌گیرد.

برای از بین بردن ریشه‌های سوم، مالفاتی از روش مانفردی^۳ استفاده می‌کند. با قرار دادن $\alpha\sqrt[3]{f}$ و $\alpha^2\sqrt[3]{f}$ به جای $\sqrt[3]{f}$ ، که در آن α ریشهٔ سوم واحد است، و ضرب کردن (۲) در دو معادلهٔ خطی برحسب x که بدین ترتیب به دست آمده‌اند، مالفاتی معادلهٔ درجهٔ سومی به صورت زیر به دست می‌آورد:

$$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0. \quad (۳)$$

با قرار دادن $f = ۱$ ، معادلهٔ

$$x^3 - 3mnx + m^3 + n^3 = 0 \quad (۴)$$

به دست می‌آید. این معادله معادل با (۱) است مشروط بر اینکه

$$mn = -a$$

$$m^3 + n^3 = b. \quad (۵)$$

از این دو معادله، m^3 و n^3 و بنابراین m و n حاصل می‌شوند.

حالا مالفاتی همین روش را برای معادلهٔ درجهٔ پنجم

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0 \quad (۶)$$

به کار می‌برد.

وی می‌خواهد ریشه‌ای مانند x از (۶) را از معادله

$$x + m\sqrt[4]{f^2} + p\sqrt[4]{f^2} + q\sqrt[4]{f^2} + n\sqrt[4]{f} = 0 \quad (7)$$

به دست آورد.

با قرار دادن $\alpha\sqrt[4]{f}$, $\alpha^2\sqrt[4]{f}$, $\alpha^3\sqrt[4]{f}$, $\alpha^4\sqrt[4]{f}$ به جای $\sqrt[4]{f}$ ، که در آن α ریشه پنجم واحد است، و ضرب کردن (۷) در عبارتهای خطی که به این ترتیب به دست آمده‌اند، مالقاتی یک «معادله قانونی» درجه ۵ برحسب x به دست می‌آورد. با قرار دادن $f = 1$ و متحد گرفتن ضریبهای معادله قانونی با ضریبهای (۵)، مالقاتی مجموعه شرایطی برای m, p, q, n به دست می‌آورد. برای ساده کردن این شرطها، وی قرار می‌دهد

$$mn = y, \quad pq = u$$

و

$$25uy - 5a^2 + 5c/3 = z.$$

مالقاتی، پس از محاسباتی طاقت‌فرسا، به معادله‌ای از درجه ۶ برحسب z می‌رسد. در حالت کلی این معادله عاملی گویا از درجه‌های ۱ یا ۲ یا ۳ ندارد، اما اگر چنین عاملی داشته باشد، معادله مفروض (۶) را می‌توان به کمک رادیکالها حل کرد. سپس می‌توان نخست z و سپس m, p, q, n را تعیین کرد و سرانجام ریشه‌های زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} x_0 &= -(m + n + p + n) \\ x_1 &= -(\alpha m + \alpha^2 p + \alpha^3 q + \alpha^4 n) \\ x_2 &= -(\alpha^2 m + \alpha^4 p + \alpha q + \alpha^3 n) \\ x_3 &= -(\alpha^3 m + \alpha p + \alpha^4 q + \alpha^2 n) \\ x_4 &= -(\alpha^4 m + \alpha^2 p + \alpha^3 q + \alpha n). \end{aligned} \quad (8)$$

حل معادله‌های خطی (۸) برحسب m, p, q, n آسان است. از اینجا نتیجه می‌شود که m, p, q, n تابعهای خطی از ریشه‌ها هستند، و اینکه z تابعی درجه چهارم از ریشه‌هاست. لاگرانژ نیز، مستقل از مالقاتی، یک «حلال» برای z ساخته است که تابعی از ریشه‌هاست و با جایگشت ریشه‌ها شش مقدار به خود می‌گیرد. این تابع «مشابه» با z مالقاتی به مفهوم لاگرانژی است، زیرا هر دو

تحت گروهی از ۲۰ جایگشت از ریشه‌های x پایا هستند. در نمادگذاری نوین، جایگشت‌های این گروه را می‌توان بنابر فرمولهای

$$k' \equiv gk + h \quad (\text{به پیمانه } 5) \quad (9)$$

با $g = 1, 2, 3, 4$ و $h = 0, 1, 2, 3, 4$ تعریف کرد. خواهیم دید که همین گروه در نظریه گالوا نقشی مهم دارد.

روفینی

پائولو روفینی^۱، متولد ۱۷۶۵، از دانشجویان و ستایشگران لاگرانژ بود. وی چندین مقاله را با این ادعا که معادله درجه پنجم کلی یا بالاتر را نمی‌توان به کمک رادیکالها حل کرد، منتشر نمود (آثار ریاضی پائولو روفینی، جلد ۱، صفحات ۱-۳۲۴). اولین مقاله او، که در ۱۸۹۸ در بولونا منتشر شد، عنوان

“Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generale di grado superiore al quarto”

را داشت که معنی آن چنین است:

نظریه کلی معادلات، که در آن ثابت شده است که حل جبری معادله‌های کلی درجه‌های بالاتر از ۴ غیرممکن است.

چند سال پس از آن، روفینی رساله کوچکی با عنوان «ایضاح و پاسخ به ایرادها»^۲ نوشت که در بین دستنوشته‌های او به دست آمد و در «آثار ریاضی روفینی» مجلد ۱، صفحات ۳۲۷-۳۴۲ به چاپ رسید. دومین مقاله درباره حل معادله‌های با درجه بیش از ۴ در جلد ۹ «گزارشهای ریاضی و فیزیک انجمن ایتالیایی علوم»^۳ (مودنا ۱۸۰۲)، و مجدداً در «آثار روفینی»، جلد I، صفحات ۳۴۵-۴۰۶ به چاپ رسید. سرانجام، در سال ۱۸۱۳، روفینی مقاله سومی با عنوان «تأمل در راه حل معادلات کلی جبری»^۴ (مجموعه آثار، II، صفحات ۱۵۵-۲۶۸) منتشر کرد که در آن اندیشه‌های مقاله‌های قبلی او مفصلتر توضیح داده شده بودند.

روشهای روفینی اساساً همان روشهای لاگرانژ بودند. وی تابعهای گویای ریشه‌های معادله درجه n ام کلی را در نظر گرفت. اگر p عده جایگشت‌هایی باشد که چنین تابعی را بدون تغییر باقی می‌گذارند،

1) Paolo Ruffini 2) Rischiarimenti e risposte alle obiezioni 3) Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana della Scienze 4) Modena 5) Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali

p مقسوم علیه $n!$ است، و عدهٔ مقادیر متفاوتی که تابع با جایگشت ریشه‌ها اختیار می‌کند، $n!/p$ است. آن گونه که لاگرانژ پیشتر ثابت کرده بود، چنین تابعی ریشه‌ای از یک معادلهٔ درجهٔ $n!/p$ است. روفینی مجموعهٔ p جایگشتی را که تابع را بدون تغییر باقی می‌گذارند، با تفصیل کامل مطالعه می‌کند. به ویژه، نشان می‌دهد که در حالت درجهٔ پنجم، درجهٔ $n!/p$ می‌تواند ۲ یا ۵ یا ۶ باشد ولی نمی‌تواند ۳ یا ۴ باشد که به معنای آن است که حلالی به مفهوم لاگرانژی که در معادله‌ای درجهٔ ۳ یا ۴ صدق می‌کند، ممکن است. اگر $n!/p$ برابر ۲ نباشد، باید بر ۵ قابل قسمت باشد. اگر $n!/p$ برابر ۵ باشد، حلالهای درجهٔ ۵ موجودند ولی نمی‌توان آنها را به معادله‌های دوجمله‌ای

$$z^5 - m = 0$$

تحويل کرد.

روفینی ادعای اثبات این موضوع را دارد که معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی را نمی‌توان به کمک رادیکالها حل کرد، اما برهان او قاطع نیست زیرا بر این فرض مبتنی است که همهٔ این رادیکالها را می‌توان به صورت تابعه‌ای گویا از ریشه‌ها بیان کرد. نخستین بار آبل این برهان را با نشان دادن اینکه رادیکالهای لازم برای حل یک معادله را می‌توان همواره به صورت تابعه‌ای گویا از ریشه‌های معادله و برخی ریشه‌های واحد برگزید، کامل کرد.

برهان روفینی از سوی همعصران و دانشمندان پس از وی به خوبی مورد استفاده قرار نگرفت. مالفاتی برهان روفینی را مورد انتقاد قرار داد و نتیجه گرفت که هنوز در ممتنع بودن معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی جای تردید است. یادداشت مالفاتی با عنوان «تردید در پیش‌بینی پائولو روفینی دربارهٔ اثبات غیرممکن بودن حل معادلات بالاتر از درجهٔ ۴» در جلد ۱۱، مقاله‌های ریاضی و فیزیک انجمن ایتالیایی علوم، صفحات ۵۹۷-۶۰۷ منتشر شد.^۱

کارنو^۲ و لژاندر^۳ تردیدهای مشابهی داشتند. ن. ک. صفحه ۵۹ کییرنان: نظریهٔ گالوا از لاگرانژ تا آرتین^۴. ظاهراً کوشی برهان روفینی را قاطع می‌یابد (ن. ک. صفحه ۶۰ مقالهٔ کییرنان)، اما آبل تردیدهای خود را چنین ابراز می‌دارد:

نخستین، و اگر اشتباه نکنم، تنها فردی که پیش از من برای اثبات عدم امکان حل جبری معادلات کلی همت گماشته است هندسه‌دان روفینی است؛ ولی مقالهٔ وی آن چنان پیچیده است که داوری دربارهٔ صحت استدلال آن خیلی دشوار است. به نظر من که استدلال او همواره صادق نیست.

1) Dubbii proposti al socia Paolo Ruffini sulla sua dimonstrozione della impossibilita di risolvere le equazioni superiori al quarto grado 2) Carnot 3) Legendre 4) Kiernan, B. M, Galois Theory from Lagrange to Artin, Archive for History of Exact Sciences, 8, p. 40-154 (1971)

مطالعه‌ای جامع از کار روفینی و رابطه آن با نظریه گروه‌های جانشینی به هاینریش بورکهارت^۱ منسوب است. نتیجه این تحقیق در ۱۸۹۲ تحت عنوان «سراغ‌های نظریه گروه‌ها و باثولو روفینی»^۲ منتشر شده است. بوکهارت نشان می‌دهد که چندین مفهوم بنیادی نظریه گروه‌های جایگشتی در کار روفینی موجود است. به ویژه روفینی بین آنچه ما امروزه گروه‌های تریا و ناترایا می‌نامیم، تمایز قائل می‌شود.

کوشی

روفینی ثابت کرده بود که عدده مقادیر متفاوتی که یک تابع نامتقارن گویا اختیار می‌کند، نمی‌تواند کمتر از ۵ باشد مگر اینکه این عدده ۲ باشد. کوشی این نتیجه روفینی را به تابعهایی با n متغیر تعمیم داده است. عنوان مقاله ۱۸۱۵ وی که این تعمیم را در بر دارد چنین است: «درباره تعداد مقادیری که تابعی می‌تواند اختیار کند، هنگامی که کمیت‌های موجود در آن را به هر صورت ممکن، جایگشت دهیم»^۳.

فرض کنید n تعداد متغیرهای مستقل و p بزرگترین عدد اول مشمول در n باشد. کوشی ثابت کرد: تعداد مقادیر متفاوت یک تابع گویای نامتقارن n متغیر نمی‌تواند کمتر از p باشد، مگر اینکه این تعداد ۲ باشد.

کوشی بین جایگشت‌ها و جانشین‌ها تمایز قائل شده است. اگر n متغیر را به ترتیب دلخواهی بنویسیم، یک جایگشت به دست می‌آید. یک جانشینی گذرا از یک جایگشت به جایگشت دیگر است. گذرا از جایگشت ۱۰۲۰۴۰۳ به ۲۰۴۰۳۰۱ با

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

نشان داده می‌شود.

گالوا از همین اصطلاحات استفاده کرده گرچه همواره بدان پابند نبوده است. وی مفهوم «گروه جانشینی» را تعریف کرد. بعدها، «جانشین‌ها»ی کوشی و گالوا اغلب، در تطابق با معنی اولیه فعل لاتینی «جایگشت یافتن»^۴، «جایگشت‌ها» نامیده شدند.

1) Heinrich Burkhardt 2) Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 37, Supplement (Abhandlungen Zur Geschichte der Mathematik VI), p. 121-159 3) Sur le Nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de tous les manières possible les quantites qu'elle renferme", Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 17, tome 10, p. 1-128 (Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, 2^{me} série, Vol. 1, p. 64-90). 4) permutare

کوشی حاصلضرب جانشینها را نیز تعریف کرده است. حاصلضرب ST ابتدا با اجرای S و سپس T به دست می‌آید. گالوا نیز همین قرارداد را به کار برده است.

طی سالهای ۱۸۴۴-۱۸۴۶ کوشی سلسله مقالاتی دربارهٔ جانشینها منتشر کرد. وی دو جانشینی را «متشابه» می‌نامد هرگاه به یک راه به دورها افزاش شوند. وی ثابت می‌کند که P و Q متشابه‌اند اگر و تنها اگر Q برابر PR^{-1} باشد. وی همچنین ثابت می‌کند که مرتبهٔ هر گروه جانشینی بر مرتبهٔ هر جانشینی دو گروه تقسیمپذیر است، و مرتبهٔ هر گروه جانشینی n متغیره یک مقسوم علیه $n!$ است. لاگرانژ قضیهٔ اخیر را پیشتر از این ثابت کرده بود. برهان کوشی همانند برهان لاگرانژ است: گروه کلیهٔ جانشینها به مجموعه‌های این زیرگروه افزاش می‌شود. همین روش را بعداً ژوردان برای اثبات اینکه مرتبهٔ هر زیرگروه یک گروه متناهی مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند، به کار برده است. ژوردان این قضیه را در نهایت جوانمردی به لاگرانژ و کوشی نسبت داده است.

آبل

هنوز نوجوانی بیش نبود که ریاضیدان جوان بس با قریحه، نیلس هنریک آبل^۱ (متولد ۱۸۰۲) در این اندیشه افتاد که می‌تواند معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی را حل کند، اما به زودی به اشتباه خود پی برد. در بهار سال ۱۸۲۴، وی در اثبات اینکه جوابی به کمک رادیکالها غیرممکن است، توفیق حاصل کرد. وی جزوه‌ای به زبان فرانسه با عنوان «یادداشتی دربارهٔ معادله‌های جبری»^۲ (مجموعهٔ کامل آثار نیلس هنریک آبل^۳) را به هزینهٔ خود منتشر کرد که در آن برهانی کاملاً واضح از این امتناع را ارائه کرد. صورتی نو و کاملتر از همین برهان را در ۱۸۲۶ در مجلهٔ کرله برای ریاضیات محض و کار بسته^۴ با عنوان «برهان امتناع حل جبری معادله‌های کلی بالاتر از درجهٔ چهارم»^۵ منتشر کرد (مجموعهٔ آثار، I، صفحات ۶۶-۸۷). ایده‌های اصلی در هر دو مقاله یکسان‌اند اما در برهان دوم برخی از بخشها تفصیل یافته‌اند و برخی دیگر از بخشها ساده‌تر شده‌اند.

آبل از نتایج لاگرانژ و کوشی دربارهٔ عدهٔ مقادیری که یک تابع n متغیره در صورت جایگشت دادن متغیرها به خود می‌گیرد، استفاده می‌کند. با این حال، نکتهٔ اساسی در برهان از گام اول است که کاملاً تازگی دارد.

1) Niels Henrik Abel 2) "Mémoire sur les équations algébriques" 3) Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, publiées par L. Sylow et S. Lie, Vol 1, p. 28-33). 4) Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 1 5) Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré

آبل کار را با معادله

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \quad (۱)$$

آغاز می‌کند که در آن ضرایب «کلی» اند، یعنی صرفاً حروف یا متغیرهای مستقل اند. با فرض اینکه می‌توان y را به کمک رادیکالها به صورت تابعی از ضرایب بیان کرد، آبل اظهار می‌دارد که می‌توان y را به صورت

$$y = p + p_1 R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \dots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \quad (۲)$$

نوشت که در آن m عددی اول است. کمیت‌های $R, p, p_1, \dots, p_{m-1}$ عبارتهایی همشکل با y فرض می‌شوند که متضمن رادیکالهای دیگر و امثال آن‌اند تا اینکه به تابعی گویا از ضرایب معادله اصلی برسیم. در قالب اصطلاحات گالوا، کار را با هیأت تابعی گویای a, b, c, d, e با ضرایب ثابت آغاز و رادیکالی با نمای اول را یکی پس از دیگری «الحاق» می‌کنیم. آبل در بین ضرایب ثابت همواره ریشه m ام واحد را می‌گنجاند که در آن m هر یک از نماهای اول به کار رفته در جواب است.

به گفته آبل، همواره می‌توان فرض کرد که $R^{1/m}$ را نمی‌توان به صورتی تابعی گویا از $a, b, \dots, p, p_1, p_2, \dots$ بیان کرد زیرا در غیر این صورت الحاق رادیکال بی‌هوده خواهد بود. همچنین می‌توان فرض کرد که در (۲) کلیه ضرایب $p_1, p_2, \dots$ صفر نیستند.

آبل در نخستین مقاله خود فرض می‌کند که $p_1 \neq 0$ (در مقاله دومش ثابت می‌کند که این محدودیت الزامی نیست). حال با قرار دادن R/p_1^m به جای R ، می‌توان p_1 را برابر ۱ گرفت. با قرار دادن $R^{1/m} = z$ داریم

$$y = p + z + p_2 z^2 + \dots + p_{m-1} z^{m-1} \quad (۳)$$

با گذاردن این مقدار در (۱)، نتیجه‌ای به شکل

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_{m-1} z^{m-1} = 0 \quad (۴)$$

به دست می‌آید که در آن $q, q_1, q_2, \dots$ چند جمله‌ایهایی برحسب $a, b, \dots, p_2, p_1, \dots, R$ و R اند. حال به مرحله اساسی کار می‌رسیم. آبل اظهار می‌کند: برای اینکه (۴) معتبر باشد، لازم است که

$$q = 0, q_1 = 0, \dots, q_{m-1} = 0.$$

برهان او بسیار داهیانه است. دو معادله (۴) و

$$z^m - R = 0 \quad (۵)$$

ریشه مشترکی مانند z دارند. اگر $q, q_1, \dots$ صفر نباشند، عده ریشه‌های مشترک آنها حداکثر $m-1$ است. فرض کنید k معرف این تعداد باشد. در این صورت با محاسبه بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ای‌های سمت چپ (۴) و (۵)، می‌توان معادله درجه k ام زیر را به دست آورد

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \dots + r_k z^k = 0. \quad (6)$$

برای ادامه برهان، من از شرح ساده شده مقاله دوم آبل استفاده می‌کنم. اگر چندجمله‌ای سمت چپ (۶) را تجزیه کنیم، یکی از عاملها باید صفر شود. بنابراین معادله‌ای تحویل‌ناپذیر برحسب z به دست می‌آید:

$$t_0 + t_1 z + \dots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0. \quad (7)$$

به گفته آبل، می‌توان فرض کرد که یافتن معادله‌ای با همین شکل ولی با درجه‌ای کمتر غیرممکن است. این معادله μ جواب مشترک با معادله (۵) دارد. اما کلیه ریشه‌های معادله اخیر به شکل αz اند. درجه μ حداقل ۲ است زیرا در غیر این صورت z تابعی گویا از $a, b, p, p_1, p_2, \dots$ خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود که معادله (۷) حداقل دارای دو ریشه z و αz است:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0$$

$$t_0 + \alpha t_1 z + \alpha^2 t_2 z^2 + \dots + \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^\mu z^\mu = 0. \quad (8)$$

از ضرب اولین معادله در α^μ و تفریق آن از معادله دوم، معادله‌ای با درجه‌ای کمتر از μ به دست می‌آید که غیرممکن است. بنابراین همه ضرایب در (۴) باید صفر باشند. معادله (۴) از گذاردن (۳) در (۱) و استفاده از (۵) به دست آمده است. اما نه تنها z بلکه

$$\alpha z, \alpha^2 z, \dots, \alpha^{m-1} z$$

نیز در (۵) صدق می‌کنند. بنابراین با قرار دادن $\alpha^k R^{1/m}$ ، به جای $R^{1/m}$ در (۲) همواره می‌توان ریشه‌های (۱) را به دست آورد. همه این ریشه‌ها متمایزند، بنابراین m نمی‌تواند بزرگتر از ۵ باشد و اگر ریشه‌هایی را که بدین ترتیب به دست می‌آوریم، $y_1, \dots, y_m$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$y_1 = p + z + p_2 z^2 + \dots + p_{m-1} z^{m-1}$$

$$y_2 = p + \alpha z + \alpha^2 p_2 z^2 + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1} z^{m-1}$$

$$y_m = p + \alpha^{m-1}z + \alpha^{m-2}p_2z^2 + \dots + \alpha p_{m-1}z^{m-1}.$$

این معادله‌ها را می‌توان به آسانی برحسب $p, z, p_2z^2, \dots, p_{m-1}z^{m-1}$ حل کرد. از اینجا نتیجه می‌شود که $p, p_2, \dots, p_{m-1}$ و $z = R^{1/m}$ تابعهای گویایی از ریشه‌های $y_1, \dots, y_m$ معادله (۱) اند. البته $R = z^m$ نیز تابعی گویا از ریشه‌هاست.

کمیت R را می‌توان به صورت تابعی گویا از رادیکال $v^{1/n}$ که قبلاً مطرح بوده، بیان کرد. این تابع را می‌توان به صورت

$$R = S + v^{1/n} + S_2v^{2/n} + \dots + S_{n-1}v^{(n-1)/n} \quad (۹)$$

نوشت.

اگر آن گونه که با y معادله (۲) عمل کردیم، با این کمیت عمل کنیم، ملاحظه می‌کنیم که یا الحاق $v^{1/n}$ غیرضروری است یا کمیت‌های $v^{1/n}, S, S_2, \dots$ را می‌توان به صورت تابعیهایی گویا از ریشه‌های $y_1, \dots, y_m$ بیان کرد. با تکرار همین استدلال، نتیجه می‌شود که کلیه کمیت‌های گنگی که در عبارت مربوط به ریشه‌های y ظاهر می‌شوند، تابعهای گویایی از این ریشه‌ها هستند.

این، دقیقاً همان فرضی است که روفینی برهان خود از حلناپذیر بودن معادله درجه پنجم را با آن آغاز کرد. درستی این فرض حالا کاملاً مورد تأیید است.

آبل از این مرحله به بعد می‌توانست روشها و نتایج لاگرانژ، روفینی، و کوشی را به کار برد. وی به ویژه از این قضیه کوشی که می‌گوید عده مقادیری که یک تابع گویا می‌تواند اختیار کند نمی‌تواند ۳ یا ۴ باشد و این امر موجب می‌شود که عدد m تنها بتواند ۲ یا ۵ باشد، استفاده (و از او نقل قول) می‌کند. آبل دو حالت $m = 5$ و $m = 2$ را جداگانه مورد بحث قرار می‌دهد و نتیجه می‌گیرد که در هر دو حالت حل معادله درجه پنجم کلی به کمک رادیکالها غیرممکن است.

آبل دو ماه پیش از مرگش در ۱۸۲۹، مقاله دیگری با عنوان «یادداشتی درباره رده‌ای خاص از معادلات که به طور جبری قابل حل اند»^۱، در مجله کرله برای ریاضیات محض و کار بسته، دوره ۴ منتشر کرد (مجموعه آثار، I، صفحات ۴۷۸-۵۱۴).

این یادداشت به رده‌ای خاص از معادله‌هایی با هر درجه می‌پردازد که به کمک رادیکالها قابل حل اند. معادله دایره‌بری $x^n - 1 = 0$ به این رده تعلق دارد. آبل قضیه کلی زیر را ثابت می‌کند:

اگر ریشه‌های معادله‌ای چنان باشند که بتوان کلیه آنها را به صورت تابعیهایی گویا از یکی از آنها، مثلاً x ، بیان کرد، و اگر هر دو تا از این ریشه‌ها، مثلاً θx و $\theta_1 x$ (که در آن θ و θ_1 تابعهای گویا هستند) به

گونه‌ای به هم مرتبط باشند که

$$\theta\theta_1x = \theta_1\theta x, \quad (۱۰)$$

آنگاه می‌توان معادله را به کمک رادیکالها حل کرد.

امروزه گروه‌هایی را که در آنها ضرب تعویض‌پذیر است، آبدلی می‌نامند، و معادله‌هایی که خاصیت (۱۰) را داشته باشند، از زمان کرونگر^۱ (۱۸۵۳)، معادله‌های آبدلی نامیده می‌شوند.

قضیه آبل که در بالا بیان شد، حالتی خاص از یک قضیه اصلی نظریه گالواست که می‌گوید:

معادله به کمک رادیکالها حل‌پذیر است اگر و تنها اگر گروه گالوای G آن حل‌پذیر باشد، یعنی هرگاه G یک سری ترکیبی مانند

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m = E$$

داشته باشد که در آن همه شاخصها اعداد اول‌اند. گالوا برهانی برای این قضیه اصلی‌اش در ماه مه برای فرهنگستان پاریس در ماه مه ۱۸۲۹، در همان سال که مقاله آبل چاپ شده بود، فرستاد.

1) Kronecker

فصل ۵

کارل فریدریش گاوس

مهمترین مساهمتهای گاوس در نظریهٔ معادلات جبری عبارت‌اند از:
اول، حل کامل معادلهٔ دایره‌بری

$$x^m - 1 = 0 \quad (۱)$$

به کمک رادیکالها،

دوم، این برهان که هر چندجمله‌ای یک متغیره با ضرایب حقیقی، حاصلضرب عاملهای خطی و درجهٔ دوم است. آنچه امروزه آن را «قضیهٔ اصلی جبر» می‌نامیم، از این قضیه نتیجه می‌شود، یعنی قضیه: هر چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب مختلط حاصلضربی از عاملهای خطی است. اینک این دو مساهمت فوق‌العاده مهم را مورد بحث قرار می‌دهیم.

معادلهٔ دایره‌بری

معادلهٔ (۱)، معادلهٔ دایره‌بری نامیده می‌شود زیرا جواب آن با ترسیم یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای مفروض ارتباطی نزدیک دارد.

برای درک این ارتباط، کافی است توجه کنیم که معادلهٔ (۱) دارای n ریشهٔ مختلط

$$\cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۲)$$

است.

دوآور و اوایلر مدتها پیش از گاوس این جواب مثلثاتی را می‌دانستند. حال اگر عدد مختلط $a + bi$ را به کمک نقاطی در صفحه با مختصات متعامد (a, b) نمایش دهیم، روشن است که عددهای مختلط (۲) به کمک رأسهای یک n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد نمایش داده می‌شوند. بنابراین اگر به

حل معادله (۱) به کمک ریشه‌های دوم توفیق یابیم، می‌توانیم این n ضلعی منتظم را با ستاره و پرگار ترسیم کنیم.

فیثاغورسیان پیشتر از این می‌دانستند که چگونه ۳، ۴، ۵، و ۶ ضلعیهای منتظم را ترسیم کنند. ترسیمهای آنها را می‌توان در مقاله ۴ اصول اقلیدس یافت. در مورد اسناد این مقاله به فیثاغورسیان، کتاب «فیثاغورسیان»^۱ من، صفحات ۳۴۸-۳۵۱ را ملاحظه کنید.

لاگرانژ معادله

$$x^5 - 1 = 0 \quad (3)$$

را به صورت زیر حل کرده است. یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است. بقیه، ریشه‌های معادله

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

هستند که می‌توان آن را به صورت

$$(x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) + 1 = 0 \quad (4)$$

نوشت.

با قرار دادن

$$x + x^{-1} = y \quad (5)$$

معادله

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad (6)$$

به دست می‌آید.

این معادله درجه دوم را می‌توان نسبت به y ، و سپس معادله (۵) را نسبت به x حل کرد. یک بار دیگر نتیجه می‌شود که می‌توان پنج ضلعی منتظم را به کمک ستاره و پرگار رسم کرد. ترسیم اقلیدس نیز بر پایه حل یک معادله درجه دوم استوار است. قضیه ۱۱ در مقاله ۲، اصول اقلیدس، ترجمه هیث^۲، از این قرار است:

تقسیم خط راست مفروضی به دو قسمت به طوری که مستطیل مرسوم بر تمام خط و یکی از پاره‌خطها با مربع پاره‌خط دیگر برابر باشد.

اگر خط راست مفروض را a و پاره خط دوم را y بنامیم، مسئله اقلیدس، حل معادله

$$a(a - y) = y^2 \quad (7)$$

است.

اقلیدس در حل مسئله ۱۱، II، ابتدا معادله هم‌ارز

$$y^2 + ay = a^2 \quad (8)$$

راه‌حل، و سپس مستطیل ay را از دو طرف کسر می‌کند، و بدین ترتیب جواب (۷) را به دست می‌آورد. اگر پاره خط مفروض را واحد طول اختیار کنیم، ملاحظه می‌شود که معادله (۸) همان معادله (۶) لاگرانژ است.

در مقاله ۴، اقلیدس حل معادله (۷) را در ترسیم پنج ضلعی منتظم به کار می‌برد. لاگرانژ به همین طریق حل معادله (۶) را برای حل معادله دایره‌بری (۳) به کار می‌برد. لاگرانژ سپس همین روش را برای معادله

$$x^{11} - 1 = 0 \quad (9)$$

به کار می‌برد (مجموعه آثار، صفحه ۲۴۶). با تقسیم بر $x - 1$ و سپس بر x^5 ، لاگرانژ معادله

$$(x^5 + x^{-5}) + (x^4 + x^{-4}) + (x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) + 1 = 0 \quad (10)$$

را به دست می‌آورد.

مجدداً با قرار دادن

$$x + x^{-1} = y$$

معادله‌ای درجه پنجم برحسب y به دست می‌آید.

لاگرانژ آن را به همین حال رها کرد، اما واندرموند، به طوری که در فصل ۴ دیده‌ایم، در حل این معادله درجه پنجم به کمک رادیکالها توفیق یافت. در فصل ۷ اثر مشهور گاوس با عنوان «تحقیقات حسابی» برهان کامل حلپذیری معادله (۱۱) به کمک رادیکالها داده شده است. به معادله

$$x^{17} - 1 = 0 \quad (12)$$

به عنوان حالتی خاص پرداخته می‌شود. چون نمی‌دانیم که گاوس جوان چگونه راه‌حل (۱۲) و بنابراین ترسیم ۱۷ ضلعی را یافته است، چاره‌ای جز این نداریم که از او پیروی کنیم و ابتدا به حالت کلی بپردازیم.

گوس ابتدا نشان می‌دهد که معادله کلی (۱) را می‌توان، با نوشتن n به صورت حاصلضرب توانهای اول، به حالتی خاص که در آن n اول است تحویل کرد. حالتی خاص، یعنی $n = 15$ قبلاً بر اقلیدس معلوم بوده است. اقلیدس نشان می‌دهد: اگر بتوان مثلی متساوی‌الاضلاع و پنج ضلعی منتظمی را در دایره محاط کرد، می‌توان ۱۵ ضلعی منتظم را نیز محاط کرد.

از تقسیم (۱) بر $x - 1$ ، معادله

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0 \quad (13)$$

به دست می‌آید.

با فرض اینکه n اول است، گوس نخست ثابت می‌کند که چندجمله‌ای X به طور گویا تحویلناپذیر است. وی سپس نتیجه اصلی خود را اعلام می‌کند: اگر $n - 1$ ، برابر با حاصلضربی از عاملهای $\alpha\beta\gamma \dots$ باشد، معادله (۱) را می‌توان با حل معادله‌های درجه α ، β ، γ ، $\dots$ حل کرد. مثلاً اگر n برابر با ۱۷ باشد، داریم

$$n - 1 = 2^4,$$

بنابراین معادله (۱۲) را می‌توان با حل چهار معادله درجه دوم حل کرد، و بنابراین ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان با ستاره و پرگار رسم کرد. به طور کلی، اگر $n - 1$ توانی از ۲ باشد، که در مورد

$$n = 3, 5, 17, 257, 65537 \quad (14)$$

چنین است، n ضلعی منتظم را می‌توان با ستاره و پرگار رسم کرد.

اعداد اول مذکور در (۱۴) بر گوس معلوم بوده‌اند. اعداد اول دیگر به شکل $2^m + 1$ تا امروز (سوم دسامبر ۱۹۸۲) معلوم نیستند.

همچنان با فرض اول بودن n ، گوس هر یک از ریشه‌های (۱۳) را با r نشان می‌دهد. حال، ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$r, r^2, \dots, r^{n-1}. \quad (15)$$

دو توان r^λ و r^μ با افزودن نماها و تحویل مجموع $\lambda + \mu$ ، به پیمانه n در هم ضرب می‌شوند. گوس سپس متذکر می‌شود که هر تابع گویا از ریشه‌ها را می‌توان به صورت

$$A + A'r + A''r^2 + \dots + A^{(n-1)}r^{n-1} \quad (16)$$

نوشت.

برای سهولت در نمادگذاری، گاوس به جای r^{λ} می‌نویسد $[\lambda]$. بنابراین ریشه‌های (۱۵) به صورت

$$[1], [2], \dots, [n-1] \quad (17)$$

بازنویسی می‌شوند.

در فصل IIIی تحقیقات، گاوس ثابت کرده است: اگر n اول باشد، گروه ضربی اعداد صحیح به پیمانه n دوری است، یعنی یک «عنصر اولیه» g موجود است به طوری که همهٔ نماهای غیر قابل قسمت بر n با توانهای g ، همبسته‌اند. بنابراین ریشه‌های (۱۷) را می‌توان از نو مرتب کرد و به صورت

$$[1], [g], [g^2], \dots, [g^{n-2}] \quad (18)$$

نوشت.

این نحوهٔ مرتب کردن مجدد نکته‌ای اساسی در نظریهٔ گاوس است. نماهای g نمایندهٔ نامیده می‌شوند. این نماینده‌ها نقش لگاریتمها را بازی می‌کنند: دو توان g با افزودن نماینده‌های آنها (به پیمانه n) در هم ضرب می‌شوند.

حال فرض کنید که e مقسوم‌علیه دلخواهی از $n-1$ باشد. با قرار دادن

$$n-1 = ef$$

و

$$g^e = h,$$

گاوس مجموعهٔ ریشه‌های

$$[\lambda], [\lambda h], [\lambda h^2], \dots, [\lambda h^{f-1}]$$

را در نظر می‌گیرد که در آنها λ عدد صحیح دلخواهی ناهمبسته با صفر (به پیمانه n) است، و مجموع

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda h] + [\lambda h^2] + \dots + [\lambda h^{f-1}] \quad (19)$$

را تشکیل می‌دهد.

این مجموعه‌ها مستقل از انتخاب g هستند. آنها را دوره می‌نامند.

گاوس طرز تشکیل دوره‌ها را با حل مثال $n = 19$ روشن می‌سازد. من ترجیح می‌دهم مثال $n = 17$ را که به تفصیل در بخش ۳۵۴ (مجموعهٔ آثار، جلد ۲، صفحه ۴۳۷) داده شده، ارائه دهم. به عنوان یک عنصر اولیه (به پیمانه ۱۷) گاوس g را برابر ۳ اختیار می‌کند. بنابراین نماینده‌های (به پیمانه ۱۶)

$$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$$

توانهای ۳ (به پیمانه ۱۷)

$$\mu = g^i = 1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6$$

و ریشه‌های

$$[\mu] = r^\mu = r, r^3, r^9, r^{10}, \dots, r^6$$

را به وجود می‌آورند.

مقسوم‌علیه‌های $16 = n - 1$ عبارت‌اند از

$$e = 1, 2, 4, 8, 16$$

که با

$$f = 16, 8, 4, 2, 1$$

متناظرند.

تنها یک دوره (۱، ۱۶)، یعنی مجموع کلیه ریشه‌ها، موجود است. دو دوره با $f = 8$ موجود است،

یعنی

$$(8, 1) = [1] + [9] + [13] + [15] + [16] + [8] + [4] + [2]$$

و

$$(8, 3) = [3] + [10] + [5] + [11] + [14] + [7] + [12] + [6].$$

چهار دوره با $f = 4$ موجود است، یعنی

$$(4, 1) + (4, 3) + (4, 9) + (4, 10).$$

هشت دوره با $f = 2$ موجود است، نظیر

$$(2, 1) = [1] + [16] = r + r^{-1}$$

۱۶ دوره با $f = 16$ ، یعنی ریشه‌های تکین، موجودند.

گائوس همچنین دوره (۰، f) را که مجموع f واحد و لذا برابر f است، در نظر می‌گیرد.

در بخش ۳۴۵، گائوس قضیه‌ای کلی با این مضمون را ثابت می‌کند که حاصلضرب

$$(f, \lambda) \cdot (f, \mu)$$

را می‌توان به صورت مجموعی از دوره‌ها به صورت زیر نشان داد:

$$(f, \lambda).(f, \mu) = (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda' + \mu) + (f, \lambda'' + \mu) + \dots \quad (20)$$

حال فرمول (۲۰) را در حالت $n = ۱۷$ به کار می‌بریم. مجموع

$$(\lambda, ۱) + (\lambda, ۳)$$

برابر مجموع کلیه ریشه‌ها و بنابراین برابر ۱- است. حاصلضرب

$$(\lambda, ۱).(\lambda, ۳)$$

را می‌توان به کمک (۲۰) محاسبه کرد: این حاصلضرب برابر ۴- است. بنابراین $(\lambda, ۱)$ و $(\lambda, ۳)$ ریشه‌های معادله درجه دوم

$$y^2 + y - 4 = 0. \quad (21)$$

هستند.

از حل این معادله، $(\lambda, ۱)$ و $(\lambda, ۳)$ به دست می‌آیند. سپس $(۴, ۱)$ و $(۴, ۹)$ را می‌توان به همان روش حساب کرد. مجموع آنها $(\lambda, ۱)$ و حاصلضرب آنها ۱- است، لذا آنها ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x^2 - (\lambda, ۱)x - 1 = 0. \quad (22)$$

هستند.

به همین ترتیب، $(۴, ۳)$ و $(۴, ۱۰)$ ریشه‌های معادله

$$x^2 - (\lambda, ۳)x - 1 = 0. \quad (23)$$

هستند.

با همین روش می‌توان دوره‌های $(۲, \lambda)$ و سرانجام ریشه‌های $[\mu]$ را به صورت ریشه‌های معادله‌های درجه دوم به دست آورد.

در حالت کلی باید $n - ۱$ را به صورت

$$n - 1 = \alpha\beta\gamma \dots$$

تجزیه و معادله‌های درجه $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ را حل کرد. گاوس در بخش ۳۵۹، نشان می‌دهد که این معادله‌ها را می‌توان به کمک رادیکالها حل کرد.

تصور می‌کنم این مثالها برای توضیح ایده‌های عمده گاوس در خصوص موضوع معادله دایره‌بری بس باشد.

«قضیه اساسی»

با نمادگذاری گاوس، هر معادله جبری درجه m را می‌توان به صورت

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + M = 0 \quad (24)$$

یا $X = 0$ نوشت. قضیه موسوم به «قضیه اساسی جبر» بیان می‌کند که هر چندجمله‌ای X با ضرایب حقیقی یا مختلط را می‌توان در هیأت اعداد مختلط به عاملهای خطی تجزیه کرد.

کافی است قضیه را برای چندجمله‌ایهایی با ضرایب حقیقی ثابت کنیم، زیرا اگر X دارای ضرایب مختلط باشد، حاصلضرب $X \bar{X}$ حقیقی است و تجزیه شدن آن موجب تجزیه شدن X و $\bar{X}$ می‌شود. بنابراین حق به جانب گاوس است که خود را به چندجمله‌ایهای حقیقی X محدود می‌کند.

گاوس در اولین برهان خود، اعداد مختلط را وارد بحث نمی‌کند. وی قضیه اساسی را در شکل زیر ثابت می‌کند:

هر چندجمله‌ای X با ضرایب حقیقی را می‌توان به عاملهای خطی و درجه دوم تجزیه کرد. از نظر گاوس، این قضیه چنان مهم بوده که چهار برهان برای آن ارائه کرده است. گاوس، اصولی را که برهان اول بر آنها مبتنی است، در اکتبر ۱۷۹۷ کشف کرد. اولین برهان در ۱۷۹۹، دومین و سومین برهان در ۱۸۱۶، و چهارمین برهان در ۱۸۴۹ منتشر شده است. چهارمین برهان بر همان اصول برهان اول تکیه دارد. من در اینجا خود را به سه برهان اول محدود می‌سازم.

هر چهار برهان از لاتین به آلمانی، به توسط نتو ترجمه و تحت عنوان «چهار برهان گاوس برای تجزیه هر تابع جبری کامل به عاملهای حقیقی از درجه اول یا دوم»^۱ منتشر شده‌اند.

1) Netto, E., Die Vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Vol. 14 (Leipzig 1913).

اولین برهان

اولین برهان گاوس در پایان نامه او (مجموعه آثار، III، صفحات ۱-۳۰) منتشر شده است. گاوس پیش از عرضه برهان خود، برهانهای پیشین را که از سوی دالامبر، اویلر، فونته^۱، و لاگرانژ ارائه شده‌اند، مورد نقد قرار می‌دهد. ایراد عمده وی آن است که در کلیه این برهانها، وجود ریشه‌ها از پیش مسلم فرض شده است. نشان داده شده است که می‌توان ریشه‌ها را به صورت عددهای مختلط به دست آورد مشروط بر اینکه این ریشه‌ها به نحوی از انحاء موجود باشند. ایرادهایی نیز بر تک تک برهانها نیز وارد شده است که در اینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم.

گاوس بحث را با چندجمله‌ای حقیقی

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + LX + M \quad (25)$$

آغاز می‌کند که در آن x یک «کمیت نامعین»^۲ است. آنچه وی می‌خواهد ثابت کند آن است که عاملی خطی یا درجه دوم از X موجود است. یک عامل خطی حقیقی وجود ریشه‌ای حقیقی مانند $\pm r$ را موجب می‌شود که در آن r مثبت یا صفر است. یک عامل درجه دوم تحویلناپذیر وجود دو ریشه حقیقی

$$r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \quad (26)$$

را موجب می‌شود، بنابراین عاملهای درجه دوم را می‌توان به صورت

$$x^2 - 2xr \cos \varphi + r^2 \quad (r > 0) \quad (27)$$

نوشت.

با قرار دادن یکی از ریشه‌های (۲۶) در معادله $X = 0$ و جدا کردن جزءهای حقیقی و انگاری، یک جفت معادله حقیقی برحسب r و φ به دست می‌آید:

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \dots + Lr \cos \varphi + M = 0 \quad (28)$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \dots + Lr \sin \varphi = 0. \quad (29)$$

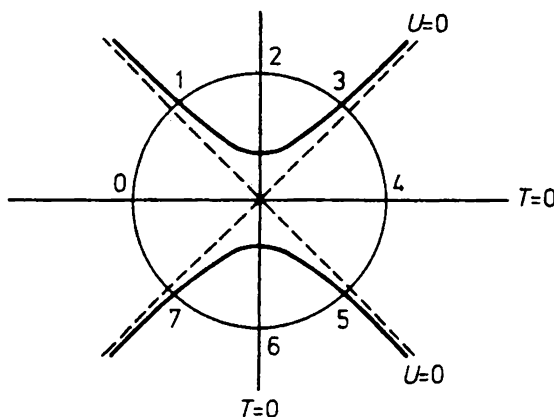
گاوس متذکر می‌شود که اویلر این دو معادله را با استفاده از اعداد مختلط به دست آورده است. گاوس از اعداد مختلط احتراز می‌کند: وی (۲۸) و (۲۹) را مستقیماً با فرض اینکه چندجمله‌ای X عاملی خطی مانند $x \pm r$ یا یک عامل درجه دوم (۲۷) دارد، به دست می‌آورد.

گاوس (۲۸) و (۲۹) را به صورت معادله‌های خمهای جبری در مختصات خطی تعبیر می‌کند، و به اثبات اینکه این خمها دست کم در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، مبادرت می‌ورزد. اگر این حکم ثابت شود، نتیجه می‌شود که X یک عامل خطی یا درجه دوم دارد، و با ادامه این روند، تجزیه‌ای برای X به عاملهای خطی و درجه دوم به دست می‌آورد.

معادله (۲۸)، $U = 0$ و (۲۹)، $T = 0$ نامیده می‌شود. برای توضیح برهان، من خمهای $U = 0$ و $T = 0$ را در مورد معادله درجه دوم

$$x^2 + 1 = 0.$$

رسم کرده‌ام.



شکل ۲۳

در مختصات متعامد x و y ، دو خم مرتبه m داریم. محور $y = 0$ همواره بخشی از خم دوم $T = 0$ است.

گاوس حالا نقاط تلاقی این دو خم را با دایره‌ای به شعاع R مورد مطالعه قرار می‌دهد و ثابت می‌کند: به ازای مقادیر به حد کافی بزرگ شعاع R ، دقیقاً $2m$ نقطه تقاطع بین دایره و $T = 0$ ، و $2m$ نقطه تقاطع بین دایره و $U = 0$ موجود است، و هر نقطه تقاطع نوع دوم بین دو نقطه تقاطع نوع اول قرار دارد. گاوس برهانی کامل برای این خم ارائه می‌کند. وی سپس متذکر می‌شود که $4m$ نقطه در صورت اندکی بزرگتر شدن یا اندکی کوچکتر شدن R بسیار اندک تغییر می‌کنند. در قالب اصطلاحات امروزی می‌گوییم $4m$ نقطه تابعی پیوسته از R هستند. گاوس این پیوستگی را ثابت نمی‌کند: وی تنها می‌گوید که «به سادگی ملاحظه می‌شود». گاوس سپس رفتار شاخه‌های خم $U = 0$ و $T = 0$ را در داخل

دایره مورد مطالعه قرار می‌دهد و اظهار می‌کند: یک نقطه تقاطع بین شاخه‌ای از خم اول با شاخه‌ای از خم دوم موجود است. وی برای این نتیجه، برهانی شهودی و هندسی ارائه می‌کند. وی نقطه تلاقی دایره با محور x های منفی را با 0 ، نقطه مجاور بعدی در روی دایره را با 1 ، و به همین قیاس الی آخر مانند شکل ۲۳، نشان می‌دهد. اعداد فرد نقاط واقع بر $U = 0$ و اعداد زوج نقاط واقع بر $T = 0$ را نشان می‌دهند. وی حالا می‌گوید: اگر شاخه‌ای از یک خم جبری وارد حوزه‌ای شود، باید در جایی نیز از همان حوزه خارج شود. وی در پانوشتی اضافه می‌کند:

به نظر بسیار مستدل می‌رسد که یک خم جبری نه به طور ناگهانی (آن گونه که در مورد خم متعالی $y = 1/\log x$ اتفاق می‌افتد) انقطاع می‌یابد، و نه پس از بینهایت باریجش در نقطه‌ای (مانند ماریچ لگاریتمی) ول و رها می‌شود. تا آنجا که می‌دانم کسی هرگز در این مورد تردیدی به خود راه نداده است، اما اگر کسی برهانی برای آن بخواهد، من ارائه برهانی خالی از شبهه را، در فرصتی دیگر، به عهده می‌گیرم.

اگر این نکته آغازین را بپذیریم، نتیجه می‌شود که هر «نقطه زوج» با (دست کم) یک نقطه زوج دیگر از طریق شاخه‌ای از خم $T = 0$ مرتبط است و هر «نقطه فرد» با هر نقطه فرد دیگر از طریق شاخه‌ای از خم $U = 0$ مرتبط است. اما، این ارتباطها هر اندازه هم پیچیده باشند، می‌توان نشان داد که همواره یک نقطه تقاطع موجود است. این حکم به صورت زیر ثابت می‌شود.

فرض کنید که هیچ نقطه تقاطع موجود نیست. نقطه O از طریق محور x ها با نقطه $2m$ مرتبط است. نقطه 1 نمی‌تواند بدون قطع کردن این محور با هیچ یک از نقاط طرف دیگر این محور مرتبط باشد. بنابراین اگر نقطه 1 با نقطه فرد n مرتبط باشد، باید داشته باشیم $n < 2m$. به همین دلیل، اگر 2 با n' مرتبط باشد، باید داشته باشیم $n' < n$. توجه کنید که تفاضل $n' - 2$ زوج است زیرا n' و 2 هر دو زوج‌اند. با ادامه استدلال به همین منوال، سرانجام به نقطه‌ای مانند h می‌رسیم که با $2 + h$ مرتبط است. اما حالا شاخه‌ای که در نقطه $1 + h$ وارد دایره می‌شود، لزوماً، برخلاف فرض، باید شاخه‌ای را که h و $2 + h$ را به هم مرتبط می‌سازد، قطع نماید. بنابراین یک نقطه تقاطع موجود است.

از این شرح و بیان مشاهده می‌شود که اولین برهان گاوس بر فرضهائی درباره شاخه‌های خمهای جبری متکی است که از لحاظ شهود هندسی به ظاهر موجه‌اند، اما دقیقاً از سوی گاوس ثابت نشده‌اند. الکساندر آستروفسکی^۱ در مقاله بسیار جالب «درباره برهانهای اول و چهارم گاوس برای قضیه اساسی جبر»^۲ نشان داده شده است که کلیه فرضهای گاوس را می‌توان با برهانهای شبهه‌ناپذیر توجیه کرد. مقاله آستروفسکی اولین بار در گزارشهای انجمن علمی گوتینگن^۳ در سال ۱۹۲۰ به چاپ رسیده و سپس در

1) Alexander Ostrowski 2) Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra 3) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen

مجموعه آثار گاوس، X ، تجدید چاپ شده است.

برهان دوم

دومین برهان، جبری محض است. تنها فرضیهایی که دربارهٔ هیأت اعداد حقیقی شده عبارت‌اند از:

۱° هر معادلهٔ حقیقی با درجهٔ فرد، یک ریشه حقیقی دارد،

۲° هر معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب مختلط، دو ریشهٔ مختلط دارد.

ایدهٔ دومین برهان، ساده است، اما از قوه به فعل در آوردن آن تا حدی دشوار است. گاوس کار را با

چندجمله‌ای حقیقی درجهٔ m

$$Y = x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \dots + \dots \quad (30)$$

آغاز می‌کند.

اگر برای لحظه‌ای فرض کنیم که Y را می‌توان در توسیع هیأتی به عاملهای خطی تجزیه کرد:

$$y = (x - a)(x - b)(x - c) \dots, \quad (31)$$

آنگاه می‌توان ترکیبی خطی مانند

$$(a + b)t - ab \quad (32)$$

را با کمیت نامعین جدید t تشکیل داد. اگر ریشه‌های $a, b, c, \dots$ جایگشت داده شوند، تابع خطی

$$m' = \frac{1}{2}m(m+1)$$

مقدار به خود می‌گیرد، بنابراین ریشه‌ای از یک معادلهٔ درجهٔ m' است. ریشه‌های این معادلهٔ کمکی

تابعهای خطی t به شکل (۳۲)‌اند. به محض اینکه یک ریشهٔ معادلهٔ کمکی معلوم شود، $a + b$ و ab

معلوم‌اند، بنابراین a و b را می‌توان به کمک ریشه‌های دوم بیان کرد. این حکم کماکان درست باقی

می‌ماند در صورتی که به نامعین t چنان مقداری تخصیص داده شود که تابعهای خطی متفاوت (۳۲) پس

از این تخصیص متفاوت بمانند.

حال اگر m عددی به شکل

$$m = 2^k k \quad (33)$$

باشد که در آن k فرد است، درجه معادله کمکی به شکل

$$m' = 2^{u-1} k' \quad (34)$$

در می‌آید که در آن باز هم k فرد است.

به محض اینکه یک ریشه مختلط از این معادله کمکی معلوم شود، دو ریشه a و b معادله اصلی را می‌توان با استخراج ریشه‌های دوم به صورت اعداد مختلط محاسبه کرد.

با ادامه کار به این روش، سرانجام به معادله‌ای با درجه فرد می‌رسیم. ضرایب این معادله تابعی متقارن از ریشه‌های $a, b, \dots$ با ضرایب حقیقی‌اند، لذا اعداد حقیقی معلومی هستند. چون درجه فرد است، این معادله حداقل یک ریشه حقیقی دارد. با بازگشتن به دنباله معادله‌های کمکی، می‌توان حداقل یک ریشه مختلط معادله اصلی را حساب کرد.

برهان، در این شکل ساده شده، زمانی معتبر است که معادله $Y = 0$ دارای m ریشه $a, b, \dots$ در توسیعی از هیأت اعداد حقیقی باشد. وجود چنین توسیعی را می‌توان به کمک روش کرونگر «الحاق نمادی»^۱ ثابت کرد که برهان آن را می‌توان در هر کتاب درسی جبر نوین یافت. با این حال، گاوس این مسیر را دنبال نمی‌کند. وی معادله‌های کمکی خود را بدون فرض وجود ریشه‌ها تشکیل می‌دهد. مثلاً، معادله کمکی درجه m' را به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

ابتدا، به جای چندجمله‌ای خاص (۳۰)، یک چندجمله‌ای مانند y می‌گذارد که ریشه‌های آن نامعینهای $a, b, \dots$ اند:

$$y = (x - a)(x - b)(x - c) \dots \quad (35)$$

گاوس سپس یک چندجمله‌ای ممکن مانند ζ برحسب متغیر جدیدی مانند u تشکیل می‌دهد و ζ را به صورت حاصلضرب m' عبارت

$$u - (a + b)t + ab \quad (36)$$

تعریف می‌کند که از جایگشت دادن ریشه‌ها حاصل شده‌اند. این چندجمله‌ای ζ نسبت به نامعینهای $a, b, c, \dots$ متقارن است، بنابراین می‌توان آن را به صورتی یکتا به عنوان یک چندجمله‌ای برحسب u و t و ضرایب y که تابعهای مقدماتی متقارنی از $a, b, \dots$ اند بیان کرد. پس از این، به جای ضرایب y ، ضرایب $L', L'', \dots$ از چندجمله‌ای مفروض (۳۰) قرار داده می‌شوند، و به این ترتیب چندجمله‌ای کمکی Z به دست می‌آید.

گوس در بخش ۱۲-۱۵، قضیه زیر را ثابت می‌کند:

اگر مبین Y صفر نباشد، مبین Z نمی‌تواند صفر باشد.

برهان این قضیه چهار صفحه از ترجمه نتور اشغال می‌کند. گوس درست در آغاز برهان می‌گوید: «برهان این قضیه بسی آسان می‌شد هرگاه این پیشفرض را می‌کردیم که Y حاصلضربی از عاملهای خطی است».

پس از آن، گوس به جای t یک عدد حقیقی قرار می‌دهد به گونه‌ای که مبین Z همچنان مخالف صفر باشد، و نشان می‌دهد: اگر ریشه‌ای از Z معلوم باشد، زوجی از ریشه‌های چندجمله‌ای اصلی Y را می‌توان محاسبه کرد. بدیهی است که وی در ابتدا روش یافتن ریشه‌ای از Y را با این فرض که Y حاصلضربی از عاملهای اول است استخراج کرده و سپس برهانهای خود را تغییر شکل داده است تا آنها را از این فرض مستقل گرداند.

برهان سوم

برهان سوم گوس بسیار ساده‌تر است. گوس، به گفته خود، این برهان را با تفکر مداوم پس از چاپ برهان دوم در سال ۱۸۱۶ پیدا کرده است. گوس برهان را با چندجمله‌ای

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \dots + Lz + M \quad (37)$$

با ضرایب حقیقی آغاز می‌کند. وی قرار می‌دهد

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \dots + Lr \cos \varphi + M = t \quad (38)$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \dots + Lr \sin \varphi = u. \quad (39)$$

عبارتهای t و u همان عبارتهای U و T در نخستین برهان گوس هستند. این عبارتها، جزءهای حقیقی و انگاری عبارت مختلطی هستند که با قرار دادن

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (40)$$

در (۳۷) به دست می‌آیند.

مشتقهای t و u نسبت به φ به ترتیب $-u'$ و $t' + u'$ نامیده می‌شوند. بنابراین داریم

$$t' = mr^m \cos m\varphi + (m-1)Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \dots + Lr \cos \varphi$$

$$u' = mr^m \sin m\varphi + (m-1)Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \dots + Lr \sin \varphi.$$

گاوس حالا ثابت می‌کند که

$$tt' + uu'$$

صرف نظر از اینکه مقدار φ چه باشد، به ازای مقداری به حد کافی بزرگ مانند R برای r ، مثبت است. به آسانی دیده می‌شود که این حکم درست است. برای مقادیر بزرگ r ، جمله‌های اصلی t و u عبارت‌اند از

$$r^m \cos m\varphi, r^m \sin m\varphi$$

و جمله‌های اصلی t' و u' عبارت‌اند از

$$mr^m \cos m\varphi, mr^m \sin m\varphi.$$

بنابراین جمله اصلی $tt' + uu'$ عبارت است از

$$mr^{2m}(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi) = mr^{2m}$$

که مثبت است.

مشتق‌های دوم t و u نسبت به u ، $-u''$ و $t'' + t$ نامیده می‌شوند:

$$t'' = m^2 r^m \cos m\varphi + \dots + Lr \cos \varphi \quad (41)$$

$$u'' = m^2 r^m \sin m\varphi + \dots + Lr \sin \varphi. \quad (42)$$

گاوس می‌خواهد ثابت کند که نقطه‌ای در صفحه موجود است که در آن t و u هر دو صفرند. به طوری که دیده‌ایم، وجود چنین نقطه‌ای مستلزم وجود یک ریشه مختلط برای چندجمله‌ای X است. اگر این ریشه، حقیقی باشد، X عاملی خطی دارد، و می‌توان این روند را ادامه داد. اگر این ریشه حقیقی نباشد، X عاملی از درجه دوم دارد، و باز هم می‌توان این روند را ادامه داد.

فرض کنید هیچ نقطه‌ای با $t = u = 0$ موجود نباشد، در این صورت $t^2 + u^2$ همواره مخالف صفر

است، و تابع

$$y = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(t^2 + u^2)^2} \quad (43)$$

همه جا متناهی است. توجه کنید که عامل r در مخرج حذف می‌شود زیرا t', u', t'', u'' بر r تقسیم‌پذیرند. گاوس حالا انتگرال دوگانه

$$\Omega = \iint y dr du \quad (44)$$

را که انتگرال‌گیری از $r = 0$ تا $r = R$ و از $\varphi = 0$ تا $\varphi = 360^\circ$ انجام شده است، در نظر می‌گیرد. می‌توان ابتدا نسبت به r یا ابتدا نسبت به φ انتگرال گرفت: نتیجه یکسان است. این انتگرال نامعین نسبت به φ عبارت است از

$$\int y d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)}, \quad (45)$$

زیرا اگر از تابع سمت راست نسبت به φ انتگرال بگیریم، y به دست می‌آید. حال، مقدارهای تابع سمت راست برای $\varphi = 0$ و برای $\varphi = 360^\circ$ یکسان است، لذا انتگرال سمت چپ، از 0 تا 360° ، صفر است. این، موجب می‌شود که

$$\Omega = 0. \quad (46)$$

از سوی دیگر، اگر ابتدا نسبت به r انتگرال بگیریم، انتگرال نامعین

$$\int y dr = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2}, \quad (47)$$

به دست می‌آید.

این عبارت به طوری که دیده‌ایم به ازای $r = 0$ ، صفر است، و به ازای $r = R$ مثبت است. بنابراین انتگرال سمت چپ، از 0 تا R ، مثبت است، و لذا، برخلاف (46)، Ω مثبت است. در نتیجه، این فرض که t و u هرگز هر دو صفر نمی‌شوند، به تناقض می‌انجامد. درک مرحله به مرحله برهان گاوس بسیار آسان است. اما او چگونه این برهان را یافته است؟ به ویژه، وی چگونه عبارت پیچیده برای y را که در (43) تعریف شده، پیدا کرده است؟ من آن را نمی‌دانم اما می‌توانم حدسی را مطرح کنم.

می‌توانیم $X = t + iu$ را به صورت تابعی از متغیر

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (48)$$

در نظر بگیریم.

به بیان هندسی، تابع

$$X(z) = X(r, \varphi) = t + iu$$

معرف نگاشتی از صفحه z به صفحه X است. می‌توانیم در صفحه X مختصات قطبی را نیز وارد کنیم.

$$X = s(\cos \beta + i \sin \beta). \quad (49)$$

اما داریم

$$\tan \beta = \frac{u}{t}. \quad (50)$$

با مشتگیری از (50) نسبت به φ و r عبارتهای

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \cos^2 \beta \frac{tt' + uu'}{t^2} = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2} = U \quad (51)$$

و

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = \cos^2 \beta \frac{tu' - ut'}{rt^2} = \frac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)} = V \quad (52)$$

را به دست می‌آوریم.

با یک بار دیگر مشتگیری،

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = y \quad (53)$$

را به دست می‌آوریم. خود گاوس از معادله‌های (53) استفاده می‌کند، و از آن نتیجه می‌گیرد که

$$\int y dr = U, \quad \int y d\varphi = V.$$

بنابراین کاملاً ممکن به نظر می‌رسد که وی به تابع پیچیده y با مشتگیری از U نسبت به r و از V نسبت به φ رسیده باشد. ممکن است وی از قبل می‌دانسته که $\partial U / \partial r$ و $\partial V / \partial \varphi$ برابرند زیرا U و V مشتقهای تابع واحدی مانند β از φ و r اند.

این درست است که زاویه β به طور یکتا تعریف نشده است: این زاویه تنها به پیمانه 2π تعریف شده است، اما یک در همسایگی هر نقطه (r, φ) ، زاویه β تابعی مشتقپذیر از r و φ است، بنابراین دیفرانسیل کلی

$$d\beta = U d\varphi + V dr$$

خوشتعریف است. شاید گاوس می‌خواسته از تابعهای چند مقداری مانند β احتراز کند و ممکن است دلیل اینکه چرا وی تنها از مشتقهای U و V و y در برهان خود استفاده کرده، همین باشد.

حال می‌پرسیم: وقتی نقطه z در دایره‌ای بزرگ مانند $r = R$ در صفحه z حرکت می‌کند، زاویه β چگونه تغییر می‌کند؟

گاوس در اولین برهان خود نشان داده است که: اگر φ از 0 تا 2π تغییر کند، و اگر R به قدر کافی بزرگ باشد، نقطه X ، m بار از ربعهای اول، دوم، سوم، چهارم (به همین ترتیب) عبور می‌کند که از آن نتیجه می‌شود که β از 0 تا $2\pi \cdot m$ تغییر می‌کند. حال $\int d\beta$ را محاسبه می‌کنیم. به اتکای (۵۱) به دست می‌آوریم،

$$\beta(2\pi) - \beta(0) = \int d\beta = \int U d\varphi. \quad (54)$$

این تفاضل باید مضربی از 2π باشد، زیرا U مثبت، و مضرب مثبتی مانند $m' \cdot 2\pi$ است. از اولین برهان گاوس می‌دانیم که m' برابر m ، یعنی درجه چندجمله‌ای X است، اما گاوس نیازی به این نتیجه ندارد. برای برهان فعلی او، دانستن اینکه $\int U d\varphi$ مثبت است، کفایت می‌کند.

مادام که $t^2 + u^2$ صفر نیست، انتگرال (۵۴) تابعی پیوسته از r است، لذا عدد صحیح m' نمی‌تواند تغییر کند، و انتگرال $\int U d\varphi$ ثابت می‌ماند. از سوی دیگر، این انتگرال برای $r = R$ مثبت و برای $r = 0$ صفر است. بنابراین تناقضی حاصل می‌شود.

کاملاً ممکن است که گاوس همین برهان را در ذهن داشته است. اما، وی راهی برای اجتناب از استفاده از تابع چند مقداری β ، با نوشتن انتگرال $\int U d\varphi$ به صورت انتگرال دوگانه

$$\int U d\varphi = \iint y dr d\varphi$$

و تعویض ترتیب انتگرالها، می‌یابد. چون $\int y d\varphi$ همواره صفر است، انتگرال دوگانه صفر است، اما از سوی دیگر $\int U d\varphi$ برای R های به حد کافی بزرگ، مثبت است. بنابراین گاوس به تناقض می‌رسد.

فصل ۶

اواريست گالوا

اواريست گالوا در اکتبر ۱۸۱۱ به دنیا آمد. بيست سال و هفت ماه بعد در يك دوفل كشته شد. در اين بين وی یکی از مهمترین و زیباترین نظریه‌ها در تاریخ جبر را خلق کرد: نظریهٔ گالوا. داستان شورانگیز زندگی او شهرهٔ آفاق است. خوانندگان می‌توانند به زندگینامهٔ کلاسیک گالوا اثر پل دویوی با عنوان «زندگانی اواريست گالوا»^۱ یا زندگینامه جدیدتر «اواريست گالوا» اثر کولرو^۲، باز هم به زبان فرانسه، مراجعه کنند.

آثار علمی گالوا

آثار ریاضی گالوا اولین بار به توسط لیوویل^۳ در مجلهٔ علمی او ژورنال دو ماتماتیک^۴ به چاپ رسید. این آثار در ۱۸۹۷ به توسط گوتیه-ویلار^۵ همراه با مقدمه‌ای، به قلم امیل پیکار^۶ مجدداً به چاپ رسیدند. ویرایشی کاملتر و نقادانه از همهٔ نامه‌ها و دستنوشته‌های به جا مانده از او که توسط بوژنی و عذرا^۷ انجام شده در ۱۹۶۲ از سوی گوتیه-ویلار زیر عنوان «نوشته‌ها و یادداشت‌های ریاضی اواريست گالوا»^۸ منتشر شده است.

اولین مقالهٔ منتشر شدهٔ گالوا، نوشتاری در هشت صفحه دربارهٔ کسرهای مسلسل در آنال دو ماتماتیک دو ژرگون^{۱۰}، جلد ۱۹، صفحات ۲۹۴-۳۰۲ (۱۸۲۸) بود. گالوا در این مقاله ثابت کرد: اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ای از درجهٔ دلخواه (با ضرایب گویا) یک کسر مسلسل بلاواسطه دوره‌ای باشد، آنگاه ریشهٔ دیگر نیز یک کسر مسلسل دوره‌ای است، که از تقسیم ۱- بر همان کسر مسلسل که به ترتیب عکس نوشته شده، به دست می‌آید.

-
- 1) Paul Dupuy: "La vie d'Evariste Galois", Annales de l'Ecole Normale, série 3, Vol. 13, p. 197-266. 2) Kollros, L.: "Kurze Mathematiker-Biographien". Birkhäuser-Verlag, Basel, 1978. 3) Liouville 4) Journal de Mathématiques 5) Gauthier-Villars 6) Emile Picard 7) R. Bourgne 8) J. P. Azra 9) Ecrits et mémoires mathématique d'Evariste Galois 10) Annales de Mathematiques de Gergonne

این نتیجه، الحاقیه جالبی بر نتایج اوایلر و لاگرانژ درباره کسرهای مسلسل است.

در ماه مه ۱۸۲۹، گالوا اولین شرح از تحقیقات خود درباره حل معادلات جبری را به فرهنگستان علوم پاریس تسلیم کرد. یادداشتی دیگر، درباره معادله‌هایی که درجه آنها عددی اول است، هشت روز بعد، در اول ژوئن، تسلیم شد. هر دو مقاله برای کوشی فرستاده شدند و او آنها را گم کرد. هرگز خبری از این مقاله‌ها به دست نیامد.

در فوریه ۱۸۳۰ یادداشت دیگری درباره حل معادلات جبری به فرهنگستان تسلیم کرد. این بار فرهنگستان مقاله را به دبیر دائمی‌اش، فوریه^۱، سپرد. اما فوریه پیش از آنکه مقاله را بررسی کند، در گذشت. این دستنوشته در بین مقاله‌های فوریه پیدا نشد.

در آوریل ۱۸۳۰، یادداشت کوتاهی از گالوا در بولتر علوم ریاضی فروساک^۲ (آثار ریاضی گالوا^۳، ۱۸۹۷، صفحات ۱۱-۱۲) منتشر شد که در آن برخی از نتایج گزارش او به فرهنگستان بدون ارائه برهان اعلام شده بودند. نخستین و مهمترین قضیه اعلام شده در این مقاله از این قرار بود:

برای آنکه معادله‌ای که درجه آن عددی اول است به کمک رادیکالها قابل حل باشد، لازم و کافی است که، هرگاه دو ریشه آن معلوم باشند، ریشه‌های دیگر را بتوان به صورت گویا بیان کرد. از این قضیه نتیجه می‌شود که معادله درجه ۵ کلی را نمی‌توان با رادیکالها حل کرد.

در همان سال ۱۸۳۰، گالوا دو مقاله کوتاه‌تر درباره مسائل آنالیز و حل عددی معادلات منتشر کرد (مجموعه آثار ۱۸۹۷، صفحات ۹-۱۰، ۱۳-۱۴).

مقاله‌ای دیگر که اهمیت زیادی در تاریخ جبر نوین دارد، «درباره نظریه اعداد» است که در بولتن فروساک در ژوئن ۱۸۳۰ (مجموعه آثار، ۱۸۹۷، صفحات ۱۵-۲۳) چاپ شده است و گالوا در این مقاله ساختار هیأت‌های متناهی را معین کرده است: شرحی از مندرجات این مقاله در پایان فصل حاضر خواهد آمد. در ژانویه ۱۸۳۱، فرهنگستان پاریس نسخه تجدیدنظر شده‌ای از سومین یادداشت پر اهمیت گالوا دریافت کرد. عنوان این مقاله «یادداشتی درباره شرایط حلیپذیری معادلات به کمک رادیکالها»^۴ بود. متن این مقاله را می‌توان در مجموعه آثار ریاضی (۱۸۹۷)، صفحات ۳۳-۵۰ یافت. ویرایشی انتقادی با حواشی، همراه با تصحیحات انجام شده به توسط خود گالوا، در «نوشته‌ها و یادداشت‌های ریاضی اواریست گالوا» (پاریس ۱۹۶۲)، صفحات ۳۷-۱۰۹ به چاپ رسیده است.

فرهنگستان از اعضای خود، بواسون^۵ و لاکروا^۶ خواست تا گزارشی درباره این متن بنویسند. بواسون آن را به دقت بررسی اما اعلام کرد که از فهم آن عاجز است. متن کامل گزارش بواسون در مقاله‌ای با

1) Fourier 2) Bulletin des sciences mathematiques of Férussac 3) Oeuvres mathematiques de Galois 4) Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux 5) Poisson 6) Lacroix

عنوان «روابط اواريست گالوا با رياضيدانان همعصرش»^۱ به توسط رنه تاتون^۲ در «مروری بر تاريخ علوم و کاربردهای آنها»^۳، جلد I، صفحات ۱۱۴-۱۳۰ (۱۹۴۷) به چاپ رسيده است. اين گزارش چنين به پايان می رسد (ترجمه خود من):

ما حداکثر تلاش خود را برای درک استدلالهای گالوا به کار برده ایم. استدلالهای او نه از وضوح کافی برخوردارند و نه تا آن اندازه بسط یافته اند که درباره درستی آنها داوری کنیم، و حتی قادر نیستیم که در این گزارش نظری درباره استدلال او ارائه کنیم. مؤلف اظهار می کند که قضیه ای که مقصود اصلی این یادداشت است، بخشی از یک نظریه عام است که آماده کاربردهای زیادی است. اغلب چنین اتفاق می افتد که درک یکجای چندین جزء از نظریه ای، که به توضیح یکدیگر می پردازند، آسانتر از درک هر بخش به تنهایی است. بنابراین، برای اظهار نظر قطعی، باید منتظر ماند تا مؤلف اثر خود را یکجا به چاپ رساند. اما در وضعیت فعلی آن بخش که به فرهنگستان تسلیم شده، پیشنهاد تصویب آن از ما ساخته نیست.

دوئل

گالوا مجال آن را نیافت که نظریه اش را به طور کامل توضیح دهد. طی این سالها وی در چندین شورش ضد سلطنتی شرکت جست. دو بار زندانی شد. در ماه مه ۱۸۳۲ وادار شد دوئلی را بپذیرد. وی مطمئن بود که کشته خواهد شد. در نامه ای به دوستان سیاسی اش نوشت:

«من قربانی زنی عشوهرگر و بدنام می شوم»^۴.

گفته اند که حریف او می خواسته او را به قتل برساند تا از شریک جمهوريخواه خطرناک خلاص شود، اما گواهی خود گالوا، این شایعه را تأیید نمی کند، زیرا در پایان نامه خود می نویسد:

«برای آنها که مرا کشته اند، طلب عفو می کنم، آنها آدمهای با حسن نیتی هستند».

تصور می کنم خود گالوا درباره انگیزه های کسانی که او را به چالش طلبیدند و به قتل رساندند، اطلاعاتی بیشتر از دوستانش داشته است که به گمان آنها انگیزه های سیاسی بوده اند. وقتی می گوید «آنها آدمهای با حسن نیتی هستند» حتماً متقاعد شده بوده است که انگیزه های آنها صادقانه بوده است. در نامه ای که شب قبل از دوئل به دو تن از دوستانش نوشته، می نویسد:

«وظیفه شما ساده است: به همه بگوئید که من علی رغم میل به این مبارزه کشیده شدم،

یعنی پس از اینکه از هر وسیله ای برای اشتهی استفاده کردم. بگوئید که من استعداد دروغ گفتن را،

حتی در موارد چنين جزئی که موجب این دوئل شده است، ندارم».

1) Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps 2) René Taton

3) Revue d'histoire des sciences et de leurs application 4) Je meurs victime d'une infâme

و در نامه‌ای دیگر به دوستان سیاسی‌اش می‌نویسد

خدا گواه است که من زیر فشاری سخت ناچار به قبول مبارزه‌ای شدم که برای رد کردن آن تمام نیرویم را به کار برده بودم.
از این متأسفم که حقیقت کشته‌ای را به مردم می‌گویم که کمتر کسی می‌تواند آن را با خونسردی بشنود. با وجود این آنچه را که گفتم حقیقت دارد.
من با وجدانی پاک به گور می‌روم، زیرا نه دروغ گفته‌ام و نه دستم به خون میهن‌پرستی آلوده شده است.

دوئل در ۳۰ام ماه مه سال ۱۸۳۲ به وقوع پیوست. او شب قبل از دوئل را صرف نوشتن نامه‌ای طولانی به دوستش اوگوست شوالیه کرد که در آن نکات اساسی نظریه‌اش را شرح داد. این نامه در سپتامبر سال ۱۸۳۲ در رو آنسیکلوپدیک^۱ چاپ و در مجموعه آثار^۲ (۱۸۹۷)، صفحات ۲۵-۳۲ تجدید چاپ شد. نامه چنین به پایان می‌رسد:

تو این نامه را در رو آنسیکلوپدیک چاپ خواهی کرد.
من بارها در زندگی خود جرأت کرده‌ام و به قضیه‌هایی که در درستی آنها اطمینان نداشته‌ام، پرداخته‌ام. ولی آنچه را که در اینجا نوشتم، قریب یک سال است که در ذهن خود پرورش می‌دهم، ممکن است این بدگمانی ایجاد شود که قضایایی را آورده‌ام که اثبات کامل آنها را در دست ندارم. من توجه به این داشته‌ام که اشتباهی پیش نیاید تا این گونه بدگمانیها به وجود آید.
از طرف من از ژاکوبی و گاوس بخواه که علناً عقیده خود را، نه درباره درستی این قضیه‌ها، بلکه درباره اهمیت آنها بیان کنند.

امیدوارم کسانی پیدا شوند که علاقه لازم را برای برطرف کردن این دشواریها داشته باشند.

به گرمی تو را در آغوش می‌گیرم.

۲۹ ماه مه سال ۱۸۳۲.

اوارست گالوا

صبح روز بعد گالوا تیر خورد.

یادداشت ۱۸۳۱

برای ماها که نظریه گالوا را از طریق کتاب یا جزوه درسی آموخته‌ایم، درک یادداشت گالوا، آن دشواری را که برای پواسون داشته است، ندارد.

گالوا با معادله $f(x) = 0$ آغاز می‌کند. ضرایب، کمیت‌هایی معلوم، مثلاً اعداد گویا یا گنگ یا صرفاً حروف فرض می‌شوند. همهٔ تابعی گویای این ضرایب، گویا نامیده می‌شوند. به قول گالوا می‌توان کمیت‌های دیگری از قبیل ریشه‌های m ام کمیت‌های گویا را نیز الحاق کرد و، کلیهٔ تابع‌های گویای این کمیت‌ها را، به مفهومی عام‌تر، تابع‌هایی گویا انگاشت. در قالب اصطلاحات جدید، می‌توان گفت که «هیأت اصلی» معینی مفروض است که می‌توان آن را در طول تحقیق به کمک الحاقیه‌هایی توسیع داد.

اگر بتوان چندجمله‌ای $f(x)$ را، بدون خارج شدن از هیأت اصلی، تجزیه کرد، آن را تحویلپذیر، و در غیر این صورت تحویلناپذیر می‌نامند.

گالوا معمولاً، اما نه به صورت پیگیر، از واژه‌های جایگزین و جانشینی، با همان معنای مورد نظر کوشی، استفاده می‌کند. یک جایگزین، صورت مرتب مجموعه‌ای متناهی است، و یک جانشینی، گذر از یک صورت مرتب به یک صورت دیگر (یا خود آن) است.

گالوا حالا گروه‌های جانشینی با خاصیت زیر را در نظر می‌گیرد: اگر S و T متعلق به گروه باشند، ST متعلق به گروه است.

اگر یک چندجمله‌ای مانند f ریشه‌ای مشترک با چندجمله‌ای تحویلناپذیر g داشته باشد، آنگاه f بر g تقسیمپذیر است. این اولین لم گالواست. این قضیه، نخستین قضیه در یادداشت ۱۸۲۹ آبل نیز هست. از این لم نتیجه می‌شود که توسیع هیأت $K(V)$ که با الحاق ریشه‌ای مانند V به چندجمله‌ای تحویلناپذیر $g(x)$ به دست آمده است، به محض معلوم شدن هیأت اصلی K و چندجمله‌ای g ، معلوم می‌شود. در قالب اصطلاحات نوین، هیأت $K(V)$ با حلقهٔ ردهٔ مانده‌های $K[x]/(g)$ یکرخت است.

گالوا سپس ثابت می‌کند: اگر معادلهٔ $g(x) = 0$ ریشهٔ مکرر نداشته باشد و هرگاه $a, b, c, \dots$ ریشه‌های آن باشند، همواره می‌توان تابعی مانند V از ریشه‌ها تشکیل داد به طوری که کلیهٔ مقادیر V ، حاصل از جایگزین دادن ریشه‌ها، متفاوت باشند.

به گفتهٔ گالوا مثلاً می‌توان V را به صورت

$$V = Aa + Bb + Cc + \dots \quad (۱)$$

برگزید که ضرایب $A, B, C, \dots$ اعداد صحیحی‌اند که به طور مناسب انتخاب شده‌اند.

گالوا حالت خاصی از آنچه را که امروزه «قضیهٔ عضو اولیه» می‌نامیم، از این لم استنتاج می‌کند.

لم ۳. اگر V مانند قبل انتخاب شده باشد، کلیهٔ ریشه‌های $a, b, c, \dots$ به صورت تابع‌هایی گویا از V قابل بیان‌اند.

گالوا برای اثبات این لم مهم، قرار می‌دهد

$$V = \varphi(a, b, c, \dots).$$

وی بعداً ریشه‌های $b, c, \dots$ را به کلیه راههای ممکن جایگشت می‌دهد و تنها a را ثابت نگاه می‌دارد، و حاصلضرب

$$[V - \varphi(a, b, c, \dots)][V - \varphi(a, c, b, \dots)] \dots,$$

را تشکیل می‌دهد.

این حاصلضرب، تابعی است متقارن از $b, c, \dots$ که ریشه‌های چندجمله‌ای

$$g(x)/(x-a)$$

هستند، بنابراین می‌توان آن را به صورت تابعی گویا از a بیان کرد. بنابراین معادله‌ای به صورت

$$F(V, a) = 0 \quad (2)$$

داریم.

به گفته گالوا، این معادله و

$$g(a) = 0 \quad (3)$$

تنها در یک ریشه a مشترک‌اند، زیرا، مثلاً، $F(V, b)$ نمی‌تواند صفر باشد.

حال اگر دو معادله مانند (۲) و (۳) تنها یک ریشه مشترک مانند a داشته باشند، این ریشه را می‌توان به صورت گویا محاسبه کرد. پس a تابعی گویا از V است.

حق به جانب گالواست که می‌گوید $F(V, b)$ نمی‌تواند صفر باشد، زیرا $F(V, b)$ حاصلضربی از عاملهای

$$[V - \varphi(b, a, c, \dots)][V - \varphi(b, c, a, \dots)] \dots$$

است که در آن جایگشت‌هایی نظیر $(b, a, c, \dots)$ و غیره همه جایگشت‌هایی از $(a, b, c, \dots)$ ‌اند که در آنها b در اول ظاهر می‌شود در حالی که کلیه ضرایب دیگر $(a, c, \dots)$ به کلیه صورتهای ممکن جایگشت داده می‌شوند. این نکته، به طوری که ادواردز^۱ در کتابش «نظریه گالوا» متذکر شده است از تعریف $F(V, a)$ بر می‌آید؛ یعنی اینکه: چون کلیه عبارتهای $\varphi(b, a, c, \dots)$ و غیره متفاوت از $V = \varphi(a, b, \dots)$ فرض می‌شوند، نتیجه می‌شود که $F(V, b)$ مخالف صفر است و لذا $F(V, c)$ و امثالهم نیز مخالف صفرند. پواسون بر لم ۳ حاشیه‌ای نوشته می‌گوید: «برهان این لم نارساست ولی لم بنابر مقالة ۱۰۰ یادداشت لاگرانژ درست است.» درک رهیافت پواسون آسان است. برهان گالوا تنها به ذکر کلیات پرداخته و این

حکم را که $F(V, b)$ صفر نیست، به تفصیل ثابت نمی‌کند. این اظهار پواسون که «لم بنابر مقالة ۱۰۰ لاگرانژ درست است» صحت دارد زیرا در مقالة ۱۰۰ «تأملات» لاگرانژ، برهانی کامل از این لم ارائه شده است.

به عقیده من گالوا در این ادعا که برهان او اساساً درست است مُحَقِّق بوده اما پواسون نیز در اعلام ناکامل بودن آن حق داشته است.

در نمادگذاری امروزی، می‌توانیم حالا بنویسیم

$$K(a, b, c, \dots) = K(V) \quad (۴)$$

که در آن K هیأت اصلی است. «عضو اولیه» V ریشه‌ای از یک معادله تحویلناپذیر است. فرض کنید

$$V, V', V'', \dots, V^{(n-1)}$$

ریشه‌های این معادله باشند. لم ۴ می‌گوید: اگر $a = \varphi(V)$ ریشه‌ای از معادله اصلی باشد، $\varphi(V')$ نیز یکی از ریشه‌ها خواهد بود. برهان آن آسان است.

قضیه اصلی پس از این می‌آید:

قضیه ۱. گروهی از جایگشت‌های حروف $a, b, c, \dots$ موجود است به طوری که

۱° هر تابعی از ریشه‌ها که تحت جانشینهای گروهی ناوردا باشد، به صورت گویا معلوم است؛

۲° برعکس، هر تابعی از ریشه‌ها که به صورت گویا معلوم باشد، تحت این گروه ناورداست.

اصطلاحات گالوا پایدار نیستند. وی ابتدا از «جایگشتها» و سپس «جانشینها» بی‌کی گروه را می‌سازند، صحبت به میان می‌آورد اما آنچه می‌خواهد بگوید کاملاً روشن است.

برای اثبات این قضیه، گالوا ریشه‌ها را به صورت تابعهای گویای V بیان می‌کند:

$$\varphi V, \varphi_1 V, \dots, \varphi_{m-1} V.$$

وی سپس جایگشت‌های

$$\varphi V, \quad \varphi_1 V, \quad \varphi_2 V, \quad \dots, \quad \varphi_{m-1} V$$

$$\varphi V', \quad \varphi_1 V', \quad \varphi_2 V', \quad \dots, \quad \varphi_{m-1} V'$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\varphi V^{(n-1)}, \varphi_1 V^{(n-1)}, \varphi_2 V^{(n-1)}, \dots, \varphi_{m-1} V^{(n-1)}$$

را می‌نویسد و می‌گوید که «گروه جایگشتها» (منظور گروه جانشینیهای نظیر) در شرایط مورد نظر صدق می‌کند. برهان بسیار کوتاه است، اما برای خواننده امروزی ارائه جزئیات مرحله به مرحله کار دشواری نیست.

گالوا سپس به تحقیق در این امر می‌پردازد که چگونه گروه این معادله هنگام توسیع هیأت اصلی با الحاق یکی یا همه ریشه‌های معادله‌ای کمکی، تغییر می‌کند. روشن است که پس از الحاق، گروه گالوا یک زیرگروه H از گروه اصلی G خواهد بود. اگر H یک زیرگروه حقیقی باشد، G را می‌توان به صورت زیر

$$G = H + HS + HS' + \dots \quad (5)$$

یا بدیل آن

$$G = H + TH + T'H + \dots \quad (6)$$

تجزیه کرد.

این دو تجزیه در نامه‌ای به شوالیه (مجموعه آثار گالوا، ۱۸۹۷، صفحات ۲۵-۳۲) به روشترین نحو توضیح داده شده‌اند.

به گفته گالوا، این دو تجزیه همیشه بر هم منطبق نمی‌شوند. اگر بر یکدیگر منطبق شوند، این تجزیه‌ها «حقیقی» نامیده می‌شوند. در قالب اصطلاحات امروزی، این حالتی است که در آن H یک «گروه پایا» یا «مقسوم‌علیه نرمال» G است. به ویژه، اگر کلیه ریشه‌های یک معادله کمکی الحاق داده شوند، دو تجزیه بر هم منطبق می‌شود. این، قضیه III گالواست. برهان حذف شده است. (On trouvera la démonstration) [اثبات پیدا خواهد شد].

گالوا اینک به مسأله اصلی می‌رسد: در کدام حالت، یک معادله به کمک رادیکالها حلپذیر است؟ البته می‌توان خود را به رادیکالهایی از درجه اول p محدود کرد. هر بار که ریشه p -ام استخراج می‌شود، گالوا فرض می‌کند که پیشاپیش، ریشه‌های p -ام واحد باید ملحق شوند. این، محدودیتی اساسی نیست، زیرا گاوس قبلاً ثابت کرده بود که ریشه‌های p -ام واحد را می‌توان به کمک رادیکالهایی با درجه‌های کمتر از p بیان کرد.

اینک فرض می‌کنیم که الحاق رادیکالی از ریشه r -ام معادله

$$x^p - s = 0 \quad (7)$$

منجر به تحویل گروه گالوا شود. چون ریشه‌های p -ام واحد

$$\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^p = 1$$

در هیأت اصلی قرار دارند، همین تحویل با الحاق کلیه ریشه‌های معادله (۷) نیز به دست می‌آید. بنابر قضیه III، تجزیه (۵) یک تجزیه حقیقی خواهد بود، یعنی، زیرگروه H ، مقسوم علیه نرمال است. گالوا، بدون اثبات، بیان داشت که عده جمله‌های تجزیه (۵) (که آن را شاخص H در G می‌نامیم) همان عدد اول p است. برعکس، اگر G مقسوم علیه نرمالی مانند H با شاخص اول p داشته باشد، می‌توان گروه گالوی G را با الحاق رادیکالی از درجه p به زیرگروه H تحویل کرد. این حکم، نظیر آنچه در کتابهای درسی امروزی عمل می‌شود، با انتخاب تابعی مانند θ که تحت زیرگروه H ناوردا می‌ماند و تشکیل دادن یک «حلال لاگرانژ» مانند

$$z = \theta + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \dots + \alpha^{p-1}\theta_{p-1} \quad (A)$$

ثابت می‌شود که در آن α ریشه p -ام واحد است، در حالی که $\theta_1, \theta_2, \dots$ به کمک جانشینهای

$$S, S^2, \dots, S^{p-1}$$

که نمایش هممجموعه‌ها در تجزیه (۵) اند، از θ به دست می‌آیند.

از اینجا نتیجه می‌شود که معادله‌ای مانند $g(x) = 0$ به کمک رادیکالها حلپذیر است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از زیرگروههای

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m = E$$

موجود باشد به طوری که هر H_k یک مقسوم علیه نرمال زیرگروه H_{k-1} پیش از خود یا G باشد، در حالی که همه شاخصها اول باشند. اگر چنین باشد، گوئیم که گروه G حلپذیر است.

گالوا سپس فرض می‌کند که معادله $f(x) = 0$ تحویلناپذیر و از درجه اول n است. وی ثابت می‌کند: این معادله را می‌توان به کمک رادیکالها حل کرد اگر و تنها اگر هر یک از جانشینهای G با یک تبدیل خطی k به پیمانه n :

$$k' \equiv ak + b \quad (\text{به پیمانه } n)$$

x_k را به x'_k تبدیل کند.

گروه گالوی معادله درجه پنجم کلی به این شکل نیست، بنابراین این معادله را نمی‌توان به کمک رادیکالها حل کرد. لذا، قضیه آبل از نظریه گالوا حاصل می‌شود.

در آخرین صورت یادداشت خود برای فرهنگستان، گالوا از آبل نقل قول می‌کند، اما زمانی که وی اولین صورت یادداشت را برای فرهنگستان می‌فرستاد، حتی نام آبل را هم نشنیده بود. منابع اصلی او، آثار لاگرانژ، گاوس، و کوشی بودند.

هیأت‌های گالوا

هم آبل و هم گالوا تصور روشنی از آنچه امروزه «هیأت» می‌نامیم، داشتند. گالوا درست در آغاز مقالهٔ مهمش می‌نویسد:

«می‌توان قبول کرد که هر تابع گویا از عده‌ای معین از کمیتها را که از پیش معلوم فرض شده‌اند، گویا انگاشت» و به توضیح منظور خود از الحاق کردن کمیتی معین به هیأت کمیت‌هایی که معلوم تلقی شده‌اند، ادامه می‌دهد.

هیأت‌هایی که آبل و گالوا در مقاله‌های خود دربارهٔ حل معادلات در نظر می‌گیرند، همه شامل هیأت اعداد گویا هستند. در قالب اصطلاحات امروزی، اینها هیأت‌های با مشخصهٔ صفرند. اگر مشخصهٔ p می‌بود، معادلهٔ

$$x^p - 1 = 0$$

تنها یک ریشهٔ $x = 1$ می‌داشت، در حالی که آبل و گالوا همواره فرض می‌کردند که ریشه‌های p -ام واحد همه متفاوت‌اند.

با این حال، در مقالهٔ «دربارۀ نظریۀ اعداد»، که در ۱۸۳۰ در بولتن علوم فروساک (مجموعهٔ آثار گالوا، پاریس، ۱۸۹۷، صفحات ۱۵-۲۳) به چاپ رسید، گالوا هیأت‌های متناهی، موسوم به هیأت‌های گالوا را می‌سازد. وی از همان آغاز اظهار می‌دارد که هدف او در نظر گرفتن ساختارهای جبری است که در آن همهٔ کمیتها، با ضرب در p ، صفر تلقی می‌شوند. بیان خود او چنین است:

اگر بپذیریم که همهٔ کمیت‌هایی را که، در محاسبات جبری، از ضرب در p حاصل شده‌اند، صفر تلقی کنیم، و اگر، با این قرارداد، در صدد یافتن جواب معادلهٔ جبری $Fx = 0$ براییم، که آقای گاوس آن را با نماد $Fx \equiv 0$ نشان می‌دهد، تاکنون رسم بر این بوده است که تنها جواب‌های صحیح در نظر گرفته شوند. من با پژوهشهای خود، که مرا به در نظر گرفتن جواب‌های نامتوافق رهنمون شده، نتایجی به دست آورده‌ام که به نظم جدید می‌آید.

از این کلمات روشن است که نقطهٔ شروع گالوا حساب همنهشتیها به پیمانهٔ عدد اولی مانند p بوده که گاوس آغازگر آن بوده است. در آن زمان می‌دانستند که ردهٔ مانده‌های به پیمانهٔ p را می‌توان جمع، تفریق، و ضرب کرد، و نیز اینکه همنهشتی

$$ax \equiv b \quad (\text{به پیمانه } p)$$

را می‌توان همواره در مجموعهٔ اعداد صحیح حل کرد مشروط بر اینکه a همنهشت با صفر نباشد. به عبارت دیگر ردهٔ مانده‌های به پیمانهٔ p یک هیأت تشکیل می‌دهند.

گاوس همنهشتهای از درجه بالاتر نظیر

$$x^2 \equiv a \quad (\text{به پیمانه } p)$$

را نیز در نظر گرفته بود اما تنها جوابهای گویا را قبول داشت. گالوا حالا این پرسش را مطرح می‌کند که آیا می‌توان جوابهای گنگ را نیز داخل کرد، یعنی، آیا می‌توان هیأت رده مانده‌ها را با الحاق ریشه‌هایی که در هیأت اصلی قرار ندارند، توسیع داد.

گالوا فرض می‌کند که چندجمله‌ای Fx به پیمانه p تحویلناپذیر باشد. وی می‌پرسد که آیا می‌توان همنهشتی $Fx \equiv 0$ را با دخالت دادن «علامتها»یی جدید، که ممکن است به اندازه واحد انگاری i در آنالیز معمولی سودمند باشند، حل کرد؟

گالوا یکی از ریشه‌های همنهشتی $Fx \equiv 0$ از درجه v را i می‌نامد. وی p^v عبارت

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_{v-1} i^{v-1} \quad (A)$$

را تشکیل می‌دهد که در آن $a, a_1, a_2, \dots, a_{v-1}$ اعداد صحیح به پیمانه p اند. این p^v عنصر آنچه را که امروزه یک «هیأت گالوا»ی $GF(p^v)$ می‌نامند، تشکیل می‌دهند.

می‌توان به آسانی نشان داد که عبارتهای (A) یک هیأت تشکیل می‌دهند، یعنی در قواعد آشنای جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم صدق می‌کنند.

گالوا حالا عضوی مانند α به شکل (A) اختیار می‌کند که در آن ضرایب $a, a_1, \dots, a_{v-1}$ همه صفر نیستند. توانهای $\alpha, \alpha^2, \dots$ همه نمی‌توانند متفاوت باشند، بنابراین یکی از توانها مانند α^n باید برابر ۱ باشد. اگر n کوچکترین عدد صحیحی باشد که α^n برای آن ۱ است، عبارتهای

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$$

همه باید متفاوت باشند. در قالب اصطلاحات جدید، آنها زیرگروهی از گروه ضربی هیأت گالوا تشکیل می‌دهند.

با ضرب این عددها در عضو دیگری مانند $\beta \neq 0$ ، هممجموعه‌ای از این زیرگروه به دست می‌آید. با ادامه کار به همین منوال، معلوم می‌شود که کلیه هممجموعه‌ها با هم تمام زیرگروه ضربی مرتبه $p^v - 1$ را می‌سازند، و نمای n یکی از مقسوم‌علیه‌های $p^v - 1$ است. بنابراین داریم

$$\alpha^{p^v-1} = 1.$$

سپس، به گفته گالوا، می‌توان، آن گونه که در نظریه رده مانده‌ها به پیمانه p عمل می‌شود، ثابت کرد که «ریشه‌های اولیه»ای موجودند که برای آنها n دقیقاً $p^v - 1$ است. کلیه عضوهای دیگر هیأت گالوا،

توانهای عضو اولیه‌ای مانند α هستند. برهان وجود چنین عضوی، که در حالت هیأت رده مانده‌های به پیمانه p به توسط کاوس داده شده است، در حالت $(\dot{G}F(p^v))$ نیز به همان منوال صورت می‌گیرد. حال می‌بینیم که کلیه عنصرهای هیأت گالوا، از جمله صفر، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^{p^v} - x \quad (B)$$

هستند و هر چندجمله‌ای تحویلناپذیر Fx از درجه v ، یک مقسوم علیه چندجمله‌ای (B) است. اگر α یکی از ریشه‌های یک چنین چندجمله‌ای باشد، سایر ریشه‌ها عبارت خواهند بود از:

$$\alpha^p, \alpha^{p^2}, \dots, \alpha^{p^{v-1}}$$

این حکم، از همنهشتی مشهور زیر به دست می‌آید:

$$(Fx)^p \equiv F(x^p).$$

گالوا در انتهای رساله‌اش، وضعیت را عکس می‌کند. وی با یک توسیع هیأت $(\dot{G}F(p))$ که در آن بتوان چندجمله‌ای (B) را به طور کامل تجزیه کرد، آغاز می‌کند. با محدود کردن خود به زیرهیأت تولید شده به وسیله ریشه‌ها، «عضو اولیه‌ای» مانند i را در این زیرهیأت اختیار می‌کند. به گفته گالوا، چنین عضوی بنابر قضیه‌ای که بر آبل معلوم بوده، موجود است. هر چنان i ای یک ریشه از چندجمله‌ای تحویلناپذیر Fx (به پیمانه p) است. صرف نظر از اینکه کدام چندجمله‌ای درجه v را انتخاب کنیم، در همه حال یک هیأت $(\dot{G}F(p^v))$ را به دست می‌آوریم. در اغلب حالتها، ساده‌ترین راه به دست آوردن چنین چندجمله‌ایی، به گفته گالوا «par tatonnement»، یعنی آزمون و خطاست. وی به عنوان مثال $p = 7$ و $v = 3$ را اختیار می‌کند. چندجمله‌ای $x^3 - 2$ تحویلناپذیر (به پیمانه v) است، و یک ریشه مانند i از این چندجمله‌ای هیأت $(\dot{G}F(v^3))$ را تولید می‌کند.

انتشار مقاله‌های گالوا

مقاله «یادداشت‌هایی در شرایط حلپذیری معادله‌ها به کمک رادیکالها»^۱ از گالوا در ۱۸۴۶، چهارده سال پس از مرگ وی، به توسط لیوویل در مجله ریاضیات مجرد و کار بسته‌او، مجلد ۱۱، صفحات ۳۸۱-۴۴۴ منتشر شد. در «پیشگفتار»ی بر این یادداشت، لیوویل نامه گالوا به شوالیه را چاپ و اضافه می‌کند:

1) Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux

با درج نامه‌ای که هم اکنون ملاحظه شد در «مجموعه» خود، ویراستاران رود آنسیکلوپدیک اعلام کردند که دستنوشته‌های به جا مانده از گالوا را به زودی منتشر خواهند کرد. اما به این وعده عمل نشد. با این حال عالیجناب لوگوست شوالیه این اثر را تنظیم کرده و در اختیار ما قرار داده است و خواننده در صفحات ذیل مطالب زیر را ملاحظه خواهد کرد:

۱° یادداشتی در شرایط حلپذیری معادله‌ها به کمک رادیکالها، با کاربردی در معادله‌هایی که درجه آنها عددی اول است،

۲° قطعه‌ای از یادداشت دوم که در آن گالوا به نظریه کلی معادله‌هایی می‌پردازد که وی آنها را اولیه می‌نامد. ما قسمت اعظم تذکراهی را که آقای اوگوست شوالیه به یادداشت‌های مورد اشاره اضافه کرده است، حفظ کرده‌ایم. همه این تذکرها با ا. ش. مشخص شده‌اند. یادداشت‌های بدون امضاء از آن خود گالواست.

ما طبع این اثر را با قطعاتی که از یادداشت‌های گالوا استخراج شده‌اند، کامل می‌کنیم. کمترین اهمیت این یادداشت‌ها آن است که هنوز ممکن است علاقه هندسه‌دانان را برانگیزاند.

یادداشت‌های مورد اشاره لیوویل در جمله آخر، به وسیله ژول تانری (دستنوشته‌های اواريست گالوا، گوتیه-ویلار، پاریس، ۱۹۰۸) و مجدداً در «نوشته‌ها و یادداشت‌های اواريست گالوا» (پاریس، ۱۹۶۲) چاپ شده است.

لیوویل همچنین اظهار می‌کند که وی وقتی دریافته است که روشی که گالوا قضیه زیبایی خود را به کمک آن ثابت کرده، پس از برطرف کردن چند نقیضه جزئی، کاملاً درست است، دچار شعفی زایدالوصف شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره فعالیت‌های لیوویل، ارمیت، و سره^۱ در سالهای ۱۸۴۶-۱۸۵۴، خواننده را به مقاله بسیار جالبی به قلم کیرنان در مجله بایگانی تاریخ علوم دقیقه^۲ با عنوان «نظریه گالوا از لاگرانژ تا آرتین»^۳ ارجاع می‌دهم. بخش ۱۱ این مقاله به نشر مقاله‌های گالوا و واکنش ریاضیدانان فرانسه در برابر آن می‌پردازد. بخش آتی این فصل، عمدتاً از مقاله کیرنان اقتباس شده است.

ارمیت، پوییزو، و سره

ریاضیدان فرانسوی شارل ارمیت^۴ (۱۸۲۲-۱۸۸۲) شاگرد همان لوئی ریشاره، آموزگار گالوا بود. در ۱۸۴۲، در بیست سالگی، مقاله‌ای با عنوان «ملاحظات در حل جبری معادله درجه پنجم»^۵ منتشر کرد

1) Serret 2) Archive for History of Exact Sciences 3) Galois Theory from Lagrange to Artin 4) Charles Hermite 5) Louis Richard 6) Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré

که در آن با وضوح و دقت تمام به طرح اندیشه‌های لاگرانژ درباره معادله درجه پنجم کلی پرداخت.

در ۱۸۴۷ یا پیشتر از آن، ارمیت نامهای به ژاکوبی نوشت که در آن به کارگالوا درباره تابعهای بیضوی اشاره کرده بود. بنابراین ارمیت با کارگالوا در اندک زمانی پس از انتشار یادداشت‌های گالوا در ۱۸۴۶ یا حتی پیشتر از آن آشنا شده بوده است.

در ۱۸۵۰، ویکتور پوییزو^۱، مقاله‌ای بنیادین با عنوان «پژوهشهایی در تابعهای جبری»^۲ در مجلد ۱۵ «مجله ریاضیات مجرد و کاربرده» لیوویل، صفحات ۳۶۵-۴۸۰ منتشر کرد. پوییزو در این مقاله، معادله‌ای جبری مانند w از متغیر مختلط z را که با معادله

$$f(z, w) = 0 \quad (9)$$

تعریف شده، در نظر می‌گیرد. در این معادله، $f(z, w)$ یک چندجمله‌ای بر حسب w است، که در هیأت تابعهای گویای z تحویلناپذیر است. در همسایگی یک نقطه دلخواه z که یک نقطه «شاخه‌ای» نیست، ریشه‌های $w_1, w_2, \dots, w_n$ معادله (۹) را می‌توان به صورت یک سری توانی همگرا بر حسب $z - z_0$ بسط داد. اگر z_0 یک نقطه شاخه‌ای باشد، باید از توانهای $z - z_0$ با نامهای کسری استفاده شود. این سریهای توانی تا به امروز «سریهای پوییزو» نامیده شده‌اند.

اگر از یک نقطه غیرشاخه‌ای مانند z_0 آغاز کنیم و اگر z را در یک مسیر بسته، با اجتناب از نقطه‌های شاخه‌ای، تا نقطه z_0 حرکت دهیم، به جایگشتی از ریشه‌های آغازین $w_1, \dots, w_n$ می‌رسیم. آشکار است که این جایگشتها یک گروه تشکیل می‌دهند، اما پوییزو از کلمه «گروه»^۳ استفاده نمی‌کند. در «رساله جانشینها»^۴ ژوردان^۵، این گروه، «گروه مداری»^۶ نامیده می‌شود.

یک سال پس از آن، در ۱۸۵۱، ارمیت مقاله کوتاهی منتشر کرد که در آن نشان داد که گروه جانشینهای ریشه‌های $w_1, \dots, w_n$ که پوییزو در نظر گرفته بود، دقیقاً همان گروه گالوای معادله (۹) است هرگاه $C'(z)$ هیأت اصلی باشد. بنابراین رابطه مهمی بین نظریه گالوا و نظریه توابع مختلط برقرار می‌شود (مجموعه آثار ارمیت، I، صفحات ۲۷۶-۲۸۰).

لیوویل سلسله سمینارهایی را درباره نظریه گالوا برگزار کرد. ژوزف-آلفرد سره^۷، مؤلف اثر بسیار مهم «دوره جبر عالی»^۸ در این سمینارها شرکت جست. در اولین ویرایش اثر مذکور (منتشره در ۱۸۴۹) برهانی از سومین لم بنیادین گالوا را ملاحظه می‌کنیم، که در کتاب درسی سره (ویرایش سوم، جلد ۲، صفحه ۴۱۳) از این قرار است:

1) Victor Puiseux 2) Recherches sur les fonctions algébriques 3) groupe 4) Traité des substitutions
5) Jordan 6) groupe de monodromie 7) Joseph-Alfred Serret
8) Cours d'algèbre supérieure

اگر

$$f(x) = 0$$

معادله‌ای از درجه n باشد که ریشه‌های مکرر نداشته باشد و اگر

$$V = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

تابعی گویا از ریشه‌های $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ باشد که به گونه‌ای انتخاب شده است که $1, 2, \dots, n$ مقداری که با جایگشت دادن ریشه‌ها اختیار می‌کند متفاوت باشند، آنگاه می‌توان ریشه‌های $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ را به صورت تابعهای گویایی از V بیان کرد.

برهانی که سره ارائه داده است، همان برهان گالواست که پیشتر آن را بحث کرده‌ایم.

اندکی پیش از ۱۸۵۴، ارمیت برهانی از قضیه گالوا را برای سره فرستاد که در آن گفته می‌شود: معادله‌ای تحویلناپذیر که درجه آن عدد اول باشد تنها در صورتی به کمک رادیکالها حلپذیر است که بتوان همه ریشه‌های آن را برحسب دو ریشه دلخواه آن به صورت گویا بیان کرد. سره این برهان را در ویرایش دوم کتابش «دوره جبر عالی» که در ۱۸۵۴ بیرون آمد، گنجائید. سره ترجمه‌ای فرانسوی از مقاله کرونکر «درباره حلپذیری معادله‌های جبری»^۱ را نیز که در سال ۱۸۵۳ به فرهنگستان برلین تقدیم شد (مجموعه آثار کرونکر IV، صفحات ۱-۱۱) در این کتاب گنجانده است.

ویرایش سوم «دوره جبر» سره (۱۸۶۶) شرح کاملی از نظریه گالوا را در بر دارد. سره می‌گوید

«من ترتیب قضیه‌ها را به همان شکل که گالوا در پیش گرفته، دنبال کرده‌ام، اما در موارد زیادی

ناچار شده‌ام به تکمیل برهانهای نارسا دست یازم.»

به عقیده کیرنان، سهم عمده سره از جنبه نمادگذاری است. از نظر سره، گروه گالوا، یک گروه جانشینها به مفهوم کوشی است. او نمادی را که امروزه «زیرگروههای مزدوج» می‌نامیم، معرفی می‌کند. اگر H زیرگروهی متشکل از m جانشینی

$$1, S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$$

باشد، آنگاه یک زیرگروه مزدوج متشکل است از

$$1, TS_1T^{-1}, TS_2T^{-1}, \dots, TS_{m-1}T^{-1}.$$

کتاب درسی سره خیلی مؤثر بود. ویرایشهای متعددی از پس ویرایش سوم پدیدار شدند. ترجمه‌ای آلمانی از آن به توسط ورتهایم^۲ در ۱۸۶۸ منتشر شد.

1) Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen 2) G. Wertheim

اینک به سال ۱۸۵۲ بازمی‌گردیم و به ایتالیا رو می‌کنیم.

انریکو بتی

اولین کسی که شرحی از نظریهٔ گالوا را بنابر ایده‌های خود گالوا، اما با برهانهای کاملتر، عرضه کرده است، انریکو بتی^۱، شخصیتی بسیار جالب در تاریخ جبر و توپولوژی جبری است. نام او از آن رو برای توپولوژی‌دانان آشناست که با به اصطلاح «اعداد بتی» یا «اعداد مانستگی» مرتبط است.

در واقع این اعداد را بتی ابداع نکرده بلکه هانری پوانکاره^۲، با الهام از مقاله‌ای از بتی، ابداع‌کنندهٔ این اعداد بوده است. تاریخ این ابداع در مقاله‌ای به توسط مایا بولینگر^۳ «بسط مفاهیم مانستگی» در بایگانی تاریخ علوم دقیقه، مجلد ۹، صفحات ۴۹-۱۷۰ (۱۹۷۲) مورد مطالعه قرار گرفته است. به جاست که خلاصه‌ای از واقعیت‌های عمده مربوط به «اعداد بتی» را در اینجا بیاوریم.

در «مجموعهٔ کامل آثار ریاضی»^۴ ریمان (۱۸۷۱)، «قطعه‌ای دربارهٔ هندسهٔ وضع»^۵ منتشره پس از مرگ ریمان را ملاحظه می‌کنیم که در آن ریمان آنچه را که امروزه «اعداد مانستگی به پیمانهٔ ۲»^۶ می‌نامند، یعنی، تعداد رده‌های مانستگی به طور خطی مستقل برای دوره‌های بی‌سورا که ضرایب آنها اعداد صحیح به پیمانهٔ ۲ است، تعریف می‌کند. روش برهان او همان است که استاینیتس^۷ بعدها به کمک آن ثابت کرد که درجهٔ یک توسیع هیأت متناهی به انتخاب پایه بستگی ندارد. این برهان را می‌توان در هر کتاب درسی در جبر نوین یافت.

ریمان در ایتالیا با بتی دیدار کرد. در نامه‌ای به تاریخ ۱۹ ژانویه ۱۸۸۷، وی بتی را «دوست بسیار عزیزم»^۸ می‌نامد. به نظر می‌رسد که ریمان ایده‌های خود دربارهٔ اعداد مانستگی را برای بتی شرح داده است.

بتی در ۱۸۷۱ مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ فضاها با ابعاد غیرمشخص»^۹ در «سالنامهٔ ریاضیات مجرد و کاربردی»^{۱۰} (۲) مجلد ۴، صفحات ۱۴۰-۱۵۸ (۱۸۷۱) منتشر کرد. ایده‌های اساسی این مقاله همان است که در قطعهٔ ریمان دیده می‌شود و بتی صراحتاً می‌گوید که برهان او از استقلال اعداد مانستگی از انتخاب پایه عیناً همان برهانی است که به توسط ریمان در حالت خاص مسیرهای بسته بر یک رویهٔ ریمانی داده شده است. اما، به طوری که هیچ‌کس^{۱۱} و مایا بولینگر نشان داده‌اند، برهان بتی درست

1) Enrico Betti 2) Henri Poincaré 3) Maya Bollinger, "Entwicklung des Homologiebegriffs" 4) Gesammelte mathematische Werke 5) Fragment on Analysis Situs 6) homology numbers modulo 2 7) Steinitz 8) carissimo amico 9) Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni 10) Annali di matematica pura e applicata 11) Heegard

نیست. بتی از چندین لحاظ ایده‌های ریمان را بد فهمیده است.

پوانکاره، با الهام از مقاله بتی، نظریهٔ مانستگی کامل و صحیحی را بسط داد. وی دوره‌های جهت‌داری را، که در اعداد گویا ضرب شده‌اند، در نظر گرفت، لذا مانستگی او، در اصطلاح امروزی، «مانستگی با قبول تقسیم» است. تعداد دوره‌های مستقلاً خطی همهٔ ابعاد کمتر از m بر خمینه‌ای m بعدی، به افتخار بتی، «اعداد بتی»^۱ نامیده شده‌اند. بر یک رویهٔ بسته جهت‌پذیر، مثلاً بر رویهٔ ریمانی یک تابع خطی، این اعداد با اعداد مانستگی به پیمانهٔ ۲ که به توسط ریمان و بتی مطالعه شده‌اند، مساوی از کار در می‌آیند، اما در حالت کلی ممکن است متفاوت باشند.

بتی به همان نحو که به تکمیل اندیشه‌های ریمان دربارهٔ مانستگی پرداخته بود، به تکمیل نظریهٔ گالوا نیز در مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ حل معادلات جبری»^۲ منتشره در ۱۸۵۲ (مجموعهٔ آثار ریاضی، I، صفحات ۳۱-۸۰) دست یازید. وی در مقدمهٔ این مقاله، با اشاره به کارهای گالوا و آبل، می‌نویسد:

«شرطهای مربوط به حلپذیری به کمک رادیکالها را در مورد معادله‌هایی که درجهٔ آنها عدد اول است، می‌توان بدین گونه معین و به کمک روشهای هر دوی این ریاضیدانان ثابت کرد. تعیین شرایط مربوط به معادله‌هایی با درجهٔ غیر اول همچنان به جای خود باقی است، و گالوا و آبل به روشهایی متفاوت، اما بدون برهان، پیشنهادهای زیادی در این خصوص، در مقاله‌هایی که پس از مرگ آنها منتشر شده، مطرح کرده‌اند. هدف عمده‌ام در این مقاله، برطرف کردن این نقیصه‌هاست.» (ترجمهٔ کیرنان).

در واقع، بتی برای چندین قضیه که گالوا صرفاً به بیان آنها پرداخته بود، برهانهایی تدارک دیده است. مثال خوبی در صفحهٔ ۱۰۷ مقالهٔ کیرنان در بایگانی تاریخ علوم دقیقه، شمارهٔ ۸ داده شده است.

بتی به مفهوم نوین گروه خارج قسمت بسیار نزدیک شده است. اگر H زیرگروه نرمال یک گروه G باشد، بتی فرض می‌کند که نماینده‌های S_i ی مجموعه‌های H ؛ S_i را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که یک گروه تشکیل دهند. در این حالت خاص، گروه حاصل از نماینده‌های S_i ، با آنچه امروزه گروه خارج قسمتی G/H می‌نامیم یکرخت است.

برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتری دربارهٔ یادداشت بتی، خواننده را به مقالهٔ کیرنان ارجاع می‌دهم. شرح نظریهٔ گالوا از سوی بتی، که به زبان ایتالیایی نوشته شده است، به اندازه کار سره، که «دورهٔ جبر عالی» او برای مدتی مدید متنی استانده باقی ماند، مؤثر نبوده است. ویرایش ششم کتاب سره در ۱۹۲۸ پدیدار شد که دیرپایی آن را نشان می‌دهد.

دومین مقاله منتشره از گالوا پس از مرگ او

به طوری که دیده‌ایم، گالوا ساختار گروه‌های گالوای معادله‌های حلپذیر تحویلناپذیر با درجهٔ عدد اول p را به طور کامل معین کرده است. چون یک معادله تنها در صورتی تحویلناپذیر است که گروه آن تریا باشد، و تنها در صورتی حلپذیر است که این گروه حلپذیر باشد، قضیه‌ای که گالوا ثابت کرده، معادل با قضیه زیر است:

یک گروه تریا از جایگشت‌های درجهٔ p (یعنی با p حرف) تنها در صورتی حلپذیر است که بتوان جایگشت‌های آن را به صورت

$$k' \equiv ak + b \quad (\text{به پیمانه } p)$$

نوشت.

در مقاله ناتمام دیگری که در ۱۸۴۶ منتشر شد (مجموعه آثار، صفحات ۶۱-۵۱)، گالوا کلی‌ترین حالتی را که در آن گروه، اولیه فرض می‌شود، مورد تفحص قرار می‌دهد.

یک گروه تریا را اولیه می‌نامند، هرگاه نتوان حروف آن را به زیرمجموعه‌های

$$\{a_1, \dots, a_m\}, \{a_{m+1}, \dots, a_{2m}\}, \dots$$

هر یک با بیش از یک عضو، چنان تقسیم کرد که این گروه هر زیرمجموعه را به خود یا به یکی دیگر از زیرمجموعه‌ها تبدیل کند.

آشکار است که هر گروه تریا با درجهٔ عدد اول p ، همواره اولیه است. گالوا در این مرحله درجه‌های غیراول را در نظر می‌گیرد و ثابت می‌کند:

اگر گروه حلپذیری، اولیه باشد، درجهٔ آن باید توانی از یک عدد اول باشد.

درک برهان گالوا برای این قضیه آسان نیست، گرچه برهان صحیح است. کامیل ژوردان برهان استادانه‌ای برای این قضیه در اثرش به نام «رسالة جانشینها» (۱۸۷۰) عرضه کرد. ژوردان در این اثر ماندگار خود رده‌بندی تمام و کمالی از گروه‌های اولیهٔ حلپذیر درجهٔ p^n را بسط داده است.

قضیه‌ای که هم‌اکنون ذکرش رفت، پیشتر همراه با نتایج دیگر، در مقالهٔ گالوا منتشره به سال ۱۸۳۰ با عنوان «تحلیل یک مقاله در حل جبری معادلات»^۱ (مجموعه آثار، ۱۸۹۷، صفحات ۱۱-۱۲) به اطلاع عموم رسیده بود. ژوردان نتایج مقدماتی وی دربارهٔ گروه‌های اولیه را به مراتب جلوتر برد.

باقی مقالهٔ دوم گالوا به گروه‌های اولیهٔ درجهٔ p^2 می‌پردازد. این مقاله ناتمام است. با یک پرسش و کلمات «این همان چیزی است که به دنبال آن می‌گردم»^۲ به پایان می‌رسد.

1) Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations 2) C'est ce que je vais rechercher

فصل ۷

کامیل ژوردان

برای اطلاع از زندگی و آثار کامیل ژوردان^۱ (۱۸۳۸-۱۹۲۲) می‌توان به سوگنامهٔ عالی هانری لِبگ^۲، که در فرهنگستان پاریس در ژوئن ۱۹۲۳ ایراد و در مجموعهٔ آثار ژوردان، IV، صفحات XXIX-X چاپ شده، مراجعه کرد.

ژوردان در لیون^۳ پا به عرصهٔ زندگی گذاشت. در سن ۱۷ با رتبهٔ اول و نمره ۱۹/۸ از ۲۰ وارد دارالفنون^۴ شد. در ۱۸۷۶ به استادی همان مدرسه رسید.

نام ژوردان برای همهٔ ریاضیدانان همدورهٔ من به دلیل «دورهٔ آنالیز» ممتاز او، که کامل‌نویسی بی به مراتب مبسوط‌تر از متن گفتارهای درسی او در دارالفنون است، آشناست. تا آنجا که می‌دانم، این متن درسی، نخستین کتابی است که در آن تمام آنالیز کلاسیک به صورت نظریهٔ منطقی کامل و منسجم عرضه شده است. به عنوان نمونه، ژوردان نخستین کسی است که، در ویرایش دوم و ویرایش‌های بعدی دورهٔ آنالیز خود، تعریف‌های روشنی از مفاهیم «حجم» و «انتگرال چندگانه» ارائه کرده، و شرایطی را که تحت آنها می‌توان انتگرال چندگانه‌ای را به وسیلهٔ انتگرال‌گیریهایی متوالی محاسبه کرد، مشخص نموده است. برای من خواندن فصل فصل دورهٔ آنالیز وی لذتبخش است.

رسالهٔ ژوردان

اثر ماندگار ۶۶۷ صفحه‌ای «رسالهٔ جانشینها و معادلات جبری»^۴ که در سال ۱۸۷۰ از سوی گوتیه‌ویلار منتشر شد، شاهکاری در معماری ریاضی است. زیبایی عمارتی که ژوردان بنای آن را گذاشته، تحسین‌برانگیز است.

ژوردان در دیباچهٔ رسالهٔ خود اسنادهای لازم را به پیشینیان خود می‌دهد. البته پیش از همه به گالوا، که «اصول نظریهٔ گالوا را ابداع کرده» و به بتی که «مقاله‌ای مهم نوشته است که در آن سلسله قضایای گالوا برای نخستین بار به دقت ثابت شده‌اند». ژوردان سپس از سهم آبل، ارمیت، کرونکر، و بریوشی^۵ دربارهٔ

1) Camille Jordan 2) Henry Lebesgue 3) Lyon 4) Traité des substitutions et des équations algébriques 5) Brioschi

گروههای گالوای برخی مسائل تقسیم تابعهای بیضوی و ابلی، و پژوهشهای هندسه دانانی چون هسه^۱، کیلی^۲، کلبش^۳، کومر^۴، سالمون^۵، و اشتاینر^۶، که مسائل هندسی عدیده‌ای را مطالعه کرده‌اند که روشهای گالوا را می‌توان در مورد آنها به کار برد، یاد می‌کند. وی سرانجام دین خود را به «دوره جبر» سره یادآور می‌شود، و چنین می‌گوید:

مطالعه دقیق این کتاب بود که ما را با جبر آشنا کرد و در ما این شوق را برانگیخت که در پیشرفت آن سهمی به عهده گیریم.

این گفته ژوردان که با کتاب سره با جبر آشنا شده است، قطعاً حقیقت دارد اما تمام حقیقت نیست. توصیفی از نظریه گالوا تنها در ویرایش سوم «دوره جبر» سره دیده می‌شود که در ۱۸۶۴ منتشر شده است، در حالی که سه سال پیشتر از آن، ژوردان قبلاً از گالوا در رساله دکترای خود (مجموعه آثار کامیل ژوردان I، ۱۹۶۱ صفحات ۸۲-۱) نقل قول می‌کند. ژوردان درست در ابتدای این رساله، مفهوم «دستگاه مزدوج»^۷ را به تبعیت از کوشی معرفی می‌کند. چنین دستگاهی مرکب از جانشینیهای $A, B, \dots$ و حاصلضربهایی از آنها از قبیل

$$A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} B^{\beta'} \dots$$

است.

این دستگاه، البته، یک گروه به مفهوم گالواست، و در حقیقت، ژوردان در فصل III رساله دکترای خود می‌نویسد:

در واقع می‌توان به آسانی ملاحظه کرد که شرط لازم و کافی برای اینکه معادله‌ای تحویلناپذیر باشد، آن است که دستگاه مزدوج متناظر با آن که گالوا نام گروه بر آن می‌گذارد، تریا باشد.

نتیجه آنکه آشنایی ژوردان با نظریه گالوا تنها به سره مربوط نبوده، بلکه به خود گالوا نیز مربوط است. ژوردان می‌بایست مقاله بنیادین گالوا را پیش از سال ۱۸۶۱ دیده باشد، زیرا رساله دکترای او در ۱۸۶۱ در مجله دارالفنون^۸، ۱۲، صفحات ۱۱۳-۱۹۴ منتشر شده است.

در ۱۸۷۰، پیش از چاپ رساله، ژوردان به شهرت رسیده بود. دانشمندانی از همه بخشهای اروپا برای دیدن او به پاریس می‌آمدند: سوفوس لی^۹ از نورث و فلیکس کلاین^{۱۰} از آلمان. کلاین و لی در آن هنگام دوستان صمیمی بودند. آنها در پاریس از آوریل تا ژوئن ۱۸۷۰ در دو اتاق مجاور به سر می‌بردند و این اقامت اهمیتی قطعی در کار بعدی آنها درباره گروههای پیوسته و گسسته تبدیلهای داشت. کلاین درباره لی و خودش چنین می‌نویسد:

1) Hesse 2) Cayley 3) Clebsch 4) Kummer 5) Salmon 6) Steiner 7) Systéme Conjugé 8) Journal de l'école polytechnique 9) Sophus Lie 10) Felix Klein

ما در اتاقهای کنار هم به سر می‌بردیم و عمدتاً در تماسهای شخصی، به ویژه با ریاضیدانان جوانتر، الهام علمی می‌جستیم. کامیل ژوردان، که رسالهٔ جانشینیهای او به تازگی منتشر شده بود، مرا به شدت تحت تأثیر قرار داد. این کتاب از نظر ما کتاب اسرار بود (فلیکس کلاین، مجموعهٔ کامل آثار ریاضی I، صفحهٔ ۵۱).

اغلب مقاله‌های اولیهٔ ژوردان دربارهٔ نظریهٔ گالوا و دربارهٔ گروههای جانشینی در رسالهٔ او تلفیق شده‌اند. تقریظی بسیار عالی بر این بخش از کار ژوردان، به توسط ژان دیودونه^۱، را می‌توان در جلد I مجموعهٔ آثار ژوردان (۱۹۶۱) ملاحظه کرد.

با رعایت ترتیب تاریخی، ابتدا از کار ژوردان دربارهٔ گروههای حرکتیهای اقلیدسی بحث می‌کنم، و سپس به ارائهٔ خلاصه‌ای از رسالهٔ او می‌پردازم.

دربارهٔ گروههای حرکتیها

در ۱۸۶۷، ژوردان یادداشت کوتاهی در گزارشهای^۲ فرهنگی پاریس با عنوان «دربارهٔ گروههای حرکتیها»^۳ منتشر کرد که در آن وی تعیین کامل کلیهٔ گروههای تغییر مکانهای ممکن اجسام صلب در فضای ۳ بعدی اقلیدسی را اعلام کرد. در ۱۸۶۸-۱۸۶۹ شمارش این گروهها در یادداشتی دو قسمتی با عنوان «یادداشتی دربارهٔ گروههای حرکتیها»^۴ در سالنامهٔ ریاضی^۵ ۲، صفحات ۱۶۷-۲۱۵ و ۳۲۲-۳۴۵ ارائه شد.

تغییر مکانهایی که به توسط ژوردان مورد بررسی قرار گرفته‌اند، تنها به حرکتیهای مارپیچی یک جسم صلب محدود نمی‌شوند، بلکه مربوط به کل فضا هستند. حالتیهای خاص آن، دورانه‌ها و انتقالها هستند. یک گروه حرکتیها به عنوان مجموعه‌ای شامل حاصلضرب AB هر دو عضو دلخواه مجموعه تعریف شده است. ژوردان تلویحاً فرض می‌کند که گروههای او شامل وارونه‌های A^{-1} نیز هستند. به علاوه وی خود را به مجموعه‌هایی از نظر توپولوژیک بسته محدود می‌کند. این محدودیت در یادداشت چاپ شده در گزارشها به وضوح مشخص است، زیرا در اینجا ژوردان به ذکر قضیه‌ای می‌پردازد که آن را «اساسیترین و ظریفترین قضیه‌ای که باید ثابت شود»^۶ می‌نامد، یعنی

«فرض کنید p و p' دو حرکت باشند که به دلخواه انتخاب شده‌اند. می‌توان به طور کلی، و با استفاده از ترکیب مناسب p و p' ، هر حرکتی را به دست آورد».

1) Jean Dieudonné 2) Comptes Rendus 3) Sur les groupes de mouvements 4) Mémoire sur les groupes de mouvements 5) Annali di Matematica 6) la plus essentielle et la plus délicate à établir

آشکار است که حاصلضربهای حاصل از p و p' در هر حالت، مجموعه‌ای تنها را تشکیل می‌دهند و نه تمام گروه را. اما اگر بستر مجموعه حاصلضربها را اختیار کنیم، تمام گروه، بجز حالت‌های خاص را به دست می‌آوریم.

کار ژوردان دربارهٔ گروههای حرکتها از «بررسیهای بلورشناختی»^۱ اثر براوه^۲ الهام گرفته شده بود. در واقع ژوردان اظهار می‌دارد که چندین حالت خاص مهم مسئلهٔ شمارش او را قبلاً براوه مورد بحث قرار داده بوده است. وی همچنین می‌گوید که مسئلهٔ او دربارهٔ تعیین همهٔ گروههای حرکتها را می‌توان به صورت زیر نیز فرمولبندی کرد:

«تعیین کلیهٔ دستگاههای مولکولهایی که می‌توان به چندین راه آنها را بر هم نهاد.»

ژوردان ابتدا همهٔ گروههای بستهٔ انتقالها و سپس همهٔ گروههای بستهٔ دورانها را که در نقطهٔ ثابتی اشتراک دارند، معین می‌کند.

تعیین گروههای انتقال آسان است. چهار نوع گروه انتقالهای گسسته موجودند که به وسیلهٔ ۳ یا ۲، یا ۱ یا هیچ انتقال به طور خطی مستقل تولید شده‌اند. سه نوع گروه پیوستهٔ انتقالها، با بعدهای ۳ و ۲ و ۱ موجودند. از ترکیب گروهی پیوسته با بعد ۱ یا ۲ با گروهی گسسته، سه نوع گروه آمیخته به دست می‌آید. بنابراین درست ۱۰ نوع گروه انتقال از لحاظ توپولوژیک بسته موجود است.

یافتن گروههای بسته دورانها چندان آسان نیست. گروههای گسستهٔ دورانها، به گفتهٔ ژوردان، عبارت‌اند

از

(۱) گروههای دوری $C_1, C_2, C_3, \dots$

(۲) گروههای دو وجهی $D_3, D_4, D_6, D_8, \dots$

(۳) گروههای چهار وجهی،

(۴) گروههای هشت وجهی،

(۵) گروههای بیست وجهی.

گروههای پیوستهٔ دورانها عبارت‌اند از

(۶) گروه همهٔ دورانهایی که در یک نقطهٔ ثابت O اشتراک دارند،

(۷) گروه همهٔ دورانها حول محوری ثابت.

از ترکیب گروه اخیر با دورانی که جهت محور را عوض می‌کند

(۸) گروه مرکب از همهٔ دورانها حول محوری مانند a و همهٔ «برگردانهای کامل» حول محوره‌های b که از

نقطهٔ O عمود بر a رسم می‌شوند،

به دست می‌آید.

ژوردان سپس کار بسیار عظیم یافتن کلیه گروههای بسته حرکتها را از ترکیب دورانها با انتقالها به عهده می‌گیرد. روش او را در قالب اصطلاحات نوین این گونه می‌توان توضیح داد:

از بین تمام حرکتهای مارپیچی گروه G ، می‌توان بخشهای دورانی را اختیار کرد، و بدین گونه گروهی از دورانهای R و یک ریختی

$$G \rightarrow R$$

را به دست آورد. هسته این ریختی، گروه T ی همه انتقالها در G است. بنابراین

$$R \cong G/T.$$

در نتیجه برای به دست آوردن گروه G ، لازم است همه توسیعیهای ممکن زیرگروه نرمال T را به گونه‌ای پیدا کنیم که گروه خارج قسمتها با R یکریخت باشد. این، در واقع، روش ژوردان است.

شمارش ژوردان کامل نیست. لئونهارت زونکه^۱ در مقدمه‌ای تاریخی بر کتاب «بسط نظریه‌ای در ساختار بلورها»^۲ی خود (لایپزیگ، ۱۸۷۹) یادآور می‌شود که همه گروههای بلورشناختی فهرست شده در بخش ۲۰ کتابش در فهرست ژوردان موجود نیستند. زونکه از آنجا متوجه این رخنه شده است که، به روشی کاملاً متفاوت، به تحقیق در دستگاههای نقطه‌ای منظم در صفحه پرداخته است.

با وجود این نقیصه، کار پیشگامانه ژوردان تحسین‌برانگیز است. زونکه روش ژوردان را برای تعیین همه گروههای بلورشناختی سه‌بعدی سونگهدار به کار برده و بدین ترتیب راه را برای شمارش کامل همه گروههای بلورشناختی به دست شونفلیس^۳ و فون فدوروف^۴ در سالهای ۱۸۸۹-۱۸۹۱ هموار کرده است. تاریخچه این تحقیقات را در اثر بورکهارت^۵؛ درباره تاریخ کشف ۲۳۰ گروه فضایی^۶، مجله بایگانی علوم دقیقه، ۴، صفحات ۲۳۵-۲۴۶ (۱۹۶۷)، و نیز در بورکهارت: مکاتبات فون فدوروف و شونفلیس^۷، ۱۸۸۹-۱۹۰۸، همان مجله، ۷، صفحات ۹۱-۱۴۱ (۱۹۷۱)، ببینید.

مقاله ژوردان اولین مقاله درباره تغییر مکانهای اقلیدسی و ترکیب آنها نبود. بسی جلوتر از آن در ۱۷۵۸، اوایلر مقاله‌ای با عنوان «حرکت اجسام صلب حول یک محور متغیر»^۸ (مجموعه آثار، سری دوم، جلد ۸، صفحات ۱۵۴-۱۹۳) را به چاپ رسانده بود. اوایلر، از جمله ثابت کرده بود که هر تغییر مکان یک

1) Leonhard Sohncke 2) Entwicklung einer Theorie der Kristallstrukturen 3) A. Schoenflies
4) E. S. Von Fedorow 5) J. J. Burckhardt 6) Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen
7) Der Briefwechsel Von E. S. Von Fedorow und A. Schoenflies 8) Du mouvement des corps solides autour d'une axe variable

جسم صلب را می‌توان به صورت حاصلضرب یک دوران محوری و یک انتقال بیان کرد. برای توصیف دورانه‌ها، وی «زاویه‌های اوایلر» را معرفی کرد که هنوز هم از سوی فیزیکدانها مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیراً جرمی گری^۱ توجه ما را به مقاله‌ای تقریباً فراموش شده از اولینده رودریگز^۲ فرا خوانده است. عنوان این مقاله چنین است: «قوانین هندسی حاکم بر تغییر مکان دستگاهی صلب در فضا، و تغییر محورهای مختصات ناشی از این تغییر مکانها که مستقل از عللی فرض می‌شوند که می‌توانند آنها را به وجود آورند»^۳، مجله ریاضی^۴ (۱)، ۵، صفحات ۳۸۰-۴۴۰ (۱۸۴۰). رودریگز در این مقاله ثابت می‌کند که هر تغییر مکان یک جسم صلب، برآیند یک دوران و یک انتقال در امتداد محور دوران است. ژوردان این نتیجه را جزو مطالب معلوم می‌انگارد اما ذکری از رودریگز به میان نمی‌آورد. رودریگز، به پیروی از اوایلر، یک دوران را به کمک چهار پارامتر g, h, l, θ توصیف می‌کند که در آن سه پارامتر اول، جهت محور را تعیین می‌کنند. وی فرمولهای صریحی برای برآیند دو دوران به وجود می‌آورد، و بر این حقیقت تأکید می‌کند که این حاصلضرب تعویضپذیر نیست. ن. ک. گری: مقاله ۱۸۴۰ اولینده رودریگز درباره تبدیل گروهها، بایگانی تاریخ علوم دقیقه، ۲۱، صفحات ۳۷۵-۳۸۵ (۱۹۸۰). اینک به رساله جانشینهای ژوردان می‌رسیم.

درباره همنهشتیها

اولین «مقاله» رساله ژوردان عنوان «درباره همنهشتیها»^۵ را دارد. ژوردان در این مقاله ابتدا قضایای عمده فرما و گاوس را درباره همنهشتیهای بین اعداد صحیح و درباره مانده‌های توانی خلاصه می‌کند. سپس به پیروی از گالوا: نظریه ساختاری آنچه را که امروزه هیأت‌های گالوای $GF(g)$ می‌نامیم، به تفصیل شرح می‌دهد.

گروههای جانشینی تریا و اولیه

بیش از یک سوم رساله ژوردان را مقاله ۲ با عنوان «درباره جانشینها» اشغال می‌کند. در فصل ۱ این مقاله، ژوردان به جانشینها (یا به آنچه امروزه جایگشتها می‌نامیم) در حالت کلی می‌پردازد. وی ثابت

1) Jeremy Gray 2) Olinde Rodrigues 3) Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire.

4) Journal de Math. 5) Des congruences

می‌کند که مرتبه زیرگروهی مانند H از یک گروه G ، مقسوم‌علیهی از مرتبه تمامی گروه است. وی به تبعیت از کوشی، ثابت می‌کند که گروهی که مرتبه آن بر p تقسیمپذیر است، شامل عضوی از مرتبه p است. ژوردان سپس مفهومی «ترایا» و «اولیه» را تعریف می‌کند. یک گروه، «ترایای k -گانه» یا «ترایای مرتبه k » نامیده می‌شود هرگاه هر k حرف متمایز را به k حرف متمایز دلخواه دیگر تبدیل کند. ژوردان از یک گروه ترایای ۵-گانه جانشینها روی ۱۲ حرف که به توسط ماتریس کشف شده، یاد می‌کند و قضایایی را درباره مرتبه ترایایی ثابت می‌کند. کار ماتریس در فصل آتی همراه با کار کوشی، سره، و ژوردان درباره مقادیر ممکن شاخص i از یک زیرگروه S_n ، مورد بحث قرار خواهد گرفت.

برای ملاحظه خلاصه‌ای از مقاله‌های متأخر ژوردان درباره زیرگروههای اولیه و زیرگروههای چندگانه ترایای S_n ، ن. ک. دیودونه، جلد I، مجموعه آثار ژوردان، صفحات XXX تا XXXIII.

سری ترکیبی

سری ترکیبی یک گروه G دنباله‌ای از گروههاست مانند

$$G \supset H \supset H' \supset \dots \supset I$$

که در آن هر جمله، زیرگروه نرمال گروه پیشین است، و در بین آنها هیچ زیرگروه نرمالی نمی‌توان درج کرد. ژوردان ثابت می‌کند که خارج قسمتهای مرتبه‌های گروههای متوالی، به توسط گروه، بدون توجه به ترتیب آنها، به طور یکتا معین می‌شود. این قضیه بنیادی، پیشتر، البته بدون اثبات، در «شرحی درباره گالوا»^۲ از ژوردان، سالنامه ریاضی^۳ (۱۸۶۹)، صفحه ۱۵۲ در آمده است.

در ۱۸۸۹، اوتو هولدر^۴ «قضیه ژوردان-هولدر» قویتر را ثابت کرد که بیان می‌کند گروههای خارج قسمتی

$$G/H, H/H', \dots$$

به صورت یکتا، اما بدون مشخص شدن مرتبه و صرف‌نظر از یکریختیها، مشخص می‌شوند.

تعریف نوین مفهوم «گروه خارج قسمتی G/H » به کمک هم‌مجموعه‌ها به هولدر منسوب است. اما همین مفهوم به طور ضمنی در مقاله‌ای از ژوردان با عنوان «درباره حد ترایایی گروههای غیرمتناوب»^۵ (مجموعه آثار I، صفحات ۳۶۵-۳۹۶) دیده می‌شود. ژوردان در صفحه ۳۷۱ این مقاله تعریف زیر را ارائه می‌کند:

1) Mathien 2) Commentaire sur Galois 3) Math. Analen 4) Otto Hölder 5) Sur la limite de transitivité des groupes non alternés

دو جانشینی s و t که با گروهی مانند H جایگشتپذیرند، همنهشت به پیمانه H نامیده می‌شوند هرگاه

$$s = th$$

که در آن h یک جانشینی در H است.

ژوردان حالا دنباله‌ای از جانشینیهای $s_1, s_2, \dots$ ، جایگشتپذیر با H و ناهمنهشت به پیمانه H را در نظر می‌گیرد به گونه‌ای که به ازای هر α و β رابطه‌ای به شکل

$$s_\alpha s_\beta \equiv s_\gamma \quad (\text{به پیمانه } H)$$

برقرار باشد.

ژوردان در این حالت می‌گوید که $s_1, s_2, \dots$ «گروهی بر طبق پیمانه H »^۱ تشکیل می‌دهند، و این گروه را با G/H نشان می‌دهد که در آن G گروه تولید شده به وسیله $s_1, s_2, \dots$ است. برخلاف تداول امروزی، وی شمول H را در G الزامی نمی‌گیرد. در نمادگذاری امروزی، ما گروه خارج قسمتی ژوردان را باید با

$$G/(G \cap H)$$

نشان دهیم، و در واقع ژوردان اظهار می‌دارد که مرتبه G ، حاصلضرب مرتبه‌های گروه خارج قسمتی G/H و اشتراک G و H است.

ژوردان سپس «یکریختیها» را تعریف می‌کند که همان همریختیها یا صرفاً ریختیهای امروزی ما هستند. ژوردان ریختیهای یک به یک را هولوتدریک^۲، و بقیه را مری‌ادریک^۳ می‌نامد.

ژوردان پس از آن، گروه متناوب A_n را در نظر می‌گیرد. وی نشان می‌دهد که این گروه به وسیله دوره‌های (abc) تولید شده است و این گروه تنها زیرگروه نرمال نابدهی S_n ، غیر از $4 = n$ است. بنابر یک قضیه فرعی: گروه A_n ساده است هرگاه n بزرگتر از ۴ باشد.

جانشینیهای خطی

فصل فوق‌العاده جالب سوم مقاله ۲ی رساله ژوردان (صفحات ۸۸-۲۴۹) به آنچه ژوردان جانشینیهای خطی می‌نامد، می‌پردازد که همان چیزی است که به شکل ماتریسی به صورت زیر می‌نویسیم

$$x' = Ax.$$

1) un groupe suivant le module H 2) Holoedric 3) Meriedric

در بسیاری از حالتها، هیأت ضربیها، هیأت اولی مانند $GF(p)$ است اما در برخی حالتها، هیأت اول به یک هیأت گالوای $GF(p^v)$ توسیع داده می‌شود. مثلاً در صفحات ۱۱۴-۱۲۶، برای تحویل ماتریس A به «شکل نرمال ژوردان» مشهور، ژوردان مجبور می‌شود که به هیأت اصلی، ریشه‌های «معادله مشخصه»

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0$$

را ملحق کند.

برای ملاحظه تاریخچه صورت نرمال ژوردان، ن.ک. تامس هاؤکینز^۱: «وایرستراس و نظریه ماتریسها»^۲، بایگانی علوم دقیقه، ۱۷، صفحات ۱۱۹-۱۶۳ (۱۹۷۷). در بخش ۴ این مقاله، هاؤکینز نشان می‌دهد که وایرستراس در نظریه مقسوم‌علیه‌های مقدماتی‌اش، قبلاً صورت نرمالی را که با صورت ژوردان هم‌ارز است، تعریف کرده است. وایرستراس یادداشت بنیادی خود «در باره صورتهای دوخطی و درجه چهارم»^۳ را به فرهنگستان برلین در ۱۸۶۸ (گزارش ماهانه^۴، صفحات ۳۱۱-۳۳۸ = مجموعه آثار، ۲، صفحات ۱۹-۴۴)^۵، دو سال پیش از انتشار رساله ژوردان، عرضه کرده بود.

در صفحات ۱۲۸-۱۳۷ رساله‌اش، ژوردان صورت نرمال خود را برای تعیین مجموعه جانشینیهای خطی که با جانشینی مفروضی مانند A تعویضپذیرند، به کار می‌برد.

به عقیده دیودونه (مجموعه آثار ژوردان، صفحه XIX)، انگیزه تحقیق ژوردان درباره جانشینیهای خطی، سه نظریه متفاوت بوده است. نخست آنکه در روش ژوردان برای ساختن گروههای حلپذیر (مقاله ۴ رساله) گروههای خطی کاملاً طبیعی به نظر می‌آیند. دوم اینکه، همین گروهها، خود را در نظریه تقسیم دوره‌های تابعهای آبلی که به توسط ارمیت، کرونکر، و کلیش مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، عیان می‌سازند. سرانجام مطالعات ماتریو درباره گروههای تریای چندگانه، ژوردان را به مطالعه گروه تصویرشدگیهای یک خط تصویری روی یک هیأت گالوا ترغیب کرده است.

مسئله عمده ژوردان، مطالعه ترکیب آن چیزی است که امروزه «گروههای کلاسیک» روی هیأت گالوای $GF(p)$ می‌نامیم. در خلاصه زیر، من گروهها را با نامهای نوین آنها به گونه‌ای که دیکسون^۶ مطرح کرد و به توسط وان درواردن و دیودونه حک و اصلاح شده‌اند، مورد اشاره قرار می‌دهم، اما از برخی نامهای دور از ذهنی نیز که ژوردان به آنها داده، یاد خواهم کرد.

گروههایی که مورد مطالعه ژوردان قرار گرفته‌اند، عبارت‌اند از:

گروه خطی عام $GL(n, p)$ از همه تبدیلیهای خطی وارونپذیر n متغیره (به پیمانه p).

گروه خطی خاص $SL(n, p)$ مرتب از دلیه تبدیلهای خطی با دترمینان ۱،
 گروههای تصویری متناظر $PGL(n, p)$ و $PSL(n, p)$ ،
 گروه سیمپلکتیک^۱ $Sp(2n, p)$ ، که ژوردان آن را «گروه آبلی» نامیده، که فرم دو خطی متناوب

$$\varphi = \sum_k^n (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k)$$

را به خود آن (به پیمانه p) تبدیل می‌کند.
 گروه تصویری متناظر $PSp(2n, p)$ ،
 «گروههای اشتاینر»، که گروههای آفین تبدیلهایی هستند که یک فرم درجه دوم $2n$ متغیره را به خود
 آن (به پیمانه ۲) تبدیل می‌کنند،
 گروههای متعامد $O(n, p, Q)$ که فرم درجه دومی مانند Q را به خود آن (به پیمانه p)، که در آن p
 عدد اول فردی است) تبدیل می‌کنند،
 گروههای متعامد $O(2n, 2, Q)$ ، که ژوردان آن را «گروههای تحت آبلی»^۲ می‌نامد، زیرا این گروهها
 در «گروه آبلی» $Sp(2n, 2)$ مشمول‌اند.
 در بسیاری از این حالتها، ژوردان ثابت می‌کند که این گروهها یا زیرگروههای با شاخص ۲ی آنها،
 ساده‌اند.

در ۱۹۰۱، دیکسون رساله کلاسیک خود «گروههای خطی با شرحی از نظریه هیأت گالوا»^۳ را منتشر
 کرد که در آن نتایج ژوردان را به هیأتها دلخواه $GF(q)$ توسیع داده است. این موضوع به وسیله
 مؤلفان بعدی، به ویژه دوسگیه^۴ و دیودونه بسط بیشتری یافته است. برای ملاحظه تاریخ این موضوع،
 ن. ک. و اندراردون: «گروههای تبدیلهای خطی»^۵ و دیودونه: «درباره گروههای کلاسیک»^۶
 گروه تصویری $PSL(2, p)$ را می‌توان به عنوان گروه تبدیلهای خطی کسری در $GF(p)$

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

با $ad - bc = 1$ تلقی کرد. این گروه که «گروه معادله مدولی» نامیده می‌شود، نقشی اساسی در نظریه
 تابعهای مدولی دارد. این گروه به توسط گالوا (مجموعه آثار، ۱۸۹۷ صفحه ۲۸) و به توسط سره، ارمیت،
 ماتیو، ویرکمان^۷ مورد تحقیق قرار گرفته است. بتی، ارمیت، ژوردان، و سیلو زیرگروههای آن را مورد بحث

1) Symplectic 2) groupes hypoabéliens 3) Linear Groups with an Exposition of
 the Golois Field Theory 4) J. A. de Séguier 5) Van der Waerden, B. L.: Grup-
 pen Von Linearen Transformationen (Springer-Verlag 1935, reprinted by Chelsea 1948).

6) Dieudonné, J.: Sur les groupes classiques (Paris, Hermann 1988). 7) Kirkman

قرار داده‌اند و گیرسترا^۱ در ۱۸۸۱ آن را به طور کامل معین کرده است. ن. ک. مقاله «گروههای متناهی»^۲ اثر یورکهارت در دایرةالمعارف علوم ریاضی^۳، I، ۱، صفحه ۲۱۶، و مقاله من «گروههای تبدیلیهای خطی»، صفحه ۸.

گروههای سیمپلکتیک برای ژوردان حائز اهمیت بودند زیرا این گروهها به عنوان گروههای گالوای مسأله تقسیم دورههای تابعهای آبلی با $2n$ دوره مطرح می‌شوند. ژوردان از این حقیقت در مقاله ۱۸۶۹ خود «درباره‌ی معادله‌های تقسیم تابعهای آبلی»^۴ در سالنامه ریاضی^۵، I، صفحات ۵۸۵-۵۹۱ (= مجموعه آثار، I، صفحات ۲۳۱-۲۳۹). یاد می‌کند. وی در پانوشتی، اضافه می‌کند: «ما اطلاع از این نتیجه مهم را مدیون م. کرونکر هستیم»^۶.

شرح نظریه گالوا از سوی ژوردان

در ۱۸۶۹، ژوردان توصیفی از نظریه گالوا را با عنوان «شرحی درباره گالوا» منتشر کرد. مندرجات این مقاله، با اندکی تغییراتی، در رساله (صفحات ۲۵۳-۲۷۴) گنجانده شده است.

در صفحات ۳۸۵-۳۹۷ رساله، این شرح ادامه می‌یابد. ژوردان، به تبعیت از گالوا، نشان می‌دهد که یک معادله را می‌توان به کمک رادیکالها حل کرد اگر و تنها اگر گروه گالوای آن حلپذیر باشد، یعنی، در صورتی که عاملهای ترکیب آن اعداد اول باشند.

ژوردان سپس، معیار مناسبتر دیگری به دست می‌آورد. وی نشان می‌دهد (قضیه IX در صفحه ۳۹۵):

برای آنکه گروهی مانند L حلپذیر باشد، لازم و کافی است که زیردنباله‌ای از زیرگروههای نرمال L :

$$\Lambda \subset F \subset G \subset H \subset \dots \subset L$$

موجود باشد به طوری که جانشینیهای هر گروه در دنباله، جایگشتپذیر به پیمانه گروه پیش از خود باشد. به عبارت دیگر، لازم است که گروههای خارج قسمتی

$$F/\Lambda, G/F, H/G, \dots$$

همگی آبلی باشند.

1) Gierster 2) Endliche Gruppen 3) Enzyklopädie der math. Wissenschaften 4) Sur les equations de la division des fonctions abéliennes 5) Math. Annalen 6) Nous devons à M. Kronecker la communication de cet important résultat

چرا این معیار مناسبتر است؟ فرض کنید بخواهیم دربارهٔ حلپذیر بودن گروهی مفروض مانند G حکم کنیم. اگر کسی از گالوا پیروی کند، باید تحقیق کند که آیا زیرگروه نرمالی با شاخص اول موجود است و آیا یک زیرگروه نرمال، زیرگروه نرمالی دارد و به همین ترتیب الی آخر. اما اگر کسی از ژوردان پیروی کند، تنها لازم است به معاینهٔ زیرگروههای نرمال کل گروه G بپردازد.

کاربردهای هندسی

فصل ۳ از مقالهٔ ۳ رساله (صفحات ۳۰۱-۳۳۳) به کاربردهای هندسی نظریهٔ گالوا اختصاص دارد. I. عنوان اولین بخش «معادلهٔ هسه»^۱ نام دارد. در سال ۱۸۴۴ «لوتویک اوتو هسه»^۲ ثابت کرده است (مجموعهٔ آثار، صفحات ۱۲۳-۱۳۵) که یک خم درجهٔ سوم مسطح، نه نقطه عطف دارد که بر دوازده خط راست قرار دارند. اگر خم حقیقی باشد، تنها سه نقطه از نه نقطهٔ عطف، حقیقی اند. ژوردان نه نقطه را به کمک نمادهای

$$\begin{array}{ccc} (0 \ 0) & (0 \ 1) & (0 \ 2) \\ (1 \ 0) & (1 \ 1) & (1 \ 2) \\ (2 \ 0) & (2 \ 1) & (2 \ 2) \end{array}$$

نشان می‌دهد.

نه نامعین معرفی می‌شوند که با همان نمادهای $(x \ y)$ نشان داده می‌شوند. دوازده خط حالا با حاصلضربهای

$$(x \ y)(x' \ y')(x'' \ y'')$$

متناظرند که در رابطه‌های

$$x + x' + x'' = y + y' + y'' \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

صدق می‌کنند.

مجموع همهٔ این حاصلضربها φ نامیده می‌شود. بنابراین داریم

$$\varphi = (0 \ 0)(0 \ 1)(0 \ 2) + (1 \ 0)(1 \ 1)(1 \ 2) + \dots + (0 \ 2)(2 \ 0)(2 \ 1).$$

ژوردان در این مرحله، ثابت می‌کند که گروه گالوای معادله‌ای که نه نقطهٔ عطف به آن وابسته‌اند، خود به آن جانشینیهای نه نامعین (x, y) تحویل می‌شوند که عبارت φ را تغییر نمی‌دهند. این گروه به کمک تبدیلهای خطی ناهمگن

$$x' \equiv ax + by + \alpha \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

$$y' \equiv a'x + b'y + \alpha' \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

تشکیل می‌شود. مرتبهٔ گروه

$$(3^2 - 1)(3^2 - 3) = 48,$$

و گروه حلپذیر است.

در تعیین گروه گالوا، ژوردان تلویحاً فرض می‌کند که معادلهٔ درجهٔ سوم «ژنریک» است، یعنی فرض می‌کند که ضرایب معادلهٔ آن نامعینیهای حقیقی‌اند. در حالت‌های خاص، مثلاً اگر یکی از نقاط عطف گویا باشد، گروه ممکن است کوچکتر شود.

II. عنوان بخش بعدی، «معادله‌های کلبش»^۱ است. در مقاله‌ای از آلفرد کلبش: «دربارهٔ کاربرد تابعهای آبلی در هندسه»^۲ این مسأله مورد بحث قرار گرفته است: با مفروض بودن یک خم درجهٔ چهارم مسطح، مطلوب است تعیین خم درجهٔ سوم که نقاط تلاقی آن با این خم درجه چهارم، همه نقاط چهارگانه باشند. به نظر کلبش، مسأله به معادله‌ای مانند X از درجهٔ

$$4^6 = 4096$$

منجر می‌شود.

ژوردان در این مرحله، گروه گالوای معادلهٔ X را تعیین می‌کند. روش او شبیه به روشی است که در بخش I به کار رفت.

ژوردان در همان بخش II، چندین مسأله تماس مشابه را که به توسط کلبش مطرح شده مورد بحث قرار داده است.

III. مسألهٔ بعدی، آن نیز منسوب به کلبش، مسألهٔ تعیین خط‌های راست بر یک رویه درجهٔ چهارم است که حاوی یک مقطع مخروطی باشند. بر اساس کار کلبش، ۱۶ خط از این نوع موجود است. ژوردان دوباره، گروه گالوای مسأله را معین می‌کند.

IV. مسألهٔ ۱۶ نقطهٔ تکین بر «رویۀ کومر» به همان روش مورد بحث قرار می‌گیرد. برای ملاحظهٔ

1) Equation de M. Clebsch 2) Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der

تعریف رویه کومر ن. ک. به کومر: درباره رویه‌های درجه چهارم با شانزده نقطه تکین^۱، گزارش ماهانه فرهنگستان برلین^۲، ۱۸۶۴، صفحات ۲۴۶-۲۶۰.

۷. جالبترین مسأله هندسی که زوردان مورد بحث قرار داده، مسأله ۲۷ خط بر رویه‌ای از درجه سوم است. برای ملاحظه تاریخچه این موضوع ن. ک. هندرسون^۳: بیست و هفت خط بر رویه درجه سوم. وجود این خطها در مکاتبه بین کیلی و سالمون^۴ کشف شده بود. کیلی دریافته بود که خطهایی بر رویه موجودند، و سالمون دریافته بود که (در حالت کلی) ۲۷ خط از این نوع موجودند. لوحه ۱، مدلی از یک رویه درجه سوم را با ۲۷ خط حقیقی نشان می‌دهد. خود مدل در موسسه ریاضی گوتینگن^۵ محفوظ است.

شرح کاملی از پیکربندی ۲۷ خط به توسط یاکوب اشتاینر^۶ در مجله ریاضی کرله^۷ ۵۳، صفحات ۱۱۳-۱۴۱ ارائه شده است (مجموعه آثار، II، صفحات ۶۵۱-۶۵۹). یکی از قضایای اشتاینر چنین است: هر یک از خطها، مثلاً a ، ده خط دیگر را قطع می‌کند که همراه با a پنج مثلث تشکیل می‌دهند. بنابراین ۴۵ مثلث بر رویه موجودند.

برهانی دقیق از وجود ۲۷ خط و ۴۵ مثلث را می‌توان در «آشنایی با هندسه جبری»^۸ (اشپیرنگر-فرلاک، ۱۹۳۹، چاپ دوم ۱۹۷۳) صفحات ۱۴۸-۱۵۳، اثر نگارنده یافت.

دلمشغولی زوردان با ۲۷ خط در اوایل ۱۸۶۹ آغاز می‌شود. در نخستین یادداشت او در گزارشهای فرهنگستان پاریس (مجموعه آثار، I، صفحات ۱۹۹-۲۰۲) وی گروه سیمپلیکتیک $Sp(2n, p)$ را تعریف می‌کند و متذکر می‌شود که $Sp(4, 3)$ همان گروه گالوای معادله ۲۷ خط بر رویه درجه سوم است. در یادداشت دیگری (مجموعه آثار، I، صفحات ۲۰۳-۲۰۶) زوردان رابطه بین گروه سیمپلیکتیک و ۲۷ خط را با تفصیل بیشتر شرح می‌دهد، و برهانهای کامل را به رساله در شرف انتشارش ارجاع می‌دهد. در همان سال ۱۸۶۹، وی مقاله‌ای در مجله ریاضی^۹ (۲) ۱۴ (مجموعه آثار، I، صفحات ۲۴۹-۲۶۸) منتشر کرد که در آن ساختار گروه گالوا به کمک یک روش ترکیبائی محض، مستقل از رابطه آن با گروه سیمپلیکتیک به دست می‌آید. مندرجات این مقاله در رساله‌اش، صفحات ۳۱۶-۳۲۹ گنجانده شده است.

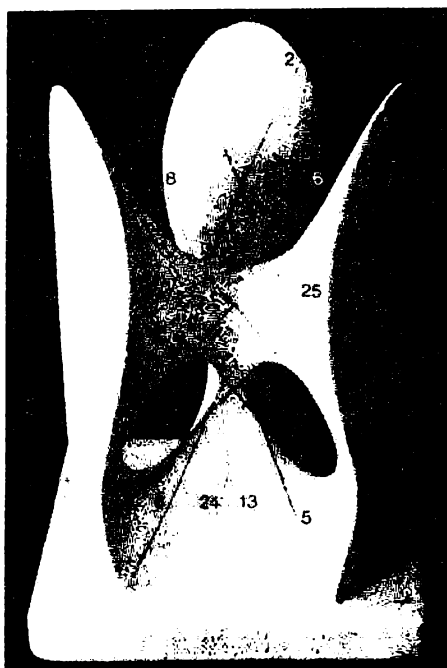
زوردان هر یک از ۲۷ خط را با یک حرف تنهای $a, b, \dots$ نشان می‌دهد. اگر a یکی از این خطها

1) Über die Flächen Vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten 2) Monatsberichte der Berliner Akademie 3) A. Henderson: The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface, Cambridge Tracts in Math. 13 (1911). 4) Salmon 5) Göttingen 6) Jakob Steiner 7) Grelles Journal für Mathematik 8) Einführung in die algebraische Geometrie 9) Journal de math.

باشد، ۵ مثلث شامل a با

abc, ade, afg, ahi, akl

نشان داده می‌شوند.



لوحة ۱

۱۶ خط دیگر که a را تلاقی نمی‌کنند، به ترتیبی کاملاً معین،

m, n, p, q, r, s, t, u

و

$m', n', p', q', r', s', t', u'$

نامیده می‌شوند.

حال، ۴۵ مثلث را می‌توان به صورت

$abc, ade, \dots, lps'$

نوشته.

گروه گالوای مسئله، مطمئناً در گروه جانشینیهای ۲۷ نامعین $a, b, \dots, u'$ که تابع

$$\varphi = abc + ade + \dots + lps'$$

را به خودش تبدیل می‌کنند، قرار دارد. من این گروه را G' می‌نامم. مرتبه آن

$$27 \times 10 \times 8 \times 24 = 51840$$

است.

زوردان در این مرحله ادعا می‌کند که $G' = G$ ، و استدلالهایی به سود این ادعا ارائه می‌کند. به نظر من برهان او نارساست، اما حکم، به طوری که در بخش آتی خواهیم دید، درست است. زوردان در نخستین یادداشت خود در گزارشها، متذکر می‌شود که مسئله ۲۷ خط با مسئله ۲۸ مماس دوگانه یک خم درجه چهارم سطح ارتباطی نزدیک دارد.

۲۸ مماس دوگانه یک خم سطح درجه چهارم

برای ملاحظه تاریخچه این موضوع ن. ک. به مقاله «خمهای جبری سطح خاص»^۱ به توسط کوهن^۲ و لوریا^۳ در دانشنامه علوم ریاضی^۴، IIC5 به ویژه صفحات ۵۱۷-۵۴۲.

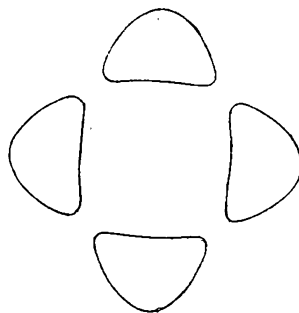
از فرمولهای مشهور بلوکر، به آسانی نتیجه می‌شود که یک خم سطح درجه چهارم بدون نقطه‌های چندگانه تنها ۲۸ مماس دوگانه^۵ دارد. برای ملاحظه برهان جبری دقیق این حقیقت ن. ک. یا کوبی: برهان این قضیه که خمی از درجه n در حالت کلی $\frac{1}{4}n(n-2)(n^2-9)$ مماس دوگانه دارد^۶، مجله ریاضی^۷، ۴۰، صفحات ۲۳۷-۲۶۰ (۱۸۵۰). شکل ۲۴ ما یک خم سطح درجه چهارم را با ۲۸ مماس حقیقی دوگانه، نشان می‌دهد.

اولین کسی که به تحقیق پیکربندی تشکیل شده به وسیله ۲۸ مماس دوگانه و ۲۸ نقطه تماس آنها پرداخته است، یاکوب اشتاینر، به سال ۱۸۵۵، بود (مجله ریاضی، ۴۹، صفحات ۲۶۵-۲۷۲ = مجموعه آثار II، صفحات ۶۰۸-۶۱۲). وی نشان می‌دهد: با شروع با زوجی از مماسهای دوگانه (x_1, y_1) ،

1) Spezielle ebene algebraische Kurven 2) G. Kohn 3) G. Loria 4) Enzyklopädie der math. Wissenschaften

۵) منظور از مماس دوگانه، صفحه‌ای است که بر این سطح در امتداد یک مقطع مخروطی مماس است. م.

6) Beweis des Satzes, dass eine Kurve n-ten Grades im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat 7) Journal für Math.



شکل ۲۴

پنج زوج دیگر (x_i, y_i) ، $(i = ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$ موجودند به طوری که ۸ نقطه تماس هر دو زوج (x_i, y_i) و (x_k, y_k) همواره بر یک مقطع مخروطی واقع‌اند. چنان مجموعه‌ای از ۶ زوج (x_i, y_i) مجتمع اشتاینر^۱ نامیده می‌شود. درست ۶۳ مجتمع اشتاینر موجود است.

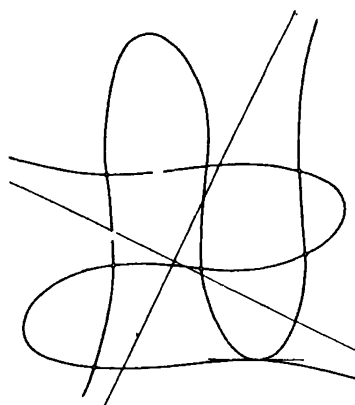
سه مماس دوگانه که نقطه‌های تماس آنها بر یک مقطع مخروطی واقع‌اند، یک سه‌تایی همیوژ^۲ نامیده می‌شود. اگر مجموعه‌ای از مماسهای دوگانه شامل هیچ سه‌گانه همیوژ نباشد، مجموعه را ناهمیوژ نامند. آنچه برای تعیین گروه گالوای ۲۸ مماس دوگانه بیشترین اهمیت را دارد، نسلی است از خم درجه چهارم که به توسط آرونهولت^۳ (گزارش ماهانه فرهنگستان برلین، ۱۸۶۴، صفحات ۴۹۹-۵۲۳) کشف شده است. روش آرونهولت را می‌توان بدین‌سان توضیح داد.

هفت نقطه مفروض در صفحه، در حالت کلی، مجموعه‌ای از خمهای درجه سوم گذرنده بر این هفت نقطه را معین می‌کنند. هر دو خم از این مجموعه، در دو نقطه دیگر متلاقی‌اند. اگر این دو نقطه بر هم منطبق شوند، خمها یک مماس مشترک در آن نقطه دارند. (ن. ک. شکل ۲۵). این ∞^1 مماس مشترک «خمی از رده ۴»، یعنی، دوگان یک خم درجه چهارم، تشکیل می‌دهند.

حال این وضعیت دوگان را در نظر بگیرید. به جای خمهای درجه سوم گذرنده بر هفت نقطه مفروض، می‌توانیم، مانند آرونهولت، مجموعه خطی خمهای رده ۳ شامل هفت خط مفروض را در نظرگیریم. هر زوج از این خمها در دو خط دیگر اشتراک دارند. اگر این خطها بر هم منطبق شوند، دو خم دوگان نقطه تماس مشترکی دارند، و این نقطه‌های تماس بر یک خم درجه چهارم قرار دارند.

آرونهولت نشان می‌دهد که این هفت خط مفروض یک مجموعه همیوژی ماکسیمال از مماسهای

1) Steiner complex 2) syzygetic 3) Aronhold



شکل ۲۵

دوگانه این خم درجه چهارم تشکیل می‌دهند، و ۲۱ مماس دوگانه دیگر را می‌توان به صورت گویا از این هفت خط ترسیم کرد. هر خم درجه چهارم بدون نقطه‌های دوگانه را می‌توان با این ترسیم به دست آورد، و هر مجموعه ناهمبوغی هفت مماس دوگانه را می‌توان برای تولید این خم درجه چهارم به کار برد. برای ملاحظه برهانهای دقیق این احکام ن. ک. به وبز: کتاب درسی جبر^۱ II، چاپ دوم، صفحات ۴۲۵-۴۴۷.

اما تعیین گروه گالوای P ی معادله‌ای که ۲۸ مماس دوگانه را معین می‌کند، آسان است. کار را با یک مجموعه «ژنریک» هفت خط، آغاز می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که مختصات ناهمگن این خطها نامعینیهایی مستقل باشند. اینک خم را، که خم ژنریک درجه چهارمی است، رسم می‌کنیم. به تعداد

$$8 \times 36 = 288$$

مجموعه ناهمبوغ از هفت خط موجود است، و در هر مجموعه، ۷! راه برای شماره‌گذاری خطها وجود دارد. به جای هر یک از مجموعه‌های شماره‌دار می‌توان هر یک از

$$288 \times 7! = 1451520$$

مجموعه شماره‌دار دیگر را قرار داد. هر چنین جایگذاری، یک خودریختی از هیأت تابعهای گویای مختصات هفت خط را به دست می‌دهد، و این یکرخیختها خم درجه چهارم را ناوردا باقی می‌گذارند. این خودریختها گروه گالوای P را تشکیل می‌دهند.

1) H. Weber: Lehrbuch der Algebra

من از عبارتهای نوین «خودریختی» و «ژنریک» استفاده کرده‌ام، اما همین ایده‌ها را می‌توان در قالب اصطلاحات گالوا و ژوردان نیز بیان کرد: مجدداً ن. ک. به کتاب درسی وبر، صفحات ۴۴۷-۴۵۴. وبر در صفحات ۴۵۴-۴۵۸ ثابت می‌کند که گروه P گروهی ساده است.

رابطه بین ۲۸ مماس دوگانه و ۲۷ خط بر یک رویه درجه سوم را گایزر^۱ در سال ۱۸۶۸ ثابت کرد. مقاله او «درباره مماسهای دوگانه خمی هموار از درجه چهارم»^۲ در سالنامه ریاضی ۱، ۲، صفحات ۱۲۹-۱۳۸ منتشر شد. روش گایزر را می‌توان به شرح زیر توضیح داد.

از نقطه‌ای دلخواه مانند A بر رویه درجه سوم، که بر هیچ یک از ۲۷ خط واقع نباشد، کلیه مماسها بر رویه را رسم می‌کنیم. به غیر از مماسهای گذرنده بر A ، که صفحه مماسی را تشکیل می‌دهند، همه مماسها بر یک مقطع مخروطی درجه چهارم قرار دارند. فصل مشترک این مقطع مخروطی با صفحه‌ای دلخواه مانند π یک خم درجه چهارم است. صفحه مماس در A صفحه π را در مماس دوگانه‌ای از خم درجه چهارم قطع می‌کند. ۲۷ مماس دوگانه دیگر در صفحه‌های ماربر A و هر یک از ۲۷ خط از رویه درجه سوم قرار دارند.

حالا می‌توان گروه گالوای ۲۷ خط را از گروه ۲۸ مماس دوگانه، به صورت زیر، به دست آورد. در گروه اخیر، وقتی به عنوان گروه جایگشتهای مماسهای دوگانه در نظر گرفته می‌شود، زیرگروهی را در نظر بگیرید که مماس دوگانه واقع در صفحه مماس را ناوردا باقی می‌گذارد. این زیرگروه، ۲۷ مماس دوگانه دیگر را جایگشت می‌دهد، و بنابراین گروهی از جایگشتهای ۲۷ خط را بر رویه درجه سوم القاء می‌کند. این گروه G' ، گروه گالوای ۲۷ خط است. آشکار است که مرتبه آن برابر است با

$$\frac{1451520}{28} = 51840.$$

به طوری که دیده‌ایم، ژوردان گروهی مانند G' را با همین مرتبه ایجاد، و ثابت می‌کند که گروه گالوای مشمول در G' است. چون مرتبه‌ها برابرند، ادعای ژوردان که $G = G'$ ، موجه است.

ژوردان در صفحات ۳۲۹-۳۳۳ به روش دیگر بررسی گروه گالوای ۲۸ مماس می‌پردازد. وی مسأله کلبش را در نظر دارد: یافتن کلیه خمهای مرتبه $3 - n$ که $\frac{1}{3}n(n-3)$ نقطه تماس با خمی مفروض از مرتبه n دارند. در روش کلبش از تابعهای آبلی استفاده می‌شود. برای $n = 4$ ، مسأله یافتن مناسهای دوگانه یک خم درجه چهارم را داریم.

1) M. Geiser 2) Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades 3) Math. Annalen

کاربرد نظریهٔ گالوا در تابعهای متعالی

ژوردان در فصل ۴ مقالهٔ ۳ی رساله‌اش، نظریهٔ گالوا را در مسأله‌هایی مربوط به تابعهای متعالی به کار می‌برد.

بگذارید ابتدا به خواننده یادآوری کنم که ژوردان بین گروه گالوای جبری معادله‌ای مانند

$$f(z, w) = 0 \quad (۱)$$

و گروه مداری آن نسبت به متغیر مختلط z تمایز قائل می‌شود. فرض کنید که ضرایب معادلهٔ (۱) از یک هیأت ثابتها مانند K اختیار شوند که ممکن است پارامترهای متغیری را نیز در بر داشته باشد. هنگام تشکیل گروه گالوای جبری معادلهٔ (۱)، هیأت اصلی K ، هیأتی مانند $K(z)$ از تابعهای گویای z که ضرایب آن در K است، اختیار می‌شود. این گروه جبری، گروهی از جایگشتهای ریشه‌های $w_1, \dots, w_n$ است. این گروه، گروه مداری را که به وسیلهٔ پویزو و ارمیت تعریف شده است، به عنوان یک زیرگروه در بر دارد. اگر هیأت ثابتهای K با الحاق عضوهای جبری معینی توسیع داده شود، گروه جبری به گروه مداری. تحویل می‌شود.

من حالا تک‌تک بخشهای فصل ۴ ژوردان (صفحات ۳۳۴-۳۸۲) را با اختصار بیان می‌کنم. I. ژوردان ابتدا مسألهٔ تعیین $\cos(x/n)$ را در صورت مفروض بودن $\cos x$ در نظر می‌گیرد. کمیت $\cos\left(\frac{x}{n}\right)$ از طریق معادله‌ای از درجهٔ n ، که ریشه‌های آن عبارت‌اند از

$$(p) = \cos \frac{x + 2p\pi}{n}$$

با $\cos x$ مرتبط است و گروه مداری معادله، به کمک جانشینهای

$$p' \equiv p + m \quad (\text{به پیمانه } n)$$

تشکیل می‌شود.

این گروه، گروه گالوای معادله پس از الحاق $\cos(2\pi/n)$ به هیأت اصلی نیز هست. اگر هیأت اصلی، هیأت عددهای گویا باشد، جانشینهای گروه گالوای جبری به صورت

$$p' \equiv ap + b \quad (\text{به پیمانه } n)$$

تشکیل می‌شوند.

II. ژوردان در این مرحله وارد نظریهٔ تابعهای بیضوی می‌شود.

فرض کنید $u = \lambda(z)$ تابع وارون

$$z = \int_{\infty}^u \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 u^2)}}$$

باشد.

مشتق آن عبارت است از

$$\lambda'(z) = \sqrt{(1-\lambda^2(z))(1-k^2 \lambda^2(z))}.$$

حال اگر $\lambda(z)$ و $\lambda'(z)$ مفروض باشند، $\lambda(z/n)$ ریشه‌ای از یک معادله درجه n^2 است. ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از

$$(pq) = \lambda \left(\frac{z + pw + qw'}{n} \right)$$

که در آن w و w' دوره‌های اساسی تابع بیضوی $\lambda(z)$ هستند. با فرض اول بودن n ، ژوردان نشان می‌دهد که جانشینهای گروه گالوای معادله همه به شکل

$$\begin{aligned} p' &\equiv ap + bq + m \quad (\text{به پیمانه } n) \\ q' &\equiv a'p + b'q + m' \quad (\text{به پیمانه } n) \end{aligned} \quad (2)$$

هستند.

اگر تابعهای

$$\lambda(w/n), \lambda'(w/n), \lambda(w'/n), \lambda'(w'/n)$$

را به هیأت K الحاق کنیم، گروه گالوا به گروه مداری

$$\begin{aligned} p' &\equiv p + m \quad (\text{به پیمانه } n) \\ q' &\equiv q + m' \quad (\text{به پیمانه } n) \end{aligned}$$

تحويل می‌شود.

چون این گروه، آبلی است، تجزیه معادله برحسب $\lambda(z/n)$ مشکلی ایجاد نمی‌کند. مسأله عمده ژوردان این است: یافتن گروه گالوای معادله درجه n^2 که مقادیر

$$\lambda(w/n), \quad \lambda'(w/n)$$

معین می‌کنند که در آنها w دوره اولیه دلخواهی است. ریشه‌های این معادله همه به شکل

$$(pq) = \lambda \left(\frac{pw + qw'}{n} \right)$$

هستند.

با حذف ریشه (λ/n) ، معادله‌ای از درجه $n^2 - 1$ باقی می‌ماند. گروه مداری این معادله نسبت به متغیر مختلط k متشکل است از تبدیلهای خطی به شکل

$$p^* \equiv ap + bq \quad (\text{به پیمانه } n)$$

$$q^* \equiv a'p + b'q \quad (\text{به پیمانه } n)$$

با (به پیمانه n) $ab' - a'b \equiv 1$. این تبدیلهای گروه $SL(2, n)$ را تشکیل می‌دهند.

III. در بخشهای پیشتر I و II، تابعهای مورد بررسی، تابعهای وارون انتگرالهای آبلی روی خمهای جبری گونای 0 یا 1 بودند. ژوردان اینک به حالتی با گونای 2 وارد می‌شود. در این حالت، انتگرالهای ابر بیضوی

$$z = \int^u \frac{\mu + uv}{\Delta(u)} dv$$

را داریم که در آنها $\Delta(v)$ یک چندجمله‌ای درجه 6 است، و تابعهای وارون، تابعهای آبلی دو متغیره با 4 دوره‌اند. ژوردان به تبعیت از ارمیت به بررسی مسأله تقسیم این تابعها مبادرت می‌کند، و ماحصل کارش گروه سیمپلیکتیک $Sp(4, p)$ است.

در حالت $p = 3$ ، وی در می‌یابد که گروه $PSp(4, 3)$ با گروه ساده G_2 27 خط بریک رویه درجه 3 سوم یکرخت است.

IV. در آخرین بخش مقاله 3 ، ژوردان به تحقیق در امکان حل معادله‌ها به کمک تابعهای متعالی می‌پردازد. وی به ویژه روشهای ارمیت، کرونکر، و بریوشی را برای حل معادله‌های درجه 5 به کمک تابعهای مدولی و تابعهای بیضوی مورد بحث قرار می‌دهد. ژوردان نشان می‌دهد که برای معادله‌های از درجه‌های بالاتر چنین راه‌حلی غیرممکن است.

درباره گروههای حلپذیر

مقاله چهارم رساله، به این مسأله اختصاص دارد: ساختن کلیه گروههای تریای حلپذیر جانشینهای d حرفی، که d درجه مفروض دلخواهی است. این مسأله‌ای است که ژوردان آن را مسأله A می‌نامد.

ژوردان نشان می‌دهد که مسئله A را برای گروههای نااولیه می‌توان به همین مسئله برای گروههای اولیه تحویل کرد، و اینکه گروههای اولیه لزوماً از درجه $d = p^n$ هستند که در آنها p اول است. گالوا مسئله A را برای گروههای درجه p حل کرده و نتایجی جزئی برای گروههای اولیه درجه p^2 یافته است. ژوردان حالا به حل مسئله A برای گروههای اولیه مرتبه p^n مبادرت می‌کند. گروهی از تبدیلهای خطی از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ (به پیمانه p) در قالب اصطلاحات نوین، تحویلپذیر، و در قالب اصطلاحات ژوردان اولیه نامیده می‌شود هرگاه بتوان تابعهای خطی $y_1, \dots, y_m$ از x_i ها را که تعدادشان کمتر از n باشد، پیدا کرد که به وسیله این گروه به تابعهایی خطی از خودشان تبدیل شوند.

ژوردان حالا نشان می‌دهد که مسئله A را می‌توان به مسئله B ی زیر تحویل کرد:

B . ساختن گروههای تحویلپذیر حلپذیر ماکسیمال مشمول در گروه خطی $GL(n, p)$.

یک حالت خاص مسئله B ، مسئله C است:

C . ساختن گروههای تحویلپذیر حلپذیر ماکسیمال مشمول در گروه سیمپلیکتیک $Sp(2n, p)$ یا

یکی از گروههای تحت آبلی $O^+(2n, 2)$ یا $O^+(2n+1, 2)$.

صفحات ۴۱۰-۶۶۲ به حل مسأله‌های B و C اختصاص دارند. روش ژوردان، بازگشتی است.

وی روشی را برای حل مسأله‌هایش برای گروههای درجه p^n ، با فرض اینکه برای درجه‌های پایینتر

p^m ($m < n$) حل شده‌اند، خاطر نشان می‌کند. وی سرانجام به رده‌بندی کاملی از گروههای مورد بحث

نایل می‌شود.

ژوردان در سلسله مقاله‌هایی که بین ۱۸۷۱ و ۱۸۷۵ منتشر، و در مجموعه آثار، صفحات ۲۷۷-۴۹۵

تجدید چاپ شده‌اند، نتایج به دست آمده در رساله را تکمیل کرده و توسیع داده است. دو مقاله آخر او

در باره ساخت و رده‌بندی گروههای جایگشتی حلپذیر، که در ۱۹۰۸ و ۱۹۱۷ منتشر و به عنوان مقاله‌های

(۱۲۱) و (۱۲۶) در مجموعه آثار II تجدید چاپ شده‌اند، به توسط دیودونه در مقدمه او بر مجموعه آثار

I، صفحات XXXIV-XLI تلخیص شده است.

قسمت دوم

گروهها

فصل ۸

اوایل نظریه گروهها

اوایل چیست و اواخر کدام؟ همین بس که بگویم فصل حاضر عمدتاً با سده نوزدهم سروکار دارد، با وجود این در صورتی که موضوع بحث ایجاب کند، مطالب خود را به نیمه اول سده بیستم نیز خواهم کشاند.

پس از انتشار رساله ژوردان در ۱۸۷۰، تغییری اساسی در ماهیت نظریه گروهها به وقوع پیوست. پیش از ۱۸۷۰، تنها دو نوع گروه در نظر گرفته می‌شد، یعنی گروه جانشینها و گروه تبدیلات هندسی. پس از ۱۸۷۰، مفهوم مجرد «گروه» در مراحل متعددی به توسط کرونکر^۱ (۱۸۷۰)، کیلی^۲ (۱۸۷۸)، فون دایک^۳ (۱۸۸۲)، و وبر^۴ (۱۸۸۲) گسترش پیدا کرد. تعریف جدید گروه به وسیله اصول موضوعه برای گروههای آبلی به توسط کرونکر (۱۸۷۰) و برای گروههای متناهی و نامتناهی به توسط وبر، به ترتیب، در سالهای ۱۸۸۲ و ۱۸۹۳ ارائه شد. بسط کامل این مفاهیم، به توسط ه. ووسینگ^۵ به تفضیل در کتابش «پیدایش مفهوم گروههای مجرد^۶» (۱۹۶۹) توصیف شده است.

پس از معرفی مفهوم مجرد «گروه»، موضوع اصلی نظریه گروهها عبارت بود از: بررسی ساختار گروهها مستقل از نمایش آنها با جایگشتها یا تبدیلات، و تنها بعدها مطالعه این نمایشها. از این رو فصل حاضر به چهار بخش تقسیم خواهد شد:

(آ) گروههای جانشینها

(ب) گروههای تبدیلات

(پ) گروههای مجرد

(ت) ساختار گروههای متناهی

1) Kronecker 2) Cayley 3) von Dyck 4) Weber 5) H. Wussing 6) Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs

بخش (آ) گروههای جانشینها

اولین قضیه‌ها دربارهٔ زیرگروههای S_n

مؤلفان مقدمی که به مطالعهٔ گروههای جانشینها پرداختند عبارت بودند از لاگرانژ^۱، روفینی^۲، وکوشی^۳. اینان عمدتاً به معادلات «کلی» (یا عمومی) از درجهٔ n می‌پرداختند، یعنی معادلاتی که در آنها ضریبها یا ریشه‌های $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای مستقل‌اند. اینان به تشکیل معادلات کمکی، در صورت امکان با درجات پایتتر، علاقه‌مند بودند. برای این منظور، توابع گویای

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

را در نظر گرفتند و این سؤال را مطرح کردند: در صورت جایگشت ریشه‌ها، تابع f چند مقدار متمایز اختیار می‌کند؟ اگر $f_1, \dots, f_s$ مقادیر حاصل باشند، آنگاه این مقادیر ریشه‌های معادله‌ای کمکی از درجهٔ s مانند

$$(t - f_1)(t - f_2) \dots (t - f_s) = 0$$

خواهند بود.

به این دلیل مؤلفان متقدم بیش از اندازه به مقادیر ممکن s علاقه‌مند بودند. اگر H زیرگروهی از S_n باشد که f را به خودش تبدیل کند، آنگاه مجموعه‌های H تابع f را به $f_1, \dots, f_s$ تبدیل می‌کنند. بنابراین عدد s درست برابر است با شاخص H در S_n . به عنوان مثال، اگر $n = 4$ و f تابع ذیل باشد

$$f = x_1x_2 + x_2x_3,$$

آنگاه شاخص s برابر با ۳ است، و f ریشهٔ یک معادلهٔ درجهٔ سوم است. این موضوع قبلاً به توسط لاگرانژ تذکر داده شده، و اساس حل معادلهٔ درجهٔ سوم به وسیلهٔ او بوده است.

حالت $n = 4$ ، که در آن می‌توان معادله‌ای کمکی از درجهٔ کمتر را برای حل معادلهٔ اصلی به کار برد، حالتی استثنایی است. اگر n از ۴ تجاوز کند، شاخص s دو یا حداقل n است. این حکم به توسط وکوشی در ۱۸۴۵ ثابت شد (گزارشهای فرهنگستان پاریس ۲۱^۴، ص. ۱۱۰۱)

درهٔ S_5 زیرگروهی مانند L از شاخص $s = 6$ و مرتبهٔ ۲۰ وجود دارد، یعنی گروه متشکل از جانشینهای

خطی اندیس

$$k' \equiv ak + b \quad (\text{به پیمانهٔ } 5).$$

اگر f تابعی باشد که تنها تحت این زیرگروه پایا باشد، آنگاه با جایگشت ریشه‌های f شش مقدار متفاوت می‌گیرد، و این مقادیر ریشه‌های یک معادلهٔ کمکی از درجهٔ ۶ هستند. جایگشت‌های S_6 ، جایگشت‌های این شش مقدار را القا می‌کنند، بنابراین S_6 با زیرگروهی تریا مانند H از شاخص ۶ در S_6 یکرخت است. این زیرگروه، یعنی H ، دوباره استثنایی است. به ازای هر n که $n > 6$ ، هر زیرگروه از شاخص n در S_n یکی از x_k ها را ثابت نگه می‌دارد. این حکم به توسط ژ. آ. سِرِه^۱ در مقاله‌ای تحت عنوان «مقاله‌ای در تعداد مقادیری که یک تابع می‌تواند اختیار کند وقتی حروف متضمن آن را جایگشت دهند»^۲، مجلهٔ ریاضیات (۱)، ۱۵، ص. ۱-۴۴، ثابت شد.

در همین مقاله-سِرِه ثابت می‌کند که:

$$\text{اگر } s > n \text{ و } n > 8, \text{ آنگاه } s \geq 2n.$$

مؤلفان متأخر ثابت کرده‌اند که این ادعا به ازای هر n که $n > 6$ ، درست است. سِرِه همچنین ثابت می‌کند که:

$$\text{اگر } s > 2n, \text{ آنگاه } s \geq \frac{1}{4}n(n-1).$$

نتایج بیشتر دربارهٔ مقدار ممکن شاخص s به توسط ماتیو^۳، ژوردان، سیلو^۴، نتو^۵، فروبنیوس^۶، بورشرت^۷، مایه^۸، و میلر^۹ به دست آمدند. ن. ک. مقاله ه. بورکهارت^{۱۰} دایرةالمعارف علوم ریاضی I، ۱، ص. ۲۱۳ به بعد.

ماتیو

دو مقاله بسیار جالب ا. ماتیو دربارهٔ گروه‌های جایگشتی چندگانه تریا به ترتیب در سالهای ۱۸۶۱ و ۱۸۷۳ منتشر شدند. عنوان مقالهٔ اول عبارت است از: «مقاله‌ای در مطالعهٔ توابع چندمقداری، دربارهٔ روش تشکیل آنها و در باب جانشینی‌هایی که آنها را پایا نگه می‌دارند»^{۱۱} مجلهٔ ریاضیات (۲)، ص. ۲۴۱-۳۲۳ (۱۸۶۱).

1) J. A. Serret 2) Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle enferme 3) Mathieu 4) Sylow 5) Netto 6) Frobenius 7) Borchert 8) Maillet 9) Miller 10) H. Burkhardt 11) Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables

در این مقاله ماتئو روشی کلی را برای به دست آوردن گروههای چندگانه ترایا شرح می دهد. به خصوص، یک گروه جانشینی پنج گانه ترایا روی ۱۲ حرف می سازد. در همین مقاله وی وجود یک گروه جانشینی پنج گانه ترایا روی ۲۴ حرف را اعلام می کند. ساختن این گروه در مقاله دومی تحت عنوان «درباره تابع پنج بار ترایا با ۲۴ کمیت^۱»، مجله ریاضیات (۲) ۱۸، ص. ۴۶-۲۴ (۱۸۷۳)، توصیف شده است.

سراغاز ساختهای ماتئو، گروه خطی تصویری متشکل از تبدیلات خطی کسری

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

است که در آن ضریبها از هیأت گالوای $K = GF(q)$ هستند. این گروه یک گروه سه گانه ترایا بر خط تصویری روی K است. با آغاز از این گروه، ماتئو در ساختن گروههای پنج گانه ترایای خود، با خلاقیتی استادانه، موفق می شود.

سیلو

در بهار ۱۸۷۲ ریاضیدان نروژی م. ل. سیلو مقاله ای که در نظریه ساختاری گروههای متناهی از اهمیت اساسی برخوردار است، تحت عنوان «قضیه هایی در باب گروههای جانشینی^۲» به ماتماتیشه آنالن^۳ ارائه داد.

این مقاله، که در ماتماتیشه آنالن ۵، ص. ۵۸۴-۵۹۴ منتشر شد، برهانهای کامل هشت قضیه را در بر دارد. از بین آنها چهار قضیه ذیل بسیار جالب اند:

قضیه I. اگر p^α بزرگترین توان عدد اول p باشد که در مرتبه گروه G آمده، آنگاه زیرگروهی مانند H از مرتبه p^α وجود دارد. هرگاه نرمال ساز H از مرتبه $p^\alpha m$ باشد، آنگاه مرتبه G برابر است با

$$p^\alpha m(pr + 1).$$

قضیه II. گروه G درست دارای $pr + 1$ زیرگروه از مرتبه p^α است. این زیرگروهها را می توان با تبدیل یکی از آنها به وسیله جانشینیهای G به دست آورد، هر یک از این زیرگروهها با $p^\alpha m$ تبدیل مختلف تولید می شود.

1) Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités 2) Théorèmes sur les groupes de substitutions
3) Mathematische Annalen

قضیه III. اگر مرتبه گروهی مانند G ، p^α باشد، که در آن p اول است، آنگاه هر جانشینی θ از این گروه را می توان با فرمول ذیل بیان کرد

$$\theta = \theta_1^i \theta_2^k \dots \theta_{\alpha-1}^r$$

که در آن

$$\theta^p = 1$$

$$\theta_1^p = \theta_1^a$$

$$\theta_2^p = \theta_2^b \theta_1^c$$

$$\theta_r^p = \theta_2^d \theta_1^e \theta_r^f$$

و

$$\theta_1^{-1} \theta_1 \theta = \theta.$$

$$\theta_1^{-1} \theta_2 \theta = \theta_2^{\beta} \theta_1$$

$$\theta_1^{-1} \theta_r \theta = \theta_2^{\gamma} \theta_1^{\epsilon} \theta_r$$

توضیح اینکه θ در مرکز واقع است و زیرگروهی از مرتبه p تولید می کند. به پیمانه این زیرگروه، θ دوباره در مرکز است، و به همین ترتیب برای بقیه. از اینجا نتیجه می شود که گروه های از مرتبه p^α حل پذیرند.

به عنوان یک فرع، سیلو بیان می کند که:

اگر مرتبه گروه گالوای معادله ای جبری توانی از یک عدد اول باشد، آن معادله با رادیکالها قابل حل است.

قضیه IV. اگر درجه معادله تحویلناپذیری p^β ، و مرتبه گروه آن مجدداً توانی از این عدد اول p باشد، هر یک از ریشه های آن را می توان با دنباله ای از β معادله آبلی از درجه p به دست آورد. سیلو متذکر می شود که حالت خاص این قضیه، $p = 2$ ، در ۱۸۷۱ به توسط م. ج. پترسن^۱ به دست آمده است.

1) M. J. Petersen

در ۱۸۸۷، گ. فروبنیوس برهان جدیدی از قضیه‌های سیلو را منتشر کرد. مقاله او در مجله کرله برای ریاضیات^۱ ۱۰۰، ص. ۱۷۹-۱۸۱ تحت عنوان «برهان جدید قضیه‌های سیلو» آمده است. وی ابتدا یادآور می‌شود که هر گروه متناهی با گروهی از جانشینهای اعضای خود قابل نمایش است، بنابراین برهان سیلو برای گروههای مجرد هم برقرار است، ولی وی نمی‌خواهد از این نمایش استفاده کند. او به تاسی از وبر و فروبنیوس، یک گروه متناهی مجرد را با چهار اصل موضوع تعریف می‌کند، و برهان جدیدی از قضیه‌های سیلو را، بر اساس این چهار اصل موضوع، ارائه می‌دهد.

بخش (ب) گروههای تبدیلات

همان‌طور که در ابتدای فصل ۷ دیدیم، لئونهارت اویلر^۲ و الینده رُدریگس^۳ ساختار گروه حرکت‌های صلب در فضای سه‌بعدی را تحلیل کردند، و کامیل ژوردان مطالعه نظام‌مند زیرگروههای بسته این گروه را به عهده گرفت. به نظر می‌رسد که ژوردان اولین کسی باشد که کلمه «groupe» را برای گروههای تبدیلات هندسی به کار برده است.

اینک لازم است در باب مطالعات آرثر کیلی^۴ و فلیکس کلاین^۵ درباره هندسه ناقلیدسی و نیز مطالعات فلیکس کلاین در باب گروههای گسسته تبدیلات خطی کسری و همچنین پژوهشهای سوفوس لی درباره گروههای پیوسته بحث کنیم.

هندسه ناقلیدسی

درباره آثار آرثر کیلی ن. ک. مقاله عالی جان د. نورث^۶ در زندگینامه علمی دانشوران^۷. آثار کیلی در همه قسمت‌های جبر و هندسه بی‌اندازه منشاء اثر بوده است. در سلسله‌ای از مقالات تحت عنوان «مقالاتی در باب کوانتیک‌ها»^۸ که بین ۱۸۵۴ و ۱۸۷۸ نوشته شده، کیلی مبادی نظریه پایاها را مطرح کرد. کیلی در «ششمین مقاله‌اش در باب کوانتیک‌ها» که در سال ۱۸۵۹ در مجلد ۱۴۹ خلاصه مذاکرات انجمن سلطنتی^۹ منتشر شد، ابتدا هندسه تصویری نقاط، خطوط، و مقاطع مخروطی در صفحه تصویری

1) Crellés Journal für Math. 2) Leonard Euler 3) Olinde Rodrigues 4) Arthur Cayley
5) Felix Klein 6) John D. North 7) Dictionary of Scientific Biography 8) Memoirs upon Quantics 9) Philos. Transactions of the Royal Society

را با شروع از مختصات (x, y, z) نقاط و مختصات (ζ, η, ξ) خطوط بسط می‌دهد. من این مختصات را با (x_1, x_2, x_3) و (u_1, u_2, u_3) نشان خواهم داد. یک فرم درجه دوم مانند

$$f(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

معرف یک مقطع مخروطی است. فرم قطبی

$$f(x, x) = \sum a_{ik} x_i y_k,$$

معرف قطبی یک نقطه y است. فرم هموردای

$$F(u, u) = \sum A_{ik} u_i u_k,$$

که در آن A_{ik} ها با زیردرمیانهای ماتریس (a_{ik}) متناسباند، معرف «مقطع مخروطی دوگان» است که از مماسهای مقطع مخروطی اصلی تشکیل شده است. همچنین می‌توان از یک مقطع مخروطی دوگان مانند F شروع کرد و هموردای f را به وسیله زیردرمیانها تشکیل داد.

کیلی سپس یک نظریه «فاصله‌ها» را با فرض مقطع مخروطی ثابتی که آن را «مطلق» می‌نامد به وجود می‌آورد. او «فاصله»ی بین دو نقطه x و y را با ضابطه

$$Dist(x, y) = \cos^{-1} \frac{f(x, y)}{\sqrt{f(x, x)} \sqrt{f(y, y)}} \quad (1)$$

و «فاصله» یا زاویه بین دو خط را با ضابطه

$$Dist(u, v) = \cos^{-1} \frac{F(u, v)}{\sqrt{F(u, u)} \sqrt{F(v, v)}} \quad (2)$$

تعریف می‌کند.

کیلی ثابت می‌کند که $Dist(x, y)$ ، انتگرال یک فاصله بینهایت کوچک ds است که روی یک مسیر مستقیم انتگرالگیری از x به y گرفته می‌شود. اگر y بر مسیر انتگرالگیری از x به z واقع باشد، نتیجه می‌شود که

$$Dist(x, y) + Dist(y, z) = Dist(x, z). \quad (3)$$

کیلی دو حالت خاص را در نظر می‌گیرد، در حالت اول فرم مثبت معین است و به صورت

$$f(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

نوشته می‌شود.

در این حالت داریم

$$F(u, u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

و

$$Dist(x, y) = \cos^{-1} \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \quad (4)$$

$$Dist(u, v) = \cos^{-1} \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \quad (5)$$

خطوط و صفحاتی را که از یک نقطه ثابت O در فضای سه بعدی اقلیدسی می‌گذرند، می‌توان به عنوان «نقاط» و «خطوط» در «صفحه» ای تصویری تلقی کرد، و (۴) فرمول معروف زاویه بین دو بردار در فضای سه بعدی است. از اینجا نتیجه می‌شود که «فاصله‌ها» ی بین «نقاط» و «خطوط» در «صفحه» تصویری که هم اکنون تعریف شدند، عبارت‌اند از زاویه‌های بین خطوط و صفحات ماز بر O . این «نقاط» و «خطوط»، در اصطلاح فلیکس کلاین، یک «صفحه بیضوی» تشکیل می‌دهند.

حالت دوم که به توسط کیلی مورد مطالعه قرار گرفته، حالتی حدی است. می‌توان آن را با شروع از فرمهای مثبت

$$f(x, x) = \varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2$$

$$F(u, u) = u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2,$$

با فرض اینکه ε به صفر میل می‌کند به دست آورد. در حالت حدی، معلوم می‌شود که

$$f(x, x) = x_3^2$$

$$F(u, u) = u_1^2 + u_2^2.$$

مقطع مخروطی $f = 0$ ، خط واقع در بینهایت است که دو بار به حساب آمده است. مقطع مخروطی دوگان $F = 0$ ، زوجی از دسته خطوط است که با نقاط $(1, i, 0)$ و $(1, -i, 0)$ واقع در بینهایت تعریف شده‌اند. این نقاط درست همان «نقاط مستدیر» پونسله^۱ هستند که وجه تسمیه آنها به این دلیل است که فصل مشترکهای همه دایره‌های صفحه اقلیدسی هستند. با دخالت دادن مختصات قائم‌نهمگن x و y ، در حالت حدی، نتیجه می‌شود که

$$Dist(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (6)$$

$$Dist(u, v) = \cos^{-1} \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (7)$$

یعنی، فاصله اقلیدسی بین دو نقطه و زاویه اقلیدسی بین دو خط به دست می‌آید. آنچه را که ما «هندسه تصویری» می‌نامیم، کیلی «هندسه ترسیمی» می‌نامد. طبق نظر کیلی، با ثابت نگه داشتن یک مقطع مخروطی و «مطلق» نامیدن آن، می‌توان از هندسه تصویری به هندسه متری رسید. وی نتیجه می‌گیرد که:

بنابراین هندسه متری جزئی از هندسه ترسیمی است، و هندسه ترسیمی تمامی هندسه است و بالعکس ...

امروزه ما با این دیدگاه محدود هندسه همعقیده نیستیم. از دیدگاه ما، هندسه تصویری «تمامی هندسه» نیست. به عنوان مثال، توپولوژی و هندسه ریمانی بخشهایی از «هندسه ترسیمی» کیلی به شمار نمی‌آیند. فلیکس کلاین، در دو مقاله خود با عنوان «در باب هندسه معروف به نااقلیدسی»^۱ در ماتماتیشه آنالن ۴ (۱۸۷۱)، ص. ۶۲۵-۵۷۳ و ماتماتیشه آنالن ۶ (۱۸۷۳)، ص. ۱۱۲-۱۴۵، دو نوع هندسه نااقلیدسی را مشخص می‌کند که آنها را «بیضوی» و «هذلولوی» می‌نامد. در حالت بیضوی فرم درجه دوم $f(x, x)$ که معرف مقطع مخروطی مطلق است معین مثبت است؛ این مقطع مخروطی نقاط حقیقی ندارد و می‌توان فرمولهای (۴) و (۵) کیلی را به کار بست. «صفحه بیضوی» کلاین را می‌توان از یک کره در فضای سه‌بعدی اقلیدسی با یکسان گرفتن نقاط متقابل به دست آورد.

علاوه بر این صفحه بیضوی و صفحه اقلیدسی که به توسط کیلی بررسی شد، کلاین حالت سوم را که در آن مقطع مخروطی مطلق یک مقطع مخروطی ناتکین با نقاط حقیقی است، بررسی کرد. به عنوان الگویی، می‌توان دایره‌ای را در صفحه اقلیدسی در نظر گرفت. اینک فرمهای معرف مقطع مخروطی و مقطع مخروطی دوگان آن عبارت‌اند از

$$f(x, x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \quad (8)$$

$$F(u, u) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2. \quad (9)$$

الگوی کلاین از «هندسه هذلولوی» لباچسکی و بویونی با محدود کردن خود به نقاط داخلی دایره:

$$f(x, x) > 0,$$

و خطوط شامل نقاط داخلی:

$$F(u, u) > 0.$$

به دست می‌آید.

در این حالت فرمول (۲) را که معرّف «فاصله» یا زاویه بین دو خط است می‌توان حفظ کرد، ولی فرمول (۱) باید اصلاح شود. اگر x و y نقاط داخلی دایره باشند، می‌توان نقاط تقاطع خط واصل این نقاط را با دایره از معادله درجه دومی مانند

$$\lambda_1^2 f(x, x) + 2\lambda_1 \lambda_2 f(x, y) + \lambda_2^2 f(y, y) = 0.$$

به دست آورد.

این معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین داریم

$$f(x, y)^2 - f(x, x)f(y, y) > 0.$$

بنابراین متغیر تابع $\cos^{-1}$ در فرمول (۱) از ۱ بزرگتر است، و $\arccos$ انگاری محض است.

فلیکس کلاین اینک به جای $\arccos$ لگاریتم یک نسبت ناهمساز را می‌گذارد. اگر P و Q نقاطی باشند که قبلاً آنها را x و y نامیدیم، و اگر A و B نقاط تقاطع PQ با این مقطع مخروطی باشند، نسبت ناهمساز A و B نسبت به P و Q یک پایای تصویری است، و لگاریتم آن «فاصله» کلاینی است.

در واقع، «فاصله» کیلی (۱) درست مساوی $\pm \frac{2}{3}$ برابر فاصله کلاینی است.

هنگامی که مجلد دوم مجموعه مقالات کیلی در ۱۸۸۹ منتشر شد، کیلی توضیحی بر «مقاله ششم» خود افزود مبنی بر اینکه تعویض $\arccos$ با لگاریتم به توسط کلاین، بهبود بزرگی است. در اولین مقاله کلاین در باب هندسه ناقلیدسی هیچ گروهی در نظر گرفته نمی‌شود، اما در مقاله دوم سال ۱۸۷۳ مفهوم «گروه تبدیلی» ظاهر می‌شود. کلاین تبدیلات وارونپذیر خمینه‌ای را در نظر می‌گیرد، و مفهوم «گروه» را مانند رساله ژوردان با ویژگی «اگر A و B در گروه باشند، AB نیز در گروه است»، تعریف می‌کند. کلاین بعدها متوجه شده است که شرط «اگر A در گروه باشد، A^{-1} نیز در گروه است» لازم است.

در بخش ۳ مقاله دوم کلاین در باب هندسه ناقلیدسی در ماتماتیشه آنالن ۶، کلاین گروهی را وارد می‌کند که آن را «گروه اصلی^۲» می‌نامد. این گروه به وسیله تغییر مکانهای اقلیدسی، تبدیلات تشابهی، و بازتابها تولید می‌شود.

در بخش ۴ کلاین توضیح می‌دهد که هر یک از این «روشهای هندسی» متفاوت با گروهی از تبدیلات مشخص می‌شود. این دید، دید اساسی در «برنامه معروف ارلانگر»^۱ کلاین (۱۸۷۲) نیز هست. درباره تاریخ این «برنامه»، ن. ک. مقاله دیوید ا. رو^۲ در هیستوریا ماتماتیکا ۱۰، ص. ۴۴۸-۴۵۷ (۱۹۸۳) تحت عنوان «فصلی فراموش شده در تاریخ برنامه ارلانگر فلیکس کلاین».

به نظر کلاین، هندسه تصوری با آن ویژگیها از اشکال سروکار دارد که تحت تبدیلات تصویری پایا هستند و هندسه اقلیدسی از ویژگیهایی بحث می‌کند که تحت «گروه اصلی» پایا هستند، و غیره. گروههای هندسه‌های بیضوی و هذلولوی گروههای تصویراتی هستند که یک مقطع مخروطی (یا یک رویه درجه دوم در فضای سه بعدی اقلیدسی) را به خودش تبدیل می‌کنند.

فلیکس کلاین و سوفوس لی^۳

دوستی کلاین و لی در برلین آغاز شد. آنان در ۱۸۷۰ به پاریس رفتند و به مدت دو ماه در دو اتاق مجاور اقامت گزیدند. همان‌طور که در فصل ۴ دیدیم، این دو عمیقاً تحت تأثیر کامیل ژوردان که رساله جانشینیهای وی به تازگی منتشر شده بود قرار گرفتند.

در ۱۸۷۱ مقاله‌ای مشترک از کلاین و لی تحت عنوان «درباره خمهای مسطحی که تحت یک دستگاه بسته از تبدیلات خطی ساده تعویضپذیر نامتناهی به خود تبدیل می‌شوند»^۴ در ماتماتیشه آنالین ۴، ص. ۴۲۴-۴۲۹ منتشر شد.

عبارت «دستگاه بسته تبدیلات» در عنوان مقاله درست به معنی «گروه تبدیلات خطی» است. در واقع، مؤلفان مقاله اظهار می‌دارند که:

عبارت «دستگاه بسته تبدیلات» متناظر با چیزی است که در نظریه جانشینها با اصطلاح

«گروه جانشینها» مشخص می‌شود.

گروههای مورد مطالعه کلاین و لی گروههای یک بعدی پیوسته‌اند. مؤلفان مقاله در پانوشتی به درستی بیان می‌کنند که همه گروههای پیوسته یک بعدی تعویضپذیرند. در همان پانوشت مثالی از یک گروه پیوسته سه بعدی ارائه می‌دهند که تعویضپذیر نیست، یعنی گروه تبدیلات تصویری صفحه‌ای که یک مقطع مخروطی را به خودش تبدیل می‌کند. از این مقاله می‌توان آغاز شکل‌گیری اندیشه‌های لی را درباره گروههای پیوسته تبدیلات در حوالی سال ۱۸۷۰ دریافت.

1) Famous Erlanger programm 2) David E. Rowe 3) Sophus Lie 4) Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen

در سالهای بعد، اندیشه‌های این دو همکار در دو جهت مختلف سیر کردند. لی نظریه خود را درباره گروههای پیوسته به وجود آورد و آن را در مطالعه معادلات دیفرانسیل به کار برد، در حالی که کلاین اساساً گروههای گسسته را مورد بررسی قرار داد. گروههای گسسته تبدیلات خطی کسری نقش مهمی را در مطالعه توابع خودریخت ایفا می‌کنند.

مدارک دوستی قدیمی کلاین و لی و جهت‌گیریهای علمی مختلف بعدی این دو در ص. ۱۵۳ کتاب ه. ووسینک: «پیدایش مفهوم گروههای مجرد» (انتشارات علوم، برلین شرقی ۱۹۶۹) بازگو شده است.

درباره بسط بیشتر نظریه گروههای گسسته و توابع خودریخت، ن. ک. مقاله «نوابع خودریخت»^۱ تألیف ر. فریکه^۲ در دایرةالمعارف علوم ریاضی^۳ II-4 (۱۹۱۳)، همچنین گزارش من با عنوان «گروههای تبدیلات خطی»^۴، نتایج ریاضی^۵ IV، ۲ (اشپرینگر ۱۹۳۵).

تحقیقات فلیکس کلاین درباره گروههای منتهای تبدیلات خطی کسری

در ژوئن ۱۸۷۵، فلیکس کلاین مقاله مهمی تحت عنوان «در باب فرمهای دوتایی با تبدیلات خطی که شکلها را به خودشان تبدیل می‌کنند»^۶ به ماتماتیشه آنالن تسلیم کرد (ماتماتیشه آنالن ۹، ص. ۲۰۹-۲۱۷). او در این مقاله همه گروههای منتهای تبدیلات خطی کسری با یک متغیر مختلط z مانند

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (۱۰)$$

را تعیین کرد.

این تبدیلات دایره‌ها را به دایره‌ها با حفظ جهت صفحه z از جنبه تابع نظری تبدیل می‌کند. اگر نقاط و دایره‌ها در صفحه با تصویر گنجگاشتی به کره‌ای منتقل شوند، می‌توان تبدیلاتی از این کره به خودش را که سونگهدار است به دست آورد که قابل توسیع به تبدیلات تصویری فضای تصویری حقیقی P_3 به P_3 هستند. این تبدیلات تصویری، در اصطلاح کلاین، حرکت‌های هذلولوی هستند. به عکس، هر تبدیل تصویری سونگهداری که کره را به خودش تبدیل می‌کند، یک تبدیل خطی کسری از متغیر z به دست می‌دهد. بنابراین مسأله تعیین همه گروههای تبدیلات (۱۰) با مسأله یافتن همه گروههای منتهای حرکت‌های هذلولوی در P_3 هم‌ارز است.

1) Verlag der Wissenschaften 2) Automorphe Funktionen 3) R. Fricke 4) Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften 5) Gruppen von linearen Transformationen

6) Ergebnisse der Mathematik 7) Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst

کلاین ابتدا توضیح می‌دهد که: هرگاه یک حرکت هذلولوی دارای مرتبه متناهی باشد، باید یک «دوران» باشد که همه نقاط محوری را که دو نقطه حقیقی از کره را به هم وصل می‌کند پایا نگه‌دارد. سپس ثابت می‌کند که: هرگاه حاصلضرب دو دوران، از نو یک دوران باشد، محورهای باید در نقطه‌ای در داخل کره یکدیگر را قطع کنند. از آنجا نتیجه می‌گیرد که: همه محورهای دوران متعلق به گروه متناهی G_2 در یک نقطه متقاطع‌اند، که یک نقطه ثابت گروه است.

کلاین می‌گوید که می‌توان فرض کرد که این نقطه ثابت مرکز کره است. در این حالت، دورانها، دورانه‌ای اقلیدسی‌اند. اما گروههای دورانه‌ای اقلیدسی با استفاده از مطالعه کلاسیکی که به توسط ژوردان انجام گرفته، معلوم‌اند (ن. ک. فصل ۷) این گروهها عبارت‌اند از:

(۱) گروههای دوری

(۲) گروههای دو وجهی

(۳) گروه چهار وجهی

(۴) گروه هشت وجهی

(۵) گروه بیست وجهی

بدین ترتیب، مسأله کلاین کاملاً حل می‌شود.

به دست آوردن انواع گروههای متناهی تبدیلات خطی کسری به طور مستقیم به توسط ه. ه. میچل^۱ در ۱۹۱۱ ارائه شد (خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا، ۱۲، ص. ۲۰۸-۲۱۱).

گروه بیست وجهی با گروه متناوب A_5 یکرخت است. بنابراین بیست وجهی را می‌توان برای توضیح نظریه معادله درجه پنجم گالوا به کار برد. این کار در رساله بسیار زیبای کلاین «درسهایی درباره بیست وجهی و حل معادلات درجه پنجم^۲» (لایزیگ ۱۸۸۴) انجام گرفت.

سوفوس لی

سوفوس لی نروژی، بنیانگذار نظریه «گروههای لی» در نوردفیورداید^۳ در دسامبر ۱۸۴۲ متولد شد. شرحی از زندگی و کار او به توسط ه. فرویدنتال^۴ در زندگینامه علمی دانشوران، جلد ۸، ص. ۲۳۳-۲۲۷ ارائه شده است.

مطابق شرحی که خود لی در زندگینامه‌اش می‌آورد، دوستی او با فلیکس کلاین، همان کسی که او را در زمستان ۱۸۶۹/۷۰ در برلین ملاقات کرد، از اهمیت زیادی در کارهای بعدی او درباره گروههای

1) H. H. Mitchell 2) Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grad. 3) Nordfjordied 4) H. Freudenthal

تبدیلات برخوردار بود. در تابستان ۱۸۷۰، لی تبدیل تماسی معروف خود را کشف کرد، تبدیلی که خطهای راست را به کره تبدیل می‌کند (ن. ک. سوفوس لی: مجموعه رسالات^۱، مجلد ۱، ص. ۹۳-۹۶). در سال ۱۸۷۱ لی یک بورس تحصیلی از دانشگاه کریستیانیا^۲ گرفت، و در ۱۸۷۲ رساله دکترای خود را تحت عنوان «در باب یک رده از تبدیلات هندسی^۳» (مجموعه رسالات، مجلد ۱، ص. ۱۰۵-۲۱۴، به آلمانی) به اتمام رسانید.

در طول این مدت لی نظریه انتگرالگیری معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خود را بسط داد. بر طبق اظهار فرویدنتال، این نظریه «اکنون در بسیاری از کتابهای درسی، اغلب بدون ذکر نام وی، دیده می‌شود». برای شرحی از این نظریه ن. ک. مقاله فرویدنتال در زندگینامه علمی دانشوران که پیشتر ذکر شد.

تحقیقات لی در انتگرالگیری معادلات دیفرانسیل وی را بر آن داشت که گروههای تبدیلاتی را که یک معادله دیفرانسیل را به خودش تبدیل می‌کنند مطالعه کند. درست است که این تحقیقات با تأخیر زیاد (۱۸۸۲-۱۸۸۳) در سلسله‌ای از مقالات (مجموعه رسالات ۵، ص. ۲۳۸-۳۱۳ و ۳۶۲-۴۲۴) منتشر شدند، اما از مقدمه انگل^۴ بر این مجلد ۵، معلوم می‌شود که اشتغال ذهنی لی به این موضوع حداقل از ده سال قبل آغاز شده بود. انگل ما را از رساله‌ای نانوشته در باب معادلات دیفرانسیل که لی قصد تألیف آن را داشته مطلع می‌سازد. انگل ادامه می‌دهد (مجلد ۵، ص. VIII):

مایه بسی تأسف است، زیرا لی اهمیت زیادی برای این کاربردها قائل شد. در اصل او کل نظریه گروههای تبدیلات خود را صرفاً به این دلیل تأسیس کرده بود که به آن به عنوان ابزاری برای پرداختن به مسائل انتگرالگیری نیاز داشت.

در فصل حاضر، می‌خواهم صرفاً درباره تاریخ نظریه گروههای پیوسته متناهی-بعد، پیش از لی، بحث کنم. خود این نظریه در فصل ۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

بخش (پ) گروههای مجرد

موضوع بحث این بخش (پ) به توسط ه. ووسینک به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است: پیدایش مفهوم گروههای مجرد، برلین شرقی ۱۹۶۹.

ساختارهای جبری مجرد که تنها با قوانین ترکیب اعضای خود تعریف می‌شوند در دوره‌های پیشتر

1) Gesammelte Abhandlungen

2) Christiania

3) Over en Classe geometriske

Transformationer 4) Engel

یافت می‌شوند. به عنوان مثال، قوانین جمع و ضرب اعداد مختلط $a \pm ib$ در اوایل ۱۵۶۰ در «جبر» بومبلی^۱ توضیح داده شدند.

همان‌طور که در فصل ۶ دیدیم، گالوا «هیأت‌های گالوا»ی $G(F(q))$ خود را با توصیف قوانین ترکیب اعضا تعریف می‌کند. در فصل ۱۰ خواهیم دید که همین مطلب در مورد همیلتن^۲ که جبر کوترنیونها را در اکتبر ۱۸۴۳ کشف کرد نیز صادق است.

بسیار قابل توجه است که هیأت‌ها و جبرهای مجرد در چنین دورهٔ زودتری کشف شدند. در مورد گروه‌ها، تاریخ روند متفاوتی را طی کرد. گالوا جانشینیه‌ها را در ۱۸۲۹ معرفی کرد و ژوردان گروه حرکتها را در ۱۸۶۷ مورد بررسی قرار داد. نخستین کسی که گروه‌های مجرد آبلی را، که با قاعدهٔ ترکیب اعضای خود تعریف می‌شوند، معرفی کرد کرونگر^۳ در ۱۸۷۰ بود. اولین گام به سوی مفهوم کلی یک گروه مجرد را کیلی در ۱۸۵۴ و ۱۸۷۸ برداشت، و نخستین تعریف روشن این مفهوم را والتر وان دایک^۴ در ۱۸۸۲ ارائه داد. در همان سال هاینریش وبر^۵ تعریف هم‌ارز دیگری را عرضه کرد.

لئونهارت اولیر

اولیر در مقاله‌ای تحت عنوان «قضیه‌هایی در باب مانده‌هایی که در تقسیم توانها باقی می‌مانند» که در سال ۱۷۶۱ منتشر شد (مجموعهٔ آثار، سری اول^۶، مجلد ۲)، توانهای a^m از یک عدد صحیح دلخواه a را بر عدد اول p تقسیم می‌کند و باقیمانده‌های این تقسیم را در نظر می‌گیرد. اگر a بر p قابل قسمت نباشد، توانی مانند a^p وجود دارد که ماندهٔ ۱ را به دست می‌دهد، و اگر λ کوچکترین عدد صحیح واجد این ویژگی باشد، توانهای

$$1, a, a^2, \dots, a^{\lambda-1}$$

درست λ مانده متمایز ایجاد می‌کنند. اولیر اینک ثابت می‌کند که λ مقسوم‌علیه‌ی از $p-1$ است. روش اثبات همان است که لگرانژ با توسل به آن ثابت کرد که مرتبهٔ هر عضو در یک گروه جانشینیه‌ها مقسوم‌علیه‌ی از مرتبهٔ گروه است، و با استفاده از آن ژوردان ثابت کرد که مرتبهٔ هر زیرگروه یک گروه متناهی، مقسوم‌علیه‌ی از مرتبهٔ گروه است، بدین معنی که: مجموعهٔ همهٔ مانده‌های ناصفر به پیمانه p به هم‌مجموعه‌های

$$(r, ar, a^2r, \dots, a^{\lambda-1}r)$$

تقسیم می‌شود.

1) Bombelli 2) Hamilton 3) Kronecker 4) Walter van Dyck 5) Heinrich Weber
6) Theoremata circa residua ex divisione potestatum relictia 7) Opera omnia, series prima

به عنوان یک کاربرد، اوایل برهانی «طبیعی‌تر» از قضیه‌ای از فرما را که

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ارائه می‌دهد که پیشتر آن را با استفاده از بسط $(a+b)^p$ ثابت کرده بود.

کارل فریدریش گاوس^۱

گاوس در قسمت آخر کتاب «تحقیقات حسابی^۲» خود، یک «ترکیب» از فرمهای درجه دوم دوتایی را به صورت زیر تعریف می‌کند.

اگر یک فرم مانند

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

به حاصلضرب دو فرم مانند

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

با جایگذاری

$$X = px'x' + p'xy' + p''yx' + p'''yy'$$

$$Y = qx'x' + q'xy' + q''yx' + q'''yy',$$

تبدیل شود، آنگاه گاوس می‌گوید که F به ff' تبدیلپذیر است، و در صورتی که شش عدد صحیح

$$pq' - qp', \quad pq'' - qp'', \dots, p''q''' - q''p'''$$

عامل مشترکی نداشته باشند، می‌گوید F «مركب» از فرمهای f و f' است.

هرگاه a, b, c عامل مشترکی نداشته باشند، فرم f اولیه نامیده می‌شود. در صورتی که فرمهای اولیه

f و f' دارای یک مبین D باشند، همواره می‌توان فرمی مانند F با همان مبین پیدا کرد که مركب از f و f' باشد.

بر طبق تعریف، گویند دو فرم f و g در یک رده‌اند، هرگاه بتوان f را با تبدیلی خطی مانند

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y',$$

با درمیانان ۱، به g تبدیل کرد. گاوس ثابت می‌کند: اگر F مرکب از f و f' باشد، رده F به طور یکتا با رده‌های f و f' مشخص می‌شود. بنابراین، ترکیب فرمها، ترکیبی از رده‌ها را به دست می‌دهد که تعویضپذیر و شرکتپذیر است. به زبان اصطلاحات امروزی، رده‌های فرمهای اولیه با مبین مفروض، یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند. عضو واحد این گروه با فرم اصلی

$$x^2 - Dy^2$$

نمایش داده می‌شود.

ارنست شرینگ^۱

ارنست شرینگ، از شاگردان گاوس، به تحقیق در ساختار گروه رده‌های فرمهای درجه دوم دوتایی با مبین مفروض D پرداخت. مقاله او را تحت عنوان «رده‌های اساسی فرمهای حسابی مرکب^۲» در ۱۸۶۹ در گزارشهای فرهنگستان گوتینگن^۳ ۱۴، ص. ۳-۱۳ منتشر شد. در این مقاله وی ثابت کرد که گروه فرمهای درجه دوم با مبین مفروض دارای مجموعه‌ای از مولدها مانند $A, B, C, \dots$ از مراتب $a, b, c, \dots$ است به طوری که هر رده را می‌توان به صورت حاصلضربی مانند

$$A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$$

بیان کرد که در آن α در رده مانده‌ها به پیمانه a ، β در رده مانده‌ها به پیمانه b ، و غیره تغییر می‌کند. این همان مطلبی است که اکنون آن را «قضیه اساسی گروههای آبلی متناهی» می‌نامیم. نتیجه مشابهی به توسط آبل در مقاله‌اش راجع به معادلاتی که دارای گروه گالوای تعویضپذیرند، به طور ضمنی، به دست آمده بود (مجموعه آثار^۴ I، ص. ۴۹۹). چنانچه به زودی ملاحظه خواهیم کرد، «قضیه اساسی» برای هر گروه آبلی متناهی برقرار است.

لئوپولد کرونکر

نخستین ریاضیدان آلمانی که کاملاً به اهمیت تحقیقات آبل و گالوا درباره حلیپذیری معادلات جبری پی برد، لئوپولد کرونکر بود. او در سال ۱۸۵۳ مقاله‌ای تحت عنوان «درباره حلیپذیری معادلات جبری، گزارش

1) Ernst Schering 2) Fundamental-Classsen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. 3) Abhandlungen of the Göttingen academy 4) Oeuvres

نخست^۱»، شرحی درباره گزارشهای فرهنگستان برلین^۲ ۱۸۵۳، ص. ۳۶۵-۳۷۴ منتشر کرد. در این مقاله او قضیه مهم زیر را به اطلاع می‌رساند:

«ریشه‌های هر معادلهٔ آبلی با ضرایب صحیح را می‌توان به صورت توابع گویا از ریشه‌های واحد نمایش داد». همان‌طور که در فصل ۷ دیدیم، کرونکر به تحقیق در گروه گالوای مسأله تقسیم توابع آبلی با دوره تناوب $2n$ نیز پرداخت. او دریافت که این گروه گالوا، دقیقاً گروه سیمپلکتیک $Sp(2n, p)$ است، و این موضوع را به اطلاع ژوردان رسانید.

در ۱۸۷۰، کرونکر مقاله‌ای تحت عنوان «شرح برخی از ویژگیهای ردهٔ حسابی ایدال اعداد مختلط^۳»، ماهنامهٔ فرهنگستان برلین^۴ ۱۸۷۰ منتشر کرد. در این مقاله، کرونکر مفهوم گروه مجرد آبلی را معرفی کرد. او تعدادی متناهی عضو مانند

$$\theta', \theta'', \dots$$

طوری در نظر می‌گیرد که از هر دو عضو از آنها عضو سومی مانند $f(\theta', \theta'')$ بر طبق قاعده‌ای ثابت معین می‌شود. قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری

$$f(\theta', \theta'') = f(\theta'', \theta'),$$

$$f(\theta', f(\theta'', \theta''')) = f(f(\theta', \theta''), \theta''')$$

را فرض می‌گیرد.

بعدها، او به جای $f(\theta', \theta'')$ علامت ساده‌تر ضرب $\theta' \theta''$ را به کار می‌برد. کرونکر سپس قضیهٔ اساسی گروههای متناهی آبلی را ثابت می‌کند. بر طبق این قضیه، به ازای هر گروه متناهی آبلی، یک «دستگاه اساسی» از مولدها مانند $\theta_1, \theta_2, \dots$ از مراتب $n_1, n_2, \dots$ موجود است به طوری که

(۱) عبارت

$$\theta_1^{h_1} \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \dots \quad (h_i = 1, 2, \dots, n_i)$$

همهٔ اعضا مانند θ را نشان می‌دهد و هر یک را درست یک بار.

(۲) هر n_i بر n_{i+1} قابل قسمت است.

(۳) حاصلضرب $n_1 n_2 \dots$ با مرتبهٔ گروه برابر است.

1) Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, erste Abhandlung 2) Bericht über die Verhandlungen der Akademie Berlin 3) Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer komplexer Zahlen 4) Monatshefte der Berlin Akademie

کرونکر تذکر می‌دهد که این قضیه با نتایج شرینگ کاملاً مطابق است. اینک به انگلستان برمی‌گردیم.

آرثر کیلی

در ۱۸۵۴، کیلی دو مقاله تحت عنوان «در باب نظریهٔ گروه‌ها، وقتی که به معادلهٔ نمادی $\theta^n = 1$ وابسته است» در مجلهٔ فلسفی انجمن سلطنتی لندن^۱، مجلد ۷، منتشر کرد. او با نمادی مانند θ که معرف عملی بر کمیات $x, y, \dots$ است شروع می‌کند، و می‌نویسد

$$\theta(x, y, \dots) = (x', y', \dots).$$

اگر $x', y', \dots$ جایگشتی از $x, y, \dots$ را نمایش دهند، کیلی می‌گوید عمل θ «چیزی است که به آن جانشینی اطلاق می‌شود». اگر عملوند کمیت یگانه‌ای مانند x باشد، نماد θ «نماد تابع معمولی» است:

$$\theta x = x' = f x.$$

نماد ۱ «طبعاً معرف عملی است که عملوند را ثابت نگه می‌دارد»، و $\theta\Phi$ «عمل مرکب» را نشان می‌دهد. کیلی متذکر می‌شود که این نمادهای θ در حالت کلی تعویض‌پذیر نیستند، اما شرکت‌پذیرند. کیلی سپس مفهوم جدول گروهی را معرفی می‌کند. وی اظهار می‌دارد

مجموعه‌ای از نمادهای

$$1, \alpha, \beta, \dots$$

را که جملگی از هم متمایزند، و چنان‌اند که حاصلضرب هر دو آنها ... به این مجموعه تعلق دارد، گروه می‌نامند. نتیجه اینکه هرگاه تمام گروه در هریک از این نمادها، خواه عامل بالایی یا خواه عامل کناری، ضرب شود، حاصل همانا تولید مجدد گروه است؛ یا به عبارت دیگر، اگر نمادهای گروه در هم ضرب شوند جدولی مانند

		عاملهای بالایی			
		۱	α	β	...
عاملهای کناری	۱	۱	α	β	...
	α	α	α^2	$\beta\alpha$	
	β	β	$\alpha\beta$	β^2	

تشکیل می دهند که هر سطر و هر ستون این جدول مشتمل بر همه نمادهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ است.

گام بعدی به سوی تعریف مجرد گروهها به توسط کیلی در سال ۱۸۷۸ برداشته شد. کیلی در مقاله اش تحت عنوان «نظریه گروهها» مجله امریکایی ریاضیات^۱، ص. ۵۰-۵۲ می نویسد:

مجموعه ای از نمادهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ به طوری که حاصلضرب $\alpha\beta$ از هر دو نماد مجموعه (با هر ترتیب دلخواه $\alpha\beta$ یا $\beta\alpha$) نمادی از این مجموعه باشد، یک گروه است.

او این مسأله را چنین تنظیم می کند: مطلوب یافتن همه گروههای متناهی از مرتبه مفروض n است. وی همچنین بیان می کند که هر گروه متناهی از مرتبه n را می توان به عنوان گروهی از جانشینهای n حرف نمایش داد. کیلی می گوید:

اما گرچه نظریه فوق الذکر یک نظریه کلی است، و نظریه جانشینها حالت خاصی از آن است، با وجود این مسأله کلی یافتن همه گروههای از مرتبه مفروض n ، در واقع با مسأله بظاهر کمی کلیتر یافتن همه گروهها از همان مرتبه n که از جانشینهای n حرف تشکیل می شوند، یکی است.

برای اثبات این حکم، کیلی جدول گروهی را به کار می برد. وی تلویحاً فرض می کند که ضرب نمادهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ در تعریف او از گروه، شرکتپذیر است:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

همچنین فرض می کند که گروه دارای عضو واحد است، و هر سطر و هر ستون جدول ضرب شامل همه اعضای گروه است. می توان گفت که مفهوم مجرد گروه متناهی در ذهن کیلی وجود داشته است، ولی او شرایطی را که حاصلضرب $\alpha\beta$ باید در آنها صدق کند به وضوح بیان نمی کند.

در سال ۱۸۸۲، مفهوم مجرد «گروه» با وضوح تمام تعریف شد، تقریباً به طور همزمان به توسط والتر وان دایک و هاینریش وبر. از قضا، مقالات آنها هر دو در همان مجلد ۲۰ مائمتایشه آنالن منتشر شدند. مقاله وان دایک به تاریخ «ششم دسامبر ۱۸۸۱، لایپزیگ» و مقاله وبر به تاریخ «مه ۱۸۸۲، کونیگسبرگ در پروس» است. همان طور که به زودی خواهیم دید، بیان تعریفهای آنها کاملاً متفاوت است.

والتر وان دایک

والتر دایک، آن گونه که خود را در مائمتایشه آنالن ۲۰ معرفی می کند، دستیار فلیکس کلاین در لایپزیگ از ۱۸۷۱ تا ۱۸۸۴ بود. او نه تنها قویاً از کلاین متأثر شد، بلکه تحت تأثیر هیلتن و کیلی نیز قرار گرفت. او در بالای مقاله اش تحت عنوان «مطالعات نظریه گروهی»^۲ در مائمتایشه آنالن ۲۰، ص. ۱-۴۴، نقل قولی از کیلی را قرار می دهد:

یک گروه با قوانین ترکیب نمادهای خود تعریف می‌شود.

درست در آغاز مقاله، دایک مسأله‌اش را چنین بیان می‌کند:

مطلوب تعریف گروهی از اعمال گسسته است که بر شیشی معین، ضمن تجرید از هر صورت خاص شایش اشیاء منفرد، اعمال می‌شوند با این فرض که این عملها باید تنها به وسیله آن ویژگیهایی مشخص شوند که برای تشکیل گروه اساسی‌اند.

دایک با m عمل مولد $A_1, \dots, A_m$ ، قابل اعمال بر شیشی که با ۱ نشان داده می‌شود، مطلب خود را آغاز، و عملها را وارونپذیر فرض می‌کند. حال عملهای

$$A_1, A_1^{-1}, A_2, A_2^{-1}, \dots, A_m, A_m^{-1}$$

را به ۱ اعمال می‌کند، و حاصلضربهای مرکب را، که باید از چپ به راست خوانده شوند، تشکیل می‌دهد. بدین ترتیب، یک گروه Γ به دست می‌آورد.

سپس بیان می‌کند که گروههای یکریخت یک گروه واحد تلقی می‌شوند. بنابراین، آنچه در تعریف گروه مهم است، تنها قانون ترکیب اعضای آن است.

عملها، که از چپ به راست ضرب شده‌اند، خود به خود از قانون شرکتپذیری تبعیت می‌کنند، بنابراین گروههای دایک در «اصول موضوعه گروه» امروزی صدق می‌کنند. برعکس، در صورتی که از یک گروه مجرد به معنی امروزی آن شروع کنیم، همواره می‌توانیم هر عضو A از گروه را به عنوان عملگری تلقی کنیم که، با ضرب همه اعضای گروه در A از راست، رُوی گروه عمل می‌کند. در نتیجه، تعریف دایک از یک «گروه گسسته» با تعریف جدید یک گروه مجرد متناهی-مولد هم‌ارز است.

دایک سپس تذکر می‌دهد که ساختار گروه، به محض اینکه روابط بین مولدها معلوم باشد، مشخص می‌شود، که آن را می‌توان به صورت

$$F_h(A_1, \dots, A_m) = \Gamma$$

نوشت.

او ابتدا حالتی را که یک گروه Γ فاقد رابطه است در نظر می‌گیرد، یعنی گروهی که امروزه آن را «گروه آزاد» می‌نامیم. در این حالت هر عضو گروه را می‌توان تنها به یک طریق به صورت حاصلضربی از عوامل A_i و A_i^{-1} نوشت. برای اجتناب از توانهای منفی، دایک مولد جدیدی مانند A_{i+} را وارد می‌کند که با رابطه

$$A_1 A_2 \dots A_m A_n = 1 \quad (1)$$

تعریف می‌شود.

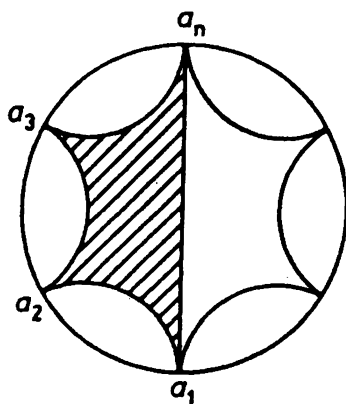
حال، اگر i چنین گروه آزادی باشد، و هرگاه $\bar{i}$ گروه دلخواهی باشد که با $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m$ تولید شود که در آن روابط معینی مانند $F_i = 1$ برقرار باشد، آنگاه عبارتهای F_i زیرگروه نرمالی مانند H در $\bar{i}$ تولید می‌کنند، و ریختی مانند $(i \rightarrow (i(A_i - \bar{A}_i))$ با هسته H وجود دارد. به زبان مصطلح امروزی، یکرختی زیر را داریم:

$$\bar{G} \cong \frac{G}{H} \quad (2)$$

دایک همچنین ثابت می‌کند که گروه آزاد i را می‌توان به عنوان گروهی از تبدیلات خطی کسری

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3)$$

به صورت زیر نمایش داد. اثبات را با حوزه‌ای که با $m+1$ قوس از دایر واقع در داخل دایره‌ای ثابت و عمود بر آن کراندار شده آغاز می‌کنیم (حوزه سایه‌دار در شکل ۲۶). فرض می‌کنیم رأسها، که هر یک از تلاقی دو قوس کرانی پدید آمده است، $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ باشند. انعکاس نسبت به قوس $a_1 a_m$ (یا تقارن در صورتی که $a_1 a_m$ پاره‌خط باشد)، «حوزه سایه‌دار» را به «حوزه بی‌سایه» تبدیل می‌کند. عمل A_i با حاصلضرب انعکاسها نسبت به دو دایره مجاور $a_{i-1} a_i$ و $a_i a_{i+1}$ تعریف می‌شود. رابطه (۱) برقرار است، و عملگرهای $A_1, \dots, A_m$ یک گروه آزاد i تولید می‌کنند. حوزه‌های سایه‌دار و بی‌سایه با هم یک حوزه اساسی گروه i را تشکیل می‌دهند.



شکل ۲۶ ساختن یک حوزه اساسی به توسط دایک

هاینریش وبر

مقاله وبر تحت عنوان «برهان این قضایا که هر فرم درجه دوم اولیه حقیقی قابلیت نمایش بینهایت عدد اول را دارد» در مه ۱۸۸۲ تألیف و در ماتماتیشه آنالن ۲۰ ص. ۳۰۱-۳۲۹ منتشر شد. عنوان بخش نخست عبارت است از «قضیه‌هایی در باب گروهها^۱». این بخش با تعریف زیر شروع می‌شود:

یک دستگاه (θ) از اعضا، از هر نوع، مانند $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h$ را یک گروه از مرتبه h گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. از هر دو عضو این دستگاه، عضو جدیدی از همین دستگاه به وسیله دستوری که آن را ترکیب یا ضرب گویند حاصل می‌شود. با بیان علامتی

$$\theta_r \theta_s = \theta_t.$$

۲. همواره داریم

$$(\theta_r \theta_s) \theta_t = \theta_r (\theta_s \theta_t) = \theta_r \theta_s \theta_t.$$

۳. از $\theta \theta_r = \theta \theta_s$ یا از $\theta_r \theta = \theta_s \theta$ نتیجه می‌شود که $\theta_r = \theta_s$.

از این اصلهای موضوع، وبر همواره برای گروههای متناهی وجود یک عضو واحد θ و وجود وارونی را برای هر عضو θ ، که با θ^{-1} نشان داده می‌شود، نتیجه می‌گیرد.

محدودیت فرض گروههای متناهی در ۱۸۹۳ به توسط وبر رفع شد. او در مقاله‌اش تحت عنوان «مبانی عمومی نظریه معادلات گالوا^۲»، ماتماتیشه آنالن ۴۳، ص. ۵۲۱-۵۴۹ تعریف ذیل را می‌آورد:

دستگاهی مانند θ از اشیاء (اعضا)، از هر نوع، خواه متناهی یا نامتناهی، تشکیل یک گروه می‌دهد در صورتی که مفروضات زیر برقرار باشند:

(۱) دستوری مفروض است که بر طبق آن از هر دو عضو اول و دوم دستگاه، عضو معین

سومی از همین دستگاه حاصل می‌شود.

وبر سپس علامت AB را معرفی می‌کند، و می‌گوید که قانون تعویضپذیری از پیش فرض نمی‌شود، ولی:

(۲) قانون شرکتپذیری فرض می‌شود ...

(۳) فرض می‌شود که، اگر $AB = AB'$ یا $AB = A'B$ ، آنگاه لزوماً $B = B'$ یا $A = A'$.

باید برقرار باشد.

1) Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist 2) Hilfssätze über Gruppen 3) Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie.

برای گروههای متناهی، از ۱)، ۲)، ۳) نتیجه می شود که

۴) اگر دو عضو از سه عضو A, B, C به طور دلخواه از S اختیار شوند، همواره می توان سومی را چنان معین کرد که [رابطه]

$$AB = C$$

برقرار باشد.

و بر ۴) را برای گروههای متناهی ثابت می کند، و ادامه می دهد:

برای گروههای نامتناهی این برهان، قطعی نیست. برای گروههای نامتناهی ویژگی ۴) را به عنوان اصل موضوع در تعریف مفهوم گروه می گنجانیم.

همین تعریف درست در آغاز جلد دوم کتاب بسیار پرنفوذ و بر «کتاب درسی جبر» (به تاریخ ژوئیه ۱۸۸۶، استراسبورگ) نیز ارائه شد.

تحقیقات آتی راجع به تقلیل اصول موضوعه گروه و استقلال آنها از حوزه مباحث فصل حاضر خارج است.

بخش (ا) ساختار گروههای متناهی

پس از معرفی مفهوم گروه مجرد به توسط کیلی، کرونکر، دایک، و وبر، نظریه گروهها وضعیت خود را عوض کرد. پیشتر مسائل اصلی عبارت بودند از: تعیین ساختار گروههای جایگشتی تحت شرایطی معین مانند ترایبایی، و اولیت، و تعیین ساختار گروههای پیوسته تبدیلات متناهی-بعد. مسأله بعدی عبارت بود از: یافتن قضیه های کلی راجع به ساختار گروههای مجرد، تعیین همه گروههای متناهی از مرتبه مفروض n ، و غیره.

برخی از قضیه های اساسی ساختاری راجع به گروههای متناهی، قبلاً در بخشهای (آ) و (پ) فصل حاضر مورد بحث قرار گرفته اند، یعنی قضیه های زیر:

۱. «قضیه اصلی» گروههای آبلی متناهی (که با اصطلاحات امروزی) بیان می کند که هر گروه آبلی متناهی حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری است. مرتبه های $m_1, m_2, \dots$ این گروهها را می توان چنان انتخاب کرد که هر m_i بر m_{i+1} قابل قسمت باشد. یا به صورتی دیگر، این مرتبه ها را می توان به صورت توانهایی از اعداد اول انتخاب کرد. همان طور که دیدیم، این قضیه به توسط کرونکر در ۱۸۷۰

ثابت شد. یکتایی عوامل m به توسط فروبنیوس و اشتیکلبرگر^۱ در ۱۸۷۹ به اثبات رسید (مجله کرله برای ریاضیات، ۸۶، ص. ۲۱۷-۲۶۲). تعمیم این قضیه‌ها برای گروه‌های آبلی-متناهی-مولد آسان است (ن.ک. کتاب جبر II من، چاپ پنجم، ص. ۸۰).

۲. قضیه‌های سیلو، که بیان می‌کنند: اگر h مرتبه یک گروه متناهی بر p قابل‌قسمت باشد، ولی بتوان بالاتری از p قابل‌قسمت نباشد، حداقل یک زیرگروه از مرتبه p موجود است. همه این زیرگروه‌ها مزدوج‌اند، و تعداد آنها به صورت $kp + 1$ است.

۳. هر گروه متناهی از مرتبه p حداقل شامل عضوی از مرتبه p است که با همه اعضای گروه تعویض‌پذیر است. گروه خارج‌قسمتی نسبت به زیرگروهی که با این عضو تولید می‌شود، از نو شامل چنین عضوی از مرتبه p است، و به همین ترتیب، بنابراین گروه حلپذیر است. این قضیه نیز در سال ۱۸۷۲ به توسط سیلو ثابت شد.

بسط بعدی نظریه گروه‌های متناهی در پایان سده نوزدهم تا حد زیادی مرهون اوتو هولدر^۲ است. اینک به بحث درباره کار ریاضی این محقق برجسته، و نیز کار کم‌شناخته‌اش در فلسفه ریاضی خواهیم پرداخت.

اوتو هولدر

اوتو هولدر (۱۸۵۹-۱۹۳۷) ریاضیدانی ممتاز بود. مانند معلم برجسته‌اش وایرستراس^۳، از افرادی به شمار می‌رود که جهت تازه‌ای به ریاضیات جدید داد: جهتی از محاسبات صوری و تفکرات ابداعی به ایستاری دقیق و انتقادی.

در مورد زندگینامه مختصر هولدر خواننده را به آگهی من به مناسبت درگذشت «اوتو هولدر» در خلاصه مذاکرات فرهنگستان لایپزیگ^۴ ۹۰، ص. ۹۷-۱۰۱ (۱۹۳۸)، ارجاع می‌دهم. در اینجا قسمتی از این آگهی درگذشت را نقل می‌کنم: «همه آنانی که هولدر را به خوبی می‌شناختند، طبع آرام، مهربان و شخصیت والای او را تصدیق می‌کنند».

هولدر در رساله دکترای خود (توبینگن^۵ ۱۸۸۲) این مسأله را حل می‌کند: اگر از یک چگالی جرمی پیوسته ρ ، پتانسیل نیوتونی V را محاسبه کنیم، با چه شرطی k در معادله لاپلاس

$$\Delta V = -2\pi k$$

صدق می‌کند؟

1) Stickelberger 2) Otto Hölder 3) Weierstrass 4) Sitzungsber. sächs, Akademie Leipzig 5) Tübingen

برای ما ریاضیدانان معاصر، چنین مسأله‌ای ممکن است طبیعی به نظر آید، ولی در عصر هولدر، حتی وجود توابع مشتق‌ناپذیر نتیجه‌ای نو و شگفت‌انگیز بود. پیش از وایرستراس اغلب ریاضیدانان تلویحاً می‌پذیرفتند که هر تابع پیوسته‌ای مشتق‌پذیر است. جوابی که هولدر برای این مسأله پیدا کرده بسیار اصریل است: تابع f باید در یک «شرط هولدر» صدق کند.

با همین روش دقیق، هولدر به تحقیق در رفتار تابع پتانسیل در مجاورت رویه‌ای که بر آن توزیع پیوسته جرمی داده شده است می‌پردازد.

تحت تأثیر وایرستراس، هولدر سپس به نظریه توابع مختلط پرداخت. قضیه مشهور «کازوراتی-وایرستراس^۱» درباره رفتار یک تابع مختلط در همسایگی یک نقطه تکینی تنها، ابتدا به توسط کازوراتی به درستی بیان شد، ولی درک مقاله او، که به ایتالیایی نوشته شده است، بسیار دشوار بود. بعداً، وایرستراس این قضیه را در حالتی که تابع در سراسر صفحه z منظم، و تنها نقطه تکینی آن در بینهایت است ثابت کرد. هولدر نخستین کسی بود که این قضیه را با وضوح و کلیت تام بیان کرد، و برهان بسیار ساده‌ای برای آن ارائه داد. درباره این موضوع ن. ک. ا. نونینشواندر^۲: قضیه کازوراتی-وایرستراس، هیستوریا ماتماتیکا^۳ ۵، ص. ۱۳۹-۱۶۶ (۱۹۸۷).

هولدر در ۱۸۸۴ در گوتینگن «معلم حق‌التدریسی^۴» شد. برای کسب مجوز تدریس، موظف شد یک رساله‌ای در سطح فوق‌دکتر ارائه کند. در این رساله، با عنوان «در باب نظریه سریهای مثلثاتی^۵» (ماتماتیشه آنالن ۲۴، ص. ۱۸۱-۲۱۶) هولدر به تحقیق در نمایش توابع دلخواه (نه لزوماً کراندار) به وسیله سریهای فوریه پرداخت. برای تعریف ضرایب فوریه به صورت انتگرال، مجبور شد تعریف جدیدی را برای انتگرال توابع بی‌کران معرفی کند.

پیش از پرداختن به این موضوع، هولدر سعی کرده بود یک معادله دیفرانسیل جبری برای تابع گاما به دست آورد که توفیق نیافته بود. در ۱۸۸۶، موفق شد ثابت کند چنین معادله دیفرانسیلی غیرممکن است. مهمترین هدف ما در اینجا، تحقیقات کلاسیک هولدر در باب نظریه گالوا و گروههای متناهی است. عنوان اولین مقاله او در موضوعات فوق عبارت بود از «تبدیل یک معادله به یک رشته از معادلات^۶»، ماتماتیشه آنالن ۳۴، ص. ۲۶-۵۶ (۱۸۸۹). اگر بخواهیم معادله‌ای را به کمک رادیکالها حل کنیم، گاهی اوقات لازم است «کمتهای گنگ فرعی» را دخالت دهیم، یعنی کمتهایی را که نمی‌توان آنها را به صورت توابعی گویا از ریشه‌ها که ضرایبشان در یک هیأت زمینه مفروض واقع‌اند بیان کرد. هولدر اینک می‌پرسد: آیا ممکن است معادله‌ای مفروض را با الحاق ریشه‌های دنباله‌ای از معادلات کمکی حل کرد

1) Casorati-Weierstrass 2) E. Neuenschwander 3) Historia Mathematica 4) Privat Dozent 5) Zur Theorie der trigonometrischen Reihen 6) Zurückführung einer Gleichung auf eine Kette von Gleichungen

به طوری که

(آ) هیچ کمیت گنگ فرعی دخالت داده نشود،

(ب) بعد از الحاق ریشه‌های همه معادلات کمکی قبلی، گروه گالوای هر معادله کمکی ساده باشد؟
جواب، البته، چنین است: به هر سری ترکیبی گروه گالوا، دنباله‌ای از توسیعی‌های هیأتی آن گونه که خواسته شده نظیر می‌شود. هولدر اینک مفهوم «گروه عاملی» را تعریف می‌کند، و نشان می‌دهد که گروه‌های گالوای معادله‌های کمکی منفرد دقیقاً گروه‌های عاملی ساده این سری ترکیبی‌اند. هولدر سپس ثابت می‌کند که این گروه‌های عاملی، صرف‌نظر از ترتیب و یکرختی آنها، به طور یکتا تعریف می‌شوند. این قضیه مهم «ژوردان-هولدر» است. همان‌طور که دیدیم، ژوردان قبلاً ثابت کرده بود که شاخصها در سری ترکیبی صرف‌نظر از ترتیب آنها یکتا هستند.

قضیه ژوردان-هولدر را می‌توان برای گروه‌های نامتناهی توسیع داد. اگر گروهی دارای یک سری ترکیبی باشد، همه چنین سری‌هایی دارای گروه‌های عاملی واحدی با تقریب یکرختی‌اند، و هر زیرگروه نرمال G عضوی از یک سری ترکیبی است. این دو گزاره باز هم نتیجه‌هایی از یک قضیه نظریف کلتری از اوتو شرایر^۱ هستند، که در مورد گروه‌ها با عملگرها نیز برقرار است. ن.ک. اوتو شرایر: خلاصه مذاکرات ریاضی سمینار هامبورگ^۲، ص. ۳۰۰-۳۰۲.

در مقاله‌ای دیگر، هولدر ثابت کرد که یک معادله درجه سوم تحویلناپذیر را که دارای سه ریشه حقیقی است نمی‌توان با رادیکال‌های حقیقی حل کرد.

در سلسله‌ای از مقالات که در ماتماتیشه آنالن در طی سالهای ۱۸۹۲-۱۸۹۵ منتشر شد، هولدر به صورت نظام‌مندی در ساختار گروه‌های متناهی به تحقیق پرداخت. عناوین این مقالات عبارت‌اند از:
در باب گروه‌های ساده^۳. ماتماتیشه آنالن ۴۰، ص. ۵۵-۸۸ (۱۸۹۲).

گروه‌های مرتبه^۳ p^3 ، pqr ، pq^2 . ماتماتیشه آنالن ۴۳، ص. ۳۰۱-۴۱۲ (۱۸۹۳).

ساختن گروه‌های مرکب^۴. ماتماتیشه آنالن ۴۶، ص. ۳۱۲-۴۲۲ (۱۸۹۵).

مسئله مطرح شده در مقاله اخیر عبارت است از: اگر ساختار گروه عاملی $\frac{G}{H}$ و ساختار مقسوم‌علیه نرمال H مفروض باشند، چگونه می‌توان همه ساختارهای ممکن گروه G را پیدا کرد؟ هولدر، و بعداً شرایر، روشهایی را برای حل این مسئله ابداع کردند. ن.ک. آ. شرایر: در باب توسیع گروه‌ها^۵، I، ماهنامه ریاضی و فیزیک^۶ ۳۴، و II، خلاصه مذاکرات ریاضی سمینار هامبورگ^۲، ص. ۳۲۱-۳۴۶ (۱۹۲۶).

در مقاله دیگری هولدر ساختار همه گروه‌هایی را که مرتبه آنها خالی از مربع است معین کرد. گروهی

1) Otto Schreier 2) Abhandlungen math. Seminar Hamburg 3) Über einfache Gruppen
4) Bildung zusammengesetzter Gruppen 5) Über die Erweiterung von Gruppen
6) Monatshefte für Mathematik und Physik

مانند G با چنین ویژگی همواره دارای مرکزی دوری مانند H است، و گروه عاملی $\frac{G}{H}$ نیز دوری است. هولدر همچنین نمایش این نوع گروهها را به وسیله تبدیلات خطی روی هیأت اعداد مختلط، معین کرد. در طی سالهای ۱۹۱۴-۱۹۲۳ هولدر عمده‌تاً خود را به مسائل منطقی-فلسفی مشغول داشت. این تحقیقات سرانجام به کتابی ممتاز، گرچه با معروفیتی اندک، با عنوان «روش ریاضی^۱» منجر شد. من سعی کرده‌ام ایده‌های اصلی این کتاب را در آگهی درگذشت هولدر خلاصه کنم. آنچه در زیر می‌آید، ترجمه آزادی از این آگهی است.

بر طبق نظر هولدر، یکی از مشخصه‌های اصلی روش ریاضی را می‌توان ساختن مفاهیم جدیدی توصیف کرد که به عنوان زیرساختاری برای مفاهیم در مرحله‌ای معین موجودند، بدین معنی که: با مفاهیم و روشهایی که در مرحله‌ای معین اعمال شده‌اند، به عنوان موضوع تحقیق ریاضی در مرحله‌ای بالاتری برخورد می‌شود. به عنوان مثال، آلفگوریتیم یا روش خاصی از برهان را اعمال می‌کنیم، و سپس حوزه و حدود این روش را در نظر می‌گیریم تا از خود روش، موضوعی از تحقیق بسازیم. از اینجا، هولدر نتیجه می‌گیرد که ممکن نیست همه ریاضیات را از راه صورتگرایی منطقی درک کرد، زیرا ملاحظات منطقی مربوط به حوزه و حدود صورتگرایی لزوماً بالاتر از صورتگرایی است و هنوز به ریاضیات تعلق دارد. این نتیجه‌گیری کاملاً با تحقیقاتی که بعداً کورت گودل^۲ به عمل آورده تأیید می‌شود.

هولدر این سؤال را نیز مطرح می‌کند که چگونه می‌توان زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای را تعریف کرد. او نتیجه می‌گیرد که مفهوم «مجموعه همه مجموعه‌ها» قابل قبول نیست. اگر این نتیجه قابل قبول باشد، معلوم می‌شود که تعریف ددکیند^۳ از مجموعه اعداد حقیقی به وسیله برشها را نمی‌توان پذیرفت. از این رو، هولدر مجبور می‌شود وجود پیوستار اعداد حقیقی را با اصول موضوعه خاصی مسلم بگیرد. من در اینجا کوشیده‌ام دید روشنی از وسعت کار این ریاضیدان و فیلسوف برجسته ریاضیات را در اختیار خواننده قرار دهم. اکنون به نظریه گروهها بازمی‌گردم.

گروههای خطی متناهی

کامیل ژوردان در ۱۸۷۸ (مجله کرله برای ریاضیات، ۸۴) ثابت کرد که هر گروه متناهی از تبدیلات خطی G دارای یک زیرگروه نرمال آبلی H است به طوری که شاخص i از کرانی که تنها به تعدادی از متغیرها وابسته است، تجاوز نمی‌کند. زیرگروه H را می‌توان به صورت قطری در آورد، یعنی، ماتریسهای آن متشکل از بلوکهایی شود که هر بلوک ضربی مانند λI از یک ماتریس واحد I باشد. این بلوکها با زیرفضاهای خطی فضای برداری n -بعدی مختلط که G روی آن عمل می‌کند، متناظرند، و خود فضای

برداری حاصلجمع مستقیم این زیرفضاهاست. هرگاه زیرفضاهای متعددی با مقادیر مختلف λ موجود باشند، گروه $(\bar{G})$ «غیراولیه» است، یعنی، $(\bar{G})$ این زیرفضاها را جایگشت می‌دهد. بنابراین، اگر $(\bar{G})$ اولیه باشد، زیرگروه H متشکل از مضارب λI از ماتریس واحد I است. در این حالت، گروه عاملی $\frac{G}{H}$ را می‌توان به عنوان یک گروه از تبدیلات تصویری در نظر گرفت، و مرتبه این گروه تصویری کراندار است.

حدود صریح برای شاخص i را بیبرباخ^۱ (۱۹۱۱)، فروبنیوس (۱۹۱۱)، بلیشفلت^۲ (۱۹۱۶)، و اشپایزر^۳ (۱۹۲۷) مشخص کردند. برای تفصیل بیشتر، ن. ک. شرح عالی ا. اشپایزر: نظریه گروههای متناهی-مرتبه^۴ (چاپ چهارم، ص. ۱۹۴-۲۰۲).

در ۱۸۹۸، ا. ه. موره قضیه بسیار مهم ذیل را ثابت کرد (ماتماتیکه آنالن ۵۰، ص. ۲۱۳-۲۱۴): هر گروه متناهی از تبدیلات خطی با ضرایب مختلط یک فرم ارمیتی مثبت

$$\sum a_{ik} \bar{x}_i x_k \quad (a_{ik} = \bar{a}_{ki}) \quad (1)$$

را پایا نگه می‌دارد.

برهان موربی اندازه آسان است: می‌توان همه تبدیلات گروه را بر فرم واحد

$$\sum \bar{x}_k x_k$$

اعمال، و نتایج را با هم جمع کرد.

قبلاً نتیجه مشابهی در ۱۸۹۶ به توسط ا. لوی^۵ به دست آمده بود. این نتیجه بدون اثبات در توضیحی مندرج در گزارشها تحت عنوان «در باره فرمهای معین برای مزدوجهای نامعین م. ارمیتی^۶» (گزارشهای فرهنگستان پاریس ۱۲۳، ص. ۱۶۸-۱۷۱) منتشر شد.

روش مور را در مورد ساختن یک فرم ارمیتی مثبت پایا می‌توان به گروههای فشرده لی توسعه داد. تنها باید انتگرالگیری روی گروه لی را با استفاده از جزء حجمی پایای dV ، مطابق روش آدولف هورویتز^۷، جایگزین مجموعیابی کرد. مقاله او تحت عنوان «در باره تولید پایاها از راه انتگرالگیری^۸» در اخبار انجمن علوم^۹ گوتینگن ۱۸۹۷، ص. ۷۱-۹۰ منتشر شد.

حتی به طور کلیتر: اگر اعضای ماتریسی یک گروه از تبدیلات خطی مختلط کراندار باشند، گروه یک فرم ارمیتی مثبت را پایا نگه می‌دارد. این حکم به توسط ه. آئرباخ^{۱۱} در ۱۹۳۲ ثابت شد (گزارشهای فرهنگستان پاریس ۱۹۵، ص. ۱۳۶۷).

1) Bieberbach 2) Blichfeldt 3) A. Speiser 4) Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung 5) Eliakim Hastings Moore 6) A. Loewy 7) Sur les formes définies à indeterminées conjuguées de M. Hermite 8) Adolf Hurwitz 9) Über die Erzeugung von Invarianten durch Integration 10) Nachrichten der Ges. der Wiss 11) H. Auerbach

اینک به گروههای متناهی برمی گردیم. همان گونه که دیدیم، فلیکس کلاین همه گروههای تصویری دوتایی متناهی، یعنی همه گروههای متناهی از تبدیلات خطی کسری مانند

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

را که در آن ضرایب a, b, c, d اعداد مختلط اند، مشخص کرد. به دست آوردن آسان و مستقیم این گروهها در ۱۹۱۱ به توسط ه. ه. میچل^۱ ارائه شد (خلاصه مذاکرات، انجمن ریاضی امریکا ۱۲، ص. ۲۰۸-۲۱۱).

تحقیق در گروههای متناهی تصویری سه تایی به توسط ک. ژوردان (۱۸۷۸) و ه. والیتینز^۲ (۱۸۸۹) آغاز و به توسط ه. ف. بلیشفلت (ماتماتیکه آنالن ۶۳، ص. ۵۵۲-۵۷۲، ۱۹۰۷) کامل شد. گروه متعامد تصویری حقیقی $PO(4, \mathbb{R})$ با بعد ۴، حاصل ضرب مستقیمی است از دو زیرگروه یکرخت با گروه یکانی تصویری دوتایی مختلط $PU(2, \mathbb{C})$:

$$PO(4, \mathbb{R}) \cong PU(2, \mathbb{C}) \times PU(2, \mathbb{C}).$$

این یکرختی به توسط ا. گورسا^۳ در ۱۸۸۹ (سالنامه دانشسرای عالی پاریس^۴ (۳) ۶، ص. ۹-۱۰۲) برای تعیین همه زیرگروههای متناهی $PO(4, \mathbb{R})$ به کار گرفته شد. گروههای متناظر با دورانههای چهار بعدی به توسط و. ثرلفال^۵ و ه. زایفرت^۶ در ۱۹۳۱ (ماتماتیکه آنالن ۱۰۴، ص. ۱-۷۰) معین شده است.

در ۱۹۰۵، ه. ف. بلیشفلت همه گروههای خطی متناهی اولیه با بعد ۴ را معین کرد (ماتماتیکه آنالن ۶۰، ص. ۲۰۴-۲۳۱).

برای شرح کاملی از نظریه گروههای خطی متناهی ن. ک. کتاب من، «گروههای تبدیلات خطی»، انتشارات اشپرینگر فرانک ۱۹۳۵.

فصل ۹

گروه‌های لی و جبرهای لی

بخش (آ) گروه‌های لی

آنچه را ما امروزه گروه لی می‌نامیم، سوفوس لی و پیروانش، «گروه پیوسته متناهی» خوانده‌اند. این گروه، گروه توپولوژیک همبندی است که در آن اعضای واقع در یک همسایگی هر عضو گروه به طور یکتا با مقادیر $a_1, \dots, a_r$ پارامتر r در مجموعه‌ی بازی از یک فضای اقلیدسی تغییر می‌کنند، مشخص می‌شوند. این پارامترها ممکن است متغیرهای حقیقی یا مختلط باشند.

نظریه‌ی لی

مفاهیم اساسی نظریه‌ی لی در مورد «گروه‌های پیوسته متناهی» قبلاً در اولین سلسله از مقالات او در این موضوع، که در طی سالهای ۱۸۷۴-۱۸۷۹ منتشر شده‌اند (مجموعه‌ی رسالات^۱ ۵، ص. ۱-۲۲۳)، آمده‌اند. ولی در این مقالات نخست، نحوه‌ی ارائه مفاهیمش به هیچوجه رضایتبخش نیست. به عنوان مثال، لی حدس زد که همه‌ی اعضای یک گروه r -بعدی از تبدیلات را می‌توان به وسیله‌ی مقادیر r پارامتر $a_1, \dots, a_r$ مشخص کرد. بعدها پی برد که این پارامتریسازی در بسیاری از حالات تنها به طور موضعی، در یک همسایگی هر عضو از گروه، برقرار است. همچنین در تعریف مفهوم «گروه»، لی تنها فرض می‌کند که حاصلضربهای اعضای گروه در گروه هستند، و ادعا می‌کند که یک گروه تبدیلی به این معنی، باید الزاماً شامل همانی و وارون هر عضو گروه باشد. بعدها تشخیص داد که وجود همانی و وارون T^{-1} باید به صورت اصل موضوع عرضه شود.

1) Gesammelte Abhandlungen

در دسامبر ۱۸۸۰، لی مقاله‌ای تحت عنوان «نظریهٔ گروههای تبدیلات»^۱ به ماتماتیشه آنالن (۱۶، ص. ۴۴۱-۵۲۸) ارائه داد، که در آن شرح بهتری از نظریه‌اش را عرضه کرده بود. ترجمه‌ای انگلیسی از این مقاله، با توضیحات بسیار مفید، در ۱۹۷۵ به توسط م. اکرم^۲ و ر. هرمان^۳ تحت عنوان «مقالهٔ گروه تبدیلات سال ۱۸۸۰ سوفوس لی»^۴ منتشر شد.

در مقالات نخست، لی ویژگی توابعی را که تبدیلات یک گروه را تعریف می‌کنند، مشخص نکرده بود. او در مقالهٔ خود به ماتماتیشه آنالن، فرض کرد که این توابع باید توابع تحلیلی باشند، که با سریهای توانی در همسایگی هر نقطه از حوزه تعریفشان تعریف شده‌اند. فرض شد که گروهها شامل وارون T^{-1} اعضای خود هستند، و برخی از اشتباهات موجود در مقالات نخست لی اصلاح شد.

باز هم شرح بهتری از کل نظریه در اثری ماندگار در سه مجلد از سوفوس لی و فریدریش انگل^۵ تحت عنوان «نظریهٔ گروههای تبدیلات» (توینر^۶، لایزیگ ۱۸۸۸-۱۸۹۳) ارائه شد. این اثر بسیار مؤثر واقع شد: همهٔ ما نظریهٔ لی را از آن آموختیم. در شرحی که ذیلاً می‌آورم، از این اثر استانده به عنوان منبع اصلی استفاده خواهم کرد.

لی و انگل از همان آغاز، تبدیلات

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

را در نظر می‌گیرند که در حوزه معینی مانند D با توابع تحلیلی f_i ، که درمیان تابعی آن ناصفر است، تعریف شده‌اند. بنابراین، اگر خود را به همسایگی مناسبی از نقاط D محدود کنیم، تبدیلات وارونپذیر می‌شوند.

مولفان، سپس، تبدیلات (۱) را که به r پارامتر $a_1, \dots, a_r$ وابسته‌اند در نظر می‌گیرند:

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r). \quad (2)$$

دوباره، فرض می‌شود که توابع f_i توابعی تحلیلی از x و a هستند که در حوزه معینی تعریف شده‌اند. وانگهی، مولفان فرض می‌کنند که پارامترها «اصلی» اند، یعنی، ممکن نیست همین مجموعه از تبدیلات را با کمتر از r پارامتر نمایش داد.

اگر حاصلضرب دو تبدیل (۲) همواره به این مجموعه متعلق باشد، مجموعه را یک گروه پیوسته متناهی می‌خوانند. ثابت می‌شود که ترکیب دو عضو گروه با توابع تحلیلی

$$c_k = \varphi_k(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r) \quad (3)$$

1) Theorie der Transformationsgruppen 2) M. Ackermann 3) R. Hermann

4) از انتشارات Math. Sci. Press, Brookline, Mass.

5) Friedrich Engle 6) Teubner

تعریف می‌شود.

این قضیه و بسیاری از قضیه‌های آتی تنها به طور موضعی، در یک همسایگی تبدیل همانی و در یک همسایگی نقطه‌ای مانند « x » از خمینه که گروه بر آن عمل می‌کند برقرار است. بیشتر اوقات، خمینه‌ها و گروه را می‌توان تنها به طور موضعی پارامتری کرد، و حاصلضرب دو عضو گروه در یک همسایگی همانی ممکن است به راحتی خارج از این همسایگی قرار گیرد. بنابراین، اگر بخواهیم نظریه‌ای دقیق به دست آوریم، باید خود را به همسایگیهای مناسب تبدیل همانی I محدود کنیم. مثلاً، به جای این شرط که حاصلضربهای ST همواره در گروه‌اند، می‌توانیم اصلی موضوع ذیل را در نظر بگیریم «هر همسایگی U از عضو I شامل یک زیرهمسایگی V از I است به طوری که هرگاه S و T در V باشند، حاصلضرب ST ، عضوی از U است». ن.ک. رساله‌أ. شرایر: گروههای پیوسته مجرد^۱، رسالات ریاضی سمینار دانشگاه هامبورگ ۴ (۱۹۲۵) ص. ۱۵-۳۲. در صورتی که همه اظهارات لی و انگل به این طریق حک و اصلاح شوند، می‌توان نظریه‌ای دقیق از گروههای لی، یا بلکه از «هسته‌های گروهی»، یعنی، از مجموعه‌های باز در فضای پارامترهای a که در آن حاصلضربهای ST ، و وارونه‌های S^{-1} ، به طور موضعی تعریف می‌شوند، به دست آورد.

مولفان در صفحه ۲۲ یادآوری می‌کنند که یک گروه پیوسته متناهی، به تعبیر آنها، لازم نیست شامل همانی و تبدیل وارون هر عضو مانند T ، یعنی T^{-1} ، باشد. در اظهارات آتی خود، اغلب شرطی اضافی مانند «اگر گروه شامل همانی باشد ...» را می‌افزایند. آنچه ذیلاً می‌آید، همواره وجود I و T^{-1} را از پیش فرض خواهم کرد.

تبدیلات بینهایت کوچک

نکته اصلی در نظریه لی گذر از تبدیلاتی مانند T به تبدیلاتی است که لی آنها را تبدیلات بینهایت کوچک می‌نامد. لی، در همه مقالات خود، این تبدیلات را با مشتقگیری از تبدیلات (۲) نسبت به پارامترهای a به دست می‌آورد، و آنها را ابتدا به صورت ذیل می‌نویسد:

$$\delta x_i = X_i(x) \delta t. \quad (4)$$

سپس تبدیلات بینهایت کوچک را به عنوان عملگرهای خطی بر توابع $F(x_1, \dots, x_n)$ در نظر می‌گیرد. وی قرار می‌دهد

$$AF = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \quad (5)$$

1) Abstrakte Kontinuierliche Gruppen

این طرز بیان تبدیلات بینهایت کوچک به صورت عملگرهای دیفرانسیل او را مجاز می‌کند تا تعویضگرهای

$$(A, B) = AB - BA \quad (۶)$$

را تشکیل دهد.

اندیشه در نظر گرفتن عملگرهای دیفرانسیل خطی (۵) از آن ژاکوبی است، که «نماد ژاکوبی» (A, B) را معرفی، و «اتحاد ژاکوبی»

$$(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0$$

را ثابت کرد.

لی سپس ثابت می‌کند: تبدیلات بینهایت کوچک متعلق به یک گروه r -بعدی لی، ترکیباتی خطی از r تبدیل بینهایت کوچک مستقل خطی‌اند:

$$A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r, \quad (۷)$$

و هرگاه A و B در مجموعه (۷) باشند، تعویضگر آنها، یعنی (A, B) ، نیز در مجموعه (۷) خواهد بود. برعکس، اگر $A_1, \dots, A_r$ عملهای بینهایت کوچک مستقل خطی باشند به طوری که مجموعه (۷) شامل تعویضگرهای (A, B) نیز باشد، لی حکم می‌کند که هر یک از تبدیلات بینهایت کوچک این مجموعه گروهی یک بعدی تولید می‌کند، و اجتماع این گروههای یک بعدی، یک گروه پیوسته r -بعدی است. این قضیه، به طور موضعی درست است، در واقع، برهان لی به طور موضعی برقرار است. امروزه، مجموعه‌های خطی (۷) که در آن حاصلضربهای (A, B) طوری تعریف می‌شوند که در اصول موضوعه

$$(B, A) = -(A, B)$$

$$(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0$$

صدق کنند، به «جبرهای لی» موسوم‌اند. به عنوان نخستین مقدمه بر نظریه گروههای لی و جبرهای لی مرجع زیر را می‌توانم توصیه کنم:

پ. م. کوهن^۱: گروههای لی. جزوه‌های کیمبرج در ریاضیات ۴۶ (۱۹۵۷).

از اینکه تعویضگرهای (A, B) در مجموعه خطی (۷) هستند، نتیجه می‌شود که

$$(A_i, A_k) = \sum c_{iks} A_s. \quad (۸)$$

ثابتهای c_{iks} تنها به قواعد ترکیب اعضای گروه بستگی دارند، نه به نمایش خاص گروه به عنوان گروهی از تبدیلات. گروههای لی یکرخت، به ازای انتخاب مناسبی از اعضای پایه مجموعه خطی (۷)، دارای ثابتهای واحد c_{iks} هستند. حتی بیش از این: اگر دو گروه G و H به طور موضعی یکرخت باشند، ثابتهای c_{iks} یکی هستند، یا به عبارت دیگر: گروههایی که به طور موضعی یکرخت هستند، معرف جبرهای لی یکرخت هستند.

در کتاب لی و انگل مفهوم «به طور موضعی یکرخت» مطرح نمی‌شود. در صفحه ۲۹۱ مجلد I مؤلفان ادعا می‌کنند که: «هرگاه دو گروه r -بعدی لی دارای یک ثابت c_{iks} باشند، یکرخت‌اند». این ادعا درست نیست. به عنوان مثال، گروه دورانها در حول مبدأ در صفحه مختلط z ، یعنی

$$z' = e^{ia}z,$$

با گروه انتقالهای خط حقیقی

$$x' = x + a$$

به طور موضعی یکرخت است ولی با آن یکرخت نیست. بسی مایه تعجب است که لی و انگل متوجه این موضوع نشدند. آنها معادلات دیفرانسیلی را که عمل گروه را معین می‌کنند با استفاده از سریهای توانی، که در یک همسایگی عضو همانی همگرا هستند، حل کردند، و در همانجا آن را رها ساختند.

سه قضیه اساسی

لی و انگل در فصل ۲۵ مجلد سوم کتابشان «نظریه گروههای تبدیلات»، نکات اصلی این نظریه را در سه قضیه اساسی خلاصه کردند. برای حفظ سبک کتاب، ترجمه‌ای کمابیش خلاصه، ولی نسبتاً تحت‌اللفظی از آن را ارائه خواهم داد.

اولین قضیه اساسی. هرگاه مجموعه‌ای از ∞^r تبدیل

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \quad (9)$$

یک گروه r -بعدی باشد، آنگاه x'_i ها که به عنوان توابعی از a در نظر گرفته شده‌اند، در معادلات دیفرانسیل به صورت

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^n \psi_{jk}(a_1, \dots, a_r) \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n), \quad (10)$$

صدق می‌کنند که در آن دترمینان ψ_{jk} متحد با صفر نیست، و ξ_{ij} چنان است که r عبارت

$$X_k f = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

تبدیلات بینهایت کوچک مستقل را نمایش می‌دهند.

برعکس، اگر مجموعه‌ای مانند (۹) متشکل از ∞^r تبدیل در معادلات دیفرانسیلی به صورت (۱۰) صدق کنند و شامل تبدیل همانی باشند، که در آن دترمینان $\psi_{jk}(a)$ برای تبدیل همانی دارای مقداری متناهی مخالف با صفر است، آنگاه مجموعه (۹) یک گروه r -بعدی با تبدیلات دو به دو وارون است. این گروه بر اجتماع همه گروههای یک بعدی که با ∞^{r-1} تبدیل بینهایت کوچک

$$X F = \sum_1^r \lambda_k X_k F$$

تولید می‌شوند منطبق است.

دومین قضیه اساسی. هر گروه r -بعدی از تبدیلات (۹) متشکل از تبدیلات دو به دو وارون، شامل r تبدیل بینهایت کوچک

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^n \xi_{k\nu}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

است که در روابطی به صورت

$$(X_i, X_k) f = \sum_{s=1}^r c_{iks} X_s f \quad (11)$$

صدق می‌کنند، و این گروه اجتماع ∞^{r-1} زیرگروه یک-بعدی است که با تبدیلات بینهایت کوچک $\sum \lambda_k X_k f$ تولید می‌شوند.

برعکس r تبدیل بینهایت کوچک مستقل $X_1 f, \dots, X_r f$ که در روابطی به صورت (۱۱) صدق می‌کنند، همواره یک گروه r -بعدی با تبدیلات دو به دو وارون تولید می‌کنند.

سومین قضیه اساسی. اگر تبدیلات

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^n \xi_{k\nu}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

تبدیلات بینهایت کوچک مستقلی از یک گروه r -بعدی باشند، که در نتیجه در روابطی به صورت (۱۱) صدق می‌کنند، آنگاه r^2 ثابت c_{iks} که ترکیب اعضای گروه را مشخص می‌کنند، در معادلات

$$c_{iks} + c_{kis} = 0$$

$$\sum_{\tau=1}^r (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kjt} c_{\tau is} + c_{jit} c_{\tau ks}) = 0 \quad (12)$$

صدق می‌کنند.

برعکس، اگر r^2 ثابت صادق در روابط (۱۲) معلوم باشند و اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه r تبدیل بینهایت کوچک مستقل X_i موجودند که در (۱۱) صدق می‌کنند و در نتیجه با این ثابتهای c_{iks} درست یک گروه تولید می‌کنند.

هر یک از این قضیه‌ها دارای دو نیمه است. نیمه نخست به ازای هر گروه لی مانند G' ، و نیز به ازای هر «هسته گروهی» به طور موضعی اقلیدسی که در آن حاصلضربها در یک همسایگی عضویکه تعریف می‌شوند، برقرار است. نیمه دوم، یعنی عکس قضیه‌ها، تنها به طور موضعی برقرارند. برای روشن کردن این مطلب، مثال ذیل را در نظر می‌گیریم.

نیمه بالایی دایره واحد را در صفحه (x, y) در نظر می‌گیریم. هر نقطه را می‌توان با تصویرش روی قطر با مختص اول آن، x ، مشخص کرد. اینک دوران بینهایت کوچکی از این دایره را حول مرکز در نظر می‌گیریم:

$$\delta x = -\sqrt{1-x^2} \delta t.$$

با انتگرالگیری از این دوران بینهایت کوچک، یک «هسته گروهی» متشکل از دورانهایی با زاویه‌های بین -180° و $+180^\circ$ به دست می‌آید. دورانه با زاویه‌های بزرگتر را نمی‌توان با تبدیلات پاره‌خط بین -1 و $+1$ روی محور x ‌ها، نمایش داد.

از اینجا نتیجه می‌شود که دو قضیه اساسی اول و دوم تنها به طور موضعی در همسایگی تبدیل همانی برقرارند.

این وضعیت برای قضیه سوم پیچیده‌تر است. اگر یک جبر لی مفروض باشد، یعنی، اگر ضرایب c_{iks} معلوم باشند، می‌توان ثابت کرد که یک هسته گروهی لی موجودست که دقیقاً دارای این ثابتهاست. این حکم به توسط ف. شور^۱ در ۱۸۸۹ ثابت شد. اما، وجود یک گروه فراموضعی لی متناظر با یک جبر لی مفروض تنها مدتها بعد به توسط الی کارتان^۲ به اثبات رسید.

برای بحث جامعی از کل مسأله پی‌ریزی دقیق قضیه‌های اساسی لی، خواننده را می‌توانم به منابع زیر

ارجاع دهم:

ف. شور: مبانی جدید نظریه گروههای تبدیلات منتهای^۱، ماتماتیشه آنالن ۳۵، ص. ۱۶۱-۱۹۷ (۱۸۹۰)؛

ا. کارتان: نظریه گروههای منتهای و پیوسته و هندسه وضعی^۲، پاریس ۱۹۳۰؛

ا. کارتان: نظریه گروههای منتهای و پیوسته و هندسه دیفرانسیل^۳، پاریس ۱۹۳۷؛

د. مونتگومری^۴ و ل. زیپین^۵: گروههای تبدیلات توپولوژیک، نیویورک ۱۹۵۵.

در مقاله اخیر، مؤلفان ثابت می‌کنند که لازم نیست مانند ف. شور فرض کرد، که توابع مرکب (۳) دارای مشتقات پیوسته مرتبه دوم هستند. هرگاه این توابع پیوسته باشند، می‌توان با معرفی متغیرهای جدید آنها را به توابع تحلیلی بدل کرد.

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره تاریخ نظریه گروههای لی ن. ک. ه. فرویدنتال: جبر توپولوژیک به ویژه گروههای توپولوژیک و گروههای لی^۶، مجله روو دو سنتز^۷ (۳)، شماره‌های ۴۹-۵۲، ص. ۲۲۳-۲۴۳ (۱۹۶۸).

بخش (ب) جبرهای لی

قضیه‌های اصلی بخش (آ) و نتیجه‌های مستقیم آنها را می‌توان چنین خلاصه کرد:

هر گروه لی معرّف یک جبر لی است. برعکس، اگر جبر لی مفروض باشد، ساختار گروه لی به طور موضعی کاملاً معین می‌شود، یعنی، دو گروه لی که دارای جبرهای لی یکریخت باشند، به طور موضعی یکریخت‌اند. زیرگروههای موضعی لی گروه لی با زیرجبرهای جبر لی معین می‌شوند. اگر گروه لی به طور موضعی ساده باشد، یعنی اگر فاقد زیرگروه پایای لی معین باشد، آنگاه جبر لی ساده است، یعنی، به جز خودش و صفر ایدالی ندارد. بنابراین، برای بررسی ساختار گروههای لی و به خصوص ساختار گروههای ساده لی، باید ساختار جبرهای لی و به خصوص جبرهای ساده لی را بررسی کرد.

1) Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. 2) La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Paris 1930. 3) La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle Paris 1937. 4) D. Montgomery 5) L. Zippin 6) L'algèbre topologique, en particulier les groupes topologiques et de Lie 7) Revue de Synthèse.

نظریه ساختاری جبرهای لی اساساً مرهون کارهای ویلهلم کیلینگ^۱ و الی کارتان است. ذیلاً خطوط کلی تاریخ این نظریه ساختاری را ترسیم خواهیم کرد.

سوفوس لی و فریدریش انگل

در سال ۱۸۸۳، لی همه جبرهای ساده با بعد r را که دارای زیرجبرهای ماکسیمالی به بعدهای $1, r-1, r-2, r-3, \dots, r$ هستند، معین کرد. بعداً، با استفاده از مقاله‌ای از م. پیچ^۲ (مجله امریکایی ریاضیات ۱۰، ۱۸۸۸) در بررسی حالت $r-4$ نیز موفق شد.

در ۱۸۸۵، لی مقاله‌ای تحت عنوان «تحقیقات کلی درباره معادلات دیفرانسیلی که یک گروه پیوسته متناهی پدید می‌آورد»^۳ (ماتماتیشه آنالن ۲۵، ص. ۷۱-۱۵۱) منتشر کرد. در این مقاله و یک مقاله بعدی^۴ لی چهار نوع از گروههای به طور موضعی ساده لی ذیل را معرفی کرد.

نوع (آ): گروههای خطی تصویری $PGL(n, \mathbb{C})$ با فرض $n > 1$

نوع (ب): گروههای متعامد تصویری $PO(2n, \mathbb{C})$ با فرض $2n > 4$

نوع (پ): گروههای سیمپلکتیک $PSp(2n, \mathbb{C})$ که یک فرم دو خطی متناوب مانند

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \dots + (x_{2n-1} y_{2n} - x_{2n} y_{2n-1})$$

را به خودش تبدیل می‌کند،

نوع (ت): گروههای متعامد تصویری $PO(2n-1, \mathbb{C})$ با فرض $2n-1 > 1$.

یک جبر لی را انتگرالپذیر یا حلپذیر گویند هرگاه سری ترکیبی مانند

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_m = \{0\}$$

داشته باشد که در آن هر عامل ترکیبی مانند $\frac{A_{i-1}}{A_i}$ یک جبر یک بعدی لی باشد.

فریدریش انگل در مقاله‌ای^۵ که در سال ۱۸۸۷ منتشر کرد، نشان داد که هر جبر انتگرالپذیر لی شامل یک زیرجبر ساده سه بعدی است، و برعکس.

1) Wilhelm Killing 2) M. Page 3) Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuierliche, endliche Gruppen gestatten

۴) منتشره در Sitzungsberichte Sächs. Ges. der Wiss. سال ۱۸۸۹، ص. ۲۶۷-۲۸۹

۵) منتشره در مجله فوق سال ۱۸۸۷، ص. ۸۹-۹۹

ویلهم کیلینگ

ویلهم کیلینگ (۱۸۴۷-۱۹۲۳) معلم ریاضیات در دبیرستان دولتی هوزیانا^۱ در براونسبرگ^۲ (برانیوو^۳ کنونی، لهستان) بود. نقطه شروع تحقیقات او در گروههای لی موضوعی موسوم به «مسأله فضا» بود. می‌توان آن را چنین بیان کرد:

چند نوع هندسه متری می‌توان تصور کرد که در آن اجسام صلب می‌توانند آزادانه حرکت کنند؟ هندسه‌های معروف اقلیدسی و ناقلیدسی مثالهایی از این نوع‌اند. مسأله از این قرار است: اگر شرایطی بر حرکت‌های آزاد تحمیل کنیم آیا هندسه‌های دیگری هم ممکن است پدید آیند؟ کیلینگ یادآوری می‌کند که حرکت‌های آزاد الزاماً باید یک گروه لی تشکیل دهند. بدین ترتیب، او به تحقیق در ساختارهای ممکن گروههای لی هدایت شد.

در طی سالهای ۱۸۸۸-۱۸۹۰، کیلینگ سلسله‌ای از مقالات راهگشا تحت عنوان «ترکیب ثابتهای گروههای تبدیلات متناهی»^۴ در ماتماتیشه آنالن^۵ ۳۱، ۳۳، ۳۴، و ۳۶ منتشر کرد. الی کارتان در مقدمه‌اش بر جلد اول کتاب «مجموعه آثار» خود در صفحه ۲۵ می‌نویسد:

در یک رشته از مقالاتی که در ماتماتیشه آنالن از ۱۸۸۸ تا ۱۸۹۰ منتشر شده، کیلینگ گام مهمی در این نظریه برداشته است.

و در صفحه ۲۶:

هدف از کارهای اولیه‌ام که در رساله دکترایم (۱۸۹۴) مندرج است، عرضه و اثبات دقیق قضایایی است که کیلینگ به دست آورده است ... لذا من رویهم‌رفته کاری جز سر و سامان دادن به قضایای او انجام نداده‌ام. سعی کرده‌ام نظم و دقت را در همه جا اندکی رعایت کنم و جاهای خالی را که احیاناً در استدلال‌ها وجود داشته‌اند پر کنم و قضایایی را که بر پایه قضایای نادقیق نهاده شده بودند بر پایه‌های محکمی استوار سازم.

الی کارتان نتایج به دست آمده از سوی کیلینگ را در مدخل رساله‌اش به شرح ذیل تقریر می‌کند:

۱. علاوه بر چهار رده بزرگ از گروههای ساده که لی کشف کرده است، درست پنج ساختار ممکن از گروههای ساده موجودند که به ترتیب دارای ۱۴، ۵۲، ۷۸، ۱۳۳، و ۲۴۸ پارامترند.
۲. هر گروه انتگرال‌ناپذیر لی (به طور موضعی) مرکب از یک زیرگروه پایای انتگرال‌پذیر و زیرگروه دیگری است که حاصلضرب مستقیمی از گروههای ساده لی است.

یادآوری: یک زیرگروه پایای H از گروه G که با شرط:

$$aHa^{-1} = H, \quad \text{به ازای هر } a \text{ از } G,$$

مشخص می‌شود، همان چیزی است که امروزه آن را زیرگروه نرمال می‌گویند، جبر لی متناظر با چنین زیرگروهی را یک ایدآل در جبر لی $\mathfrak{g}$ می‌نامند.

از دو قضیه ۱ و ۲ که به توسط کیلینگ معرفی شده است، همان‌طور که در بخش آتی خواهیم دید، قضیه اول به طور کامل به وسیله کارتان ثابت شد. در مورد قضیه دوم، کارتان در صفحه ۱۱۵ رساله‌اش اشاره می‌کند که برهان کیلینگ «آشکارا ناکافی» است. چنانکه خواهیم دید، کارتان به جای قضیه ۲ قضیه ضعیفتری را می‌گذارد: هر گروه لی مانند $\mathfrak{g}$ شامل یک زیرگروه پایای انتگرالپذیر ماکسیمال Γ است به طوری که $\mathfrak{g}/\Gamma$ حاصلضرب مستقیمی از گروههای ساده است.

در آنچه ذیلاً می‌آید، اغلب از اصطلاحات لی، کیلینگ، و کارتان استفاده خواهد کرد. یعنی، از گروههای لی و زیرگروههای آن با حذف کلمه موضع صحبت خواهیم کرد. بهرحال، لازم است خواننده بداند که همه برهانهای ارائه شده به توسط این مؤلفان متقدم بر پایه توجه به تبدیلات بینهایت کوچک این گروهها، یعنی با توجه به جبرهای لی، استوار است. با وجود این بعدها، کارتان خواص فراموضعی گروههای لی را نیز بررسی کرد، ولی این بررسی به موضوع بحث فصل حاضر مربوط نمی‌شود.

الی کارتان

الی کارتان (۱۸۶۹-۱۹۵۱) یکی از بزرگترین و مبتکرترین ریاضیدانان عصر خود بود. در سال ۱۸۹۴، او رساله مشهور خود «در باب ساختار گروههای تبدیلات متناهی و پیوسته» (مجموعه آثار، I، ص. ۱۳۷-۲۸۵) را منتشر کرد، که یکی از مهمترین مقالات ریاضی است که تاکنون تهیه شده است.

کارتان در مقدمه رساله دکترایش، از رساله دکترای آرتور اوملاؤف^۱ تحت عنوان «در باب ساختمان گروههای تبدیلات پیوسته متناهی»^۲ (لایپزیگ ۱۸۹۱) یاد می‌کند که با راهنمایی فریدریش انگل تدوین شده است. در این رساله، برخی از قضیه‌ها که به توسط کیلینگ اعلام شده است، به دقت، ثابت می‌شوند. خلاءهای موجود در برهانهای کیلینگ به توسط کارتان پر شدند.

برای تشریح روش کیلینگ و برهانهای کارتان، لازم است چند کلمه‌ای راجع به مفهوم گروه الحاقی صحبت کنم.

هر عضو t از یک گروه لی مانند $\mathfrak{g}$ ، یک خودریختی داخلی از $\mathfrak{g}$ مانند

$$x \mapsto x' = txt^{-1}$$

1) Sur la structure des groupes de transformations finis et continus 2) Arthur Umlauf

3) Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen

القا می‌کند. این خودریختی، یک خودریختی از جبر لی L_G مانند

$$X \rightarrow X' = TX$$

را القا می‌کند.

تبدیلات خطی T که بدین ترتیب تعریف می‌شوند، یک گروه تشکیل می‌دهند: گروه الحاقی گروه مفروض.

به هر عضو t از G یک تبدیل خطی نظیر می‌شود، و نگاشت $t \mapsto T$ یک همریختی است. هسته این همریختی مرکز G است.

این همریختی، یک همریختی از جبر لی، L_G ، به جبر لی گروه الحاقی، L_A ، القا می‌کند. به هر عضو

$$X = \sum_i^r X_i \lambda_i, \quad (1)$$

از جبر لی L_G یک تبدیل خطی جبر لی L_A :

$$A = \sum_i^r A_i \lambda_i, \quad (2)$$

نظیر می‌شود، یعنی

$$AY = (X, Y) \quad (3)$$

ماتریس این تبدیل خطی A نیز با A نشان داده می‌شود.

ریشه‌های مشخصه

معادله مشخصه ماتریس A عبارت است از

$$\Delta(w) = \det(A - wI) = 0 \quad (4)$$

در حالت مورد نظر ما، اعضای a_{ij} ماتریس A توابعی خطی از λ_i هستند، بنابراین، $\Delta(w)$ یک فرم همگن درجه r برحسب $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ و w است. کارتان قرار می‌دهد

$$(-1)^r \Delta(w) = w^r - \psi_1(\lambda) w^{r-1} + \dots + (-1)^k \psi_{r-k}(\lambda) w^k \quad (5)$$

و فرض می‌کند که $\psi_{r-k}(\lambda)$ متحد با صفر نیست. اینک X_1 ، نخستین عضو پایه، را به عنوان یک عضو «عمومی» طوری انتخاب می‌کند که

$$\psi_{r-k}(\lambda) \neq 0, \quad \text{به ازای } X = X_1,$$

معادله (۴) به ازای $X = X_1$ ، به موجب

$$(X_1, X_1) = 0,$$

حتماً یک ریشه $w = 0$ دارد، بنابراین k همواره ناصفر است. ریشه $w = 0$ دارای تکرر از مرتبه k به ازای $X = X_1$ است.

می‌دانیم که به ازای هر ریشه w_1 از معادله مشخصه ویژه برداری مانند Y_1 موجود است که

$$(X_1, Y_1) = w_1 Y_1.$$

اگر ریشه دارای تکرری از مرتبه $1 < m = m_1$ باشد، می‌توان ویژه بردار دیگری مانند Y_2 به پیمانه Y_1 چنان پیدا کرد که

$$(X_1, Y_2) = w_1 Y_2 + c_1 Y_1,$$

و به همین ترتیب برای بقیه. بنابراین می‌توان مجموعه‌ای از m بردار $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ به دست آورد. در این صورت، گویند این اعضا و ترکیبهای خطی آنها

$$Y = Y_1 \gamma_1 + \dots + Y_m \gamma_m$$

به ریشه w_1 تعلق دارند. این ریشه‌ها با ویژگی

$$(A - w_1 I)^m Y = 0$$

مشخص می‌شوند.

بر روی هم، تعداد

$$r = k + m_1 + \dots + m_p$$

عضو مستقل خطی Y_i متعلق به ریشه‌های $0, w_1, \dots, w_p$ از معادله (۴) موجودند، و این اعضا را می‌توان به عنوان اعضای پایه جبر لی انتخاب کرد. در صورتی که فرم نرمال ژوردان تبدیل خطی A را در نظر بگیریم، حکم اخیر کاملاً روشن می‌شود.

اگر جبر لی L_G حلپذیر باشد، به آسانی دیده می‌شود که همه ریشه‌های معادله مشخصه صفرند، لذا در این حالت داریم

$$(-1)^r \Delta(w) = w^r.$$

برعکس، اگر همه ریشه‌ها صفر باشند، L_G بنابر قضیه انگل حلپذیر است. برهان او، با کمی حک و اصلاح، در صفحه ۴۶ رساله کارتان (مجموعه آثار، I، ص. ۱۷۶) بازسازی شده است. قضیه زیر از کیلینگ است:

حاصلضرب لی دو عضو متعلق به ریشه‌های w_α و w_β صفر است هرگاه $w_\alpha + w_\beta$ یک ریشه نباشد، و به w_γ متعلق است هرگاه $w_\alpha + w_\beta = w_\gamma$.

یک حالت خاص این قضیه چنین است: اگر X و Y به ریشه صفر متعلق باشند، (X, Y) نیز به ریشه صفر متعلق است. بنابراین، اعضای مانند X که به ریشه صفر تعلق دارند، زیرجبری مانند L_H از جبر لی L_G تشکیل می‌دهند. بر طبق قضیه انگل، L_H حلپذیر است. جبر حلپذیر لی L_H نقشی اساسی در تحقیقات کیلینگ و کارتان ایفا می‌کند.

فرض کنیم

$$X_\lambda = X_1 \lambda_1 + \dots + X_k \lambda_k$$

یک عضو عام زیرجبر L_H باشد. یعنی فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ متغیر باشند. چندجمله‌ای مشخصه (۵) را به ازای $X = X_1$ تشکیل داده‌ایم، ولی می‌توانیم درست به همین ترتیب آن را به ازای $X = X_k$ تشکیل دهیم. کارتان اینک ثابت می‌کند (رساله، ص. ۳۸ = مجموعه آثار، I، ص. ۱۶۸) که ریشه‌های w_α این چندجمله‌ای تابعهای خطی از متغیرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ هستند. این قضیه را، در حالتی که H آبلی باشد، کیلینگ ثابت کرده بود.

به پیروی از وایل، من نماد w_α را ساده می‌کنم و به جای آن α می‌نویسم. پس هر ریشه α تابعی است خطی از $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

گروههای نیمساده لی

گروه لی G را نیمساده گویند هرگاه هیچ زیرگروه پایای حلپذیر لی نداشته باشد. در مورد جبر لی L_G این مفهوم بدین معنی است که هیچ ایدآل حلپذیر ندارد.

کارتان در رساله‌اش، ص. ۵۳ (مجموعه آثار، I، ص. ۱۸۳) ثابت می‌کند که:

قضیه IV. هر گروه نیمساده لی حاصلضرب مستقیمی از زیرگروههای پایای ساده است.

بنابراین مطالعه گروههای نیمساده لی یا جبرهای نیمساده لی را می توان به مطالعه گروههای ساده لی و جبرهای ساده لی تبدیل کرد.

سپس، کارتان ثابت می کند که:

قضیه V . اگر G نیمساده باشد، $X_1, \dots, X_k$ زیرگروه آبلی ماکسیمالی مانند H تولید می کنند. ریشه های مشخصه ناصفر α جملگی ساده اند و آنها را می توان به زوجهایی با مجموع $\circ$ تقسیم کرد: $\alpha + \alpha' = \circ$ ، بنابراین، $\alpha' = -\alpha$. اگر X_α و $X_{-\alpha}$ به چنین زوجی متعلق باشند، حاصلضرب لی

$$(X_\alpha, X_{-\alpha})$$

به L_H متعلق است و هرگز صفر نیست. اگر α یک ریشه باشد، مضارب آن $2\alpha, 3\alpha, \dots$ ریشه نیستند. به موجب این قضیه، روابط معرف یک جبر نیمساده لی مانند L_G را می توان خیلی زیاد ساده کرد. مثلاً اعضای پایه را می توان به صورت ذیل انتخاب کرد:

k عضو $X_1, \dots, X_k$ که زیرجبر L_H را تولید کنند،
و $r - k$ عضو Y_α به ریشه ساده α متعلق باشند.
حال روابط معرف چنین می شوند:

$$(X_\lambda, X_\mu) = \circ$$

$$(X_\lambda, Y_\alpha) = \alpha Y_\alpha$$

$$(Y_\alpha, Y_\beta) = \circ \quad \text{اگر } \alpha + \beta \text{ یک ریشه نباشد،}$$

$$(Y_\alpha, Y_\beta) = Y_{\alpha+\beta} c_{\alpha+\beta} \quad \text{اگر } \alpha + \beta \neq \circ \text{ یک ریشه باشد،}$$

$$(Y_\alpha, Y_{-\alpha}) = X_1 b_{\alpha_1} + \dots + X_k b_{\alpha_k}.$$

به عنوان مثال، گروه ساده $SL(n, \mathbb{C})$ را در نظر می گیریم. این گروه متشکل از همه ماتریسهای $n \times n$ با دترمینان ۱ است. تبدیلات بینهایت کوچک آن عبارت اند از همه ماتریسهای A که اثر آنها صفر است. یک زیرجبر آبلی ماکسیمال L_H متشکل است از همه ماتریسهای قطری

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_r & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

که در آن $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$. ریشه‌های α عبارت‌اند از $n(n-1)$ تفاضل $\lambda_i - \lambda_j$. Y_α ها عبارت‌اند از ماتریسهای c_{ij} که درایه واقع در سطر i م و ستون j م آنها ۱ و درایه‌های دیگر صفراند. داریم

$$(X_\lambda, X_\mu) = 0$$

$$(X_\lambda, c_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)c_{ij}$$

$$(c_{ij}, c_{jk}) = c_{ik} \quad \text{اگر } i \neq k$$

$$(c_{ji}, c_{kj}) = -c_{ki} \quad \text{اگر } i \neq k$$

$$(c_{ij}, c_{ji}) = X_\lambda \quad (\lambda_i = 1, \lambda_j = -1).$$

با بررسی دقیق همه حالت‌های ممکن، کارتان موفق شد همه انواع گروههای ساده لی را معین کند. ولی به این نتیجه رسید که غیر از چهار دنباله که به توسط لی و پنج گروه استثنایی که به توسط کیلینگ کشف شده بودند، نوع دیگری از گروههای ساده لی وجود ندارد.

نتایج کارتان به توسط وایل^۱، خود من، و دینکین^۲، و فرویدنتال ساده شدند. ن.ک. مراجع ذیل:

ه. وایل: نظریه نمایش گروههای نیمساده پیوسته با تبدیلات خطی^۳، فصل III: «ساختار گروههای نیمساده^۴»، آثار منتخب هرمان وایل، ص. ۳۲۵-۳۴۷، یا مجله ادواری ریاضی^۵ ۲۴، ص. ۳۷۶-۳۵۴ (۱۹۲۶)

ب. ل. وان در واردن: رده‌بندی گروههای ساده لی^۶، مجله ریاضی^۷ ۳۷، ص. ۴۴۶-۴۶۲ (۱۹۳۳).

ا. دینکین: رده‌بندی گروههای ساده لی (به روسی با خلاصه انگلیسی)، مجموعه مقالات ریاضی^۸، ۱۸ (۶۰)، ص. ۳۴۷-۳۵۲ (۱۹۴۶).

ه. فرویدنتال: درباره رده‌بندی گروههای ساده لی^۹، خلاصه مذاکرات فرهنگستان آمستردام^{۱۰} A، ۶۰، ص. ۳۷۹-۳۸۳ (۱۹۵۸).

کارتان در قسمت سوم رساله دکترایش (مجموعه آثار، I، ص. ۲۲۷-۲۸۶) ساختار گروههای حلناپذیر لی را مطالعه می‌کند. او ثابت می‌کند که همه زیرگروههای پایای حلپذیر یک چنین گروه^{۱۱}، جزء یک زیرگروه پایای حلپذیر ماکسیمال Γ هستند که در آن گروه عاملی $\frac{G}{\Gamma}$ با اصطلاحات

1) H. Weyl 2) E. Dynkin 3) Theorie der Darstellung Kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen 4) Struktur der halb-einfachen Gruppen
5) Math. Zeitschrift 6) Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen 7) Math. Sbornik
8) Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen 9) Proceedings Akad.

امروزی، آنچه او ثابت می‌کند این است که همه ایدآلهای پوچتوان در یک جبر لی مانند L جزء یک ایدآل پوچتوان ماکسیمال مانند R اند، که امروزه آن را رادیکال L می‌گوییم. حلقه مانده‌ها، $\frac{L}{R}$ ، حاصلجمع مستقیمی از جبرهای ساده لی است.

گروه دایل (S)

فرض کنیم L_G جبر لی یک گروه ساده لی G ، و L_H ، مانند قبل، جبر لی متعلق به یک زیرگروه آبدی ماکسیمال H باشد. اینک اعضای L_H به صورت

$$X_\lambda = X_1 \lambda^1 + \dots + X_k \lambda^k$$

نوشته می‌شوند.

هرمان وایل، در بخش ۴ فصل سوم مرجعی که قبلاً ذکر شد (آثار منتخب هرمان وایل، ص. ۳۳۸-۳۴۲) ثابت می‌کند که پایه $(X_1, \dots, X_k)$ ی جبر لی L_H را می‌توان چنان انتخاب کرد که ریشه‌های

$$\alpha(\lambda) = \alpha_1 \lambda^1 + \dots + \alpha_k \lambda^k$$

دارای ضرایب گویا باشند.

وایل به پیروی از کیلینگ و کارتان، فرم درجه دوم

$$Q(\lambda) = \Sigma \alpha(\lambda)^2$$

را معرفی و ثابت می‌کند که این فرم مثبت است. با به‌کارگیری اصطلاحات نسبیت عمومی، Q را به صورت

$$Q = g_{ij} \lambda^i \lambda^j$$

خواهم نوشت که در آن مجموعیابی ضمنی است. به ازای هر بردار (λ^i) ، می‌توان یک بردار همورد (λ_i) را با فرمول

$$\lambda_i = g_{ij} \lambda^j$$

تعریف کرد.

منعکس این بردار را می‌توان به صورت

$$\lambda^j = g^{ji} \lambda_i$$

نوشت.

حاصلضرب اسکالر یک بردار همورد ρ و برداری مانند λ به صورت

$$(\rho\lambda) = \rho_i \lambda^i$$

و حاصلضرب دو بردار همورد به صورت

$$(\rho\sigma) = g^{ij} \rho_i \sigma_j$$

تعریف می‌شود.

هر ریشه α ، معرف یک صفحه $(\alpha\lambda) = 0$ است، و قرینه آن نسبت به این صفحه با ضابطه

$$\rho' = \rho - 2 \frac{(\alpha\rho)}{(\alpha\alpha)} \alpha$$

تعریف می‌شود.

این قرینه‌های S_α پیشتر به توسط کیلینگ مورد مطالعه واقع شده‌اند. این قرینه‌ها یک گروه متناهی (S) تولید می‌کنند، که مجموعه متناهی ریشه‌های α را به خودش تبدیل می‌کند. در مقالات جدید امروزی، این گروه را «گروه وایل» می‌خوانند.

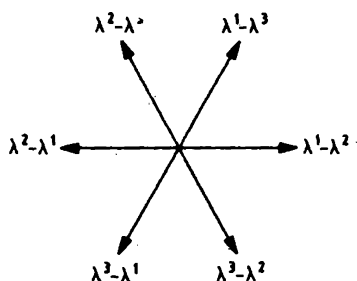
اجازه دهید این مفاهیم را با مثالی روشن کنیم. فرض کنیم i گروه خطی خاص $SL(3, \mathbb{C})$ باشد. جبر لی $L_{\mathbb{C}}$ متشکل از همه ماتریسهای 3×3 است که اثر آنها صفر است. زیرجبر L_H از ماتریسهای قطری

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & & \\ & \lambda^2 & \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

تشکیل می‌شود که در آن $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 0$. ریشه‌های ناصفر عبارت‌اند از ۶ فرم خطی

$$\alpha = \lambda^i - \lambda^j \quad (i \neq j).$$

در فضای بردارهای همورد، این ریشه‌ها را می‌توان به صورت شش بردار که جهت آنها از مرکز یک شش ضلعی منتظم به سمت رئوس آن است مجسم کرد (ن. ک. ش ۲۷). قرینه S_α بردار α را به $-\alpha$ تبدیل می‌کند. گروه (S) که با این قرینه‌ها تولید می‌شود، گروه دو وجهی D_3 است که متشکل از سه دوران و سه تقارن است.



شکل ۲۷

برای حالت کلی ن. ک. ه. س. م. کاکستر^۱: گروههای گسسته حاصل از تقارنها^۲.

جبرهای ساده حقیقی لی

ساختار جبرهای ساده حقیقی به توسط کارتان در ۱۹۱۴ (سالنامه دانشسرایعالی ۳۱، ص. ۲۶۳-۳۵۵) معین شده است. هر جبر لی روی $\mathbb{R}$ را می توان به یک جبر لی روی $\mathbb{C}$ توسعه داد، و اگر جبر حقیقی ساده باشد، توسعه مختلط آن یا ساده است یا حاصلجمع مستقیمی از دو جبر ساده مزدوج مختلط لی است. بنابراین، اگر با انواع معلوم جبرهای ساده مختلط لی شروع کنیم، می توان آن جبرهای حقیقی لی را تعیین کرد که توسعه آنها همین جبرهای ساده مختلط لی باشد. رده بندی جبرهای ساده حقیقی لی به توسط کارتان، با روش زیبایی از سوی ف. گانتماخر^۳ (مجموعه مقالات ریاضی^۴ ۵، ص. ۱۰۱-۱۴۶ و ۲۱۷-۲۴۹، ۱۹۳۹) انجام گرفته است. با تلفیق روشهای گانتماخر و روشهای دینکین، فرویدنتال توانسته است روش ساده تر دیگری را نیز به دست آورد. ن. ک. فرویدنتال: گروههای لی (پلی کی)، دانشگاه بیل^۵ ۱۹۶۱.

همان طور که وایل ثابت کرده است، در بین جبرهای حقیقی لی متعلق به یک جبر ساده لی مفروض، همواره یک جبر لی وجود دارد که یک گروه فشرده لی تولید می کند. ن. ک. آثار منتخب هرمان وایل، ص. ۳۴۲-۳۴۶. این امر، در نظریه نمایش گروههای ساده لی، چنان که در فصل ۱۴ خواهیم دید، از اهمیت اساسی برخوردار است.

1) H. S. M. Coxeter

2) منتشره در. Annals of Math. شماره ۳۵، ص. ۵۸۸-۶۲۱ (۱۹۳۳)

3) F. Gantmakher 4) Mat. Sbornik 5) Yale University

قسمت سوم

جبرها

فصل ۱۰

کشف جبرها

در فصل حاضر، کشف جبرهای خاص یا «دستگاههای اعداد ابر مختلط» نظیر اعداد مختلط معمولی، کواترنیونها، اوکتانیونها، و غیره توصیف خواهند شد. نظریه کلی ساختار جبرها موضوع فصل بعد، یعنی فصل ۱۱، خواهد بود.

اعداد مختلط

چنانکه در فصل ۲ دیدیم، کاردان اولین کسی بود که اعداد مختلط به صورت $5 + \sqrt{-15}$ و $5 - \sqrt{-15}$ را به عنوان جوابهای مسئله تجزیه 10 به دو جزء که حاصلضرب آنها 40 است، معرفی کرد. با وجود این، معرفی این اعداد مرموز سبب «شکنجه ذهنی» او شد. گام بعدی از سوی بومبلی^۱ برداشته شد که عبارات

$$\text{più di meno} (= i) \quad ((i =)) \text{ (زیاد از کم)}$$

$$\text{meno di meno} (= -i) \quad ((-i =)) \text{ (کم از کم)}$$

را به کار برد و قواعدی برای محاسبه با اعداد مختلط ارائه داد. همانگونه که دیدیم، او ریشههای سوم اعداد مختلط را برای حل معادلات درجه سوم در «حالتهای تحویلناپذیر^۲» به کار برد.

آلبرژیرار^۳ (۱۶۲۹) اعداد $a \pm \sqrt{-b}$ را جوابهای محال^۴ می نامد. اصطلاح اعداد انگاری به توسط دکارت معرفی شده بود. او می نویسد: «برای هر معادله می توان ریشههایی (به تعدادی که درجه اش نشان می دهد) تصور کرد، اما در بسیاری از حالات کمیتی موجود نیست که متناظر با آنچه تصور می شود باشد.» ن. ک. رنه دکارت: مبحث هندسه در: گفتار در روش (۱۶۳۷).

1) Bombelli

۲) این عبارت در متن به ایتالیایی است: casus irreducibilis. م

3) Albert Girard 4) Solutions impossibles

بعد از دکارت، ریاضیدانان پیشرو آزادانه اعداد مختلط را به کار گرفتند. به عنوان مثال، یوهان برنوی^۱ لگاریتمهای اعداد مختلط را به منظور تبدیل انتگرالها به کار برد (مجموعه آثار^۲ مجلد ۱، ص. ۴۰۰). راجر کوتس^۳، آبراهام دو موآور، لئونهارت اویلر از فرمول

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

باخبر بودند.

در مورد کوتس و دو موآور ن. ک. مقاله ابو اشنایدر^۴: آبراهام دو موآور ریاضیدان^۵، بایگانی تاریخ علوم دقیقه^۶، ص. ۲۳۴-۲۴۶ (۱۹۶۸). در مورد اویلر ن. ک. بخش ۱۳۳ کتابش، مدخل در آنالیز بینهایت کوچکها^۷، مجموعه آثار، سری اول، مجلد ۱.

اوایلر اعداد مختلط را به عنوان نقاط یک صفحه با مختصات قائم x و y محسم کرد. با وارد کردن مختصات قطبی r و φ ، نوشت

$$x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

و ریشه‌های معادله

$$z^n = 1$$

را به عنوان رئوس یک چندضلعی منتظم در صفحه z نمایش داد. او تابع نمایی e^z را به ازای مقدار مختلط z تعریف، و ثابت کرد که

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

(ن. ک. بخش ۱۳۸ مدخل فوق‌الذکر).

در بخش ۳۲ همین مدخل، اویلر «قضیه اساسی جبر» را به صورت زیر بیان می‌کند:

هر تابع صحیح z را می‌توان به عاملهای خطی حقیقی یا درجه دوم حقیقی تجزیه کرد. گرچه این حکم هنوز دقیقاً ثابت نشده است، ولی درستی این حکم در آنچه ذیلاً می‌آید بیش از پیش مورد تأیید قرار خواهد گرفت.

یک سال بعد، در ۱۷۴۹، اویلر مقاله‌ای تحت عنوان «پژوهشی در ریشه‌های انگاری معادلات^۸» (مقاله‌های فرهنگستان علوم برلین^۱، مجلد ۵، منتشره در ۱۷۵۱) تألیف کرد؛ در این مقاله تعریف می‌کند:

- 1) Johann Bernoulli 2) Opera omnia 3) Roger Cotes 4) Ivo Schneider 5) Der Mathematiker Abraham de Moiver 6) Archive for History of Exact Sc. 7) Introductio in Analysin Infinitorum 8) Recherches sur les racines imaginaries des equations 9) Mém. Acad. des Sciences Berlin

کمیت انگاری کمیتی را گویند که نه بزرگتر از صفر باشد، نه کوچکتر از صفر باشد، و نه مساوی با صفر. بنابراین چیزی خواهد بود غیرممکن، مثل $\sqrt{-1}$ یا به طور کلی $a + b\sqrt{-1}$.

در بخش ۷ همین مقاله اوایلر به عهده می‌گیرد ثابت کند که می‌توان هر چندجمله‌ای حقیقی برحسب $\sqrt{-1}$ را به حاصلضرب عاملهای خطی حقیقی یا درجه دوم حقیقی تجزیه کرد. نحوه برهان او همانند برهان دوم گاوس است که در فصل ۵ مورد بحث قرار دادیم. با این حال، چنانکه گاوس اشاره می‌کند، در برهان اوایلر وجود ریشه‌ها به طریق تعریف نشده‌ای از پیش فرض می‌شود. به زبان امروزی می‌توان گفت، برهان اوایلر در صورتی درست است که وجود ریشه‌ها در هیاتی که توسیع $\mathbb{R}$ است از پیش فرض شده باشد. گرچه اوایلر بر نمایش هندسی اعداد مختلط به وسیله نقاط در صفحه آگاه بود، با وجود این تعریف رضایتبخشی از مفهوم «عدد مختلط» ارائه نداد. تعریفهای هندسی روشن جمع و ضرب اعداد مختلط را که با پاره‌خطهای جهتدار مجسم می‌شوند، کاسپار وسل^۱ در ۱۷۹۷، ژان روبر آرگان^۲ در ۱۸۰۶، جان وارن^۳ در ۱۸۲۸، و کارل فریدریش گاوس در ۱۸۳۱ ارائه دادند. عبارت «اعداد مختلط» احتمالاً از گاوس است.

ویلیام راونن همیلتن^۴ اعداد مختلط را به صورت زوجهایی از اعداد حقیقی مشروط بر قواعد قراردادی جمع و ضرب تعریف کرد (۱۸۴۳). از طرف دیگر، اوگوستن کوشی^۵ اعداد مختلط را به عنوان رده‌های مانده‌های چندجمله‌ایها در $\mathbb{R}[X]$ به پیمانه $x^2 + 1$ تعبیر کرد (۱۸۴۷).

کشف کوآترنیونها به توسط همیلتن

کوآترنیونهای

$$a + bi + cj + dk$$

شبه اعداد مختلط $a + bi$ هستند که ویلیام راونن همیلتن آنها را در ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ کشف کرد. ضرب کوآترنیونها با قواعد ذیل تعریف می‌شود:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

1) Casper Wessel 2) Jean Robert Argand 3) John Warren 4) William Rowan Hamilton
5) Augustin Cauchy

همیلتن چگونه به این قواعد رسید؟ مسأله‌اش چه بود و چگونه جواب آن را یافت؟ اطلاعات مفیدی در این زمینه‌ها از طریق اسناد و مقالاتی که در مجلد سوم مقالات ریاضی همیلتن (انتشارات دانشگاه کیمبریج ۱۹۶۳) گردآوری شده به دست می‌آوریم، از جمله:

اول، مدخلی در دفترچه یادداشت همیلتن به تاریخ ۱۶ اکتبر ۱۸۴۳ (مقالات ۳، ص. ۱۰۳-۱۰۵)، دوم، نامه‌ای به جان گریوز^۱ به تاریخ ۱۷ اکتبر ۱۸۴۳ (مقالات ۳، ص. ۱۰۶-۱۱۰)، سوم، مقاله‌ای در خلاصه مذاکرات فرهنگستان سلطنتی ایرلند تحت عنوان «انواع جدید کمیات انگاری مرتبط با نظریه کوآترینوها» که در ۱۳ نوامبر ۱۸۴۳ ارائه شده است (مقالات ۳، ص. ۱۱۱-۱۱۶)، چهارم، مقدمه بر «درسهای در کوآترینوها»ی همیلتن، به تاریخ ژوئن ۱۸۵۳ (مقالات ۳، ص. ۱۱۷-۱۵۵)، به ویژه ص. ۱۴۲-۱۴۴)،

پنجم، نامه‌ای به پسرش ارچیبالد^۲ که همیلتن آن را اندکی پیش از مرگش در ۱۸۶۵ نوشته است (مقالات ۳، ص. xv-xvi).

در این اسناد می‌توان مراحل را که همیلتن پیموده است دقیقاً دنبال کرد. در این مورد استثنایی می‌توان به سیر اندیشه یک ریاضیدان هنگامی که خود مسأله‌ای را طرح می‌کند، وقتی که گام به گام به حل آن نزدیک می‌شود، و زمانی که، سرانجام، در پرتو درخششی ذهنی، مسأله را چنان تغییر می‌دهد که قابل حل می‌شود پی برد.

همیلتن نمایش هندسی اعداد مختلط را می‌دانست و آن را به کار می‌بست، اما در مقالات منتشر شده‌اش ترجیح می‌داد که اعداد مختلط را به صورت زوجیهایی از اعداد حقیقی (a, b) تعریف کند. او در اینجا این مسأله را برای خود طرح کرد: چگونه باید سه‌تاییهای عددی مانند (a, b, c) را، به قیاس ضرب زوجیهای (a, b) ، در هم ضرب کرد؟

در نامه مذکور به پسرش، همیلتن می‌نویسد:

هر روز صبح در اوایل ماه مذکور (اکتبر ۱۸۴۳)، وقتی برای صرف صبحانه می‌آمدم، طبق معمول تو و برادرت ویلیام ادوارد^۳ از من می‌پرسیدید: «خوب، پدر، توانستی سه‌تاییها را در هم ضرب کنی؟» همیشه مجبور بودم با تکان غمناک سر به این سؤال جواب منفی بدهم «نه، تنها می‌توانم آنها را با هم جمع و از هم کم کنم.»

به قیاس اعداد مختلط $a + bi$ ، همیلتن سه‌تایی خود را به صورت

$$a + bi + cj$$

می‌نویسد. او واحدهای اصلی خود، یعنی ۱، i ، j ، را به عنوان «پاره‌خطهای جهتدار» دو به دو متعامدی به طول واحد در فضا مجسم می‌کند. بعدها همیلتن خود کلمه بردار را، که من نیز به کار خواهم برد، به کار برد.

وی درصدد برآمد حاصلضربهایی مانند

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj)$$

را به عنوان بردارهایی در یک فضا نمایش دهد. خواست او این است که

اولاً، این عبارت، جمله به جمله قابل ضرب باشد،

ثانیاً، طول بردار حاصلضرب با حاصلضرب طولهای عوامل برابر باشد. او این قاعده را «قانون قدرمطلقها» می‌نامد.

امروزه می‌دانیم که این دو شرط تنها در فضاهایی با بعدهای ۱، ۲، ۴، ۸ برقرارند. این حکم به توسط آدولف هورویس^۱، چنانکه عنقریب خواهیم دید، ثابت شد. بنابراین کوشش همیلتن در فضاهای سه بعدی محکوم به شکست بود. ایده عمیق او، گذر به فضاهای چهار بعدی بود.

نخستین کوششهای او را می‌توان بیشتر از اسناد فهمید. همیلتن، برای تحقق «قانون قدرمطلقها» لااقل در مورد اعداد $a + bi$ ، قرار داد $i^2 = -1$ ، و به همین ترتیب $j^2 = -1$. اما ij و ji چه بودند؟ همیلتن ابتدا فرض کرد $ij = ji$ ، و محاسبه ذیل را انجام داد

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy).$$

سپس پرسید، با ij چه می‌توان کرد؟ آیا ij به صورت $\alpha + \beta i + \gamma j$ است؟

نخستین کوشش. در نامه همیلتن به جان گریوز می‌نویسد:

«به نظر می‌رسد مربع آن (یعنی مربع ij) برابر با ۱ باشد، زیرا $i^2 = j^2 = -1$ ، و این ممکن است ما را وسوسه کند تا فرض کنیم $ij = 1$ یا $ji = -1$ ؛ ولی آیا بدون این دو فرض مجموع مربعات ضریبها در حاصلضرب با حاصلضرب مجموعهای مربعات متناظر در عوامل برابر خواهد شد؟»

دومین کوشش. همیلتن ساده‌ترین حالت، یعنی حالت ذیل، را در نظر می‌گیرد

$$(a + ib + jc)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc.$$

او مجموع مربعات ضرایب ۱، i ، و j را در سمت راست محاسبه کرده و تساوی ذیل را پیدا کرد:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

بنابراین، اظهار داشت، در صورتی که جمله متضمن iz را کلاً نادیده بگیریم شرط مربوط به قدر مطلقها برقرار می‌شود، و به علاوه، $c^2 - b^2 - a^2$ ، $2ab$ ، $2ac$ ، مطابق یک تعمیم مختصر قاعده آقای وارن در مورد نقاط صفحه، دقیقاً عبارت است از مختصات نقطه مربع^۱ که در فضا در نظر گرفته شده است. . . . در واقع، اگر دوران از نیم محور مثبت x به بردار شعاعی نقطه a ، b ، c را، در صفحه خودش، دو برابر کنیم، به امتداد بردار شعاعی مرسوم به نقطه $c^2 - b^2 - a^2$ ، $2ab$ ، $2ac$ می‌رسیم.

سومین کوشش. همیلتن شرح می‌دهد که فرض $iz = 0$ ، که در دومین کوشش آن را در نظر گرفت، بعداً چندان به نظرش درست نیامد. از در نامه‌ای به گریوز می‌نویسد:

مرا بنگر لحظه‌ای وسوسه شدم که خیال کنم $iz = 0$. ولی این فرض، غیرعادی و نامطلوب به نظر می‌رسید، و دریافتیم همین نادیده گرفتن جمله‌ای که زاید^۲ بود با فرضی که به نظرم چندان نامطوبع نمی‌رسید، یعنی با فرض $iz = -iz$ ، قابل حصول است. بنابراین، فرض کردم $iz = k$ و $iz = -k$ ، که مجال این تحقیق را که k صفر است یا نه، به من می‌داد.

کوشش چهارم. همیلتن، تا حدی کلیتر، $a + ib + jc$ و $x + ib + jc$ را در هم ضرب کرد. در نامه‌اش به گریوز، چنین نتیجه می‌گیرد:

ضرب k در اینجا صفر است، و به آسانی معلوم می‌شود که

$$ax - b^2 - c^2, \quad (a + x)b, \quad (a + x)c$$

مختصات درست نقطه حاصلضرب است بدین معنی که اگر دوران از خط واحد به بردار شعاعی (a, b, c) در صفحه خود به دوران از همان خط واحد به بردار شعاعی نقطه عامل دیگر (x, b, c) افزوده شود، نتیجه به بردار شعاعی نقطه حاصلضرب سابق‌الذکر منجر می‌شود؛ و بردار شعاعی اخیر از حیث طول برابر حاصلضرب دو بردار شعاعی قبلی است. این تأییدی است بر درستی $iz = -iz$ ، ولی هنوز اطلاعی از مقدار k ندارم.

جهش به بعد چهارم

بعد از این نتیجه امیدبخش همیلتن به خود می‌گوید: «پس با جرأت تمام حاصلضرب کلی دو سه تایی را امتحان کن» (نامه به گریوز، مقالات همیلتن، ۳، ص. ۱۰۷). او محاسبه زیر انجام داد:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy).$$

(۱) منظور نقطه $(a + ib + jc)$ است که مربع نقطه $a + ib + jc$ است. م

(۲) در متن نامه انگلیسی، این کلمه به زبان فرانسه، *de trop* آمده است. م

او $k = 0$ را امتحان کرد و پرسید: آیا قانون قدرمطلقها برقرار است؟ به عبارت دیگر، آیا اتحاد زیر برقرار است:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2?$$

جواب منفی است، طرف اول از طرف دوم به اندازه $(bz - cy)^2$ بیشتر است. اما، همیلتن می‌گوید، این عدد درست برابر مربع ضریب k در بسط حاصلضرب

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz)$$

است مشروط بر اینکه مانند قبل، بپذیریم که $ji = -k$, $ij = k$ و در همین جا بارقه‌ای پدید می‌آید و به کل مسأله جهتی تازه می‌دهد. در نامه به گریوز، همیلتن می‌نویسد:

و در اینجا این مفهوم بر من روشن شد که ناچار باید آن را پذیرفت، یعنی، مفهوم بعد چهارم فضا به منظور محاسبه با سه‌تاییها ...

یا، با انتقال این پارادوکس به جبر، باید نماد انگاری متمایزِ سومی مانند k را بپذیریم، که نباید با i یا j خلط شود. ولی باید با حاصلضرب اولی، به عنوان مضروبِ فیه، و حاصلضرب دومی، به عنوان مضروب، برابر باشد، و چنین بود که به معرفی کوآترنیونها به صورت $a + ib + jc + kd$ ، یا (a, b, c, d) هدایت شدم.

همیلتن سپس به ذکر دلایلی می‌پردازد که احتمالاً موجب این فکر شد که

$$ik = iij = -j, \quad kj = ijj = -i$$

و

$$ki = j, \quad jk = i$$

و سرانجام

$$k^2 = iji = -iij = -1.$$

از نامه همیلتن به پسرش حتی بیشتر به شرایط خارجی لحظه قاطع رخ نمود این بینش به وی می‌توان پی برد. او می‌نویسد:

اما در شانزدهمین روز ماه [اکتبر ۱۸۴۳] که اتفاقاً دوشنبه و روز جلسه فرهنگستان سلطنتی ایرلند بود، قدم‌زنان عازم شرکت در این جلسه و اداره آن بودم، و مادرت همراه من، در امتداد کانال

سلطنتی، می‌آمد...! و گرچه پیوسته با من حرف می‌زد، ولی افکار عمیقی در ذهنم جریان داشت، که سرانجام منتج به نتیجه شد، که از آن ... ناگهان اهمیتش را احساس کردم. گویی مداری الکتریکی بسته شد، و جرقه‌ای بیرون جهید، جرقه‌ای که منادی (چنانکه بی‌درنگ پیش‌بینی کرده بودم) سالهای دراز اندیشه و کار جهتدار قاطع من بود...

فی‌المجلس یک دفترچهٔ جیبی، که هنوز موجودست، بیرون آوردم، و هماندم آن را در جایی درج کردم. همچنین، در برابر هیجانی که داشتم نتوانستم به سبب وضع نامتعادلی که پیدا کرده بودم مقاومت کنم، هنگام عبور از پل بروهام^۱ با چاقو بر سنگی از آن فرمولهای اساسی در مورد i ، j ، k ، یعنی،

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

را حک کردم که مشتمل بر جواب مسأله است، ولی البته، چون مدتها از ثبت آن گذشته، حالا از بین رفته است.

این نامه پس از سالیان دراز نوشته شد. همیلتن در دفترچه یادداشت خود، که درست در همان روزی که فرمولهای اساسی خود را بر سنگ حک کرده بود، نوشته شده است، روند اندیشه‌های خود را به تفصیل چنین شرح داده است:

گمان می‌کنم اینک ترتیب رشتهٔ افکارم را به خاطر می‌آورم. معادلهٔ $iz = 0$ به شرط برقراری

تساوی

$$(ax - y^2 - z^2)^2 + (a + x)^2(y^2 + z^2) = (a^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

پیشنهاد شد. بنابراین سعی کردم ببینم آیا ممکن است که تساوی

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2.$$

درست نباشد، ولی دریافتم، برای اینکه معادلهٔ فوق درست باشد، جمع کردن $(bz - cy)^2$ با طرف دوم لازم است. همین موضوع وادارم کرد که iz را نادیده نگیرم و به ذهن القا کرد که می‌توانم آن را با k ، یعنی انگاری جدیدی، برابر بگیرم.

همیلتن با خط کشیدن زیر واژه‌های وادار و القا می‌خواهد بر وجه تمایز بین دو تجربهٔ ذهنی تأکید کند. تجربهٔ اول یک استنتاج منطقی وادارکننده بود، که مستقیماً از محاسبه ناشی می‌شد: نمی‌توان iz را مساوی صفر قرار داد، زیرا در این صورت قانون قدرمطلقها برقرار نخواهد ماند. تجربهٔ دوم بینشی بود که در نتیجهٔ بارقه‌ای در مسیر پدید آمد («گویی مداری الکتریکی بسته شد، و جرقه‌ای بیرون جهید»)، یعنی این اندیشه که می‌توان $iz = k$ را به عنوان واحد انگاری جدیدی در نظر گرفت. آنچه همیلتن در اینجا عنوان می‌کند، تحلیل روانشناختی عمیقی است از تفکراتش.

1) Brougham

همین دفترچه یادداشت که همیلتن قواعد ضرب واحدهای i, j, k را در آن ذکر می‌کند، شامل فرمولهایی برای تعیین ضرایب حاصلضرب

$$(a + bi + cj + dk)(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)$$

نیز هست، و شرح مختصری از برهان «قانون قدرمطلقها» را در بر دارد.

برای تکمیل بحث، لازم به تذکر است که قانون ضرب کوترنیونها پیشتر، در اوایل ۱۸۲۰ به توسط گاوس، کشف شده ولی منتشر نشده بود. ن. ک. مقاله^۱ اشتودی^۱ تحت عنوان «نظریه عمومی و عالی کمیتهای مختلط^۲»، دایرةالمعارف علوم ریاضی IA4.

اوکتانیونها

نامه همیلتن به جان گریوز که در آن کشف کوترنیونها را اعلام کرد، در هفدهم اکتبر ۱۸۴۳، یک روز پس از این کشف، نوشته شد. بذری که همیلتن باشید، بر خاک حاصلخیزی افتاد، زیرا گریوز در دسامبر ۱۸۴۳ به زودی جبری با ۸ عضو پایه

$$1, i, j, k, l, m, n, o$$

پیدا کرد، یعنی جبر اوکتاوها، یا اوکتانیونها. گریوز ضرب این آنها را به صورت ذیل تعریف کرد:

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1$$

$$i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no$$

$$j = ki = ln = mo = -ik = -nl = -om$$

$$k = ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn$$

$$l = mi = nj = ok = -im = -jn = -ko$$

$$m = il = oj = kn = -li = -jo = -nk$$

$$n = jl = io = mk = -lj = -oi = -km$$

$$o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk$$

(مقالات همیلتن، مجلد ۳، ص. ۶۴۸).

در ۱۸۴۸ گریوز کشف خود را در خلاصه مذاکرات فرهنگستان ایرلند ۲۱، ص. ۳۳۸ منتشر کرد. در جبر اوکتانیه‌های گریوز، «قانون قدرمطلقها» برقرار است. ولی این جبر، چنانکه همیلتن اشاره می‌کند، شرکتپذیر نیست.

اوکتانیه‌ها از نو به توسط آرثر کیلی در ۱۸۴۵ کشف شدند (مجموعه مقالات I، ص. ۱۲۷ و XI ص. ۳۶۸-۳۷۱). به همین سبب، اوکتانیه‌ها به اعداد کیلی نیز مشهورند.

کلود شوالی^۱ روش اصلاح شده‌ای را که با آن جبری از «اوکتانیه‌ها» ساخته می‌شود، ارائه داده است. او در کتابش «نظریه جبری اسپینورها» (انتشارات دانشگاه کلمبیا ۱۹۵۴)، ص. ۱۲۳-۱۲۸، از فرم ناتکین ۸ متغیره‌ای مانند Q آغاز می‌کند که می‌توان آن را به فرم

$$Q = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + x_7x_8$$

تبدیل کرد، و جبری ۸ بعدی با ضربی شرکتناپذیر مانند $x * y$ می‌سازد به طوری که

$$Q(x * y) = Q(x)Q(y).$$

گریوز سعی کرد تا جبر مشابهی با ۱۶ عضو پایه بسازد که در آن «قانون قدرمطلقها» برقرار باشد، ولی کوشش وی توأم با موفقیت نبود. او توفیقی حاصل نکرد، زیرا امروزه می‌دانیم اتحادهایی به صورت.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \quad (۱)$$

تنها به ازای $n = ۱, ۲, ۴$ یا $n = ۸$ برقرارند. اینک به ارائه خلاصه کوتاهی از تاریخ این اتحادها می‌پردازم.

فرمولهای حاصلضرب برای مجموع مربعات

یقیناً اوایلر بر قانون قدرمطلقها در مورد اعداد مختلط $a + bi$:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (۱)$$

واقف بوده است.

در نامه‌ای از اوایلر به گلدباخ^۲ به تاریخ ۴ مه، ۱۷۴۸، ویراسته پ. ه. فوس^۳ (مکاتبات ریاضی و فیزیک I^۴، پترزبورگ ۱۸۴۳)، فرمول مشابهی برای مجموع چهار مربع پیدا می‌کنیم. این فرمول با «قانون قدرمطلقها»ی همیلتن در مورد کواترنیونها مطابقت دارد.

1) Claude Chevalley 2) Goldbach 3) P. H. Fuss 4) Correspondence mathématique et physique

فرمول مربوط به ۸ مربع، که گریوز و کیلی به وسیله اوکتانینها آن را ثابت کردند، پیشتر به توسط دگن^۱ در سال ۱۸۱۸ کشف شده بود. ن. ک. دگن: *Adumbratio demonstrationis theorematiss arithmeticae maxime generalis*، یادداشتهای فرهنگستان سن پترزبورگ^۲ VIII، ص. ۲۰۷ (۱۸۲۲).

مسئله اصلی همیلتن چنین بود: آیا سه تاییهای (a, b, c) و (x, y, z) را می توان چنان در هم ضرب کرد که قانون قدرمطلقها برقرار باشد؟ به عبارت دیگر: آیا می توان w, v, u را به عنوان توابع دو خطی از a, b, c و x, y, z چنان تعریف کرد که اتحاد

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = u^2 + v^2 + w^2 \quad (2)$$

برقرار باشد؟

اولین کسی که عدم امکان برقراری چنین اتحادهایی را ثابت کرد، آدرین ماری لژاندر^۳ بود. لژاندر در کتاب «نظریه اعداد»^۴ خود (۱۸۳۰)، ذکر می کند که اعداد ۳ و ۲۱ را می توان به صورت مجموع سه مربع از اعداد گویا نوشت:

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$21 = 16 + 4 + 1,$$

در حالی که $63 = 3 \times 21$ را نمی توان بدین صورت نمایش داد، زیرا ۶۳ عدد صحیحی به صورت $8n + 7$ است. از اینجا نتیجه می شود که اتحادی به صورت (۲)، دست کم در صورتی که خود را به فرمهای دو خطی u, v, w با ضرایب گویا محدود کنیم، ممنوع است. ن. ک. آ. م. لژاندر: نظریه اعداد، چاپ سوم، ص. ۱۹۸.

اگر همیلتن از این تذکار لژاندر آگاه بود، شاید از جستجوی ضرب سه تاییها صرف نظر می کرد. خوشبختانه از این تذکر لژاندر بی خبر بود: او خود آموزگار بود.

به این سؤال که به ازای چه مقادیری از n برقراری اتحادی به صورت (۱) ممکن است، سرانجام از سوی آدولف هوروتیس جواب داده شد. او به مدد ضرب ماتریسی ثابت کرد که $n = 1, 2, 4, 8$ تنها حالات ممکن اند. ن. ک. آ. هوروتیس: درباره ترکیب فرمهای درجه دوم دو خطی چند متغیره دلخواه^۵، اخبار انجمن علمی گوتینگن^۶ ۱۸۹۸، ص. ۳۹۹-۳۱۶.

1) C. P. Degen 2) Mémoires de l'Académie de St. Petersburg 3) Adrien Marie Legendre
4) Théorie des nombres 5) Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, 6) Nachrichten Ges. der Wiss. Göttingen

کاربردهای هندسی کواترنیونها

در ۱۸۸۵، کیلی ثابت کرد که دورانهای سه بعدی و نیز چهار بعدی را می‌توان با کواترنیونها نمایش داد. ن. ک. آ. کیلی: تحقیقات بعدی دربارهٔ دترمینانهای چپ^۱، مجله کرله برای ریاضیات ۵۰، ص. ۳۱۲-۳۱۳. همچنین ن. ک. ف. کلاین: دربارهٔ هندسهٔ ناقلیدسی^۲، ماتماتیشه آنالن ۳۷، ص. ۵۴۴-۵۴۶ (۱۸۹۰) و ا. استادی، مقالات ریاضی از کنگره شیکاگو، ۱۸۹۴ نیویورک ۱۸۹۶، ص. ۳۷۶.

ابتدا از حالت چهار بعدی شروع و فرض می‌کنیم

$$X = s + ix + jy + kz$$

متغیر کواترنیونی باشد و فرض می‌کنیم A و B کواترنیونهایی با نرم ۱ باشند. تبدیل

$$X' = AXB^{-1}, \quad (3)$$

یک دوران چهار بعدی است، و همهٔ دورانهای چهار بعدی را می‌توان بدین ترتیب به دست آورد. اگر $B = A$ ، تبدیل

$$X' = AXA^{-1} \quad (4)$$

به دست می‌آید که «جزء اسکالر» کواترنیون X ، یعنی s ، را پایا نگه می‌دارد و «جزء برداری» X یعنی

$$ix + jy + kz$$

را بر طبق یک دوران سه بعدی تغییر می‌دهد. همهٔ دورانهای سه بعدی را می‌توان بدین ترتیب به دست آورد. یعنی: چون A دارای نرم ۱ است، آن را می‌توان به صورت

$$A = \cos \varphi + (ip + jq + kr) \sin \varphi$$

نوشت که در آن $v = (p, q, r)$ بردار واحد است:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

اینک با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که تبدیل (۴) دورانی حول محور v به اندازهٔ زاویهٔ φ است.

1) Recherches ultérieures sur les déterminants gauches

2) Zur Nicht-Euklidischen

اگر کواترینون A به صورت معمول

$$A = a + ib + jc + kd$$

نوشته شده باشد، ضرایب a, b, c, d را پارامترهای دُوران کیلی-کلاین می‌نامند.

کلاین و زومرفلد^۱ در کتاب کلاسیک خود تحت عنوان «در باب نظریهٔ فرفره‌ها»^۲ (۱۸۹۷) از این پارامترها به نحوی نظام‌مند استفاده کردند.

اگر از کواترینونها برای نمایش دورانه‌ها استفاده کنیم، ترکیب دورانه‌ها بسیار آسان می‌شود. اگر دو دوران از کواترینونهای A_1 و A_2 به دست آیند، حاصلضرب آنها از کواترینون $A_1 A_2$ حاصل می‌شود. فرمولهای ترکیب که بدین ترتیب به دست می‌آیند با فرمولهای ترکیب دورانه‌های اولینده رودریگیس^۳ یکی هستند (ن.ک. بخش «در باب گروههای حرکتها»، در فصل ۷).

حساب کواترینونها

در ۱۸۹۶، آدولف هوروتیس مقالهٔ بسیار جالبی با عنوان «در باب نظریهٔ اعداد کواترینون»^۴ (اخبار انجمن علمی گوتینگن ۱۸۹۶، ص. ۳۱۳-۳۴۰) منتشر کرد، که در آن یک نظریهٔ تجزیه برای «کواترینونهای صحیح» ابداع کرد، و آن را در مسألهٔ نمایش اعداد صحیح به صورت مجموع چهار مربع به کار بست. در ۱۹۱۹ هوروتیس اندیشه‌های خود را با برهانهای کامل در جزوهٔ بسیار زیبایی تحت عنوان «درسهای در نظریهٔ اعداد کواترینون»^۵ شرح داد. اینک ضمن تشریح مختصر تاریخچهٔ این مسأله، شرحی از اندیشه‌های هوروتیس را ارائه خواهم کرد.

در ۱۶۲۱. ک. گ. باشه^۶، در ویرایش خود از کتاب حساب دیوفانتوس، اشاره می‌کند که ظاهراً هر عدد صحیح یا مربع است یا مجموعی از ۲ یا ۳ یا ۴ مربع. مؤلفان بعدی این ادعا را «قضیهٔ باشه» نامیدند. باشه این ادعا را به ازای همهٔ اعداد صحیح تا ۳۲۵ تحقیق کرد. اگر جملات صفر را نیز مجاز بدانیم، می‌توان گفت که هر عدد صحیح N مجموعی از چهار مربع است:

$$N = s^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (5)$$

اولین برهان این ادعا، را ژوزف-لویی لاگرانژ در ۱۷۷۲ ارائه داد (مجموعهٔ آثار^۷ ۳، ص. ۱۸۹-۲۰۱). یک سال بعد لئونهارت اویلر برهان ساده‌تری را عرضه داشت (مجموعهٔ آثار، قسمت اول^۸، مجلد ۳، ص.

1) Sommerfeld 2) Über die Theorie des Kreisels 3) Olinde Rodrigues 4) Über die Zahlentheorie der Quaternionen 5) Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen

6) C. G. Bachet 7) Oeuvres 8) Opera omnia, pars prima

(۲۳۹-۲۱۸). برای توضیحات بیشتر می‌توان به تاریخ نظریه اعداد لئرد یوجین دیکسن^۱ مجلد ۲ مراجعه کرد.

در ۱۸۲۸، کارل گوستاو یاکوب ژاکوبی^۲ ثابت کرد که تعداد نمایشهای عدد صحیح N به صورت مجموع چهار مربع صحیح (احتمالاً منفی یا صفر) برابر است با

$$\text{اگر } N \text{ زوج باشد } ۲۴S$$

$$\text{اگر } N \text{ فرد باشد } ۸S$$

که در آن S ، مجموع همه مقسوم‌علیه‌های فرد N است. ن.ک.ک. گ. ی. ژاکوبی: مجموعه آثار^۳، مجلد ۱، ص. ۲۳۹-۲۴۷، و مجلد ۶، ص. ۲۴۵-۲۵۱.

ژاکوبی در برهانش از توابع تتا استفاده می‌کند. برهانی صرفاً جبری، به توسط هوروتیس با به کارگیری نظریه اعداد کوترنیون صحیح ارائه شد. ذیلاً نکات اساسی نظریه او را شرح خواهم داد. هوروتیس چنین تعریف می‌کند: یک کوترنیون

$$q = s + ix + jy + kz$$

با ضرایب گویای s, x, y, z را صحیح گوئیم هرگاه این ضرایب جملگی صحیح یا جملگی به صورت $\frac{1}{p}$ باشند. به عبارت دیگر، کوترنیونهای صحیح، ترکیباتی خطی از

$$s = \frac{1}{p}(1 + i + j + k), i, j, k$$

هستند.

در حلقه کوترنیونهای صحیح، ۲۴ واحد وجود دارد. این عدد، علت وجود عامل ۲۴ را در عبارت ۲۴S که از سوی ژاکوبی کشف شده، روشن می‌کند. نرم یک کوترنیون صحیح مجموعی از چهار مربع است:

$$N = qq' = (s + ix + jy + kz)(s - ix - jy - kz) = s^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (۶)$$

اگر N زوج باشد، اعداد s, x, y, z و z در (۶) الزاماً صحیح‌اند، ولی اگر N فرد باشد، آنها ممکن است به صورت $n + \frac{1}{p}$ باشند. اینک هوروتیس ثابت می‌کند تعداد نمایشهای N به عنوان نرم یک

کواترینون صحیح همواره $24, S$ است. اگر N فرد باشد، اعداد s, x, y, z تنها در $\frac{1}{3}$ حالات صحیح اند؛ از اینجا معلوم می شود که چرا به ازای عدد فرد N تعداد نمایشهای صحیح فقط $8, S$ است.

برای اثبات این قضیه ها، هوروتیس نظریه ای برای تجزیه کواترینونها ابداع کرد. وی ابتدا به وسیله تعمیمی از الگوریتم اقلیدس نشان می دهد که هر ایدال یکطرفه در حلقه کواترینونهای صحیح یک ایدال اصلی است، یعنی، تنها به وسیله یک عضو تولید می شود. نتیجه اینکه هر دو کواترینون صحیح دارای یک «بزرگترین مقسوم علیه مشترک» (راست یا چپ) d هستند.

اگر یک کواترینون q در یکی از 24 واحد مذکور ضرب شود، یک کواترینون وابسته راست یا چپ مانند $q\varepsilon$ یا εq به دست می آید. با محدود کردن انتخاب واحد ε ، هوروتیس حال مفهوم اصلی را معرفی می کند. یک کواترینون را اصلی گویند، که با 1 یا $2p$ یا $1 + i$ یا 2 باشد.

اینک فرض کنیم q کواترینون دلخواهی با نرم فرد باشد. هوروتیس ثابت می کند که از بین 24 کواترینون $q\varepsilon$ (یا εq) که وابسته به q هستند، درست یک کواترینون اصلی وجود دارد.

کواترینون صحیح π را اول گویند، اگر از $ab = \pi$ نتیجه شود که یا a واحد است یا b . هوروتیس ثابت می کند: π اول است اگر و تنها اگر نرم آن، یعنی $\pi\pi'$ ، یک عدد اول معمولی باشد. و: درست $p + 1$ کواترینون اصلی وجود دارد که نرم آنها برابر با یک عدد اول فرد مفروض p است.

سپس هوروتیس قضیه اساسی تجزیه خود را ثابت می کند:

فرض کنیم c کواترینون اصلی باشد، و

$$N(c) = pqr \dots$$

که در آن $p, q, r, \dots$ عاملهای اول (مساوی یا متمایز) $N(c)$ هستند. در این صورت c را تنها به یک طریق می توان به صورت یک حاصلضرب

$$c = \pi \kappa \rho \dots$$

نمایش داد که در آن π, κ, ρ کواترینونهای اصلی با نرمهای $p, q, r, \dots$ اند، درست با همین ترتیب (دلخواه، ولی ثابت).

اینک تعیین تعداد کواترینونهایی که نرم مفروض N دارند، آسان است. نتیجه $24, S$ است.

برای تعمیم روشهای هوروتیس به جبرهای دیگر، ن. ک. مقالات گ. ابرلی^۱ و ه. گروس^۲ در شرح

مجله سوئیسی ریاضیات^۳، ۳۳، ص. ۲۱۲-۲۳۹ و ۳۴، ص. ۱۹۸-۲۲۱.

1) G. Aeberli 2) H. Gross

۳) منتشره در Comment. Math. Helv. شماره ۳۳، ص. ۲۱۲-۲۳۹ و ۳۴، ص. ۱۹۸-۲۲۱.

دوکواترانیونها

همیلتن هر کواترانیون با ضرایب مختلط را دوکواترانیون می‌نامد. ن. ک. و. ر. همیلتن: درسهایی در کواترانیونها (۱۸۵۳)، مق. ۶۶۹. جبر این دوکواترانیونها با حلقه تمام-ماتریسی روی هیأت اعداد مختلط یکریخت است، زیرا کواترانیونهای $a + ib + jc + kd$ با ضرایب مختلط a, b, c, d را می‌توان با ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

نمایش داد.

در ۱۸۷۳ ویلیام کینگدون کلیفورد^۱ مقاله‌ای تحت عنوان «شرح مقدماتی دوکواترانیونها» در خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی لندن ۴، ص. ۳۸۱-۳۹۱ (مقالات ریاضی ص. ۱۸۱-۲۰۴) منتشر کرد. در این مقاله کلیفورد دو نوع مختلف از «دوکواترانیونها» را معرفی کرد. هر دو نوع را می‌توان به صورت

$$q + wr$$

نوشت که در آن q و r کواترانیون‌اند، در حالی که w با همه کواترانیونها تعویضپذیر است. کلیفورد در قسمت اول مقاله‌اش فرض می‌کند که

$$w^2 = 0$$

و دوکواترانیونهای خود را برای بیان حرکت‌های صلب در فضای اقلیدسی به کار می‌برد. در قسمت دوم (بخشهای V-III) فرض می‌کند که

$$w^2 = 1$$

و نوع دوم دوکواترانیونها را برای بیان حرکت‌های نااقلیدسی به کار می‌برد. با دخالت دادن دو واحد جدید

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + w), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - w)$$

ملاحظه می‌کند که

$$\xi^2 = \xi, \quad \eta^2 = \eta, \quad \xi\eta = 0,$$

بنابراین، به زبان اصطلاحات امروزی، می‌توان گفت که جبر دوم دوکواترانیونهای کلیفورد حاصلجمع مستقیمی از دو جبر کواترانیون است.

اولین نوع دوکواترانیونهای کلیفورد به توسط اتوارت اشتودی^۲ برای یافتن یک نمایش پارامتری گروه اقلیدسی حرکت‌های صلب به کار رفت. ن. ک. ا. اشتودی: درباره حرکتها و تغییر مکانها^۳، ماتماتیشه آنالن ۳۹، ص. ۴۴۱-۵۶۶ (۱۸۹۱).

1) William Kingdon Clifford 2) Eduard Study 3) Von den Bewegungen und Umlegungen

جبرهای تمام-ماتریسی

ماتریسهای $n \times n$ ، جبری با بعد n^2 تشکیل می‌دهند. اعضای پایه را می‌توان ماتریسهای ϵ_{ij} در نظر گرفت که در سطر i م و ستون j م ۱ و در سایر مواضع ۰ اند. قواعد ضرب عبارت‌اند از

$$\epsilon_{ij} \epsilon_{jk} = \epsilon_{ik},$$

$$\epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = 0 \quad k \neq j.$$

این جبر را جبر تمام-ماتریسی از رتبه n روی هیأت زمینه K می‌نامند. در مورد تاریخ نظریه ماتریسها، ن. ک. مک‌دافی^۱: نظریه ماتریسها، نتایج ریاسی^۲ II 5 (اشپرنگر-فرلاک ۱۹۳۳، تجدید چاپ به وسیله چلسی^۳). در اینجا تنها به مفاهیم و قضیه‌هایی اشاره خواهیم کرد که در نظریه جبرها از اهمیت زیادی برخوردارند.

تابع مشخصه یک ماتریس A به عنوان چندجمله‌ای از λ به صورت

$$F(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n.$$

تعریف می‌شود.

در صورتی که به جای A ماتریس PAP^{-1} را به کار ببریم، این چندجمله‌ای تغییر نمی‌کند. ضریب جمله دوم آن، اثر ماتریس است:

$$c_1 = \text{tr}(A) = \sum a_{ii}.$$

و آخرین ضریب آن درمینان ذیل است:

$$c_n = \det(A).$$

با توسیع مناسب هیأت زمینه F ، می‌توان ماتریس A را به فرم نرمال ژوردان تبدیل کرد. این فرم نرمال متشکل از بلوکهاست، هر بلوک B_i ماتریسی است که اعضای قطر اصلی آن جملگی برابرند با یک عضو λ_i ، و اعضایی که درست در بالای قطر اصلی واقعند مساوی ۱ و سایر اعضا صفرند. روشن است که چندجمله‌ای مشخصه فرم نرمال عبارت است از:

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

چون تابع مشخصه فرم نرمال PAP^{-1} با تابع مشخصه A مساوی است، از اینجا نتیجه می‌شود که ریشه‌های تابع مشخصه $F(\lambda)$ ، یعنی $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ، درست اعضای قطری فرم نرمال زوردان‌اند. این ریشه‌ها را ریشه‌های اساسی ماتریس A می‌نامند.

بنابر یک قضیه مهم: ماتریس A در «معادله اساسی»

$$F(A) = A^n - c_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n I = 0 \quad (7)$$

صدق می‌کند.

این قضیه ابتدا به توسط کیلی اعلام، و به ازای $n = 2$ و $n = 3$ در مقاله راهگشای او «مقاله‌ای در باب نظریه ماتریسها» خلاصه مذاکرات فلسفی، انجمن سلطنتی لندن ۱۴۸، ص. ۱۷-۳۸ (۱۸۵۸) اثبات شد. این قضیه به توسط ا. لاگر^۲ در مقاله‌اش تحت عنوان «در باب محاسبه دستگاههای خطی^۳»، مجله مدرسه پلی‌تکنیک^۴، ۴۲، ص. ۲۱۵-۲۶۴ (۱۸۶۷) ثابت شد. برهانهای دیگر، به توسط فروبنیوس (۱۸۷۸)، بوخهایم^۵ (۱۸۸۵)، ویر^۶ (۱۸۹۰)، تیر^۷ (۱۸۹۰)، پاش^۸ (۱۸۹۱)، مولین^۹ (۱۸۹۳)، و مجدداً از سوی فروبنیوس (۱۸۹۶) ارائه شد. برای اطلاع از مراجع کامل ن. ک. مقاله ا. اشتودی تحت عنوان «نظریه معمولی و عالی کمیتهای مختلط»، دایرةالمعارف علوم ریاضی I.A4، ص. ۱۷۱ (۱۸۹۸).

معادله (۷) را می‌توان به صورت

$$(A^{n-1} - c_1 A^{n-2} + \dots \pm c_{n-1})A = \pm c_n I$$

نوشت.

در نتیجه، اگر یک عضو A از هر جبر ماتریسی ناکتین، یعنی $c_n = \det(A)$ ناصفر، باشد، ماتریس A در این جبر دارای وارون A^{-1} است.

جبرهای گروهی

در همان مقاله ۱۸۵۴، که در آن کیلی مفهوم گروه مجرد را معرفی کرد (مجله فلسفی، ۷، ص. ۴۰-۴۷)، مفهومی را که امروزه «جبر گروهی» یک گروه متناهی^۱ می‌نامیم، نیز معرفی کرد. اعضای پایه این جبر

- 1) Memoir on the Theory of Matrices
- 2) E. Laguerre
- 3) Sur le calcul des systèmes linéaires
- 4) Journal de l'Ecole polytechnique
- 5) Buchheim
- 6) Weyr
- 7) Taber
- 8) Pasch
- 9) Molien

درست همان اعضای گروه، $g_1, \dots, g_n$ اند. در قاعده ضرب

$$g_j g_k = \sum g_i a_{ijk},$$

ضرایب عبارت‌اند از

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g_j g_k = g_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

هر نمایش گروه G با تبدیلات خطی را می‌توان به یک نمایش جبر گروهی توسیع داد. برعکس، هر نمایش جبر گروهی، نمایشی از گروه را به دست می‌دهد. بنابراین، مطالعه ساختار جبر گروهی در نظریه نمایشهای گروه اهمیت اساسی دارد.

اولین کسی که در ساختار جبر گروهی یک گروه متناهی به تحقیق پرداخت، تئودور مولین^۱ بود. در ۱۸۹۳، وی مقاله مهمی تحت عنوان «در باب دستگاه اعداد مختلط از مراتب بالا» در ماتماتیکه آنالین ۴۱، ص. ۸۳-۱۵۸، منتشر کرد. در این مقاله، مولین قضایای اساسی متعددی را درباره ساختار جبرها روی هیأت اعداد مختلط ثابت کرد (ن. ک. فصل ۱۱). در یک مقاله بعدی با عنوان «تبصره‌ای درباره نظریه گروههای جانشینی همگن»^۲ (خلاصه مذاکرات انجمن محققان علوم طبیعی دانشگاه دورپات^۳ ۱۱، ص. ۲۵۹-۲۷۴)، مولین نظریه کلی خود را بر جبر گروهی یک گروه متناهی اعمال کرد. او ثابت کرد که این جبر گروهی، حاصلجمع مستقیمی از جبرهای تمام-ماتریسی است، و از آنجا نتیجه گرفت که هر نمایش این جبر (و لذا گروه) کاملاً تحویلپذیر است، و هر نمایش تحویلناپذیر در این نمایش منظم مشمول است. در فصل ۱۳، به این موضوع باز خواهیم گشت.

حساب توسیعیهای گراسمان

تا جایی که من اطلاع دارم، اولین کسی که صریحاً مفهوم «فضای برداری n بعدی» را تعریف کرد، هرمان گونتر گراسمان^۴ بود که آن را در کتابش «نظریه توسیعیهای خطی»^۵ آورد. البته، مفهوم «فضای برداری» در آثار مؤلفان متقدم متعددی به طور ضمنی بود. در «پرنکیپیا»^۶ی نیوتن، سرعتها و نیروها بردارند. جمع اعداد مختلط به توسط وسل^۷ و آرگان به صورت جمع «پاره‌خطهای جهتدار» در صفحه تعریف شد.

1) Theodor Molien 2) Über Systeme höherer komplexer Zahlen 3) Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen 4) Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft der Universität Dorpat 5) Hermann Günther Grassmann 6) Die lineare Ausdehnungslehre 7) Principia 8) Wessel

هیأت‌های گالوای $(GF(p^n))$ که به وسیلهٔ گالوا ساخته شدند، فضاهای برداری n بعدی روی هیأت $GF(p)$ هستند. جبر کوآترینیونها یک فضای برداری ۴ بعدی روی $\mathbb{R}$ است، و این امر بر همیلتن معلوم بود، زیرا در نامه‌اش به گریوز نوشت: و در اینجا مفهومی بر من آشکار شد که ناچار باید آن را بپذیرم، یعنی، مفهوم بعد چهارم فضا ...»

درک حساب توسیعیهای گراسمان بسیار دشوار است. توضیحات وی با نظریه‌های فلسفی آمیخته‌اند. بحث او با «اصول کلی فرمها» شروع می‌شود که «باید مقدم بر همهٔ شاخه‌های خاص ریاضیات باشد». تعریف‌های او از جمع و ضرب بردارها در یک فضای برداری n بعدی با ملاحظات صرفاً هندسی، بدون به کارگیری اعضای پایهٔ $e_1, \dots, e_n$ ، صورت گرفته است. از جنبهٔ اصل موضوعی جدید، ما منظور او را درک می‌کنیم، اما معاصرینش از فهم آن ناتوان بوده‌اند.

در ۱۸۶۲، گراسمان کتاب دیگری تحت عنوان «بررسی کامل و دقیق توسیعیها» منتشر کرد، ولی این کتاب نیز، چنانکه خود گراسمان در «پیشگفتار^۲» چاپ دوم (۱۸۷۸) نخستین کتابش در «نظریهٔ توسیعیها» متذکر می‌شود، تأثیر اندکی داشت.

ولی، چنانکه گراسمان در همان پیشگفتار اشاره می‌کند، در سال ۱۸۶۷، هنگامی که هرمان هانکل^۳ قسمت اول کتابش «درسهایی در اعداد مختلط و توابع آنها» را با عنوان فرعی «نظریهٔ دستگاه اعداد مختلط»^۴ منتشر کرد، وضع کاملاً تغییر کرد. عنوان فصل VII این کتاب «نظریه و نمایش هندسی اعداد متناوب»^۵ است. «اعداد متناوب» هانکل درست «اندازهٔ توسیعیها»^۶ی گراسمان است، یعنی بردارهای n بعدی و حاصلضربهای تانسوری متناوب آنها.

در بخش حاضر توضیحات کاملاً روشن هانکل را دنبال خواهیم کرد، که بر طبق اظهار خود هانکل، بر «نظریهٔ توسیعیهای ۱۸۶۲» گراسمان مبتنی‌اند، ولی من آنها را ملاحظه نکرده‌ام.

هانکل جبر را در نظر می‌گیرد که با اعضای $i_1, \dots, i_n$ ، مشروط بر قواعد ضرب

$$i_k i_k = 0$$

$$i_k i_m = -i_m i_k,$$

تولید می‌شود.

-
- 1) Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet 2) Vorrede
 3) Hermann Hankel 4) Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen
 5) Theorie der complexen Zahlensysteme 6) Theorie und geometrische Darstellung der alternierenden Zahlen
 7) Ausdehnungsgrößen

او اشاره می‌کند که اگر α و β بردارهای ذیل باشند:

$$\alpha = a_1 i_1 + \dots + a_n i_n$$

$$\beta = b_1 i_1 + \dots + b_n i_n,$$

آنگاه حاصلضرب

$$\alpha\beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_1 i_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) i_1 i_3 + \dots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) i_{n-1} i_n$$

دارای ویژگی زیر است:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha.$$

به طور کلی، علامت حاصلضرب تعدادی دلخواه از بردارها با تعویض دو عامل متوالی، عوض می‌شود. هانکل به پیروی از گراسمان تعبیری هندسی از حاصلضربهای متناوب بردارها به دست می‌دهد. هرگاه دو بردار بر یک خط واقع باشند، حاصلضرب آنها صفر است. در غیر این صورت، متوازی‌الاضلاعی را که بر صفحه خاصی واقع و مساحت معینی دارد، پدید می‌آورند.

دو حاصلضرب ab و cd در صورتی برابرند که در صفحاتی موازی قرار گیرند و متوازی‌الاضلاعهایی را پدید آورند که دارای یک مساحت، و یک جهت دوران از a به b و از c به d باشند. به همین ترتیب، حاصلضرب سه بردار را می‌توان به صورت متوازی‌السطوح جهتداری ساخت، و قس علیهذا.

حاصلضربهای بردارها و تانسورهای متناوب گراسمان را حاصلضربهای خارجی می‌نامند. در نمایشهای جدید این نظریه، مثلاً در «نظریه جبری اسپینورها»^۱ ی کلود شوالی^۱ (۱۹۵۴)، جبر گراسمان با وارد کردن یک عضو واحد وسعت می‌یابد. این جبر اینک دارای 2^n عضو پایه است:

$$1$$

$$i_a$$

$$i_{ab} = i_a i_b \quad (a < b)$$

$$i_{abc} = i_a i_b i_c \quad (a < b < c)$$

$$i_{12\dots n} = i_1 i_2 \dots i_n.$$

هانکل، در ضمیمه تاریخی کتابش در ص. ۱۴۰، به ما خبر می‌دهد که ضرب خارجی گراسمان را سن-ونان^۲ (۱۸۴۵)، اُبرین^۳ (۱۸۴۷)، و کوشی^۴ (۱۸۵۳) مستقلاً از نو کشف کرده‌اند.

1) Claude Chevalley 2) Saint-Venant 3) O'Brien

جبرهای کلیفورد و دورانها در فضاهاى n بعدی

در ۱۸۷۸، ویلیام کینگدون کلیفورد مقاله‌ای تحت عنوان «کاربردهای جبر توسیعی گراسمان»، مجلهٔ آمریکایی ریاضیات^۱، ص. ۳۵۰-۳۵۸، منتشر کرد، که در آن جبری را تعریف می‌کند که با

$$1, i_1, \dots, i_n,$$

مشروط بر شرایط

$$i_a^2 = -1, \quad i_a i_b = -i_b i_a,$$

تولید می‌شود.

همانند جبر گراسمان، می‌توان 2^n عضو

$$1$$

$$i_a$$

$$i_{ab} = i_a i_b \quad (a < b)$$

و جز آن را به عنوان اعضای پایه در نظر گرفت. این جبر را اولین جبر کلیفورد می‌نامند. به ازای $n = 1$ ، اعداد مختلط و به ازای $n = 2$ ، کواترنیونها به دست می‌آیند.

از حاصلضربهای تعدادی زوج از i ها زیرجبر مهمی تولید می‌شود. امروزه این زیرجبر را دومین جبر کلیفورد می‌نامند. به ازای $n = 3$ ، اعضای پایهٔ این زیرجبر

$$1, i_1 i_2, i_2 i_3, i_3 i_1,$$

از قواعد ضرب کواترنیونها پیروی می‌کنند.

در رساله‌ای بسیار جالب، اما تقریباً فراموش شده، با عنوان «بررسیهایی در باب مجموع مربعات^۲» (بن ۱۸۸۴)، ر. لپشیتس^۳، از دومین جبر کلیفورد برای نمایش ذورانهای n بعدی استفاده می‌کند. او ابتدا ثابت می‌کند که می‌توان هر دوران مانند A را، که به ازای آن $\det(I + A)$ ناصفر است، به صورت

$$A = (I + C)^{-1}(I - C)$$

در آورد که در آن C یک ماتریس پادمتقارن است. سپس، با قرار دادن

$$X = i_1 x_1 + i_2 x_2 + \dots + i_n x_n$$

1) American Journal of Math.

2) Untersuchungen über die Summen von Quadraten

3) R. Lipschitz

$$Y = \lambda y_1 + i_{12} y_2 + \dots + i_{1n} y_n$$

$$\Lambda = \lambda + \sum i_{ab} \lambda_{ab} + \sum i_{abcd} \lambda_{abcd} + \dots$$

(با شرط $a < b < c < \dots$)، ثابت می‌کند که هر دوزان $X \rightarrow Y$ را می‌توان از فرمول

$$\Lambda X = Y \Lambda_1 \quad (۸)$$

به دست آورد که در آن Λ_1 از Λ با قرار دادن i_1 به جای $-i_1$ حاصل می‌شود.

این فرمول بسیار مهم را می‌توان به صورت ساده‌تری نوشت. با قرار دادن

$$Y i_1 = y, \quad X i_1 = x$$

و ضرب طرفین (۸) در i_1 ، خواهیم داشت

$$x = i_1 x_1 + \dots + i_n x_n$$

$$y = i_1 y_1 + \dots + i_n y_n$$

و

$$\Lambda x = y i_1^{-1} \Lambda_1 i_1.$$

ولی $i_1^{-1} \Lambda_1 i_1$ همان Λ است، بنابراین فرمول ساده‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$\Lambda x \Lambda^{-1} = y. \quad (۹)$$

فرمول (۹) نشان می‌دهد که نمایشی از تبدیلات متعامد A به وسیلهٔ اعداد کلیفورد Λ وجود دارد. این نمایش یکتا نیست، زیرا Λ را می‌توان در هر عامل عددی دلخواه ضرب کرد، اما Λ را می‌توان چنان نرم‌دار کرد که تنها عاملهای ± 1 دلخواه باقی بمانند. به حاصلضرب دو عدد کلیفورد Λ و Λ' ، حاصلضرب دورانهای متناظر نظیر می‌شود، بنابراین در اینجا یک نمایش دو مقداری از گروه دورانها را داریم. هیأت زمینه ممکن است $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

همین نمایش دو مقداری دورانهای n بعدی، به ازای $n = 4$ به توسط پ. ا. م. دیراک^۱ در ۱۹۲۸، و به ازای همهٔ n ها به توسط ر. براؤئر^۲ و ه. وایل در ۱۹۳۵ از نوکشف شدند. ذیلاً روش آنها را شرح خواهیم داد.

نظریه الکترون چرخان دیراک

مقاله مشهور پ. ا. م. دیراک «نظریه کوانتوم الکترون» در ژانویه ۱۹۲۸ به انجمن سلطنتی ارائه، و در خلاصه مذاکرات^۱ A 117، ص. ۶۱۰-۶۲۹ منتشر شد.

آغاز بحث دیراک یک معادله موج نسبیتی مرتبه دوم برای یک الکترون آزاد بود، که به توسط ا. کلاین^۲ و و. گوردون^۳ و دیگران مطرح شده بود، و آن را می توان به صورت

$$(-p_z^2 + p_y^2 + p_x^2 + m^2 c^2) \Psi = 0 \quad (10)$$

با فرض

$$p_k = (h/2\pi i) \partial / \partial x_k$$

نوشت که در آن مختصات فضایی الکترون اند و $x_0 = ct$ با قرار دادن $p_0 = -ip_t$ دیراک (۱۰) را به صورت

$$(p_0^2 + p_z^2 + p_y^2 + p_x^2 + m^2 c^2) \Psi = 0 \quad (11)$$

در می آورد.

به دلایل نظریه ای، دیراک می خواهد به جای (۱۱) یک معادله موج مرتبه اول به صورت

$$\left(i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} p_{\mu} + mc \right) \Psi = 0 \quad (12)$$

بگذارد.

معادله (۱۲)، معادله (۱۱) را نتیجه می دهد، مشروط بر اینکه ماتریسهای γ_{μ} در شرایط

$$\gamma_{\mu}^2 = 1 \quad (13)$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

صدق کنند. اگر این شرایط برقرار باشند، مجموع $\sum p_{\mu}^2$ مربع کامل می شود:

$$p_0^2 + p_z^2 + p_y^2 + p_x^2 = (\sum \gamma_{\mu} p_{\mu})^2. \quad (14)$$

دیراک با شروع از ماتریسهای اسپین پاؤلی^۴

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

موفق شد که مجموعه‌ای از ماتریسهای 4×4 مانند γ_μ بسازد که در شرایط (۱۳) صدق کنند.

او سپس پایایی معادله موج (۱۲) را با اثبات اینکه هر جواب (۱۳) بر حسب ماتریسها را می‌توان از جواب اصلی با تبدیلی مانند

$$\gamma'_\mu = \tau \gamma_\mu \tau^{-1} \quad (15)$$

به دست آورد، ثابت کرد.

اگر هر p_μ مشروط بر یک تبدیل لورنتس^۱ مانند

$$p'_\mu = \Sigma a_{\mu\nu} p_\nu$$

باشد، طرف چپ (۱۴) پایا باقی می‌ماند. طرف راست برابر با

$$\left(\Sigma \gamma'_\mu p'_\mu \right)^2$$

می‌شود که در آن γ'_μ ها مجدداً در شرایط (۱۳) صدق می‌کنند، بنابراین می‌توان آنها را به صورت (۱۵) نوشت. لذا، به هر تبدیل لورنتس ماتریسی 4×4 مانند τ نظیر می‌شود، و نمایشی از گروه لورنتس به وسیله ماتریسهای چهار $\times$ چهار τ به دست می‌آید.

در (۱۵)، به جای ماتریس τ می‌توان ماتریس $a\tau$ گذارد، که در آن a ثابت دلخواهی است. اما، ماتریسهای τ را می‌توان چنان نرم‌دار کرد که تنها عاملهای ± 1 دلخواه باقی بمانند، بنابراین، در اینجا یک نمایش دو مقداری برای گروه لورنتس داریم.

اگر ماتریسهای دیراک γ_μ در i ضرب شوند. ماتریسهای $i\gamma_\mu$ به دست می‌آیند ($\mu = 1, 2, 3, 4$) که در قواعد ضرب اعداد کلیفورد صدق می‌کنند. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای $n = 4$ جبر کلیفورد با یک جبر تمام-ماتریسی روی هیأت اعداد مختلط یکریخت است. عنقریب نشان خواهیم داد که به ازای هر مقدار زوج n این چنین است.

برای بسط تاریخی نظریه کوانتوم الکترون چرخان، خواننده را به مقاله‌ام «اصل طرد و اسپین» در مجلد «فیزیک نظری در سده بیستم» به ویراستاری م. فیرتس^۲ و و. ف. وایسکوف^۳، انتشارات اینترساینس^۴ ۱۹۶۰، ارجاع می‌دهم.

اسپینورهای n بعدی

در ۱۹۳۵، ریچارد براوتر^۱ و هرمان وایل مقاله زیبایی تحت عنوان «اسپینورهای n بعدی»، مجله امریکایی ریاضیات، ۵۷، ص. ۴۲۵-۴۴۹ منتشر کردند، و در آن جبرهای کلیفورد را برای به دست آوردن نمایشهای ماتریسی دو مقداری گروه دورانهای n بعدی به کار بستند.

وجود چنین نمایشهایی از اوایل ۱۹۱۳ به توسط الی کارتان شناخته شده بود. کارتان در رساله دکترای خود (۱۸۹۴) رده‌بندی کاملی از جبرهای ساده لی را انجام داده بود، و در مقاله ۱۹۱۳ خود «گروههای تصویری که هیچ خمینه مسطحی را پایا نگه نمی‌دارند»^۲ (بولتن انجمن ریاضی فرانسه ۴۱، ص. ۹۶-۵۳)، همو تمامی نمایشهای ماتریسی تحویلناپذیر این جبرهای لی را معین کرد. در بین این نمایشها، رده‌ای از نمایشها را به دست آورد که، وقتی با هم در نظر گرفته شوند، به نمایشهای دو مقداری گروههای متعامد منجر می‌شوند.

حالتهای $n = 3$ و $n = 6$ از قبل بر فلیکس کلاین و سوفوس لی معلوم بودند. گروه متعامد حقیقی سه بعدی با گروه یکانی خاص $SU(2, \mathbb{C})$ ، و گروه متعامد حقیقی ۶ بعدی با گروه یکانی خاص $SU(4, \mathbb{C})$ به طور موضعی یکرخست‌اند. اگر هیأت زمینه به هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ توسیع یابد، یکرخستیهای موضعی با گروههای خطی خاص $SL(2, \mathbb{C})$ و $SL(4, \mathbb{C})$ ، به دست می‌آیند. برای ملاحظه توضیح کامل این یکرخستیهای مربوط به ازای $n = 4$ و $n = 5$ ، ن. ک. جزوه «گروههای تبدیلات خطی»^۳ من (اشپرینگر-فلاک ۱۹۳۵) ص. ۱۸-۲۸.

کارتان در مقاله ۱۹۱۳ خود، توجهش را به بیان نمایش ماتریسی تبدیلات بینهایت کوچک گروههای کلاسیک، از جمله گروههای دوران، محدود کرد. از سوی دیگر، براوتر و وایل در ساختن نمایشهای دو مقداری فراموضعی به وسیله جبرهای کلیفورد موفق می‌شدند. براوتر و وایل درست در شروع مقاله خود متذکر می‌شوند که:

روش ما عیناً همان روشی است که دیراک در مقاله کلاسیک خود راجع به الکترون چرخان تعقیب کرده است. ما n کمیت p_i را که فرم درجه دوم اساسی را به مربع یک فرم خطی تبدیل می‌کند، معرفی می‌کنیم:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)^2.$$

برای این منظور باید داشته باشیم

$$p_i^2 = 1, \quad p_k p_i = -p_i p_k \quad (k \neq i).$$

- 1) Richard Brauer 2) Les groupes projectifs qui ne laissent aucune multi-
plicité plane 3) Bulletin de la société math. de France 4) Gruppen von linearen
Transformationen

روشن است که هرگاه کمیات $p_1, \dots, p_n$ در i ضرب شوند، درست اعداد کلیفورد $i_1, \dots, i_n$ به دست می آیند. به دلیل رابطه آنها با نظریه الکترون چرخان دیراک، براوئر و وایل کمیات خود را «اسپینورها» می نامند. همین عبارت از سوی الی کارتان نیز در کتاب دو جلدی او «درسهایی در نظریه اسپینورها» (پاریس، هرمان^۲ ۱۹۳۸) به کار رفته است، او در این کتاب به ساختن نمایشهای دو مقداری گروههای متعامد با روشی هندسی می پردازد. این روش، که بسیار پیچیده تر از روش براوئر و وایل است در اینجا مورد بحث قرار نخواهد گرفت.

براوئر و وایل ابتدا یک نمایش ماتریسی جبر اسپینورها را می سازند. اگر n زوج باشد، $n = 2v$ ، این جبر با یک جبر تمام-ماتریسی از رتبه 2^v یکرخت است. اگر n فرد باشد، $n = 2v + 1$ ، جبر اسپینورها حاصلجمع مستقیمی است از دو جبر ماتریسی، ولی دارای زیرجبری است، که همان دومین جبر کلیفورد است که با حاصلضربهای زوج p_i ها، که یک جبر تمام-ماتریسی از رتبه 2^v است، تولید شده است. اگر ماتریسهای $P_1, \dots, P_n$ که مقرف اسپینورهای $p_1, \dots, p_n$ هستند به وسیله تبدیل متعامدی از P_k ها به $P'_1, \dots, P'_n$ تبدیل شوند، یک خودریختی جبر تمام-ماتریسی به دست می آید. اینک (مطابق اثباتی که در بخش ۱۱ مقاله براوئر و وایل آمده است) معلوم می شود که هر خودریختی $X \rightarrow X^*$ از یک جبر تمام-ماتریسی یک خودریختی داخلی است:

$$X^* = AXA^{-1}$$

که در آن ماتریس A ، صرف نظر از یک عامل c ، به طور یکتا معین می شود. بنابراین، یک نمایش چند مقداری گروه متعامد به دست می آید. ماتریسهای A را دوباره می توان چنان نرمدار کرد که تنها عاملهای ± 1 دلخواه باقی بمانند.

برای توضیح بیشتر، ن. ک. مقاله براوئر و وایل، که در «آثار منتخب هرمان وایل^۳» (بیرکهایزر^۴، بازل^۵، ۱۹۵۶)، ص. ۴۳۱-۴۵۴، نیز تجدید چاپ شده است.

تعمیم شوالی

کلود شوالی در کتابش «نظریه جبری اسپینورها» (انتشارات دانشگاه کلمبیا، ۱۹۵۴) نظریه جبرهای کلیفورد را تعمیم داده است. شوالی به جای مجموع $x_1^2 + \dots + x_n^2$ که هم لیشیتس و هم براوئر و وایل از آن شروع کرده اند، یک فرم درجه دوم دلخواه $Q(u)$ را که بر یک فضای برداری n بعدی مانند M تعریف

1) Leçons sur la théorie des spineurs

2) Hermann

3) Selecta Hermann Weyl

4) Birkhäuser 5) Basel

شده در نظر می‌گیرد. هیأت زمینه کاملاً دلخواه است: حتی مشخصه آن می‌تواند دو باشد. شوالی از فضای برداری M و فرم $Q(u)$ یک جبر تعمیم یافته کلیفورده می‌سازد.

من در مقاله‌ای تحت عنوان «جبرهای کلیفورده»، خلاصه مذاکرات فرهنگستان آمستردام^۱ 69 A، ص. ۷۸-۸۳، بیان ساده‌تری از طرز ساختن شوالی ارائه داده‌ام. در مورد نظریه ساختاری شوالی برای جبرهای تعمیم یافته کلیفورده و کاربردهای آن در نظریه نمایش گروه‌های متعامد، خواننده را به رساله شوالی ارجاع می‌دهم.

اگر فرم درجه دوم $Q(u)$ متحد با صفر باشد، جبر شوالی به جبر گراسمان تبدیل می‌شود.

کواترانیونهای تعمیم یافته

فرض کنیم F هیأتی با مشخصه‌ای مخالف ۲ باشد. یک جبر از کواترانیونهای تعمیم یافته با پایه $(1, i, j, k)$ تولید و با قواعد ضرب

$$\begin{aligned} i^2 &= \alpha, & j^2 &= \beta, & k^2 &= -\alpha\beta, \\ ij &= k, & jk &= -i\beta, & ki &= -j\alpha, \\ ji &= -k, & kj &= i\beta, & ik &= j\alpha. \end{aligned}$$

تعریف می‌شود.

نرم کواترانیون تعمیم یافته

$$q = s + ix + jy + kz$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} N(q) &= (s + ix + jy + kz)(s - ix - jy - kz) \\ &= s^2 - \alpha x^2 - \beta y^2 + \alpha\beta z^2. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

جبر کواترانیونهای تعمیم یافته، به معنی مکلگان و دژبرن^۲، نیمساده است (ن. ک. فصل ۱۱). بنابراین یا یک جبر تقسیمی است یا یک جبر تمام-ماتریسی روی هیأت زمینه F . به عبارت دقیقتر: اگر فرم درجه دوم (۱۶) تنها به ازای $s = x = y = z = 0$ مقدار صفر را اختیار کند، هر مقدار ناصفر q دارای وارونی مانند q^{-1} است، و این جبر یک جبر تقسیمی است. از طرف دیگر، اگر این فرم مقدار صفر

بگیرد، مقسوم‌های علیه صفر موجودند و جبر یک جبر تمام-ماتریسی از ماتریسهای 2×2 روی I است. بنابراین آگاهی از اینکه در چه شرایطی فرم درجه دوم (۱۶) مقدار صفر می‌گیرد حائز اهمیت است. هر کواترنیون را می‌توان به صورت

$$q = (s + ix) + j(y - iz) \quad (17)$$

نوشت.

اگر اتفاقاً z صفر باشد، خواهیم داشت

$$q = s + ix + jy. \quad (18)$$

هرگاه z صفر نباشد، می‌توان (۱۷) را از سمت راست در $y + iz$ ضرب کرد، و بدین ترتیب یک کواترنیون به صورت (۱۸) به دست آورد. نرم این کواترنیون چنین است

$$N(q) = s^2 - \alpha x^2 - \beta y^2, \quad (19)$$

و ملاحظه می‌کنیم که: اگر فرم چارتایی (۱۶) مقدار صفر بگیرد، فرم سه‌تایی نیز صفر خواهد گرفت. اینک فرض می‌کنیم F هیأت اعداد گویا باشد. شرایطی که تحت آنها معادله دیوفانتوسی

$$s^2 - \alpha x^2 - \beta y^2 = 0 \quad (20)$$

حلیزیر است، در ۱۷۹۸ به توسط آدرین ماری لژاندر تعیین شد (ن.ک. «نظریه اعداد» او، چاپ سوم، مجلد ۱، بخشهای III و IV). شرط او به صورت ذیل بیان می‌شود:

در (۲۰) می‌توان فرض کرد که α و β اعداد صحیح خالی از مربع‌اند. اگر δ بزرگترین مقسوم علیه مشترک α و β باشد، می‌توان قرار داد $s = \delta \cdot t$ و معادله (۲۰) را بر δ تقسیم کرد. بنابراین یک معادله دیوفانتوسی تحویل یافته

$$at^2 + bx^2 + cy^2 = 0 \quad (21)$$

به دست می‌آید، که در آن a, b, c اعدادی صحیح‌اند به طوری که abc خالی از مربع است.

اینک شرایط حلیزیری گویای (۲۱) عبارت‌اند از

(۱) a, b, c جملگی مثبت و جملگی منفی نباشند.

(۲) اگر p یک عامل اول فرد دلخواه a (یا b یا c) باشد، آنگاه $-bc$ (یا $-ac$ یا $-ab$) یک مانده

درجه دوم به پیمانه p باشد.

واضح است که شرایط ۱) و ۲) لازم‌اند. اینک فرض کنیم این شرایط برقرار باشند. لژاندر ثابت می‌کند که: اگر (۲۱) حلپذیر نبود، می‌توانستیم معادله دیگری را با ضرایب کوچکتر بسازیم که باز هم در این شرایط صدق کند و حلپذیر نباشد. این به یک نزول نامتناهی منجر می‌شود که غیرممکن است. بنابراین (۲۱) حلپذیر است.

این روش «نزول نامتناهی» از لاگرانژ است: «در باره حل مسائل نامعین درجه دوم^۱»، یادداشتهای فرهنگستان برلین^۲ ۲۳ (۱۷۶۹) = آثار لاگرانژ^۳ II، ص. ۳۷۵-۳۹۹. همچنین ن. ک. اندره وایل^۴: نظریه اعداد، رهیافتی تاریخی، ص. ۱۰۰-۱۰۱ و ۳۲۷-۳۲۸.

در ۱۹۲۳ هلموت هاسه^۵ شرایط ۱) و ۲) را به شرح ذیل تغییر داد: معادله (۲۱) باید در مجموعه اعداد حقیقی که جملگی صفر نیستند، و نیز در مجموعه اعداد p -ای که در آن p عدد اول فرد دلخواهی است که در تجزیه abc ظاهر می‌شود، حلپذیر باشد.

این قضیه حالت خاصی از یک اصل کلی است که آن را «اصل موضعی-فراموضعی» هاسه می‌گویند. بر طبق این اصل: اگر یک معادله دیوفانتوسی درجه دوم به ازای همه اعداد اول p ، و نیز به ازای «مکان هندسی»^۶ ∞ به طور موضعی حلپذیر باشد، یعنی، هرگاه در همه هیأت‌های p -ای و همچنین در هیأت $\mathbb{R}$ حلپذیر باشد، آنگاه در اعداد گویا حلپذیر است. این اصل نه تنها برای معادلات درجه دوم همگن سه مجهولی برقرار است، بلکه به طور کلی در مورد همه معادلات دیوفانتوسی درجه دوم همگن برقرار است. ن. ک. ه. هاسه: «در باب قابلیت نمایش اعداد به وسیله فرمهای درجه دوم در هیأت اعداد گویا»، مجله کرله برای ریاضیات ۱۵۲، ص. ۱۲۹-۱۴۸ (۱۹۲۳).

در یک مقاله بعدی (همان مجله ۱۵۳، ص. ۱۱۳-۱۳۰) هاسه اصل موضعی-فراموضعی خود را برای هیأت‌های عددی جبری دلخواه تعمیم داده است. در اینجا باید هیأت‌های عددی p -ای را با هیأت‌های عددی P -ای تعویض کرد که با ایدآلهای اولی مانند P از هیأت عددی F تعریف می‌شوند. درباره حسابهای کواترنیونهای تعمیم یافته به منابع ذیل مراجعه کنید:

ب. ونکوف^۷: در باب حساب کواترنیونها^۸، بولتن فرهنگستان علوم اتحاد جماهیر شوروی (۶) ۱۶، ص. ۲۰۵-۲۴۶ (۱۹۲۳).

لاتیمر^۹: حسابهای جبرهای تعمیم یافته کواترنیونی، مجله امریکایی ریاضیات (۲) ۲۷، ص. ۹۲-۱۰۲ (۱۹۲۶).

1) Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré 2) Mémoires de l'académie de Berlin 3) Oeuvres de Lagrange 4) André Weil 5) Helmut Hasse 6) Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen 7) B. Venkov 8) Zur Arithmetik der Quaternionen 9) C. G. Latimer

- والین^۱: یک جبر درجه دوم و کاربرد آن در مسأله‌ای از آنالیز دیوفانتوسی، بولتن انجمن ریاضی آمریکا ۳۳، ص. ۲۲۱-۲۳۱ (۱۹۲۷).
- گریفیث^۲: جبرهای تعمیم یافته کواترنیونی و نظریه اعداد، مجله امریکایی ریاضیات ۵۰، ص. ۳۰۳-۳۱۴ (۱۹۲۸).
- ه. برانت^۳: نظریه ایدآل در جبرهای کواترنیونها^۴، ماتماتیشه آنالن ۹۹، ص. ۱-۲۹ (۱۹۲۸).
- م. آیشلر^۵: در باب نظریه اعداد جبرهای کواترنیونها^۶، مجله ریاضیات^۷، ص. ۱۲۷-۱۵۱ (۱۹۵۶).
- گ. ابرلی^۸: ارتباط بین کواترنیونها و فرمهای درجه دو. و ایدآلها در حلقه‌های کواترنیونها^۹، یادداشتهای تاریخی ریاضیات سوئیسی^{۱۰} ۳۳، ص. ۲۱۲-۲۳۹ (۱۹۵۹).

حاصلضربهای خارجی

در سال ۱۹۲۹ امی نوتر^{۱۱}، در درسهایش در گوتینگن، نظریه حاصلضربهای خارجی^{۱۲} را به وجود آورد. این نظریه را هلموت هاسه در قسمت دوم مقاله سال ۱۹۳۲ خود «نظریه جبرهای دوری بر یک هیأت عددی جبری»، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا ۳۴، ص. ۱۸۰-۲۰۰ تشریح کرده است. همچنین ن. ک. ماکس دیورینگ^{۱۳}: جبرها (نتایج ریاضی^{۱۴} IV، ۱، اشپرینگر-فرلاک ۱۹۳۵)، ص. ۵۲-۶۷.

فرض می‌کنیم Z یک توسیع نرمال تفکیک‌پذیر یک هیأت F باشد. فرض می‌کنیم n درجه Z روی F ، و G گروه گالوای آن باشد. حاصلضرب خارجی G و Z به عنوان یک جبر مانند A از نوع ذیل تعریف می‌شود:

A دارای Z -پایه‌ای متشکل از n عضو مانند u_s متناظر با اعضای S از G است، که روابط زیر در مورد آنها برقرار است:

$$z u_s = u_s z^S \quad (22)$$

- 1) C. E. Wahlin 2) I. W. Griffith 3) H. Brandt 4) Idealtheorie in Quaternionenalgebren
5) M. Eichler 6) Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren 7) Journal für Math.
8) G. Aeberli 9) Der Zusammenhang zwischen quaternären und quadratischen Formen und Idealen in Quaternionenringen 10) Commentarii Math. Helv. 11) Emmy Noether
12) verschränkte Producte=Cross products 13) Max Deuring 14) Ergebnisse der Math

$$u_S u_T = u_{S,T} a_{S,T}, \quad (23)$$

که در آن $a_{S,T}$ اعضای ناصفری از Z اند. مجموعه ضرایب $a_{S,T}$ را مجموعه عاملی A می نامند. شرکتپذیری A از شرایط

$$a_{S,TR} a_{T,R} = a_{ST,R} a_{S,T}^R \quad (24)$$

ناشی می شود.

جبر A روی F ساده و نرمال است، که بدین معنی است که مرکز F است. به جای مجموعه عاملی می توان یک مجموعه هم ارز

$$b_{S,T} = a_{S,T} c_S^T / c_{ST} \quad (25)$$

را قرار داد.

جبر حاصل از A با توسیع هیأت زمینه F به یک هیأت L را با A_L نشان خواهیم داد. اگر A_L یک جبر تمام-ماتریسی باشد، L را هیأت شکافنده A می گویند. هاسه در صفحه ۱۸۴ مقاله خود ثابت کرد که Z همواره یک هیأت شکافنده است.

جبرهای دوری

رده مهمی از حاصلضربهای خارجی با جبرهای دوری تشکیل می شود. این حاصلضربهای خارجی به توسط لئرد یوجین دیکسن^۱ در مقاله ۱۹۱۴ او «جبرهای خطی و معادلات آبلی»، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا ۱۵، ص. ۳۱-۴۶، ساخته شدند.

فرض کنیم $Z = F(z)$ یک توسیع دوری درجه n از هیأت زمینه F باشد، و فرض کنیم

$$1, S, S^2, \dots, S^{n-1} \quad (S^n = 1)$$

خودریختیهای سازنده گروه گالوای Z باشند. مانند بخش قبل، عضو حاصل از z با اعمال خودریختی S را با z^S نشان می دهیم. اینک جبر دوری A با حاصلضربهای

$$u^i z^k \quad (i, k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (26)$$

1) Leonard Eugen Dickson

مشروط بر قواعد ضرب

$$zu = uz^S \quad (27)$$

$$u^n = \alpha \quad (28)$$

تولید می‌شود، که در آن $\alpha \neq 0$ عضو مفروضی از F است. همه حاصلضربهای $z^k u^j$ را می‌توان با به کارگیری مکرر قاعده (۲۷) به حاصلضربهای (۲۶) تبدیل کرد. نتیجه عبارت است از

$$z^h u^j = u^j (z^k)^{S^j}, \quad (29)$$

و اینک، با اعمال (۲۸) و (۲۹)، هر حاصلضرب دو عضو پایه (۲۶) را می‌توان به صورت حاصلجمعی از جملات (۲۶) با ضرایب در F بیان کرد.

اگر n مساوی ۲ باشد و مشخصه هیأت ۲ نباشد، یک جبر کواترنیونی تعمیم یافته داریم

$$u^2 = \alpha, \quad z^2 = \beta, \quad zu = -uz$$

هر جبر دوری، همواره ساده و نرمال روی F است. جبر A را با علامت ذیل نشان می‌دهند

$$A = (\alpha, Z, S).$$

بر طبق قضیهٔ ودربرن، دو جبر دوری (α, Z, S) و (β, Z, S) روی یک هیأت F بکریخت‌اند اگر و تنها اگر α/β نرم عضوی از Z باشد. ن. ک. مکلاگان ودربرن: دربارهٔ جبرهای تقسیمی، خلاصهٔ مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا، ۲۲، ص. ۱۲۹-۱۳۵ (۱۹۲۱).

ل. ا. دیکسن ثابت کرده است: A یک جبر تقسیمی است هرگاه α^n کوچکترین توان α که نرم عضوی از Z است، باشد. از طرف دیگر، اگر α خود نرم عضوی از Z باشد، جبر A یک جبر تمام-ماتریسی از ماتریسهای $n \times n$ است.

فصل ۱۱

ساختار جبرها

مفاهیم و علامات کلی

اعضای پایه یک جبر را با

$$e_1, \dots, e_n$$

نشان خواهیم داد.

ضرب این اعضا با ضابطه

$$e_j e_k = \sum_i a_{ijk} e_i \quad (1)$$

تعریف می‌شود که ضرایب a_{ijk} از هیأت زمینه F اختیار می‌شوند. اعضای یک جبر به صورت زیر نشان داده خواهند شد:

$$x = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n, \quad (2)$$

$$u = e_1 u_1 + \dots + e_n u_n, \quad (3)$$

که ضرایب در هیأت F اند یا متغیرند. اگر ضرایب $x_1, \dots, x_n$ متغیر باشند، عبارت (۲) را یک عضو عام جبر می‌نامند.

به هر عضو u از یک جبر شرکتپذیر می‌توان یک تبدیل خطی مانند U :

$$x \mapsto ux.$$

را از این جبر به خودش نظیر کرد. نگاشت $x \mapsto Ux$ را نمایش منظم جبر می‌گویند. این نمایش، خواص عادی نمایش یک حلقه را دارد:

$$u + v \rightarrow U + V$$

$$uv \rightarrow UV.$$

هرگاه E_j ماتریس نمایش دهنده e_j در نمایش منظم باشد، داریم

$$U = E_1 u_1 + \dots + E_n u_n. \quad (۴)$$

به ازای هر j ثابت، اعضای ماتریسی E_j ، عبارت‌اند از اعضای a_{ijk} . در صورتی که این جبر عضو واحد داشته باشد، نمایش یک یکرختی است و X ماتریس متناظر با عضو عام x ناتکین است. چنانکه در فصل پیش دیدیم، هر ماتریس ناتکین در یک جبر ماتریسی دارای وارونی در داخل جبر است. از اینجا نتیجه می‌شود که ماتریسهای ناتکین U یک گروه n -پارامتری لی تشکیل می‌دهند. به این ارتباط مهم بین جبرهای شرکتپذیر و گروههای لی به توسط آنری پوانکاره^۱ در مقاله‌اش «در باره اعداد مختلط^۲»، گزارشهای فرهنگستان پاریس^۳ ۹۹، ص. ۷۴۰-۷۴۲ (۱۸۸۴)، اشاره شد. تبدیلات بینهایت کوچک این گروه لی دقیقاً عبارت‌اند از ماتریسهای (۴)، و حاصلضرب لی $[U, V]$ عبارت است از

$$[U, V] = UV - VU. \quad (۵)$$

دومین گروه لی به وسیله تبدیلات ناتکین

$$x \mapsto xv$$

تشکیل می‌شود.

هر تبدیل اولین گروه لی با هر تبدیل دومین گروه لی تعویضپذیر است.

بنجامین پیرس

مقاله پیشگام بنجامین پیرس^۴ «جبرهای شرکتپذیر خطی» در سال ۱۸۷۰ در فرهنگستان ملی علوم در واشنگتن ایراد شد و سپس در ۱۰۰ نسخه برای توزیع خصوصی چاپ سنگی شد. در ۱۸۸۱، پس از مرگ او در مجله امریکایی ریاضیات^۵، ص. ۹۷-۲۱۵ با پیوستهایی از مؤلف و پسرش ک. س. پیرس منتشر شد.

جورج بنکرافت^۵، دوست مؤلف، نسخه‌ای از آن را دریافت کرد. در نامه‌ای منضم بدین نسخه، که در بخش نسخ خطی کتابخانه عمومی نیویورک ضبط است، بنجامین پیرس غرض اصلی این مقاله را

1) Henri Poincaré 2) Sur les nombres complexes 3) Comptes Rendus Acad. Paris

4) Benjamin Peirce 5) George Bancroft

توضیح داده است. گزیده ذیل از این نامه مستخرج از مقاله پیرس، بنجامین مذکور در زندگینامه علمی دانشوران^۱ است.

در این اثر به تحقیق در همه جبرهای ممکن یکتایی، دوتایی، سه تایی، چهارتایی، و پنج تایی که مشروط به بعضی شرایط ساده و تقریباً ضروری اند، پرداخته می شود. این شرایط همان شرایطی اند که نزد جبردانان به توزیعپذیر و شرکتپذیر معروف اند، این اصطلاحات در ص. ۲۱ تعریف می شوند. در این اثر ضمناً به تحقیق در همه جبرهای شش تایی از رده معینی پرداخته شده است، یعنی، جبرهایی که شامل عضوی هستند که در این رساله به خودتوان موسوم است.

پیرس اولین کسی بود که مفاهیم پوچتوان و خودتوان را معرفی کرد. عضوی مانند A را پوچتوان گویند هرگاه یکی از توانهای آن، مانند A^n ، مساوی صفر باشد، و آن را خودتوان نامند در صورتی که $A^2 = A$. اگر i یک عضو پوچتوان باشد، هر عضو A از جبر را می توان به صورت مجموعی مانند

$$A = iA + (A - iA) = B + C \quad (۶)$$

نوشت. جمله اول، یعنی $iA = B$ ، دارای ویژگی $iB = B$ است، در صورتی که جمله C دارای ویژگی $iC = 0$ است.

تجزیه (۶) را در نوشته های ریاضی جدید، یک تجزیه از راست پیرس می گویند. اعضای $iA = B$ یک ایدال راست مانند R تشکیل می دهند که دارای ویژگی $iR = R$ است، و اعضای $A - iA = C$ ایدال راست دیگری مانند R' با ویژگی $iR' = 0$ تشکیل می دهند. خودجبر حاصلجمع مستقیمی از این دو ایدال راست است.

مانند فوق، می توان تجزیه از چپ پیرس را تعریف کرد. با ترکیب دو تجزیه راست و چپ می توان یک تجزیه دو طرفه پیرس مانند

$$A = iAi + (iA - iAi) + (Ai - iAi) + (A - iA - Ai + iAi) \quad (۷)$$

به دست آورد.

این تجزیه ها نقش مهمی در نظریه مکلاگان و دربرن و در همه نمایشهای آتی نظریه کلی جبرها ایفا می کنند.

پیرس قضیه های متعددی را راجع به اعضای خودتوان و پوچتوان ثابت کرد. سپس انواع جبرهایی را که دارای حداکثر شش عضو پایه اند، مطالعه کرد.

ادوارد اشتودی

فهرست پیرس در مورد جبرهای با بعد حداکثر ۶ و حتی بعدهای ۳ و ۴ ناقص بود. فهرست کاملی از جبرهای واحددار با بعد حداکثر ۴ روی هیأت‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به توسط ادوارد اشتودی ارائه شد: «در باب دستگاه اعداد مختلط»^۱، اخبار انجمن علمی گوتینگن ۱۸۸۹، ص. ۲۳۷-۲۶۸.

چنانکه در فصل هفت دیدیم، اشتودی دوکوآنزئون را برای به دست آوردن یک نمایش پارامتری حرکت‌های اقلیدسی به کار برد. وضعیت نظریه جبرها در ۱۸۹۸ به توسط اشتودی در مقاله‌اش با عنوان «نظریه کمیات مختلط عادی و عالی»^۲ در دایرةالمعارف علوم ریاضی^۳ IA 4، مجلد ۱، قسمت ۱، ص. ۱۴۷-۱۸۳ تلخیص شد. الی کارتان این مقاله را در ۱۹۰۸ در مقاله‌اش «اعداد مختلط. شرحی بر مقاله آلمانی ادوارد اشتودی»^۴ در دایرةالمعارف علوم ریاضی^۵ I، ۵ تکمیل کرد.

گوس، وایرشتراس و ددکیند

کارل فریدریش گوس در نقدی در «گزارش دانشمند گوتینگتی»^۶ برای ۱۸۳۱ ضمن بحث از اعداد مختلط و کاربردهای آن، این سؤال را مطرح کرد که چرا «روابط بین اشیایی که چندگونایی با بعد بیش از دو را نشان می‌دهند نمی‌توانند انواع دیگری از کمیات را که در حساب عمومی مجازند به دست دهند» (ن. ک. گوس، مجموعه آثار ۲، ص. ۱۶۹-۱۷۸).

در ۱۸۸۳، کارل تئودور وایرشتراس^۷ در نامه‌ای به هرمان آماندوس شوارتز^۸ در بررسی این سؤال، پاسخ جبری مشخصی به آن داد. این نامه در ۱۸۸۴ در اخبار انجمن علمی گوتینگن (ص. ۳۹۵-۴۱۴) تحت عنوان «در باره نظریه n واحد اصلی که کمیت‌های مختلط را ساخته‌اند»^۹ منتشر شد. در این مقاله، وایرشتراس ثابت کرد که: هر جبر تعویضپذیر ($n > 2$)-بعدی روی $\mathbb{R}$ همواره مقسوم‌علیه‌های صفر دارد. در سال بعد یعنی ۱۸۸۵، ریشارد ددکیند^{۱۰} مقاله‌ای با همان عنوان و در همین «اخبار انجمن علمی گوتینگن» (۱۸۸۵، ص. ۱۴۱-۱۵۹) منتشر کرد، که در آن این مسأله از جنبه کلیتری مورد مطالعه قرار گرفت. ددکیند بحث را با جبر تعویضپذیری روی هیأت اعداد مختلط با قواعد ضرب (۱) آغاز می‌کند.

1) Über Systeme von complexen Zahlen 2) Theorie der gemeinen und höheren complexen Größen 3) Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften 4) Nombres complexes. Exposé d'après l'article allemand de E. Study 5) Göttinger gelehrte Anzeigen 6) Karl Theodor Weierstrass 7) Amandus Schwarz 8) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen 9) Richard Dedekind

او قرار می دهد

$$p_{ij} = \sum_{r,s} a_{rsr} a_{sij} \quad (۸)$$

و فرض می کند که

$$\det(p_{ij}) \neq 0. \quad (۹)$$

ددکیند، تحت این شرایط، ثابت می کند که اعضای پایه جدید e'_i را نمی توان چنان معرفی کرد که

$$e'_j e'_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ e'_k & (j = k) \end{cases} \quad (۱۰)$$

این بدین معنی است که: این جبر حاصلجمع مستقیمی از نسخه های هیأت مختلط $\mathbb{Q}$ است.

گئورگ شفرز

چنانکه دیدیم، آتری پوانکاره در ۱۸۸۴ متذکر شد که هر جبر واحددار روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ معرف زوجی از گروه های تعویض پذیر لی است. این تذکر، تأثیر عمیقی در سوفوس لی، که در ۱۸۸۶ به مقام استادی دانشگاه لایپزیگ نایل آمد، برجای گذاشت. لی در درسهایش کراراً مخاطبان خود را برای به کارگیری روش های نظریه گروه های لی در مطالعه ساختار جبرها دعوت کرد.

این دعوت از سوی گئورگ شفرز، نخستین شاگرد لی، پذیرفته شد. شفرز در مقاله اش «تبدیل دستگاه حسابی اعداد مختلط به فرم های خاص»^۶ ماتماتیشه آنالن ۳۹، ص. ۲۹۲-۳۹۰ (۱۸۹۱) به مطالعه جبر های شرکت پذیر واحددار روی هیأت اعداد مختلط پرداخت. نقطه آغاز بحث او ارتباط بین جبرها و گروه های لی بود که فوقاً بدان اشاره شد.

در نظریه گروه های لی تمایز مهمی بین گروه های حل پذیر و حل پذیر (یا انتگرال پذیر) لی پدید می آید. هر گروه حل پذیر لی دارای یک سری ترکیبی است که در آن همه گروه های عاملی یک بعدی اند. متناظر با این تمایز، شفرز تمایزی را بین دستگاه های کوآترنیونی و دستگاه های غیر کوآترنیونی معرفی کرد. بنابر تعریف، یک جبر یک دستگاه غیر کوآترنیونی است هرگاه یک سری ترکیبی از ایدآلهای دوطرفه با بدهای ۱، ۲، ۳، ...، n داشته باشد:

$$(e_i)$$

$$(e_1, e_2)$$

$$(e_1, e_2, e_3), \dots$$

حالا شفرز ثابت می‌کند که:

یک جبر روی n یک دستگاه کواترنیونی است اگر و تنها اگر حاوی زیرجبری یکریخت با جبر کواترنیونها باشد به طوری که عضو واحد آن همان عضو واحد خودجبر باشد. یک جبر A را تحویلپذیر گویند هرگاه حاصلجمع مستقیمی از دو زیرجبر واقعی خود مانند

$$A = B + C$$

باشد به طوری که $BC = 0$.

شفرز، قضیه‌های متعددی را درباره ساختار دستگاه‌های غیرکواترنیونی ثابت کرد. به کمک این قضیه‌ها، او توانست همه دستگاه‌های غیرکواترنیونی تحویلناپذیر را که حداکثر دارای ۵ عضو پایه‌اند، بسازد. ه. روهر^۱، با روش متفاوتی همه جبرهای تا بعد حداکثر ۵ را در رساله دکترای خود (ماربورگ^۲، ۱۸۹۰) تحت عنوان «درباره ۵ واحد اصلی که دستگاه حسابی اعداد مختلط را می‌سازند»^۳ معین کرد. نتایج او با نتایج شفرز مطابقت دارد. شفرز، در ادامه مقاله او، همه دستگاه‌های کواترنیونی تحویلناپذیر تا ۸ عضو پایه را نیز معین کرد.

تئودور مولین

تئودور مولین^۴ (۱۸۶۱-۱۹۴۱) در ریگا^۵ متولد شد و در دانشگاه دورپات^۶ (تارتو^۷ فعلی) در استونی^۸ تحصیل کرد. مدت کوتاهی را (۱۸۸۴-۸۵) در لایپزیگ در دورانی که فلیکس کلاین استاد آنجا بود، سپری کرد. در ۱۸۸۵ در دانشگاه دورپات «دوستنت» شد، و در اوت ۱۸۹۱ رساله خود را با عنوان «در باب دستگاه اعداد ابر مختلط»^۹، که در ماتماتیشه آنالن^{۱۰} ۴۱، ص. ۸۳-۱۵۶ (۱۸۹۳) چاپ شد، به پایان رسانید.

در ۱۸۹۷ مولین دو مقاله در نمایشهای گروههای متناهی منتشر کرد که در فصل آتی مورد بحث واقع خواهد شد. او در ۱۹۰۱ استاد ریاضیات دانشگاه تومسک^{۱۰} در سبیری شد.

- 1) H. Rohr 2) Marburg 3) Über die aus 5 Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme 4) Theodor Molien 5) Riga 6) Dorpat 7) Tartu 8) Estonia
9) Über Systeme höherer komplexer Zahlen 10) Tomsk

ذیلًا رسالۀ بی‌اندازه مهم ۱۸۹۱ مولین را خلاصه خواهم کرد. مولین جبرهای شرکتپذیر روی $(\mathbb{K})$ را که دارای یک عضو واحدند در نظر می‌گیرد. حاصلضرب دو عضو x و u ، یعنی xu ، با

$$x'_i = \sum a_{jk}^i x_j u_k \quad (11)$$

نشان داده می‌شود.

اگر بتوان این مجموعه معادلات را به دو دستگاه جزیی از r و $n - r$ معادله چنان تقسیم کرد که دستگاه جزیی نخست تنها شامل متغیرهای $x_1, \dots, x_r$ و $u_1, \dots, u_r$ باشد:

$$x'_i = \sum a_{jk}^i x_j u_k \quad (i, j, k = 1, \dots, r), \quad (12)$$

آنگاه جبری را که با (۱۲) تعریف می‌شود، دستگاه همراه جبر اصلی می‌نامد. به زبان اصطلاحات جدید، نگاشت

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{r_2}, \circ, \dots, \circ),$$

یک هم‌ریختی از این جبر پروی دستگاه همراه است، و معادلات

$$x_1 = \circ, \dots, x_r = \circ$$

معرف یک ایدآل دوطرفه است، که هستۀ این هم‌ریختی است.

جبری که فاقد دستگاه همراه با شرط $0 < r < n$ باشد، جبر ساده به معنی امروزی است. مولین آن را جبر اصلی^۱ می‌نامد.

در بخش ۳، مولین فرمهای خطی و دو خطی روی جبر را در نظر می‌گیرد. اگر، در یک فرم خطی مانند

$$g(x') = g_1 x'_1 + \dots + g_n x'_n$$

به جای عضو x' حاصلضربی مانند xu گذاشته شود، یک فرم دو خطی

$$g(xu) = \sum g_i a_{jk}^i x_j u_k, \quad (13)$$

به دست می‌آید که آن را فرم اشتقاقی جبر گویند. اگر g_i ها چنان باشند که

$$g(uv) = g(vu), \quad (14)$$

آنگاه گویند فرم (۱۳) ویژگی قطبی دارد؛ من آن را فرم قطبی خواهیم نامید.

مولین یادآوری می‌کند که هر جبر واحددار حداقل یک فرم قطبی ناصفر دارد، یعنی اثر xu در نمایش منظم:

$$Tr(xu) = \sum_{i,j,k,s} a_{si}^i a_{jk}^s x_j u_k. \quad (15)$$

توضیح اینکه ضرایب این فرم همان p_{jk} هایی هستند که به توسط ددکیند در تحقیقاتش راجع به جبرهای تعویضپذیر معرفی شدند:

$$p_{jk} = \sum_{i,s} a_{si}^i a_{jk}^s. \quad (16)$$

مولین ثابت می‌کند که: اگر یک فرم اشتقاقی با ویژگی قطبی دارای رتبه k باشد آنگاه یک دستگاه همراه از بعد r موجود است. از اینجا نتیجه می‌شود که یک جبر ساده تنها یک فرم قطبی، یعنی فرم (۱۵) را دارد، و این فرم دارای رتبه k است. برعکس: اگر فرم (۱۵) دارای رتبه k ، و نیز تنها فرم قطبی اشتقاقی باشد، این جبر ساده است.

در پایان فصل II، مولین قضیه‌ای را که از اهمیت اساسی برخوردار است. ثابت می‌کند، یعنی: قضیه ۳۰. پایه هر جبر ساده را می‌توان چنان انتخاب کرد که معادلات حاصلضربی به صورت ذیل درآیند:

$$x'_{ik} = \sum_j x_{ij} u_{jk}. \quad (17)$$

به زبان اصطلاحات جدید، این قضیه بدین معنی است که: هر جبر ساده روی '۱' یک جبر ماتریسی کامل است. چنانکه بعداً خواهیم دید، این قضیه حالت خاصی از یک قضیه اساسی مکلاگان و دربرن است. برای تحلیل تفصیلی رساله مولین، می‌توان به مقاله بسیار جالب هاوکینز^۱: اعداد ابرمختلط، گروههای لی، و خلق نظریه نمایش گروهها، بایگانی تاریخ علوم دقیقه ۸، ص. ۲۴۳-۲۸۷ (۱۹۷۲) مراجعه کرد. هاوکینز نشان می‌دهد که این کار مولین روابطه نزدیکی با کارکیلینگ درباره جبرهای لی دارد.

1) Th. Hawkins

الی کارتان

بسیاری از نتایجی که از سوی مولین در ۱۸۹۱ به دست آمد و به وسیله او در ۱۸۹۳ منتشر شد، از نو به توسط الی کارتان کشف و در ۱۸۹۸ در مقاله‌ای با عنوان «گروههای دو خطی و دستگاههای اعداد مختلط^۱» سالنامه دانشکده علوم تولوز^۲ B 12، ص. ۱-۹۹ (مجموعه آثار، قسمت ۲، مجلد ۱، ص. ۱۰۵-۷) منتشر شدند.

به نظر می‌رسد که کارتان از کار مولین باخبر نبوده است، زیرا نخستین اشاره‌ای که در انتشارات کارتان به مولین می‌شود، در مقاله او «اعداد مختلط^۳» مندرج در دایرةالمعارف علوم ریاضی^۴ است، که در ۱۹۰۸ منتشر شد. در این مقاله کارتان کاملاً به فضایل مولین اقرار می‌کند.

روشهای اثبات کارتان کاملاً با روشهای مولین متفاوت است. کارتان در رساله ۱۸۹۴ خود به تحقیق در ساختار جبرهای لی، به ویژه جبرهای ساده و نیمساده لی، پرداخته بود. در مقاله ۱۸۹۸ خود که فوقاً ذکر شد، همان روشها را برای مطالعه جبرها، به خصوص جبرهای ساده و نیمساده به کار برد. هیأت زمینه همواره^۵ است، و همواره فرض می‌شود که جبر Σ دارای عضو واحد است. کارتان از نمایش منظم آغاز می‌کند، که در آن هر عضو Σ مانند

$$x = e_1 x_1 + \dots + e_r x_r$$

با تبدیل خطی ذیل نمایش داده می‌شود

$$y \mapsto xy.$$

در نمایش منظم، هر عضو عام x از جبر Σ با ماتریسی مانند

$$X = E_1 x_1 + \dots + E_r x_r \quad (18)$$

نمایش داده می‌شود.

معادله مشخصه ماتریس X عبارت است از

$$\det(X - wI) = 0. \quad (19)$$

فرض کنیم $w_1, w_2, \dots, w_h$ ریشه‌های متمایز این معادله باشند. حال کارتان به جای عضو عام

x عضوی مانند a چنان می‌گذارد که $w_1, w_2, \dots, w_h$ جملگی متمایز باشند.

1) Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes 2) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 3) Nombres complexes 4) Encyclopédie des sciences mathématiques

یکی از این ریشه‌ها، مثلاً w_1 ، را در نظر بگیرید. اگر تکرر این ریشه $m_1 = m$ باشد، دنباله‌ای از اعضا مانند

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha_1^{(m-1)}$$

وجود دارد به طوری که

$$\alpha\alpha_1 = \omega_1\alpha_1$$

$$\alpha\alpha'_1 = w_1\alpha'_1 + \lambda_{11}\alpha_1$$

$$\alpha\alpha'''_1 = w_1\alpha''_1 + \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha'_1$$

و قس علیهذا. بنابراین، هر ریشه معرف یک زیرفضای خطی است که با $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \dots$ تولید می‌شود، به طوری که هرگاه y به این زیرفضا متعلق باشد، آنگاه به ازای هر $\tilde{z}$ از این جبر، $y\tilde{z}$ نیز به آن متعلق است. به عبارت دیگر، این زیرفضاها ایدآلهای راست‌اند، و خودجبر حاصلجمع مستقیمی از این ایدآلهای راست است.

به ویژه، عضو واحد ε را می‌توان به صورت مجموعی از اعضای ε_i متعلق به h زیرفضا نوشت:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_h,$$

و داریم

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i\varepsilon_j = 0 \quad (i \neq j).$$

گوییم عضو η دارای سرشت (α, β) است هرگاه

$$\varepsilon_\alpha\eta = \eta\varepsilon_\beta = \eta, \quad (20)$$

که بدین معنی است که η به ایدآل راست تولید شده به وسیله ε_α ، و به ایدآل چپ تولید شده به وسیله ε_β تعلق دارد. این سرشتهای (α, β) پیشتر به توسط شفرز معرفی شده بودند. از شرایط (۲۰) نتیجه می‌شود که

$$\varepsilon_i\eta = 0 \quad (i \neq \alpha)$$

$$\eta\varepsilon_j = 0 \quad (j \neq \beta)$$

حاصلضرب عضوی از سرشت (α, β) در عضوی از سرشت (γ, δ) صفر است هرگاه $\gamma \neq \beta$ ، و

دارای سرشت (α, δ) است هرگاه $\beta = \gamma$.

سپس، کارتان در ویژگیهای اعضای پوچتوان تحقیق می‌کند. این اعضا را «اعداد شبه صفر» می‌نامد و آنها را با این ویژگی که ریشه‌های مشخصه جملگی صفرند تعریف می‌کند. این تعریف با تعریف پیرس هم‌ارز است.

نظریه کارتان به دو قضیه منجر می‌شود. قضیه اول، به زبان اصطلاحات جدید، بیان می‌کند که: هر جبر ساده روی $\mathbb{A}$ یک جبر تمام‌ماتریسی است.

این قضیه به توسط مولین به دست آمده بود، ولی دیکسن یادآور می‌شود که برهان مولین بر روی هم رضایت‌بخش نیست. ن. ک. ل. ی. دیکسن: جبرهای خطی (رسائل کیمبرج ۱۶، نیویورک ۱۹۱۴)، ص. ۵۶.

کارتان یک جبر نیم‌ساده را به صورت حاصلجمع مستقیمی از جبرهای ساده تعریف می‌کند. قضیه دوم او بیان می‌کند که:

هر جبر ساده روی $\mathbb{A}$ حاصلجمع مستقیمی از یک جبر ساده یا نیم‌ساده و یک زیرجبر پایای پوچتوان (یعنی یک ایدآل دوطرفه پوچتوان) است.

مک‌لاگان و دربرن یک جبر نیم‌ساده را به صورت جبری که دارای هیچ زیرجبر پایای پوچتوان نیست تعریف کرد. از قضیه دوم کارتان نتیجه می‌شود که یک جبر نیم‌ساده به معنی و دربرن، به معنی کارتان نیز نیم‌ساده است، و برعکس.

کارتان سپس به مطالعه ساختار جبرهای ساده و نیم‌ساده روی هیأت اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ پرداخت. باز هم، قضیه‌های او را می‌توان به عنوان حالات خاص قضیه‌های و دربرن به دست آورد.

مک‌لاگان و دربرن

اولین کسی که نظریه کلی جبرها را روی یک هیأت دلخواه تأسیس کرد، ج. ه. مک‌لاگان و دربرن^۲ بود. مقاله او با عنوان «در باب اعداد ابر مختلط» در ۱۹۰۸ در گزارشات انجمن ریاضی لندن (۲) ۶، ص. ۷۷-۱۱۸ منتشر شد.

و دربرن یک «مجتمع» را به صورت یک زیرفضای خطی جبر تحت مطالعه تعریف می‌کند. او مجموع و حاصلضرب دو مجتمع را تعریف می‌کند. یک زیر مجتمع B از جبر A را که دارای ویژگیهای

$$BA \subseteq A \quad AB \subseteq B$$

باشد، یک زیرمجتمع پایای A می‌نامند. ما آن را یک ایدآل دوطرفه می‌نامیم. قضیه ۳ بیان می‌کند که

1) nombres pseudo-nuls 2) J. H. MacLagan Wedderburn

هر چنین ایدآلی معرف یک جبر رده‌های مانده‌ای [= خارج قسمتی] $\frac{A}{B}$ است و دربرن این جبر را جبر تفاضلی A و B می‌نامد.

روشن است که، هر جبر A_1 دارای یک سری ترکیبی از زیرجبرهای پایا مانند

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

است.

اینک و دربرن ثابت می‌کند که جبرهای مانده‌ای [خارج قسمتی]

$$A_r/A_{r+1}$$

صرف نظر از ترتیب یکتا هستند.

اگر A یک مجموع مانند $B + C$ از دو زیرجبر باشد، و

$$BC = 0 = CB,$$

آنگاه A را تحویلپذیر گویند.

سپس و دربرن قضیه‌های متعددی را دربارهٔ زیرجبرهای پوچتوان ثابت می‌کند که به قضیهٔ زیر منجر می‌شوند:

قضیهٔ ۱۳. اگر N یک زیرجبر پایای پوچتوان ماکسیمال یک جبر A باشد، همهٔ زیرجبرهای پایای پوچتوان جزء N اند.

زیرجبر N که به طور یکتا تعریف می‌شود همان است که امروزه آن را رادیکال A می‌نامیم. اگر N صفر باشد، A نیمساده نامیده می‌شود. قضیهٔ اصلی و دربرن بیان می‌کند که:

۱. هر جبر حاصلجمع مستقیم رادیکال آن N و یک جبر نیمساده است.
۲. هر جبر نیمساده را می‌توان به طور یکتا به صورت حاصلجمع مستقیمی از جبرهای ساده بیان کرد.

۳. هر جبر ساده یک جبر تمام-ماتریسی روی یک جبر تقسیمی است.
و دربرن در برهانهایش، از روشهای پیرس استفاده زیادی می‌کند. همچنین به نوشته‌های شفرز، مولین، و کارتان استناد می‌کند.

امیل آرتین

در ۱۹۲۷، قضیه اصلی و دربرن به توسط امیل آرتین^۱ در مقاله‌ای با عنوان «دربارۀ نظریۀ اعداد ابر مختلط^۲»، خلاصۀ گزارشات ریاضی سمینار هامبورگ^۳ ۵، ص. ۲۵۱-۲۶۰ تعمیم داده شد. به جای جبرها روی یک هیأت، آرتین حلقه‌هایی را در نظر می‌گیرد که در «شرط زنجیر نزولی» صدق می‌کنند، این شرط می‌گوید که: هر زنجیر نزولی از ایدآل‌های چپ (راست) مانند

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

متناهی است. شرطهای زنجیری از این نوع به توسط امی نوتر در نظریۀ ایدآل‌های او و در درسهایش راجع به نظریۀ گروهها معرفی شده‌اند. با مفروض بودن یک شرط زنجیری برای ایدآل‌های چپ یا راست، آرتین توانست قضیه اصلی و دربرن را برای حلقه‌های ساده و نیمساده ثابت کند.

امی نوتر و مکتب او

در ۱۹۲۴، وقتی که من به عنوان دانشجو وارد گوتینگن شدم، این سعادت را داشتم که در کلاس درس امی نوتر دربارۀ اعداد ابر مختلط شرکت کنم. او در ۲۷/۱۹۲۶ مجدداً در این زمینه تدریس کرد. این بار عنوان درس او «اعداد ابر مختلط و نظریۀ نمایش^۴» بود یادداشت‌های من گم شده‌اند، ولی مندرجات این یادداشتها در مقاله ۱۹۲۹ امی نوتر «کمیت ابر مختلط و نظریۀ نمایش^۵»، مجله ادواری^۶ ریاضی ۳۰، ص. ۶۴۱-۶۹۲ آورده شدند. به علاوه، فصلهای ۲ و ۳ کتاب ماکس دوبرینگ^۷ «جبرها» (اشپرینگر ۱۹۳۵) اساساً بر درسهای امی نوتر مبتنی‌اند.

در مکتب امی نوتر، نظریۀ ساختار و دربرن و آرتین به حلقه‌های کلترتوسیع یافت. گوتفريت کوته^۸ پوچ-ایدآل را چنین تعریف کرد: یک ایدآل راست یا چپ N از حلقه A را پوچ-ایدآل گویند، هرگاه هر عضو پوچتوان باشد. اجتماع همه پوچ-ایدآل‌های دوطرفه، یک پوچ-ایدآل دوطرفه R است؛ کوته این پوچ-ایدآل را رادیکال حلقه A می‌نامد. ن. ک. گوتفريت کوته: «ساختار حلقه‌هایی که حلقه رده‌های مانده‌ای آنها کاملاً به رادیکال قابل تبدیل است^۹»، مجله ادواری ریاضی ۳۲، ص. ۱۶۱-۱۸۶ (۱۹۳۰).

1) Emil Artin 2) Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen 3) Abhandlungen math. Seminar Hamburg 4) Hyperkomplexe Zahlen und Darstellungstheorie 5) Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie 6) Zeitschrift 7) Max Deuring 8) Algebren 9) Gottfried Köthe 10) Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist

در مکتب امی نوتر چنین احساس شده بود که این رادیکال، R ، با تعریفی که وِذرین یا کوته از آن ارائه داده‌اند، بسیار کوچک است. اگر شرط زنجیر نزولی برقرار نباشد، به دست آوردن قضیه‌های ساختاری برای A/R ممکن نیست. بنابراین، راینهولت بئر^۱ و یاکوب لوتیسکی^۲ تعاریفات دیگری را برای رادیکال مطرح کردند. ن. ک.:

ر. بئر: ایدآلهای رادیکالی، مجله امریکایی ریاضیات ۶۵، ص. ۵۳۷-۵۶۸ (۱۹۴۳).

ی. لوتیسکی: درباره رادیکال یک حلقه کلی، بولتن انجمن ریاضی امریکا، ۴۹، ص. ۴۶۲-۴۶۶ (۱۹۴۳).

بهر حال، این تعاریفات باز هم به یک نظریه ساختاری رضایتبخش حلقه‌ها بدون شرایط تناهی منجر نشد. نخستین کسی که به حل این معما نایل شد و نظریه کلی زیبایی را ارائه داد، نیتن جیکوبسن^۳ بود.

نیتن جیکوبسن

در دو مقاله منتشره در ۱۹۴۳، جیکوبسن یک نظریه ساختاری برای حلقه‌ها بدون مفروضات تناهی به وجود آورد. عناوین این مقالات چنین‌اند:

نظریه ساختاری حلقه‌های ساده بدون مفروضات تناهی، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی امریکا، ۵۷، ص. ۲۲۸-۲۴۵ (۱۹۴۵).

رادیکال و نیمسادی برای حلقه‌های دلخواه، مجله امریکایی ریاضیات ۶۷، ص. ۳۰۰-۳۲۰ (۱۹۴۵).

فرض کنیم A یک حلقه، M یک A -مدول راست باشد به طوری که $MA \neq 0$. مدول را ساده یا تحویلناپذیر گویند هرگاه غیر از مدول صفر هیچ A -زیرمدول واقعی نداشته باشد. به هر عضو a از A یک تبدیل خطی از M به خودش مانند

$$x \mapsto xa$$

نظیر می‌شود و این تبدیلات معرف نمایشی از A هستند. اعضای مانند a که با صفر نمایش داده شده‌اند، یک ایدآل دوطرفه تشکیل می‌دهند: هسته نمایشی که مدول M القا می‌کند.

اینک بنابر تعریف رادیکال حلقه A ، که با R نشان می‌دهیم، عبارت است از اشتراک همه هسته‌های نمایشهای تحویلناپذیر، یعنی نمایشهایی که به وسیله A -مدولهای ساده القا می‌شوند.

این یک تعریف خارجی است، زیرا مجموعه همه A -مدولهای تحویلناپذیر را به کار می‌گیرد. اما، جیکوبسن ثابت می‌کند که می‌توان به جای آن یک تعریف داخلی گذاشت.

یک ایدال راست I در A را مدولی گویند هرگاه عضوی از A مانند e موجود باشد به طوری که

$$e a \equiv a(I) \quad , a \text{ از } A$$

جیکوبسن ثابت می‌کند که هر A -مدول تحویلناپذیر M با مدول رده‌های مانده‌ای [خارج‌قسمتی] A/I یکریخت است، که در آن I یک ایدال راست مدولی ماکسیمال است. از اینجا نتیجه می‌شود که رادیکال R اشتراک همه ایدالهای راست مدولی ماکسیمال است.

جیکوبسن همچنین ثابت می‌کند که رادیکال حاوی همه پوچ-ایدالهای یکطرفه است. بنابراین، رادیکال کوته جزء رادیکال جیکوبسن است.

حلقه A را نیمساده گویند هرگاه رادیکال جیکوبسن آن صفر باشد. برای تشریح نظریه جیکوبسن خواننده می‌تواند به کتاب عالی جیکوبسن «ساختار جبرها» مراجعه کند.

جبرهای ساده نرمال

چنانکه دیدیم، هر جبر ساده A یک جبر تمام-ماتریسی روی یک جبر تقسیمی D است. مرکز D ، یک توسیع متناهی هیأت زمینه F است. اگر D نرمال باشد، یعنی، اگر مرکز F باشد، جبر تمام-ماتریسی A نیز نرمال است.

حاصلضرب مستقیم $A \times B$ ی دو جبر A و B با اعضای پایه $u_1, \dots, u_m$ و $v_1, \dots, v_n$ به صورت جبری تعریف می‌شود که اعضای پایه آن عبارت‌اند از

$$u_j v_k \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n).$$

فرض این است که v ها با u ها تعویضپذیرند، بنابراین حاصلضربی مانند

$$(u_h v_i)(u_j v_k)$$

به صورت ذیل محاسبه می‌شود

$$(u_h u_j)(v_i v_k).$$

حاصلضرب مستقیم دو جبر ساده $A \times B$ مجدداً ساده است، مشروط بر اینکه حاصلضرب مرکزهای آنها $Z \times Z'$ ساده باشد. بنابراین، هرگاه A و B هر دو جبرهای ساده نرمال باشند، حاصلضرب آنها نرمال

ساده است. اگر A یک حلقه تمام-ماتریسی روی یک حلقه تقسیمی D ، و B یک حلقه تمام-ماتریسی روی D' باشد، حاصلضرب $A \times B$ یک حلقه تمام-ماتریسی روی $D \times D'$ است.

گروه براوئر به صورت ذیل تعریف می‌شود. گویند دو جبر ساده نرمال روی F از یک رده‌اند هرگاه با یک و تنها یک جبر تقسیمی D یکرخت باشند. بنابراین، هر رده $\{D\}$ به یک و تنها یک جبر تقسیمی D متعلق است. هرگاه A و B حلقه‌های تمام-ماتریسی روی D و D' باشند، حاصلضرب به $\{D \times D'\}$ متعلق است.

به ازای هر جبر A می‌توان یک جبر وارون یکرخت A^* به صورت ذیل تعریف کرد:

$$ab = c \quad \text{ایجاب می‌کند} \quad b^*a^* = c^*$$

اینک می‌توان ثابت کرد که $A \times A^*$ یک جبر تمام-ماتریسی روی F ، و لذا $\{D\} \times \{D^*\}$ واحد رده $\{F\}$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که رده‌های $\{D\}$ یک گروه تعویضپذیر تشکیل می‌دهند، یعنی گروه براوئر را که متعلق به هیأت F است. ن. ک. ریشارد براوئر: در باب دستگاه اعداد ابر مختلط^۱، مجله ادواری ریاضی ۳۰، ص. ۷۹-۱۰۷ (۱۹۲۹).

اگر هیأت زمینه F به S توسیع داده شود، ثابتهای ترکیبی A تغییر نمی‌کنند، می‌توان جبر وسعت‌یافته‌ای مانند

$$A_S = A \times S$$

به دست آورد.

اگر A نرمال و ساده باشد، A_S نیز نرمال و ساده است: یعنی مرکز S است. اگر A_S یک حلقه ماتریسی کامل روی S باشد، هیأت S را یک هیأت شکافنده می‌گویند. هر هیأت شکافنده یک حلقه تقسیمی مانند D ، یک هیأت شکافنده تمامی رده $\{D\}$ است.

بر طبق توضیح آ. آ. آلبرت^۲ و امی نوتر، هیأت‌های شکافنده D را که توسیعیهای متناهی F اند ممکن است به عنوان هیأت‌هایی توصیف کرد که می‌توان با نمایشهای ماتریسی تحویلناپذیر آنها را به صورت زیرهیأت‌های ماکسیمال، در جبرهای A از رده $\{D\}$ نشانید. به خصوص، همه زیرهیأت‌های ماکسیمال D ، هیأت‌های شکافنده‌اند. ن. ک. آ. آ. آلبرت: درباره حاصلضربهای مستقیم، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا ۳۳، ص. ۶۹۰-۷۱۱ (۱۹۳۱)، و. نوتر: جبرهای تعویضناپذیر^۳، مجله ادواری ریاضی ۳۷، ص. ۵۱۴-۵۴۱ (۱۹۳۳).

گوتفريت کوته وجود هیأت‌های شکافنده تفکیک‌پذیر را که زیرهیأت‌های ماکسیمال D اند، ثابت کرده است (مجله برای ریاضیات^۴ ۱۶۶، ص. ۱۸۲-۱۸۴).

1) Über Systeme hyperkomplexer Zahlen

2) A. A. Albert

3) Nichtkommutative

Algebren 4) Journal für Math

چون هیأت‌های شکافنده موجودند، بُعد $(D : F)$ همواره یک عدد مربع است. این حکم نخستین بار به توسط ج. ه. مکلاگان و در برن در مقالهٔ اساسی او «در باب اعداد ایر مختلط» خلاصهٔ مذاکرات انجمن ریاضی لندن (۲) ۶، ص. ۷۷-۱۱۸ (۱۹۰۸) ثابت شد. در مورد برهانها و مراجع کامل می‌توان به م. دوبرینگ: جبرها (اشپیرنگر-فرلاک ۱۹۳۴)، ص. ۴۶-۴۷ مراجعه کرد.

ساختار جبرهای تقسیمی

چون همهٔ جبرهای ساده حلقه‌های تمام-ماتریسی روی جبرهای تقسیمی D هستند، مسألهٔ یافتن همهٔ جبرهای ساده روی یک هیأت مفروض F با مسألهٔ یافتن همهٔ جبرها تقسیمی روی F هم‌ارز است. این مسأله را می‌توان در مورد چند نوع مهم از هیأت‌های F حل کرد، یعنی

۱. هیأت $\mathbb{R}$
 ۲. هیأت‌های متناهی
 ۳. هیأت‌های P -ای
 ۴. هیأت‌های اعداد جبری
- اینک هر یک از چهار حالت فوق را جداگانه بررسی خواهیم کرد.

۱. حلقه‌های تقسیمی روی $\mathbb{R}$

در این حالت یگانه جبرهای تقسیمی ممکن عبارت‌اند از

هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$

جبر کوآترنیونها

این قضیه به توسط گئورگ فوربنیوس در ۱۸۷۸ در مقاله‌ای تحت عنوان «در باب جانشینیهای خطی و فرمهای دو خطی^۱»، مجله کرله برای ریاضیات ۸۴، ص. ۱-۶۳ ثابت شد. همچنین ن. ک. اولیو هزلت^۲: دربارهٔ نظریهٔ جبرهای تقسیمی شرکتپذیر، خلاصهٔ مذاکرات انجمن ریاضی امریکا ۱۸، ص. ۱۶۷-۱۷۶ (۱۹۱۷).

۲. هیأت‌های اریب متناهی

جبرهای تقسیمی روی هیأت اول $GF(p)$ هیأت‌های اریب متناهی‌اند. این جبرها جملگی تعویض‌پذیرند، یعنی اینها همان هیأت‌های گالوای $GF(p^n)$ مشهورند. این حکم ابتدا به توسط ج. ه. مک‌لاگان و دیرین ثابت شد: قضیه‌ای در باب جبرهای متناهی، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی امریکا، ص. ۳۴۹-۳۵۲ (۱۹۰۹). برهانهای دیگر به توسط ل. ی. دیکسن (۱۹۲۷)، ا. آرتین (۱۹۲۸)، ر. براوئر (۱۹۲۹)، و ا. ویت^۱ (۱۹۳۱) ارائه شدند. در مورد مراجع ن. ک. م. دویرینگ: جبرها ص. ۴۹ و ۵۶.

۳. جبرهای ساده نرمال روی یک هیأت P -ای

یک هیأت P -ای، F_P ، به وسیله ایدآل اولی مانند P در یک هیأت اعداد جبری مانند F ، به صورت ذیل تعریف می‌شود. اگر π عدد صحیحی قابل قسمت بر P باشد ولی بر P^2 نباشد، اعضای F_P سریهای توانی صوری ذیل‌اند

$$u = c_{-n}\pi^{-n} + \dots + c_{-1}\pi^{-1} + c_0 + c_1\pi + \dots,$$

که در آن c_i ها خارج قسمتهای اعداد صحیح جبری a/b اند، که مخرج b بر P قابل قسمت نیست. این «اعداد P -ای» به توسط کورت هنسل^۲ در ۱۹۰۴ معرفی شدند، و در نظریه هیأت‌های اعداد جبری به توسط هنسل و هاسه به کار رفتند. ن. ک.

کورت هنسل: نظریه اعداد جبری I^2 ، لایپزیگ ۱۹۰۸، و

هلموت هاسه: نظریه اعداد^۳، چاپ سوم ۱۹۶۹، ترجمه انگلیسی: نظریه اعداد، اشپرینگر-فرلاک ۱۹۸۰.

ساختار جبرهای تقسیمی روی یک هیأت P -ای F_P به توسط هلموت هاسه در سلسله‌ای از مقالات بین سالهای ۱۹۳۱-۱۹۳۳ بررسی شد. در مورد مراجع کامل و برهانها ن. ک. م. دویرینگ: جبرها، ص. ۱۰۹-۱۱۴. نتایج اصلی نظریه هاسه را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

فرض کنیم F_P یک هیأت P -ای، و R حلقه اعداد صحیح آن باشد. عضو π ایدآل اولی مانند P در R تولید می‌کند. حلقه رده‌های مانده‌ای [=خارج قسمتی] R/P یک $GF(q)$ است. به ازای هر عدد صحیح ثابت f ، فرض کنیم w یک ریشه $(q^f - 1)$ ام اولیه‌ی واحد باشد، و فرض کنیم

$$W_f = F_P(w)$$

توسیع F_P باشد که با w تولید شده است. در این صورت W_f تنها توسیع نامشعب F_P از درجه f است، و هر جبر ساده نرمال A با بعد f^2 روی F_P ، یک جبر دوری

$$A = (\alpha, W_f, S)$$

است، که در آن S خودریختی W_f است که با ضابطه ذیل تعریف می‌شود

$$w \mapsto w^q.$$

اگر α بر π^r قابل قسمت باشد ولی بر π^{r+1} قابل قسمت نباشد، آنگاه رده براوتر جبر A کاملاً با کسر r/f به پیمانه ۱ معین می‌شود. بنابراین، گروه براوتر با گروه جمعی اعداد صحیح گویای r/f به پیمانه ۱ یکرخت است.

جبرهای تقسیم روی هیأت‌های اعداد جبری

فصل VII کتاب «جبر» دوبرینگ کلاً به این موضوع اختصاص یافته است. آ. آ. آلبرت، ریشارد براوتر، هلموت هاسه، و آمی نوتر سهم اصلی را در بسط این نظریه دارند. ذیلاً نتایج آنان را خلاصه خواهم کرد.

فرض کنیم F هیأتی از اعداد جبری، و $Z = F(z)$ یک توسیع دوری F ، از درجه $(Z : F) = n$ باشد. اگر S ، خودریختی مولد گروه گالوای Z باشد، یک جبر دوری

$$A = (\alpha, Z, S)$$

را تعریف کرده‌ایم، که به صورت جبری است که اعضای

$$u^i z^k \quad (i, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

پایه آن هستند و قواعد ضرب عبارت‌اند از

$$zu = uz^S$$

$$u^n = \alpha \quad (\alpha \in F).$$

در فصل ۱۰ دیدیم که A یک حلقه تمام-ماتریسی روی F است اگر و تنها اگر α نرم عضوی از Z روی F باشد.

اینک به این سؤال که در چه شرایطی α نرمی در Z است، می‌توان به وسیله نظریه هیأت رده‌ای پاسخ داد. ابتدا لازم است مفاهیم چندی را از نظریه ارزه یادآوری کنم.

بر طبق قضیه‌ای از داوید وان دانتسینگ^۱، هر ارزه V از هیأتی مانند F ، معرف توسع کاملی از F مانند F_V است، که در آن محک همگرایی کوشی برقرار است. ن.ک. د. وان دانتسینگ: در باب جبر توپولوژیک^۲، ماتماتیشه آنالن ۱۰۷، ص. ۵۸۷-۶۲۶ (۱۹۳۲).

ارزه‌های هیأتی اعداد جبری به طور کامل به توسط الکساندر آوستروفسکی^۳ در سلسله‌ای بنیادی از مقالات او «تحقیقاتی در نظریه حسابی هیأتها» مجله ادواری ریاضی ۳۹، ص. ۲۹۶-۴۰۴، معین شده‌اند. نتایج اصلی این مقاله را، در مورد هیأتی اعداد جبری، می‌توان به صورت ذیل خلاصه کرد. اگر F هیأتی از اعداد جبری باشد، دو نوع ارزه موجودست، یعنی ارزه‌های P -ای که با ایدل‌های اول F هیأت F تعریف می‌شوند، و ارزه‌های ارشمیدسی که با نشاندنهای ممکن F در هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا در هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف می‌شوند. در حالت اخیر، هیأت F_V دقیقاً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است، و ارزه با قدرمطلق کلاسیک تعریف می‌شود:

$$\varphi(a) = |a|, \mathbb{C} \text{ یا } \mathbb{R} \text{ از } a \text{ هر عضو}$$

اینک فرض کنیم Z یک توسع دوری هیأت F باشد. هر ارزه مانند V از F را می‌توان به ارزه‌ای از Z توسع داد. در حالت P -ای، چون Z دوری است، همه عوامل ایدل اول P در Z با خودریختیهای گروه گالوا به یکدیگر تبدیل می‌شوند، بنابراین می‌توان به تصادف عامل اولی انتخاب کرد و ارزه متناظر را V نامید: اینکه کدام عامل اول انتخاب شود مهم نیست. در حالت ارشمیدسی همه نشاندنهای F در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ از یک نشاندن با به کار بردن گروه گالوا حاصل می‌شوند، بنابراین در این حالت نیز می‌توان توسیعی از ارزه V را به تصادف انتخاب کرد و آن را V نامید. در هر حالت هیأت کامل Z_V توسیعی از هیأت کامل F_V است.

حال گوییم شرط اینکه عضوی مانند α از F نرم عضوی از Z باشد آن است که به ازای هر ارزه V از F عضو α از F_V نرم عضوی از Z_V باشد، این همان «اصل موضعی-فرا موضعی» هاسه برای توسیعیهای دوری Z از یک هیأت اعداد است.

اکنون ببینیم که این [اصل] در مورد ارزه‌های P -ای و ارشمیدسی به چه معنی است. در حالت P -ای α نرم عضوی از Z_V است اگر و تنها اگر نماد نرم-مانده‌ای

$$\left(\frac{\alpha, Z}{P} \right)$$

1) David van Dantzing

2) Zur topologischen Algebra

3) Alexander Ostrowski

4) Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper

برابر با ۱ باشد. برای توصیفی از معنی این نماد ن. ک. ماکس دیرینگ: جبرها، ص. ۱۲۳-۱۲۶. در حالت ارشمیدسی هیأت‌های F_V و Z_V یا $\mathbb{R}$ اند یا $\mathbb{C}$ اگر هر دو $\mathbb{R}$ یا هر دو $\mathbb{C}$ باشند، برای α شرطی وجود ندارد، زیرا در این حالتها روشن است که هر عضو F_V نرم عضوی از Z_V است. اما اگر $F_V = \mathbb{R}$ و $Z_V = \mathbb{C}$ ، شرطی وجود دارد. نرم عضو ناصفر a از $\mathbb{C}$ نسبت به $\mathbb{R}$ عبارت است از $a\bar{a}$ ، بنابراین همواره مثبت است.

بنابراین شرط مطلوب این است که در همه نشاندهای F در $\mathbb{R}$ نگاشت α همواره مثبت باشد، یا به عبارت دیگر، همه مزدوجهای حقیقی عدد جبری α مثبت باشند. یک نتیجه مستقیم قضیه موضعی-فراموضعی عبارت است از:

جبر دوری A یک حلقه ماتریسی کامل روی F است هرگاه به ازای هر ارزّه V از F جبر توسیع یافته

$$A_V = A \times F_V$$

یک حلقه ماتریسی کامل روی F باشد.

این «قضیه موضعی-فراموضعی» برای جبرهای دوری تعمیمی از همین قضیه برای جبرهای تعمیم یافته کواترنیونی است (ن. ک. فصل ۱۰). این قضیه از هلموت هاسه است (خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی آمریکا ۳۴، ص. ۱۷۱-۲۱۴، ۱۹۳۲)، ولی فکر ارتباط دادن نظریه جبرهای دوری با نظریه نرم-ماندهای از امی نوتر است. در این زمینه از خطابه هرمان وایل در یادبود «امی نوتر» نقل قول می‌کنم (اسناد ریاضی^۱ ۳، ص. ۲۰۱-۲۲۰، ۱۹۳۵):

هاسه معترف است که در مورد موضوع مقالات زیبایش در ارتباط بین کمیات ابر مختلط و نظریه هیأت‌های رده‌ای مدیون اشارات اتفاقی امی نوتر است. و می‌گوید او ممکن بود، بجای، با روش الهامبخش ماندگاراش با بیش توانایی که بیشتر اوقات درست از آب در می‌آمد و طی سالها قوام پیدا می‌کرد، اظهار دورنگری کند نظیر اینکه «نماد نرم باقیمانده چیزی جز جبر دوری نیست» آنوقت آن اشاره وی می‌توانست راهنمای نشان دادن کار دشوار آینده شود.

در مقاله کلاسیکی با عنوان «برهان یک قضیه اصلی در نظریه جبرها^۲» (مجله ریاضیات ۱۶۷، ص. ۳۹۹-۴۰۴، ۱۹۳۲)، هلموت هاسه، ریشارد براوتر، و امی نوتر قضیه موضعی-فراموضعی را به همه جبرهای ساده نرمال مانند A روی یک هیأت اعداد جبری تعمیم دادند. آنها ثابت کردند که:

A حلقه تمام-ماتریسی روی F است اگر و تنها اگر همه جبرهای A_V حلقه‌های تمام-ماتریسی روی F_V باشند.

دو برهان از این قضیه زیبا را می‌توان در کتاب «جبرها»ی دیرینگ، ص. ۱۱۷ و ۱۳۲ ملاحظه

1) Scripta mathematica 2) Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren

کرد. برهان دوم از ماکس تسورن^۱ است: توضیحی در باب نظریه اعداد ابرمختلط تحلیلی^۲، رساله‌های ریاضی سمینار هامبورگ^۳، ص. ۱۹۷-۲۰۱ (۱۹۳۳).
 بر پایه این قضیه موضعی-فراموضعی، هاسه، براوئر، و نوتر موفق شدند «قضیه اصلی» خود را به دست آورند:

هر جبر تقسیمی نرمال روی یک هیأت اعداد جبری F یک جبر دوری روی F است.

1) Max Zorn 2) Note zur analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie 3) Abhandlungen math. Seminar Hamburg

فصل ۱۲

سرشتهای گروهی

فصل حاضر به دو بخش تقسیم خواهد شد:

بخش (آ): سرشتهای گروههای آبدلی

بخش (ب): سرشتهای گروههای متناهی

بخش (آ)

سرشتهای گروههای آبدلی

گوناها و سرشتهای فرمهای درجهٔ دوم

تاریخ نظریهٔ سرشتهای گروهی با گاوس آغاز می‌شود. گاوس در بخشهای ۲۲۸-۲۳۳ کتاب «تحقیقات حسابی» خود این سؤال را مطرح می‌کند: چه نوع از اعداد صحیح n را می‌توان یا نمی‌توان با فرم درجهٔ دوم دوتایی مفروضی مانند

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (۱)$$

که در آن ضرایب a, b, c صحیح‌اند، نمایش داد؟

گاوس خود را به فرمهای اولیهٔ محدود می‌کند، یعنی فرض می‌کند که a, b, c مقسوم‌علیهٔ مشترک ندارند. او دترمینان D ی فرم F را به صورت

$$D = b^2 - ac \quad (۲)$$

تعریف و ثابت می‌کند که:

هرگاه p مقسوم‌علیهٔ اول فردی از D باشد، آنگاه اعداد غیرقابل قسمت بر p مانند n که می‌توان آنها را با F نمایش داد جملگی مانده، یا جملگی نامانده به پیمانهٔ p ‌اند.

اگر این فرم اولیه باشد و p عدد D را عاد کند، آنگاه a و c هر دو نمی‌توانند بر p قابل قسمت باشند. فرض کنیم a قابل قسمت نباشد. بسته به اینکه a مانده باشد یا نباشد، این فرم تنها مانده‌ها یا نامانده‌ها را نمایش خواهد داد.

اگر به جای عدد اول فرد p عدد ۲ گذاشته شود، وضعیت پیچیده‌تر خواهد شد. نه تنها باید پیمانه ۲ بلکه توانهای آن ۴ و ۸ را نیز باید به حساب آوریم. گاوس ثابت کرد:

اگر $D \equiv 3 \pmod{4}$ ، اعداد فردی که با F نمایش داده می‌شوند جملگی با ۱ یا جملگی با ۳ به پیمانه ۴ هم‌نهشت‌اند.

اگر $D \equiv 2 \pmod{8}$ ، اعداد فردی که با F نمایش داده می‌شوند جملگی با ۱ یا ۷، یا جملگی با ۳ یا ۵ به پیمانه ۸ هم‌نهشت‌اند.

اگر $D \equiv 6 \pmod{8}$ ، اعداد فردی که با F نمایش داده می‌شوند جملگی با ۱ یا ۳، یا جملگی با ۵ یا ۷ به پیمانه ۸ هم‌نهشت‌اند.

اگر $D \equiv 4 \pmod{8}$ ، اعداد فردی که با F نمایش داده می‌شوند جملگی با ۱، یا جملگی با ۳ به پیمانه ۴ هم‌نهشت‌اند.

اگر $D \equiv 0 \pmod{8}$ ، اعداد فردی که با F نمایش داده می‌شوند جملگی با ۱، یا جملگی با ۳ یا جملگی با ۵، یا جملگی با ۷ به پیمانه ۸ هم‌نهشت‌اند.

اینک گاوس، به ازای هر فرم مانند F ، «سرشتهای» خاصی را به صورت ذیل تعریف می‌کند: اگر فرم F تنها نمایش مانده‌ها به پیمانه p باشد، گاوس سرشت $R.p$ را به F نسبت می‌دهد، و هرگاه این فرم تنها نمایش نامانده‌ها باشد، می‌نویسد $N.p$. به طریق مشابه می‌نویسد ۴ و ۱ هرگاه F غیر از اعداد فردی که هم‌نهشت ۱ به پیمانه ۴ اند هیچ عدد فرد دیگری را نمایش ندهد، و قس علیهذا. به عنوان مثال، سرشت کامل فرم

$$F = 7x^2 + 23y^2$$

عبارت خواهد بود از

$$3, 4; \quad N \cdot 23; \quad R \cdot 7,$$

که بدین معنی است که a و c در نتیجه همه اعداد فردی که با این فرم نمایش داده می‌شوند هم‌نهشت ۳ به پیمانه ۴ اند، و a یک نامانده به پیمانه ۲۳، و c یک مانده به پیمانه ۷ است.

در ۱۸۳۹، لوژون دیریکله^۱ برای اینکه نتایج گاوس را به صورت مناسبتی بنویسد از نماد لژاندر $(\frac{n}{p})$ استفاده کرد، این نماد برای مانده‌ها به پیمانه p برابر با ۱ و برای نامانده‌ها به پیمانه p برابر با -۱ است. قضیه‌های او از این قرارند:

1) Lejeune Dirichlet

قضیه ۱.۲. اگر p مقسوم علیه اول فردی از D باشد، آنگاه به ازای هر n که بر p قابل قسمت نباشد $\left(\frac{n}{p}\right)$ ثابت می ماند.

قضیه ۲.۲. اگر $D \equiv 3 \pmod{4}$ ، آنگاه به ازای هر عدد فرد n ، $(-1)^{(n-1)/2}$ ثابت می ماند.

قضیه ۳.۲. اگر $D \equiv 2 \pmod{8}$ ، آنگاه به ازای هر عدد فرد n ، $(-1)^{(n^2-1)/8}$ ثابت می ماند.

قضیه ۴.۲. اگر $D \equiv 6 \pmod{8}$ ، آنگاه به ازای هر عدد فرد n ، $(-1)^{(n-1)/2 + (n^2-1)/8}$ ثابت می ماند.

قضیه ۵.۲. اگر $D \equiv 4 \pmod{8}$ ، آنگاه به ازای هر عدد فرد n ، $(-1)^{(n-1)/2}$ ثابت می ماند.

قضیه ۶.۲. اگر $D \equiv 0 \pmod{8}$ ، آنگاه به ازای هر عدد فرد n ، $(-1)^{(n-1)/2}$ و $(-1)^{(n^2-1)/8}$ ثابت می ماند.

دو فرم F و G به یک رده متعلق اند، هرگاه تبدیل خطی صحیحی مانند

$$x = ax' + by'$$

$$y = cx' + dy',$$

با شرط $ad - bc = 1$ ، موجود باشد به طوری که F را به G تبدیل کند. واضح است که دو فرم متعلق به یک رده اعداد واحدی را نمایش می دهند. از اینجا نتیجه می شود که سرشتهای تعریف شده به توسط گاوس تنها به رده ای بستگی دارد که F بدان متعلق است.

فرمهایی که درمیان آنها منفی است، یا مثبت اند یا منفی. فرمهایی که درمیان آنها مثبت است نامعین اند؛ این فرمها هم مقادیر مثبت اختیار می کنند و هم مقادیر منفی. اینک دو فرم F و G را که هر دو مثبت، یا هر دو منفی، یا هر دو نامعین اند در نظر می گیریم. گاوس تعریف می کند: F و G به یک گونا متعلق اند، هرگاه درمیان و سرشتهای آنها برابر باشند.

گاوس سپس ترکیب فرمها، یا فراتر از آن ترکیب رده ها را تعریف می کند. بر طبق توضیح گاوس، رده های فرمهای اولیه که دارای درمیان مساویند مجموعه ای تشکیل می دهند که امروزه آن را یک گروه آبلی متناهی می نامند.

اگر فرم F نمایش عدد n باشد و فرم F' نمایش عدد n' ، هر فرم از رده حاصل ضرب نمایش عدد nn' خواهد بود. حال اگر n و n' هر دو مانده یا نامانده به پیمانه p باشند، حاصل ضرب nn' یک مانده خواهد بود، و هرگاه تنها یکی از این دو یک مانده باشد، حاصل ضرب یک نامانده است. به طریق مشابه، اگر n و n' هر دو همنهشت ۱ به پیمانه ۴ باشند، حاصل ضرب آنها نیز همنهشت ۱ به پیمانه ۴ خواهد بود، و قس علیهذا. بنابراین، اگر سرشتهای دو رده از فرمها معلوم باشند، سرشتهای رده حاصل ضرب (به پیمانه p یا به پیمانه ۴ یا به پیمانه ۸) معلوم می شوند.

پترگوستاو لوژون دیریکله^۱ بر پایه این نتایج گایس، تعریف زیر را داده است:
هر یک از نمادهای

$$\left(\frac{n}{p}\right), \quad (-1)^{(n-1)/2}, \quad (-1)^{(n^2-1)/8} \quad (3)$$

را که در قضیه‌های ۱.۲ تا ۶.۲ به کار رفت، و نیز هر حاصلضرب متناهی بعضی از این نمادها را، یک سرشت رده‌ای مانند g از فرمهای τ می‌نامند. این سرشتها توابعی مانند $\chi(g)$ اند که واجد ویژگیهای ذیل‌اند.

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g'). \quad (4)$$

به ازای هر درمیتان مفروض $D \neq 0$ ، تنها تعدادی متناهی عدد اول موجود است که D را عاد می‌کنند، و در نتیجه تنها تعدادی متناهی، مثلاً λ عدد، از نمادهای (۳) موجودند که معرف یک گونا هستند. تعداد مقادیر ممکن مجموعه سرشتهای (۳) برابر است با 2^{λ} ، زیرا هر سرشت می‌تواند مقدار $+1$ یا -1 را اختیار کند. ولی گاوس ثابت کرده است که تنها نیمی از مجموعه‌های ممکن سرشتها با رده‌های فرم تحقق می‌یابند. بنابراین، تعداد گوناها فقط $2^{\lambda-1}$ است.

شرح دیریکله بر نظریه گونا‌های گاوس ابتدا در ۱۸۳۹ در مقاله‌ای تحت عنوان «تحقیقاتی درباره کاربردهای مختلف آنالیز بینهایت کوچک در نظریه اعداد»^۲، در مجله کرله برای ریاضیات ۱۹، ص. ۳۲۴-۳۶۹، منتشر شد. مطالب این مقاله به توسط ریشارد ددکیند در تکلمه چهارم کتاب «درسهایی در نظریه اعداد»^۳ دیریکله (چاپ سوم، ۱۸۷۹) تشریح شد.

مفهوم «سرشت» را ددکیند در ۱۸۷۹ در «تکلمه دهم» معروفش بر کتاب دروس دیریکله تعمیم داد. ددکیند توابع $\chi(A)$ از ایدآلهای A را در یک هیأت اعداد جبری که دارای ویژگی

$$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B) \quad (5)$$

هستند و تنها به رده ایدآل A بستگی دارند، در نظر می‌گیرد. اما رده‌های ایدآلهای در یک هیأت اعداد جبری یک گروه آبلی متناهی تشکیل می‌دهند. بنابراین سرشتهای $\chi(A)$ سرشتهای گروهی یک گروه آبلی هستند. ددکیند این موضوع را از همان ابتدا تشخیص می‌دهد، زیرا در نامه‌ای به فروبنیوس می‌نویسد:

پس از این همه (یعنی، پس از تحقیقات دیریکله) معرفی مفهوم و نام سرشتها برای گروههای

آبلی دشوار نبود، چنانکه این کار را من در چاپ سوم کتاب نظریه اعداد دیریکله انجام دادم.

ایده‌های ددکیند در مورد سرشتهای گروههای آبلی به توسط دوستش هاینریش وبر^۴ در ۱۸۸۲ در

1) Peter Gustav Lejeune Dirichlet 2) Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres 3) Vorlesungen über Zahlentheorie 4) Heinrich

مقاله‌ای تحت عنوان «برهان این قضایا که هر فرم درجهٔ دوم اولیهٔ حقیقی قابلیت نمایش بینهایت عدد اول را دارد»^۱ (ماتماتیکه آنالیز ۲۰، ص. ۳۰۱-۳۲۹) به تفصیل توضیح داده شدند. در این مقاله، و بر گروههای آبلی متناهی را به وسیله اصول موضوعه تعریف می‌کند، و برهان جدیدی از «قضیهٔ اساسی گروههای آبلی» ارائه، و نیز نشان می‌دهد که چگونه می‌توان همهٔ سرشتهای چنین گروهی را از سرشتهای مولدهای اساسی $\theta_1, \theta_2, \dots$ که مرتبه‌های آنها $n_1, n_2, \dots$ هستند، به دست آورد. کافی است به هر یک از مولدهای θ_i ، n_i مین ریشهٔ واحد، w_i ، را تخصیص و قرار دهیم

$$\chi(\theta_1^{h_1} \theta_2^{h_2} \dots) = w_1^{h_1} w_2^{h_2} \dots$$

حاصلضرب دو سرشت از نو یک سرشت است. سرشتهای یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که با گروه اصلی یکریخت است. نظریهٔ سرشتهای گروههای آبلی متناهی قبلاً در «تکملهٔ دهم» ددکیند به اختصار آمده است.

دوگانی در گروههای آبلی

سرشتهای χ از یک گروه آبلی متناهی G را با ویژگی

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b), \quad (۶)$$

و حاصلضرب دو سرشت را با

$$\chi\chi'(a) = \chi(a)\chi'(a) \quad (۷)$$

تعریف کردیم.

اگر دو سرشت χ و χ' دارای ویژگی

$$\chi(a) = \chi'(a) \quad \text{به ازای هر } a,$$

باشند، نتیجه می‌شود که $\chi = \chi'$ و هرگاه دو عضو a و a' از گروه دارای ویژگی

$$\chi(a) = \chi(a') \quad \text{به ازای هر } \chi,$$

1) Beweis des Satzes, daß jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist

باشند، نتیجه می‌شود که $a = a'$.

از این ویژگیها معلوم می‌شود که می‌توان نقش سرشتهای χ و اعضای a ی گروه را با هم عوض کرد. هرگاه Γ گروه سرشتی $\langle \gamma \rangle$ باشد، γ را می‌توان به عنوان گروه سرشتی Γ تلقی کرد. گروههای γ و Γ تشکیل یک «زوج گروهی» به معنی پونتریاگین^۱ می‌دهند. ن. ک. ل. پونتریاگین: نظریه گروههای تعویضپذیر توپولوژیک، گزارشات سالانه ریاضی^۲ ۳۵، ص. ۳۸۹-۳۹۵ (۱۹۳۴).

این دوگانی را می‌توان برای گروههای توپولوژیک آبلی تعمیم داد. علاوه بر مقاله پونتریاگین که فوقاً اشاره شد، مهمترین مقاله‌ها در این زمینه عبارت‌اند از:

آ. هار^۳: در باب گروههای پیوسته نامتناهی^۴، مجله ادواری ریاضی ۳۳، ص. ۱۲۹-۱۵۹ (۱۹۳۱).

ج. فون نویمان^۵: توابع تقریباً متناوب در یک گروه I، خلاصه گزارشات انجمن ریاضی امریکا ۳۶، ص. ۴۴۵-۴۹۲ (۱۹۳۴).

ج. ف. الکزندرز: در باب سرشتهای گروههای آبلی گسسته، گزارشات سالانه ریاضی ۳۵، ص. ۳۸۹-۳۹۵ (۱۹۳۴).

ا. ر. ون کمپن: گروههای آبلی موضعاً دوفشرده و گروههای سرشتی آنها، گزارشات سالانه ریاضی ۳۶، ص. ۴۴۸-۴۶۳ (۱۹۳۵).

برای تثبیت موضوع، با مثالی شروع می‌کنم. دورانه‌ای حول یک نقطه O در یک صفحه، یک گروه توپولوژیک آبلی فشرده تشکیل می‌دهد. اگر x زاویه یک دوران باشد، ضرب گروهی با جمع زاویه‌ها به پیمانه 2π تعریف می‌شود.

نظیر سرشتهای یک گروه توپولوژیک آبلی، می‌توان همه توابع کراندار پیوسته χ را که در شرط (۶) صدق می‌کنند، تعریف کرد. در مثال ما، یگانه سرشتها عبارت‌اند از

$$\chi_n(x) = e^{inx}. \quad (۸)$$

به هر عدد صحیح n ، درست یک سرشت نظیر می‌شود. حاصلضرب دو سرشت متناظر است با مجموع این اعداد صحیح:

$$\chi_m \chi_n = \chi_{m+n}.$$

بنابراین گروه سرشتی Γ یک گروه جمعی اعداد صحیح است: یک گروه آبلی گسسته. برعکس، گروه سرشتی Γ ، گروه G است.

در نظریهٔ دیریکله راجع به سریهای فوریه ثابت می‌شود که سرشتهای χ_n یک مجموعهٔ متعامد کامل از توابع متناوب x تشکیل می‌دهند. روابط تعامد عبارت‌اند از:

$$\int_0^{2\pi} \overline{\chi_m(x)} \chi_n(x) dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n), \end{cases} \quad (9)$$

و هر تابع متناوب پیوسته را می‌توان به طور یکنواخت با یک مجموع متناهی از سرشتهای χ_n تقریب زد. در این مثال، ملاحظه کردیم که گروه سرشتی یک گروه توپولوژیک فشرده، یک گروه گسسته است، و برعکس. چنانکه عنقریب خواهیم دید، این ویژگی کلی گروههای توپولوژیک تفکیکپذیر است. اگر G فشرده و تفکیکپذیر باشد، گروه سرشتی Γ گسسته و شماراست و برعکس. این حکم به توسط پونتریاگین در مقاله فوق‌الذکر او ثابت شد.

مقاله جان فون نویمان با یک نظریهٔ عام توابع تقریباً متناوب آغاز می‌شود که بر یک گروه دلخواه G ، که ممکن است یک گروه توپولوژیک باشد یا نباشد، تعریف شده‌اند. تابع مختلط مقدار $f(x)$ را که بر یک گروه G تعریف شده است، تقریباً متناوب نامند هرگاه هر دنباله از توابع $f(a_n x b_n)$ شامل یک زیردنبالهٔ یکنواخت-همگرا باشد. اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، توابع $f(x)$ لازم است پیوسته باشند. بر طبق توضیح بوخنر^۱ (ماتماتیکه آنالین ۹۶، ص. ۱۱۹-۱۴۷، ۱۹۳۴)، این تعریف کلی تابع تقریباً متناوب با تعریف اصلی بوهر^۲ هم‌ارز است، هرگاه G گروه جمعی اعداد حقیقی باشد.

حال فون نویمان مقادیر میانگین و حاصلضربهای اسکالر توابع تقریباً متناوب را تعریف می‌کند. او نشان می‌دهد که اعضای ماتریسی نمایشهای کراندار تقریباً متناوب‌اند و در روابط تعامد خاصی صدق می‌کنند. به پیروی از وایل و پتر، فون نویمان با استفاده از یک معادلهٔ انتگرالی ثابت می‌کند که اعضای ماتریسی $d_{ik}(x)$ نمایشهای کراندار تحویلناپذیر، مجموعهٔ کاملی از توابع را در فضای توابع تقریباً متناوب تشکیل می‌دهند. برای ملاحظهٔ ملخصی از مقالهٔ فون نویمان با برهانهای ساده، ن. ک. کتاب من «گروههای تبدیلات خطی»، ص. ۵۷-۶۲.

فون نویمان، در قسمت ۷ مقاله‌اش، حالت خاص گروههای آبلی تفکیکپذیر موضعاً فشرده را مطالعه می‌کند. در این حالت نمایشهای تحویلناپذیر جملگی از درجهٔ ۱ هستند، و اعضای ماتریسی $d_{ik}(x)$ آنها دقیقاً سرشتهای $\chi(x)$ ‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که این سرشتها مجموعهٔ کاملی از توابع متعامد را در فضای توابع تقریباً متناوب تشکیل می‌دهند. با به کار بستن روشی از هار، فون نویمان ثابت می‌کند که برای تفکیک همهٔ اعضای گروه «به اندازهٔ کافی» سرشت وجود دارد. این بدین معنی است که: اگر به ازای هر سرشت مانند χ ، $\chi(a) = \chi(b)$ ، آنگاه $a = b$. بنابراین، گروه مفروض G و گروه سرشتهای Γ یک «زوج گروهی» به معنی پونتریاگین تشکیل می‌دهند.

۱. ر. وِن کمپن نظریه‌های پونتریاگین و فون نویمان را برای گروههای موضعاً دوفشرده تعمیم داده است.

بخش (ب) سرشتهای گروههای متناهی

اینک به گروههای غیرآبلی متناهی برمی‌گردیم:

مبادی نظریه سرشتهای گروهی و نمایشهای گروههای متناهی توسط تامس هاوکینز^۱ در سه مقاله زیر خیلی به دقت مورد بررسی قرار گرفته است:

(۱) مبادی نظریه سرشتهای گروهی، بایگانی تاریخ علوم دقیقه ۷، ص. ۱۴۲-۱۷۵ (۱۹۷۱)،

(۲) اعداد ابرمختلط، گروههای لی، و ابداع نظریه نمایشهای گروه، همان بایگانی ۸، ص. ۲۴۳-۲۸۷ (۱۹۷۲)،

(۳) جنبه جدید نظریه ابداعی سرشتهای گروهی فروبنیوس، همان بایگانی ۱۲، ص. ۲۱۷-۲۴۳ (۱۹۷۴).

من از این سه مقاله استفاده شایسته‌ای کرده‌ام.

خالق نظریه سرشتهای گروههای غیرآبلی متناهی گئورگ فروبنیوس است. چنانکه هاوکینز معلوم کرده است، ریشارد ددکیند نقشی حیاتی را در رویدادهایی که به خلق این نظریه منجر شد، ایفا کرد. ذیلاً این رویدادها را توصیف خواهیم کرد.

معرفی دترمینان گروهی به توسط ددکیند

هاوکینز دستنویس منتشر نشده‌ای از ددکیند را که در ۱۸۸۶ تحت عنوان «دترمینان گروهها و تجزیه آنها به عوامل حقیقی و ابرمختلط»^۲ کتابخانه گوتینگن، دستنویس ددکیند ۵ V نوشته شده، مورد توجه قرار داده است. در این دستنویس، ددکیند به هر عضو g از یک گروه متناهی متغیر x_i نظیر می‌کند. حاصلضرب $g_i g_j$ از نو عضوی از گروه است، بنابراین با یک متغیر x_k متناظر است، ددکیند آن را x_{ij} می‌نامد. حال ددکیند دترمینان x_{ij} را تشکیل می‌دهد. هر سطر و هر ستون این دترمینان جایگشتی از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ است. فرض کنیم Θ این دترمینان باشد. ددکیند در همین مقاله تعریف خود از x_{ij} ها را

1) Thomas Hawkins 2) Gruppen-Determinante und ihre Zerlegung in wirkliche und überkomplexe Faktoren

عوض می‌کند: او x_{ij} را متغیری تعریف می‌کند که با $g_i g_j^{-1}$ متناظر است. در آنچه ذیلاً می‌آید تعریف اخیر را اختیار خواهیم کرد. با قرار دادن

$$g_i g_j^{-1} = g_k,$$

اینک خواهیم داشت

$$g_i = g_k g_j.$$

فرض کنیم R جبر گروهی تولید شده با اعضای گروهی g_k باشد و فرض می‌کنیم

$$g_x = \sum g_k x_k$$

عضوی عام از این جبر باشد. با ضرب g_x در اعضای گروهی g_j خواهیم داشت

$$g_x g_j = \sum (g_k g_j) x_k = \sum g_i x_{ij}.$$

بنابراین ماتریس (x_{ij}) درست ماتریس نمایش دهنده g_x در نمایش منظم جبر گروهی است، و «دترمینان گروهی» Θ دترمینان این ماتریس است:

یکی از نخستین کشفیات ددکیند عبارت بود از: اگر χ آبلی باشد، دترمینان Θ به عوامل خطی، که ضرایب آنها سرشت هستند، تجزیه می‌شود:

$$\Theta = \prod_s \left[\sum_i \chi^{(s)}(g_i) x_i \right]. \quad (۱)$$

در فوریه ۱۸۸۶، ددکیند مصمم شد دترمینان گروهی را برای بعضی از گروههای غیرآبلی محاسبه کند. ابتدا گروه مقارن S_3 را در نظر گرفت. اعضای این گروه عبارت‌اند از

$$\begin{array}{ll} g_1 = ۱ & g_2 = (۲\ ۳) \\ g_3 = (۱\ ۲\ ۳) & g_4 = (۱\ ۳) \\ g_5 = (۱\ ۳\ ۲) & g_6 = (۱\ ۲). \end{array}$$

ددکیند تجزیه زیر را پیدا کرد

$$\Theta(x_1, \dots, x_6) = (u + v)(u - v)(u_1 u_2 - v_1 v_2)^2 \quad (۲)$$

که در آن

$$u = x_1 + x_2 + x_3$$

$$v = x_4 + x_5 + x_6$$

$$u_1 = x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3$$

$$u_2 = x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3$$

$$v_1 = x_4 + \rho x_5 + \rho^2 x_6$$

$$v_2 = x_4 + \rho^2 x_5 + \rho x_6,$$

و ρ ریشه سوم اولیه واحد است.

او موفق شد عامل درجه دوم $(u_1 u_2 - v_1 v_2)$ را با توسیع هیأت ضرایب $\mathbb{Q}$ به جبری از بعد ۴ روی $\mathbb{Q}$ تجزیه کند. در مورد تعریف این جبر که در واقع با جبر تمام-ماتریسی متشکل از ماتریسهای 2×2 یکرخیخت است، ن. ک. مقاله (۱) از هاوکینز.

ددکیند سپس گروه دو وجهی D_5 از مرتبه ۱۰ را در نظر گرفت. باز هم توانست Θ را به عوامل خطی و درجه دوم تجزیه کند.

سپس گروه کواترنیون را در نظر گرفت و تجزیه‌ای به صورت ذیل به دست آورد

$$\Theta = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(u_1 + u_2 - u_3 - u_4)(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \quad (3)$$

$$\cdot (u_1 - u_2 - u_3 + u_4)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2).$$

در این حالت، عامل درجه دوم نرم یک کواترنیون را نمایش می‌دهد، بنابراین می‌توان آن را با معرفی کواترنیونها به عنوان ضرایب تجزیه کرد:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = (v_1 + i v_2 + j v_3 + k v_4)(v_1 - i v_2 - j v_3 - k v_4).$$

ددکیند نتایج خود را منتشر نکرد، ولی در فوریه ۱۸۹۵ نامه‌ای به فروبنیوس نوشت که در آن این سؤال اسرارآمیز را مطرح کرد.

آیا اعداد ابر مختلط با ضرب غیرتعویضپذیر در تحقیقات شما نیز پیدا می‌شوند؟ لیکن با درخواست پاسخ به سؤالم نمی‌خواهم مزاحمتان شوم، زیرا به بهترین وجهی آن را در بین کارهای شما خواهم یافت (آثار ددکیند^۱، جلد ۲، ص. ۴۱۹-۴۲۰)

در مارس ۱۸۹۶ ددکیند به این موضوع برگشت، دترمینان گروهی را تعریف کرد، نتایج خود را درباره تجزیه آن در حالت آبلی بیان کرد، و متذکر شد وقتی اعداد ابر مختلط مجاز باشند به صورت ضرایب در نظر گرفته شوند، ممکن است چه پیش بیاید. در نامه بعدی خود (۳ آوریل ۱۸۹۶) حدس زد که تعداد عوامل خطی Θ با مرتبه گروه آبلی $\frac{G}{G'}$ ، که در آن G' زیرگروه تعویضگر را نشان می‌دهد، برابر است، و عوامل خطی دترمینان گروهی «به طریق خاصی» با سرشتهای گروه $\frac{G}{G'}$ متناظر است. او ادامه می‌دهد:

خوشحال می‌شدم اگر می‌دانستم که میل دارید خود را درگیر این مطالب کنید، زیرا به وضوح احساس می‌کنم که در این زمینه کاری نمی‌توانم انجام دهم.

مطالعات فروبنیوس درباره دترمینان گروهی

فروبنیوس فوراً دست به کار شد. در ۱۲ آوریل نامه‌ای مفصل برای ددکیند فرستاد که در آن نتایج متعدد بسیار جالبی را جمع به عوامل اول دترمینان گروهی توأم با برهانهای کامل توضیح داده شده‌اند. به لطف کلارک کیمبرلینگ^۱ نسخه‌هایی از مکاتبه بین ددکیند و فروبنیوس را دریافت داشتم. ذیلاً خلاصه کوتاهی را از مندرجات این نامه ارائه خواهم داد. برای جزئیات بیشتر، می‌توان به ص. ۲۲۴-۲۳۰ مقاله (۳) هاوکینز مراجعه کرد.

بعد از چند اظهار نظر درباره گروههای همیلتنی، فروبنیوس ثابت می‌کند، همان طور که ددکیند حدس زده بود، تعداد عوامل خطی در Θ با مرتبه گروه آبلی G/G' برابر است. این عوامل خطی را می‌توان به صورت

$$F(x) = \sum_R \chi(R) x_R$$

نوشت، که در آن x_R متغیر x_i متناظر با عضو گروهی R است، در حالی که χ سرشت G به معنی کلاسیک آن است:

$$\chi(R.S) = \chi(R)\chi(S).$$

فروبنیوس یادآور می‌شود که این سرشتهای χ در عین حال سرشتهای گروه آبلی G/G' اند و برعکس، و از آنجا نتیجه می‌شود که تعداد آنها با مرتبه G/G' برابر است.

برهان فروبنیوس اساساً همان است که در مقاله‌اش «در باب سرشتهای گروهی^۲» منتشر کرد، که در ۳۰ ژوئیه ۱۸۹۶ به فرهنگستان برلین ارائه شد.

در این نامه، فروبنیوس سپس به عوامل غیرخطی Θ می‌پردازد. من در اینجا علامات هاوکینز را (که همان علامات فروبنیوس در نامه اخیرش هستند) به کار خواهیم برد:

$$\Theta = \Pi \Phi^e, \quad (4)$$

و هر عامل اول Θ را با Φ ، و درجه‌اش را با f ، و نمای آن را در (۴) با e نشان خواهیم داد. فروبنیوس ابتدا رابطه مهمی را استخراج می‌کند، که به ازای هر عامل اول مانند Φ برقرار است:

$$\sum_R \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} x_{AR} = \Psi(A^{-1}). \quad (5)$$

چنانکه هاوکینز یادآور می‌شود، نباید در اهمیت رابطه (۵) بیش از اندازه مبالغه کرد. تابع مختلط Ψ در طرف راست رابطه (۵) درست همان چیزی است که بعداً فروبنیوس آن را یک سرشت G نامید. چگونگی استخراج رابطه (۵) از سوی فروبنیوس بسیار جالب است. ت. هاوکینز آن را در مقاله خود «ابداع نظریه سرشتهای گروهی»، مطالعات دانشگاه رایس^۱ ۶۴، ص. ۷۱-۵۷ (۱۹۷۸)، شرح داده است. فروبنیوس تابع $\Psi(A)$ را به ازای $A \neq E$ با ضابطه

$$\Phi = x_E^f + x_E^{f-1} \left(\sum_{A \neq E} \Psi(A) x_A \right) + \dots \quad (6a)$$

و به ازای $A = E$ با ضابطه

$$\Psi(E) = f \quad (6b)$$

تعریف می‌کند.

با توجه به آنچه گذشت، به آسانی ملاحظه می‌کنیم که تابع $\Psi(A)$ ، به صورتی که تعریف شد، درست اثر A در یک نمایش تحویلناپذیر گروه G است. می‌دانیم که Φ دترمینان ماتریس X ، ماتریس نمایش‌دهنده عضو عام $\Sigma A x_A$ در یک نمایش تحویلناپذیر جبر گروهی، است. حال اگر به جای عبارت $x_E - \lambda$ را قرار دهیم، از (۶a) و (۶b) رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\det(X - \lambda I) = (-\lambda)^f + (-\lambda)^{f-1} \sum_A \Psi(A) x_A + \dots,$$

که از آن نتیجه می‌شود که $\Sigma \Psi(A) x_A$ اثر ماتریس X است، و بنابراین $\Psi(A)$ اثر ماتریس نمایش‌دهنده A در نمایش تحویلناپذیر متناظر با عامل اول Φ است.

فروبنیوس سپس متذکر می‌شود که عوامل اول Φ دارای ویژگی ضربی

$$\Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (۷)$$

هستند، که در آن

$$z_A = \sum_{BC=A} x_B y_C. \quad (۸)$$

از دیدگاه امروزی، فرمول (۸) همان فرمول ضربی اعضای جبر گروهی است. زیرا، اگر

$$x = \Sigma B x_B$$

و

$$y = \Sigma C y_C$$

دو عضو جبر گروهی باشند، حاصلضرب آنها عبارت است از

$$z = \Sigma A z_A$$

که در آن z_A با (۸) تعریف می‌شود.

مفهوم «جبر گروهی» بر فروبنیوس معلوم بود. چنانکه در فصل ۶ دیدیم، جبر گروهی یک گروه متناهی به توسط کیلی در سال ۱۸۵۴ تعریف شده بود. فروبنیوس در نامه‌ای به ددکیند، به تاریخ ۱۵ ژوئیه ۱۸۹۶، چنین توضیح می‌دهد:

بارها در این باره اندیشیده‌ام که چگونه می‌توان، به ضرب اعضا، عمل دیگر (جمع) ملحق کرد مثلاً از اعضای $A, B, C, \dots$ از گروه، با در نظر گرفتن آنها به عنوان واحدهای ابر مختلط، ترکیبات خطی $xA + yB + zC + \dots$ را با عوامل اسکالر $x, y, z, \dots$ تشکیل می‌دهیم^۱.

اینک به نامه ۱۲ آوریل برمی‌گردیم. در صفحه ۱۲ این نامه، فروبنیوس تجزیه دترمینان گروهی Θ را به عوامل اول در حالت گروه دو وجهی از مرتبه ۸ که با روابط

$$A^2 = E, \quad B^2 = E, \quad B^{-1}AB = A^{-1}$$

تعریف می‌شود، محاسبه می‌کند.

(۱) ترجمه از آلمانی به انگلیسی از هاوکینز است. م.

وی تجزیه‌ای به صورت ذیل به دست می‌آورد

$$\Theta = (u + v)(u - v)(u_1 + v_1)(v_1 - u_1)(u_1 u_2 - v_1 v_2)^2.$$

در این مثال و نیز در همه مثالهایی که به توسط ددکیند محاسبه شده‌اند، قضیه زیر برقرار است، که هاوکینز آنها را قضیه‌های A و B می‌نامد.

A . می‌توان متغیرها را به صورت خطی چنان تغییر داد که هر عامل Φ تابعی از مجموعه v متغیر خود شود.

$$v = \epsilon f \cdot B$$

فروبنیوس در صفحه ۱۳ نامه خود این سؤال را مطرح می‌کند که آیا احکام A و B در حالت کلی برقرارند. باقی این نامه بیشتر به برهان A و B اختصاص یافته است.

ابتدا، فروبنیوس از (۶) «روابط تعامد» ذیل را استخراج می‌کند

$$\frac{h}{e} \Psi(AB^{-1}) = \sum_R \Psi(AR^{-1}) \cdot \Psi(RB^{-1}) \quad (10)$$

$$\circ = \sum_R \Psi'(AR^{-1}) \cdot \Psi(RB^{-1}) \quad (11)$$

که در آن Ψ' تابع Ψ متعلق به عامل اول دیگری مانند Φ' متمایز از Φ است.

در ضمن استخراج (۱۰)، فروبنیوس توضیح می‌دهد که

$$\Psi(AB) = \Psi(BA), \quad (12)$$

و در حاشیه به فرمول هم‌ارز ذیل اشاره می‌کند

$$\Psi(R^{-1}AR) = \Psi(A). \quad (13)$$

بعد از اثبات قضیه A ، فروبنیوس اعلام می‌کند که: «سرانجام معتقد شده‌ام که برهانی برای $v = \epsilon f$ یافته‌ام. اما این برهان به هیچوجه مرا راضی نمی‌کند و باید این امکان موجود باشد تا آن را بیش از اندازه خلاصه و ساده کرد.» در واقع این برهان طولانی و ملال‌آور است. در پایان این نامه فروبنیوس از ددکیند یاری می‌طلبد:

پس از تحقیقاتی که شما در باب اعداد متشکل از چند واحد (یعنی در باب جبرها) انجام داده‌اید، یقیناً با روشهای تحقیق کاملاً مأنوسید، و می‌توانید تلخیص‌های لازم را فراهم سازید. زیرا استدلال من بسیار پیچیده است به طوری که خودم نیز درست نمی‌دانم نکته اساسی برهان کجاست

و در پانویست می افزاید:

* معتقد این نکته در معادله $\Psi(AB) = \Psi(BA)$ نهفته است، زیرا از این معادله نتیجه می شود که دستگاه $(x_{AB^{-1}})$ با $\Psi(BA^{-1})$ تعویض پذیر است.

پنج روز بعد، در ۱۷ آوریل، فروبنیوس با خوشحالی می نویسد:

در پایان نامه آخرم، جستجویم را رها کرده و خواستار همکاری شما شدم. روز بعد، گرچه حل کامل را نیافتم، لیکن لااقل راه انجام آن را پیدا کردم. احساس من از اینکه معادله $\Psi(AB) = \Psi(BA)$ کلید حل مسأله است، فریتم نداد. هنوز راه درازی در پیش دارم ولی مطمئنم که راه درستی را انتخاب کرده ام. ... آیا نام بهتری برای تابع Φ سراغ دارید؟ یا Ψ باید سرشت Φ خواند شود (که برای Φ خطی سازگاری دارد)؟

در نامه ۱۷ آوریل، فروبنیوس هنوز تردید دارد که Ψ را سرشت بنامد ولی در نامه های بعدی و در مقاله ۲۰ ژوئیه خود تحت عنوان «در باب سرشتهای گروهی»^۲ (خلاصه مذاکرات فرهنگستان برلین ۱۸۹۶، ص. ۹۸۵-۱۰۱۲)، توابع Ψ را «سرشتهای گروهی»^۳ می نامد.

در نامه ها و همچنین در مقاله مربوط به سرشتهای گروهی، استفاده مکرری از قضیه ای راجع به ریشه های مشخصه مجموعه ای از ماتریسهای تعویض پذیر به عمل می آید. این قضیه در مقاله ای تحت عنوان «در باب ماتریسهای تعویض پذیر»^۴ که در خلاصه مذاکرات سال ۱۸۹۶، ص. ۶۰۱-۶۱۴ منتشر شد، به اثبات رسید. ابتدا این مقاله را خلاصه خواهم کرد، و سپس به بحث درباره نامه های مورخ ۱۷ و ۲۶ آوریل و نیز مقاله سرشتهای گروهی خواهم پرداخت.

قضیه فروبنیوس راجع به ماتریسهای تعویض پذیر

قضیه اصلی مقاله فروبنیوس «در باب ماتریسهای تعویض پذیر» چنین است:

III. به ازای m ماتریس تعویض پذیر $n \times n$ مانند $A, B, \dots$ [مجموعه] مرتبی مانند $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots$ از ریشه های مشخصه $A, B, \dots$ وجود دارد به طوری که به ازای هر چند جمله ای مانند $f(u, v, \dots)$ برحسب m متغیر $u, v, \dots$ ریشه های مشخصه $f(A, B, \dots)$ عبارت اند از

$$f(a_1, b_1, \dots), f(a_2, b_2, \dots), \dots, f(a_n, b_n, \dots).$$

(۱) ترجمه از آلمانی به انگلیسی از هاوکینز است. م.

2) Ueber Gruppencharaktere 3) Sitzungsberichte Akad. Berlin 4) Gruppencharaktere

5) Ueber vertauschbare Matrizen

حالت‌های خاص این قضیه قبلاً در مقاله‌ای پیشتر از فروبنیوس تحت عنوان «در باب جانشینهای خطی و فرمهای دو خطی^{۱)}»، مجله کرله برای ریاضیات ۸۴، ص. ۱-۶۳ (۱۹۷۸)، آمده است، و خود فروبنیوس مدعی است هنگامی که این مقاله پیشتر را می‌نوشت، بر قضیه III وقوف داشت. قضیه III در «بیوست» الحاقی به نامه ۱۷ آوریل ۱۸۹۶ نیز آمده است.

هرگاه m ماتریس را $A_1, \dots, A_m$ بنامیم و هرگاه چندجمله‌ای f یک فرم خطی برحسب $u_1, \dots, u_m$ با ضرایب متغیر $x_1, \dots, x_m$ باشد:

$$f(u_1, \dots, u_m) = u_1 x_1 + \dots + u_m x_m,$$

نتیجه می‌شود که ریشه‌های مشخصه

$$A = A_1 x_1 + \dots + A_m x_m, \quad (14)$$

n تابع خطی ذیل از x ها هستند

$$r_1^{(s)} x_1 + \dots + r_m^{(s)} x_m \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

که در آن $r_i^{(s)}$ ، s مین ریشه مشخصه A_i در [مجموعه] مرتب مذکور در قضیه III است. چون درمیتان A حاصلضرب ریشه‌های مشخصه است، داریم

$$\det(A) = \prod_s \left(\sum_i r_i^{(s)} x_i \right) \quad (16)$$

فروبنیوس در ادامه مقاله‌اش، فرض می‌کند که $m = n$ ، و ماتریسهای $A_1, \dots, A_n$ را ماتریسهای نمایش منظم یک جبر تعویض‌پذیر می‌گیرد. فرض کنیم $e_1, \dots, e_n$ اعضای پایه چنین جبری باشد، و فرض کنیم

$$e_j e_k = \sum_i e_i a_{ijk}. \quad (17)$$

ماتریسهای نمایش منظم این جبر ماتریسهای A_j اند که اعضای آنها عبارت‌اند از $a_{ijk}^{(j)} = a_{ijk}$ و از (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$A_j A_k = \sum_i A_i a_{ijk}. \quad (18)$$

چون جبر تعویضپذیر است، داریم

$$A_j A_k = A_k A_j.$$

بر طبق قضیه III، s مین ریشه مشخصه طرف چپ (۱۸) عبارت است از $r_j^{(s)} r_k^{(s)}$ و s مین ریشه مشخصه طرف راست آن، $\Sigma r_i^{(s)} a_{ijk}$ است، بنابراین از (۱۸) لازم می‌آید

$$r_j^{(s)} r_k^{(s)} = \Sigma r_i^{(s)} a_{ijk} \quad (۱۹)$$

که بدین معنی است که به ازای هر مقدار ثابت s اعداد $r_1^{(s)}, \dots, r_n^{(s)}$ از همان قواعد ضرب اعضای پایه جبر، $e_1, \dots, e_n$ پیروی می‌کنند. به عبارت دیگر، نگاشت $\varphi^{(s)}$:

$$\Sigma e_i x_i \rightarrow \Sigma r_i^{(s)} x_i \quad (۲۰)$$

یک هم‌ریختی این جبر است:

$$\varphi^{(s)}(a+b) = \varphi^{(s)}(a) + \varphi^{(s)}(b),$$

$$\varphi^{(s)}(a.b) = \varphi^{(s)}(a).\varphi^{(s)}(b).$$

در مقاله ۱۸۸۵ ددکیند «در باب نظریه‌ای از n کمیت مختلط که از واحدهای اصلی ساخته شده‌اند»^۱ که در فصل ۶ مورد بحث قرار گرفت، ماتریسی مانند (p_{ij}) تعریف شده بود:

$$p_{ij} = \sum_{r,s} a_{rsr} a_{sij}, \quad (۲۱)$$

و ددکیند ثابت کرده بود که: اگر $\det(p_{ij}) \neq 0$ ، این جبر حاصلجمع مستقیمی از نسخه‌های $\mathbb{Q}$ است. فروبنیوس اینک این نتیجه را به کار برده و ثابت می‌کند که: اگر $\det(p_{ij}) \neq 0$ ، دترمینان $r_k^{(s)}$ ناصفر است، یا به عبارت دیگر، فرمهای خطی $\Sigma r_i^{(s)} x_i$ مستقل خطی‌اند.

با توجه به آنچه گذشت، می‌توان گفت فروبنیوس یک نظریه نمایشهای تحویلناپذیر جبرهای تعویضپذیر به وجود آورد. هرگاه هیأت زمینه جبری بسته باشد، همه نمایشهای تحویلناپذیر یک جبر تعویضپذیر از درجه یک هستند. ماتریسهای تعویضپذیر هر نمایش این جبر مانند E_k همواره یک ویژه بردار مشترک دارند، که یک زیرفضای پایای یک بعدی از فضایی برداری را تولید می‌کند که این ماتریسها روی آن عمل می‌کنند. به پیمانه این زیرفضا مجدداً یک ویژه بردار موجودست، و به همین ترتیب. بنابراین ماتریسها را

می‌توان به صورت مثلثی نوشت، که در آنها اعضای واقع در پایین قطر اصلی صفر باشند. اعضای واقع بر قطر، $\varphi^{(s)}(a)$ ، معرّف نمایشهای تحویلناپذیر این جبرند.

اگر $\det(p_{ij}) \neq 0$ ، این جبر همان است که آن را نیمساده می‌نامیم، و بر طبق قضیهٔ ددکیند، این جبر حاصلجمع مستقیمی از زیرجبرهای ساده‌ای است که نسخه‌هایی از هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ اند. اگر این مطلب را مفروض بگیریم، عضو واحد این جبر مجموع اعضای واحد n جبر ساده است:

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n,$$

و هر عضو این جبر را می‌توان به صورت مجموعی مانند

$$a = ae_1 + ae_2 + \cdots + ae_n$$

نوشت.

اینک همریختیهای $\varphi^{(s)}$ را می‌توان به صورت

$$a \mapsto ae_s$$

به دست آورد، و آنها را می‌توان به عنوان نمایشهای جبر با اعداد مختلط در نظر گرفت. واضح است که این n همریختی مستقل خطی‌اند.

نامهٔ ۱۷ آوریل، ۱۸۹۶

فروبنیوس از همان آغاز این نامه احساس خود را دربارهٔ رابطهٔ

$$\Psi(AB) = \Psi(BA), \quad (22)$$

که در نامهٔ پیشین خود به دست آورده بود ابراز می‌کند مبنی بر اینکه این رابطه کلید حل کامل مسألهٔ اوست. ذیلاً خواهیم دید که چگونه فروبنیوس این کلید را به کار برد.

از (۲۲)، با گذاردن S و R^{-1} به جای A و B ، می‌توان نتیجه گرفت

$$\Psi(R^{-1}SR) = \Psi(S), \quad (23)$$

که بدین معنی است که تابع Ψ تنها به ردهٔ اعضای مزدوجی که S ، بدان متعلق است، بستگی دارد. بنابراین هر سرشت $\Psi^{(s)}$ را می‌توان به عنوان برداری با k مؤلفهٔ

$$\Psi_1^{(s)}, \dots, \Psi_k^{(s)}$$

که در آن k تعداد رده‌هاست، در نظر گرفت. تعامد روابط (۱۰) و (۱۱) مستلزم این است که l بردار $\Psi^{(s)}$ مستقل خطی باشند، بنابراین تعداد آنها حداکثر با تعداد رده‌ها برابر است:

$$l \leq k$$

فروبنیوس در صفحه ۳ نامه‌اش، مجموعه‌ای از اعداد صحیح $h_{\alpha\beta\gamma}$ را معرفی می‌کند. ابتدا حاصلضربهای ABC' را، که در آن A در C_α ، B در C_β و C در C_γ است، تشکیل می‌دهیم و سپس تعداد حاصلضربهای ABC' را که برابر با عضو واحد E هستند، می‌شماریم. این تعداد برابر $h_{\alpha\beta\gamma}$ است. این $h_{\alpha\beta\gamma}$ نسبت به α, β, γ متقارن، و بر h_α قابل قسمت است.

فروبنیوس سپس به بررسی این مسأله می‌پردازد: در صورتی که متغیرهای x_R با شرط

$$x_{R^{-1}SR} = x_S \quad \text{یا} \quad x_{AB} = x_{BA} \quad (24)$$

محدود شوند، برای عوامل اول Φ چه اتفاقی می‌افتد؟

به تأسی از هاوکینز، تابع تحدید شده را Φ^* خواهم نامید. فروبنیوس در صفحه ۸ نامه‌اش ثابت می‌کند که Φ^* توانی از یک تابع خطی است:

$$\Phi^* = \frac{1}{f} \sum_R \{ \Psi(R^{-1}) x_R \}^f. \quad (25)$$

شرایط (۲۴) را می‌توان به صورت ذیل تعبیر کرد. حاصلجمعهای

$$x = \Sigma S x_S \quad (26)$$

اعضای جبر گروهی هستند.

اما شرایط (۲۴) موجب این محدودیت می‌شوند که زیرجبر متشکل از حاصلجمعهایی مانند x که در آنها اعضای S به رده دلخواه C_α تعلق دارند، ضرایب مساوی داشته باشند. برای روشن کردن موضوع، این ضرایب را t_α می‌نامیم. در این صورت حاصلجمع (۲۶) را می‌توان به صورت

$$x = \Sigma e_\alpha t_\alpha \quad (27)$$

نوشت، که در آن e_α حاصلجمع همه اعضای S از رده C_α است.

حاصلجمعهای (۲۷) یک زیرجبر Σ از جبر گروهی تشکیل می‌دهند. اعضای پایه آن اعضای e_α هستند، و قواعد ضرب آن به صورت ذیل‌اند

$$e_\beta e_\gamma = \Sigma e_\alpha \frac{h_{\alpha'\beta\gamma}}{h_\alpha}. \quad (28)$$

چون $h_{\alpha'\beta\gamma} = h_{\alpha'\gamma\beta}$ ، زیرجبر Σ تعویضپذیر است. در واقع، این زیرجبر مرکز جبر گروهی است. ثابتهای ترکیبی آن عبارتاند از

$$a_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha'\beta\gamma}/h_{\alpha}. \quad (29)$$

چنانکه عنقریب خواهیم دید، این ثابتهای ترکیبی نقشی اساسی در نظریه سرشتهای گروهی فروبنیوس ایفا می‌کنند.

فروبنیوس سپس فرمول بسیار جالبی به دست می‌آورد

$$f \sum_{\gamma} h_{\alpha\beta\gamma'} \Psi_{\gamma} = h_{\alpha} h_{\beta} \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}. \quad (30)$$

این فرمول به چه معنی است؟ آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{h_{\beta} \Psi_{\beta}}{f} \frac{h_{\gamma} \Psi_{\gamma}}{f} = \sum \frac{h_{\alpha'\beta\gamma}}{h_{\alpha}} \frac{h_{\alpha} \Psi_{\alpha}}{f} = \sum a_{\alpha\beta\gamma} \frac{h_{\alpha} \Psi_{\alpha}}{f}. \quad (31)$$

فرمول اخیر مبین این است که اعداد مختلط

$$r_{\alpha} = \frac{h_{\alpha} \Psi_{\alpha}}{f} \quad (32)$$

از همان قواعد ضرب اعضای پایه جبر Σ ، یعنی e_{α} ها، پیروی می‌کنند. به عبارت دیگر، نگاشت

$$\Sigma e_{\alpha} t_{\alpha} \mapsto \Sigma r_{\alpha} t_{\alpha} \quad (33)$$

یک نگاشت همریخت از جبر Σ به هیأت اعداد مختلط است.

معرفی اعداد r_{α} که با ضابطه (۳۲) تعریف می‌شوند، ابداع من نیست. همین اعداد در مقاله «در باب سرشتهای گروهی» فروبنیوس با $r_{\alpha}^{(s)}$ نشان داده می‌شوند، و فرمول (۳۱) پیشتر در مقاله پیشین فروبنیوس «در باب ماتریسهای تعویضپذیر» به صورت

$$r_j^{(s)} r_k^{(s)} = \Sigma r_i^{(s)} a_{ijk} \quad (34)$$

ظاهر می‌شود که برای هر جبر تعویضپذیر برقرار است. ملاحظه می‌کند که فرمول (۳۴) همان فرمول (۱۹) است.

فروبنیوس در انتهای نامه‌اش ثابت می‌کند که $l = k$: تعداد سرشتهای با تعداد رده‌ها در گروه برابر

است.

نامه ۲۶ آوریل

در آغاز این نامه فروبنیوس نتیجه پیشین خود را از نو بیان می‌کند: هر عامل اول دترمینان گروهی Φ را می‌توان با یک تبدیل خطی از متغیرهای x_k به تابعی از $v(=ef)$ متغیر، و نه کمتر، تبدیل کرد. او سپس شرح می‌دهد که در همه مثالهایی که با ددکیند مبادله کرده رابطه $e = f$ برقرار است. می‌گوید: «موجب شگفتی خواهد بود هرگاه $e = f$ ، لیکن توانسته است این تساوی را در حالات $f = 1$ و $f = 2$ ثابت کند.

فروبنیوس سپس جبری را معرفی می‌کند که دارای ثابتهای ترکیبی $a_{\alpha\beta\gamma}$ است که با ضابطه (۲۹) تعریف می‌شوند. او از مقاله ۱۸۸۵ ددکیند «در باب نظریه‌ای از n کمیت مختلط که از واحدهای اصلی ساخته شده‌اند» نقل قول می‌کند. فروبنیوس اظهار می‌دارد، این مقاله، «در حالی که این [نامه] را می‌نویسم، روی میز قرار دارد» و اضافه می‌کند «و پایانی برای شگفتی من وجود ندارد». او ثابت می‌کند که جبر Σ در شرط ددکیند

$$\det(p_{\alpha\beta}) \neq 0. \quad (35)$$

صدق می‌کند.

این نتیجه برای فروبنیوس از اهمیت اساسی برخوردار است. بعد از اثبات آن، می‌گوید:
این برهان ساده به بهای تلاش طاقت‌فرسا و یأس باورنکردنی من به دست آمده است.

بنابر توضیح ددکیند، از شرط (۳۵) نتیجه می‌شود که جبر Σ حاصلجمع مستقیمی از نسخه‌های هیأت اعداد مختلط است. فروبنیوس، بر پایه این نتیجه توانست مجموعه کاملی از نمایشهای Σ را با اعداد مختلط بسازد

$$\Sigma e_{\alpha} t_{\alpha} \mapsto \Sigma r_{\alpha}^{(s)} t_{\alpha},$$

و ثابت کند دترمینان $r_{\alpha}^{(s)}$ صفر نیست. بدین ترتیب، نظریه گروههای سرشتی او براساس محکمی مبتنی شد.

در صفحه ۱۰ این نامه، فروبنیوس به تجزیه دترمینان گروهی برمی‌گردد. او اقدام به محاسبه توابع Ψ برای پنج گروه ذیل می‌کند:

گروه چهار وجهی A_4 از مرتبه ۱۲،

گروه بیست وجهی A_5 از مرتبه ۶۰،

گروه $PSL(2, 7)$ از مرتبه ۱۶۸،

گروه هشت وجهی S_4 از مرتبه ۲۴،

گروه S_5 از مرتبه ۱۲۰.

به وسیله معادله

$$h = \Sigma ef$$

که در آن h مرتبه گروه است، فروبنیوس حاصلضریبهای ef را محاسبه می‌کند، و به این نتیجه می‌رسد که این حاصلضریبها همواره مربع‌اند.

در مورد گروه چهار وجهی فروبنیوس عملاً تجزیه دترمینان گروهی را محاسبه کرد، و دریافت که $f = 3$. در همه موارد، ef همان مربع $\Psi(E)$ بود. او این را «تا وقتی فهمیده نشده، شگفت‌انگیز» می‌نامد. در این مرحله، هنوز موفق به اثبات

$$e = f = \Psi(E)$$

نشده بود.

در اوایل ۱۸۹۳، مولین ثابت کرده بود که جبر گروهی یک گروه متناهی، حاصلجمع مستقیمی از جبرهای تمام-ماتریسی است. من کاملاً با این نظر هاوکینز موافقم که:

هرگاه او (فروبنیوس) از کار مولین مطلع شده بود. قطعاً، از طریق جبر گروهی، به ارتباط آن با مطالعه دترمینان گروهی و با موضوعاتی که در آن زمان او را متحیر می‌کردند یعنی: دلایل اینکه چرا $f = e$ و $h = \Sigma f^2$ ، پی می‌برد. (بایگانی تاریخ علوم دقیقه ۱۲، ص ۲۴۰).

مقاله فروبنیوس «در باب سرشتهای گروهی»

در در این مقاله، که در ۱۶ ژوئیه، ۱۸۹۶، به فرهنگستان برلین ارائه شد، خط فکری مشروح نامه‌ها، دگرگون و خلاصه می‌شود. به جای اینکه ابتدا توابع Ψ تعریف و سپس r_α ها با ضابطه (۳۲) معرفی شوند، فروبنیوس ابتدا r_α ها را معرفی می‌کند، و سپس به تعریف «سرشتهای» χ با فرمول

$$r_\alpha = \frac{1}{f} h_\alpha \chi_\alpha \quad (36)$$

می‌پردازد، که در آن f عامل دلخواهی است، که می‌توان آن را در مرحله بعدی مشخص کرد. اگر f با درجه عامل تحویلناپذیری از دترمینان گروهی مساوی گرفته شود، سرشتهای χ درست همان توابع Ψ می‌شوند که در نامه ۱۲ آوریل معرفی شدند، اما فروبنیوس در مقاله منتشره خود، به دترمینان گروهی اشاره نمی‌کند.

فروبنیوس اعداد صحیح $h_{\alpha\beta\gamma}$ را به همان صورت تعریف شده در نامه‌اش تعریف می‌کند، و یک بار دیگر، قرار می‌دهد

$$a_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha'\beta\gamma}/h_{\alpha}. \quad (۳۷)$$

او یادآور می‌شود که $a_{\alpha\beta\gamma}$ ها ثابتهای ضریبی یک جبر تعویضپذیرند، که در مورد آنها می‌توان قضیه‌های ثابت شده به توسط ویرشتراس در ۱۸۸۴ و ددکیند در ۱۸۸۵ را اعمال کرد. فروبنیوس سپس نتایج مقاله‌اش را دربارهٔ ماتریسهای تعویضپذیر یادآوری می‌کند. با قرار دادن

$$a_{\alpha\beta} = \sum a_{\alpha\beta\gamma} x_{\gamma} \quad (۳۸)$$

به این نتیجه می‌رسد که ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $(a_{\alpha\beta})$ توابع خطی ذیل‌اند

$$r_0^{(s)}x_0 + r_1^{(s)}x_1 + \dots + r_{k-1}^{(s)}x_{k-1}. \quad (۳۹)$$

در اینجا $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ متغیرهای متناظر با k ردهٔ C'_α هستند، و متغیر اول، x_0 ، با عضو واحد E متناظر است. او ثابت می‌کند که شرط ددکیند

$$\det(p_{\alpha\beta}) \neq 0$$

برقرار است، و مجموعهٔ معادلات

$$h_{\beta}h_{\gamma}\chi_{\beta}\chi_{\gamma} = f \sum_{\alpha} h_{\alpha'\beta\gamma}\chi_{\alpha}$$

دارای k جواب متمایز ذیل‌اند

$$\chi_{\alpha} = \chi_{\alpha}^{(s)}, \quad f = f_s,$$

به طوری که دترمینان $\chi_{\alpha}^{(s)}$ مخالف صفر است.

فروبنیوس در بخش ۵ مقاله‌اش علامت جدیدی را وارد می‌کند. به جای $\chi_{\alpha}^{(s)}$ یا χ_{α} ، علامت $\chi(A)$ را که در آن A عضو دلخواهی از ردهٔ C'_α است می‌گذارد. او ویژگیهای متعدد جالبی از توابع χ را به دست می‌آورد، به عنوان مثال

$$h\chi(A)\chi(B) = f \sum_R \chi(AR^{-1}BR).$$

در حالت گروههای آبدی، این رابطه به رابطه ذیل تبدیل می‌شود

$$\chi(A)\chi(B) = f\chi(AB),$$

بنابراین، اگر f را مساوی ۱ اختیار کنیم، سرشتهای χ ی یک گروه آبدی بر سرشتهای کلاسیک تعریف شده به توسط دیریکله و ددکیند منطبق می‌شوند.

ایده‌های اصلی مقاله مورد بحث جملگی در نامه‌ها ذکر شده‌اند، ولی این نامه‌ها دارای اطلاعات وسیعتری راجع به درمیان گروهی هستند. درباره این موضوع، فروبنیوس مقاله دیگری تألیف کرد، که ذیلاً به بحث در مورد آن خواهم پرداخت.

برهان $e = f$ و تجزیه درمیان گروهی

بین ۴ و ۶ سپتامبر سال ۱۸۹۶ که فروبنیوس مطالعات خود را درباره درمیان گروهی شروع کرد، سرانجام در اثبات $e = f$ کامیاب شد. در نامه‌ای به ددکیند به تاریخ ۶ سپتامبر، این واقعه را به صورت ذیل توصیف می‌کند:

من ... کوشش خواهم کرد تا کلی نظریه درمیان گروهی را ... از میان مقالات بسیار پراکنده و آشفته جمع‌آوری کنم. ولی، این بی‌نظمی، تا اندازه‌ای، مفید است. یعنی، پس از مراجعت به وطن، دیگر نتوانستم برهانی را که مدتها پیش برای شما نوشته بودم بیابم: اگر f مساوی ۲ باشد e نیز مساوی ۲ خواهد شد. پس از رنج بسیار به صورت جدیدی از این برهان دست یافتم و در اینجا بر امکان تعمیمی که در ارتباط با برهان نخست از آن مأیوس شده بودم، پی‌بردم. (ترجمه از آلمانی به انگلیسی از هاوکینز).

اکنون که $e = f$ ثابت شد، فروبنیوس توانست نتایج خود را راجع به تجزیه درمیان گروهی منتشر کند. مقاله او «در باب عوامل اول درمیان گروهی»^۱ در ۳ دسامبر به فرهنگستان برلین ارائه شد (خلاصه گزارشات^۲ ۱۸۹۶، ص. ۱۳۴۳-۱۳۸۲).

بعدها، در ۱۸۹۷، فروبنیوس از مقاله مولین آگاه شد و نتایج خود را برحسب ماتریسها از نو بنا نهاد. ثابت کرد که سرشتهای χ لای او دقیقاً اثرهای نمایشهای تحویلناپذیرند. در فصل آتی درباره مقاله ۱۸۹۷ او تحت عنوان «در باب نمایش گروههای متناهی به وسیله جانشینهای خطی»^۳ بحث خواهم کرد.

1) Über die Primfaktoren der Gruppensdeterminante 2) Sitzungsberichte 3) Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen

فصل ۱۳

نمایشهای گروههای متناهی و جبرها

نظریه نمایشهای گروههای متناهی به وسیله ماتریسهایی با اعضای مختلط، تقریباً همزمان به توسط سه مؤلف بسط یافت: تئودور مولین، گئورگ فروبنیوس، ویلیام برنساید. نخستین مقالات آنها در این موضوع عبارتند از:

ت. مولین: توضیحی درباره نظریه گروههای جانشینی همگن^۱، خلاصه گزارشات انجمن دانشمندان علوم طبیعی دورپات^۲ (= یورف^۳ در استونی) ۱۱، ص. ۲۵۹-۲۷۶، ارائه شده در ۲۴ آوریل ۱۸۹۷، ت. مولین: در باب تعداد متغیرهای یک گروه جانشینی تحویلناپذیر^۴ همان مجلد، ص. ۲۷۷-۲۸۸، ارائه شده در ۲۵ سپتامبر ۱۸۹۷،

گ. فروبنیوس: در باب نمایش گروههای متناهی به وسیله تبدیلات خطی^۵، خلاصه مذاکرات پروس فرهنگستان برلین^۶ ۱۸۹۷، ارائه شده در ۱۸ نوامبر ۱۸۹۷،

و. برنساید: در باب گروه پیوسته‌ای که با گروه دلخواه مفروضی از مرتبه متناهی تعریف می‌شود، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی لندن ۲۹، ص. ۲۰۷-۲۲۵، تاریخ وصول ۱۰ ژانویه ۱۸۹۸، و. برنساید: همان عنوان (مقاله دوم)، همان مجلد، ص. ۵۴۶-۵۶۵، تاریخ وصول ۹ ژوئن، ۱۸۹۸.

تامس هاوکینز به دقت در منشاء این مقالات، و بالاخص، در موضوع استقلال آنها به تحقیق پرداخته است. ن. ک. مقاله او «اعداد ابر مختلط، گروههای لی، و ابداع نظریه نمایش گروهها» بایگانی تاریخ علوم دقیقه ۸، ص. ۲۴۳-۲۸۷ (۱۹۷۲). یکی از نتیجه‌گیریهای او این است که مولین و فروبنیوس کاملاً مستقل از یکدیگر کار کرده‌اند. در مورد برنساید، هاوکینز به این نتیجه می‌رسد که وی از ارتباط مقاله‌اش با مقاله فروبنیوس درباره عوامل اول دترمینان گروهی کاملاً آگاه بوده، و «به الهامی که از رساله

1) Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen 2) Sitzungberichte der Naturforscher-Gesellschaft Dorpat 3) Yurev 4) Über die Anzahl der Variablen einer irreduziblen Substitutionsgruppe. 5) Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Transformationen. 6) Sitzungsber. preuss. Akad. Berlin

مولین دربارهٔ مشخص سازی دستگاههای ابر مختلط گرفته است، سخت متکی است». از طرف دیگر برنساید از مقالات اخیرالذکر مولین و فروبنیوس مطلع نبوده است.

نتایج اصلی این سه مقاله اساساً یکی هستند، یعنی:

۱. نمایش منظم هر گروه متناهی (G) کاملاً تحویلپذیر است.
۲. هر نمایش تحویلناپذیر با یکی از مؤلفه‌های نمایش منظم هم‌ارز است.
۳. اگر مؤلفهٔ تحویلناپذیری دارای درجهٔ f باشد، آنگاه f بار در نمایش منظم ظاهر می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که حاصلجمع $\sum f^2$ با مرتبهٔ گروه (G) برابر است.
۴. تعداد نمایشهای تحویلناپذیر غیرهم‌ارز با تعداد رده‌های گروه (G) برابر است.

به علاوه مولین ثابت کرد:

۵. هر نمایش (G) کاملاً تحویلپذیر است.

برنساید قضیهٔ مهم دیگری را ثابت کرد، که آن را به شرح زیر بیان می‌کند:

باز هم ثابت می‌شود که، هرگاه بتوان g را به صورت گروهی از جانشینهای خطی که بر m نماد عمل می‌کنند، نمایش داد به طوری که به هر عمل ^{1} مانند S_k ، از g ، جانشینی

$$x'_s = \sum_{i=1}^{i=m} a_{sik} x_i \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

نظیر شود، آنگاه معادلات

$$x'_s = \sum_{i,k} a_{sik} x_i y_k \quad (s, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

معرف یک گروه پیوستهٔ متناهی‌اند که حاصلضرب مستقیم تعدادی از گروههایی است که هر کدام از آنها همانا با یک گروه همگن خطی عام یکرخت است.

دو فرمول برنساید را می‌توان چنین تفسیر کرد. فرمول (۱) بدین معنی است که هر عضو S_k از گروه g با ماتریسی مانند A_k نمایش داده می‌شود که اعضای آن a_{sik} هستند. در فرمول دوم این ماتریسهای A_k در عوامل y_k ضرب و با هم جمع می‌شوند تا ماتریسی مانند

$$A_y = \sum A_k y_k, \quad (3)$$

که عضو $\sum S_k y_k$ از جبر گروهی را نمایش می‌دهد، به دست آید. برنساید توجه خود را به ماتریسهای ناتکین A_y ، که تشکیل یک گروه می‌دهند، معطوف می‌سازد و ادعا می‌کند که این گروه حاصلضرب مستقیمی از گروههایی است که هر یک با گروه $GL(f, \mathbb{C})$ یکرخت است.

{ ۱ } عمل [= operation] اصطلاح قدیمی برای اعضای یک گروه جانشینی. م.

اگر همه ماتریسهای A_{ij} بدون قید ناتکینی، در نظر گرفته شوند، یک جبر به دست می‌آید: یک نمایش جبر گروهی. مولین ثابت کرد که این جبر حاصلجمع مستقیمی از جبرهای تمام-ماتریسی است. نتیجه برنساید، نتیجه بلافصل قضیه مولین است.

روشهای این سه مؤلف کاملاً متفاوت است. تحقیقات مولین بر نظریه ساختاری جبرها که در رساله ۱۸۹۱ او بسط یافته، مبتنی است. مقاله فروبنیوس بر پایه نظریه سرشتهای گروهی او استوار است، و مقاله برنساید بر نظریه ساختاری گروههای نیمساده لی کارتان مبتنی است.

برای تفضیل بیشتر می‌توان به مقاله سابق‌الذکر هاوکینز مراجعه کرد.

هاینریش ماشکه

سوابق علمی هاینریش ماشکه^۱ را هاوکینز در بخش پنجم مقاله‌اش به صورت ذیل ترسیم کرده است:

گرچه او دکترای خود را از گوتینگن در ۱۸۸۰ دریافت کرد، و بدین سبب قبل از کلاین به درجه استادی آنجا نایل آمد، با وجود این هاینریش ماشکه (۱۸۵۳-۱۹۰۸)، تا جایی که به فعالیت ریاضی او مربوط می‌شد، شاگرد کلاین بود. ماشکه پس از اخذ دکترای خود، در یک گیمنازیوم^۲ در برلین به تعلیم پرداخت تا اینکه در ۱۸۸۶ برای یک مرخصی به گوتینگن مراجعت کرد. تحت تأثیر کلاین، بزودی یکی از مساهمین برنامه کلی تحقیقی مسأله فرم کلاین شد و تعدادی مقاله راجع به تعیین پایاهای گروههای خاص تبدیلات خطی و نیز راجع به خودگروههای خطی منتشر کرد. با تشخیص اینکه به عنوان یک ریاضیدان در یک گیمنازیوم آتیاه نخواهد داشت، و نیز شانس کمی برای احراز مقام دانشگاهی در آلمان وجود دارد، در ۱۸۹۱ به امریکا مهاجرت کرد. در ۱۸۹۳ به دوستش اوسکار بولتسا^۳، شاگرد دیگر کلاین، و ا. ه. مور^۴ پیوست تا بخش ریاضی دانشگاه جدیدالتأسیس شیکاگو را تشکیل دهند.

چنانکه در فصل ۸ دیدیم، ا. ه. مور در ۱۸۹۶ ثابت کرد که هر گروه متناهی از تبدیلات خطی با ضرایب مختلط دارای یک فرم ارمیتی مثبت پایاست. در همان سال ۱۸۹۶، آ. لووی^۵ همین نتیجه را مستقلاً به دست آورد.

ماشکه در ۱۸۹۸ از این قضیه برای اثبات تحویلپذیری کامل هر گروه متناهی از تبدیلات خطی استفاده کرد. اساس این برهان بر همه معلوم است: اگر فضای برداری که روی آن گروه عمل می‌کند زیرفضای

1) Heinrich Maschke

۲. Gymnasium [= گیمنازیوم] در آلمان و برخی کشورهای اروپایی دبیرستانی است که دانش‌آموزان را برای ورود به دانشگاه آماده می‌کند. م.

3) Oskar Bolza 4) A. H. Moore 5) A. Loewy

خطی پایایی داشته باشد، زیرفضای متعامدی وجود دارد که آن هم پایاست، و کل فضا حاصلجمع مستقیم دو زیرفضای پایاست. این عمل را می توان تکرار کرد تا اینکه تجزیه ای از کل فضا به زیرفضاهای تحویلناپذیر به دست آید. ن. ک. مقاله ه. ماشکه «در باب سرشتهای حسابی جانشینهای گروههای جانشینی متناهی^۱»، ماتماتیشه آنالین ۵۰، ص. ۴۹۲-۲۹۸ (۱۸۹۸).

ایسائی شور

شرح ساده و مختصری از نظریه نمایش گروههای متناهی به توسط ایسائی شور^۲ در مقاله ای تحت عنوان «مبانی جدید نظریه سرشتهای گروهی^۳»، خلاصه مذاکرات پروس فرهنگستان برلین^۱ ۱۹۰۵، ص. ۴۰۶-۴۳۲، ارائه شد.

در مقدمه مقاله اش، شور رابطه اش را با اسلافش به صورت ذیل شرح می دهد:

مقاله حاضر شامل مقدمه ای کاملاً مقدماتی بر نظریه سرشتهای گروهی است، که به توسط فروبنیوس تأسیس شد، و در عین حال می توان آن را به عنوان نظریه نمایشهای گروههای متناهی با جانشینهای همگن خطی قلمداد کرد.

توجیه مقدماتی این نظریه اخیراً به توسط آقای برنساید ارائه شده است. اما، برنساید از ابزاری استفاده می کند، که در اصل، با این موضوع بیگانه است، یعنی مفهوم فرمهای ارمیتی. بنابراین، بیان ارائه جدیدی از نظریه فروبنیوس را، که باز هم با ابزار ساده تری کار کند، امری زاید نمی دانم.

شور با شروع از یک نمایش ماتریسی یک گروه متناهی H از مرتبه h :

$$a \mapsto A, \quad (4)$$

یک ماتریس گروهی X را با فرمول ذیل تعریف می کند

$$X = \sum A x_a, \quad (5)$$

که در آن x_a ها متغیرهای مستقلی اند. اینک یک قضیه اساسی را، که در منابع امروزی به لم شور مشهور است، فرمولبندی می کند؛ این قضیه، چنانکه خود شور معترف است، قبلاً در نظریه برنساید موجود بود. این لم چنین است:

- 1) Über den arithmetischen Charakter der Substitutionen endlicher Substitutionsgruppen
 2) Issai Schur
 3) Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere
 4) Sitzungsberichte preuss. Akad. Berlin

I. فرض کنیم X و X' دو ماتریس گروهی تحویلناپذیر از درجات f و f' باشند. هرگاه P ماتریس ثابتی با f سطر و f' ستون باشد، که در معادله

$$XP = PX' \quad (۶)$$

صدق کند، آنگاه یا P صفر است، یا X و X' هم‌ارزند، و P یک ماتریس مربعی از درجه $f (= f')$ است که دترمینانی ناصفر دارد.

این لم برای هر هیأت زمینه دلخواه برقرار است. اگر هیأت زمینه جبری بسته باشد (تنها حالتی که به توسط شور در نظر گرفته شد)، از این لم نتیجه می‌شود که:

II. اگر X یک ماتریس گروهی تحویلناپذیر از درجه f باشد، آنگاه هر ماتریس ثابت P که با X تعویضپذیر باشد باید مضربی از ماتریس واحد باشد.

شور سپس روابط تعامد را برای اعضای ماتریسی نمایشهای تحویلناپذیر نتیجه می‌گیرد.

قضیه III شور می‌گوید:

هر ماتریس گروهی X از درجه n و رتبه r ، با یک ماتریس گروهی به صورت

$$\begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & & \\ & & & X_m \\ & & & & N_{n-r} \end{pmatrix}$$

هم‌ارز است، که در آن $X_1, \dots, X_m$ ماتریسهای گروهی تحویلناپذیرند، و N_{n-r} ماتریس صفر از درجه $n - r$ است.

این قضیه، قطع نظر از ماتریس افزوده شده صفر، قبلاً به توسط مولین و ماشکه به دست آمده بود. اما، ماشکه فرمهای ارمیتی را به کار برده بود، که تنها وقتی قابل تشکیل‌اند که هیأت زمینه $\mathbb{C}$ باشد، در حالی که برهان شور کاملاً مقدماتی است و برای هر هیأت زمینه برقرار است، مشروط بر اینکه مشخصه هیأت زمینه مقسوم‌علیه مرتبه گروه نباشد.

نمایشهای گروه متقارن

بسیاری از مؤلفان در نیمه نخست سده حاضر نمایشهای گروههای متناهی خاص را بررسی کرده‌اند. منابع موجود در این موضوع بیش از آن است که در اینجا مورد بحث قرار گیرد. برای یک مطالعه کلی در

این خصوص می‌توانم خواننده را به کتابم «گروه‌های تبدیلات خطی»^۱ (اشپرینگر-فرلاک ۱۹۳۵، تجدید چاپ از چلسی^۲ ۱۹۴۸)، ارجاع دهم. در اینجا توجه خود را به نمایشهای گروه متقارن معطوف می‌کنم که نقش مهمی در نظریه پایاها و همچنین در مکانیک کوانتوم ایفا می‌کنند.

داستان با سلسله‌ای از مقالات از آ. یانگ^۳ تحت عنوان «آنالیز جانشینی کمی»^۴ منتشره در خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی لندن آغاز می‌شود که از این مجموعه مقالات، دو مقاله نخست (۱۹۰۰ و ۱۹۰۲) از اهمیت زیادی برخوردارند. فهرست کامل این مقالات عبارت است از:

I. خلاصه مذاکرات (۱) ۳۳، ص. ۹۶-۱۴۶ (۱۹۰۰)

II. خلاصه مذاکرات (۱) ۳۴، ص. ۳۶۱-۳۹۷ (۱۹۰۲)

III. خلاصه مذاکرات (۲) ۲۸، ص. ۲۵۵-۲۹۲ (۱۹۲۸)

IV. خلاصه مذاکرات (۲) ۳۱، ص. ۲۵۳-۲۷۲ (۱۹۳۰)

V. خلاصه مذاکرات (۲) ۳۱، ص. ۲۷۳-۲۸۸ (۱۹۳۰)

VI. خلاصه مذاکرات (۲) ۳۴، ص. ۱۹۶-۲۳۰ (۱۹۳۲)

VII. خلاصه مذاکرات (۲) ۳۷، ص. ۴۴۱ (۱۹۳۴).

یانگ در این مقالات ساختار جبر گروهی گروه متقارن S_n را تحلیل و ثابت می‌کند که عضو واحد این گروه، e ، حاصل‌جمعی از اعضای خودتوان e_i است:

$$e = e_1 + \dots + e_k$$

$$e_i^2 = e_i \quad (7)$$

$$e_i e_j = 0 \quad (i \neq j).$$

واحدهای e_i به طریق ذیل به دست می‌آیند. یک جدول یانگ آرایشی است از اعداد صحیح ۱، ۲، ...، n در سطرهایی با طولهای ناصعودی، مانند مثال زیر:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$$

فرض کنیم P مجموع همه جایگشتهایی باشد که سطرها را به خودشان تبدیل می‌کنند، و N مجموع متناوب همه جایگشتهایی باشد که ستونها را به خودشان تبدیل می‌کنند. اگر T مجموع $n!$ حاصلضرب PN ، حاصل از جایگشت اعداد واقع در جدول باشد، داریم

$$T^c = cT \quad (c \neq 0).$$

اینک عضو

$$e_{\alpha} = T/c$$

یکی از اعضای پوچتوان مطلوب این جبر گروهی است.

یانگ در مقاله دوم خود مقدار ثابت c را محاسبه کرده است. فرض کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ طولهای سطرها در جدول معرف e_{α} ها باشند. در این صورت

$$c = \prod_{r,s} (\alpha_r - \alpha_s - r + s)^2 / \prod_r (\alpha_r + h - r)^2. \quad (A)$$

e_{α} ها در Z ، مرکز جبر گروهی A ، واقعند، و تعداد آنها با تعداد رده‌های گروه S_n و لذا با بعد مرکز Z برابر است. از اینجا نتیجه می‌شود که Z حاصلجمع مستقیمی است از هیأت‌های F ؛ e_{α} که با هیأت زمینه یکریخت‌اند، مشروط بر اینکه مشخصه F عامل اولی از $n!$ نباشد.

تجزیه (۷) در نظریه پایاها از اهمیت زیادی برخوردار است. فرض کنیم

$$f(u, v, \dots, w)$$

یک فرم چند خطی برحسب n سطر از متغیرهای ذیل باشد.

$$u_1, \dots, u_m$$

$$v_1, \dots, v_m$$

$$w_1, \dots, w_m.$$

حال اگر بردارهای $u, \dots, w$ از ۱ تا n شماره‌گذاری شوند، می‌توان همه اعضای جبر گروهی گروه S_n را به عنوان عملگرهایی که روی فرم f عمل می‌کنند، به کار برد و بسط ذیل را به دست آورد

$$f = e f = e_1 f + \dots + e_k f. \quad (9)$$

در صورتی که فرم چند خطی f کاملاً دلخواه باشد، جملات $e_i f$ دارای ویژگیهای تقارن قوی‌اند. یک جمله برحسب همه متغیرها متقارن است، و جمله دیگر پادمتقارن. درباره اهمیت بسط (۹) در نظریه پایاها ن. ک. ج. ه. گریس^۱ و آ. یانگ: جبر پایاها (کیمبریج ۱۹۰۳، تجدید چاپ از چلسی) ص. ۳۶۴-۳۵۹.

در همان سال ۱۹۰۰، که مقاله نخست یانگ منتشر شد، فروبنیوس مقاله‌ای تحت عنوان «در باب سرشتهای گروه متقارن^۲» به فرهنگستان برلین (خلاصه مذاکرات پروس فرهنگستان برلین، ۱۹۰۰، ص.

1) J. H. Grace 2) Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe

۵۱۶-۵۳۴) ارائه داد، که در آن سرشتهای S_n معین می‌شوند. فروبنیوس ابتدا ثابت می‌کند که به هر افراز

$$n = \alpha_1 + \dots + \alpha_h \quad (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_h)$$

درست یک سرشت نظیر می‌شود. فروبنیوس قرار می‌دهد

$$\beta_r = \alpha_r + h - r$$

و ثابت می‌کند که سرشت $\chi_\alpha(s)$ یک جایگشت مانند s که حاصلضربی از دورهای به طول $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ است، با ضرایب

$$x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_h^{\gamma_h}$$

در چندجمله‌ای زیر برابر است

$$\prod_{q < r} (x_1 - x_r) \cdot (x_1^{\gamma_1} + \dots + x_h^{\gamma_1}) (x_1^{\gamma_2} + \dots + x_h^{\gamma_2}) \dots$$

مقاله اخیرالذکر فروبنیوس از تحقیقات یانگ مستقل است، ولی در ۱۹۰۳ فروبنیوس با استفاده از آنالیز جانشینی کمی یانگ نمایشهای تحویلناپذیر S_n را معین کرد (ن.ک: گ. فروبنیوس: در باب سرشتهای واحدگروههای متقارن^۱، صورتجلسات پروس فرهنگستان برلین ۱۹۰۳، ص. ۳۲۸-۳۵۸). نتیجه اصلی او چنین بیان می‌شود: هر حاصلضرب PN که با یک جدول یانگ تعریف می‌شود، یک ایدآل چپ مینیمال در جبر A تولید می‌کند، و اگر اعضای این ایدآل چپ در اعضای گروه ضرب شوند، نمایش تحویلناپذیری از گروه به دست می‌دهند. از این طریق، می‌توان همه نمایشهای تحویلناپذیر S_n را به دست آورد. برهان ساده‌تری در مجلد دوم کتاب من (چاپ اول ۱۹۳۱، ص. ۲۰۴-۲۰۷، ترجمه انگلیسی ۱۹۷۰، ص. ۹۳-۹۷) برای این قضیه ارائه شده است که حاصل مباحثه‌ای با جان فون نویمان است. مساهمتهای دیگر در نظریه نمایش S_n از آ. شور^۲، وایل، آ. یانگ، د. ا. لیتلود^۳ و آ. ر. ریچاردسن^۴ است. ن.ک. د. ا. لیتلود: نظریه سرشتهای گروهی و نمایشهای ماتریسی گروهها، چاپ دوم (۱۹۵۰)، ص. ۵۹-۱۴۶.

نمایش گروهها با تبدیلات تصویری

ایسائی شور در سه مقاله منتشره در مجله کرله برای ریاضیات^۴ ۱۲۷ (۱۹۰۴)، ۱۳۲ (۱۹۰۷) و ۱۳۹ (۱۹۱۱) روشی برای ساختن نمایشهای یک گروه متناهی به وسیله تبدیلات تصویری ابداع کرد.

- 1) Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppen 2) D. E. Littlewood
3) A. R. Richardson 4) Crelle's Journal für Mathematik

فرض کنیم H گروهی متناهی، و h مرتبه آن باشد. یک نمایش تصویری H با نگاشت

$$a \mapsto A$$

تعریف می شود که دارای ویژگی ذیل است

$$ab \mapsto \varepsilon_{a,b} AB.$$

مجموعه اعداد مختلط $\varepsilon_{a,b}$ را مجموعه عاملی این نگاشت می نامند. دو مجموعه عاملی $\varepsilon_{a,b}$ و $\varepsilon'_{a,b}$ را وابسته گویند هرگاه

$$\varepsilon'_{a,b} = (\gamma_a \gamma_b / \gamma_{ab}) \varepsilon_{a,b}, \quad (10)$$

که در آن γ_a ها عوامل دلخواه ناصفرند. گذر از یک مجموعه عاملی به یک مجموعه وابسته به معنی ضرب ماتریس A در یک عامل γ_a است. توضیح اینکه A و γA معرف یک تبدیل تصویری هستند. هر مجموعه عاملی به مجموعه ای مشتمل بر توانهای h م واحد وابسته می شود. از اینجا نتیجه می شود که رده های مجموعه های عاملی وابسته، یک گروه متناهی M ، گروه مضروب فیه H ، تشکیل می دهند. فرض کنیم m مرتبه M باشد.

هرگاه G گروهی باشد که مرکزش شامل زیرگروهی مانند S باشد به طوری که

$$G/S \simeq H, \quad (11)$$

آنگاه هر نمایش تحویلناپذیر G یک نمایش تصویری H را القا می کند، و بدین ترتیب، می توان همه نمایشهای تصویری H را به دست آورد.

اگر (۱۱) برقرار باشد و S جزء گروه مشتق G بوده و همان مرتبه M ، یعنی m ، را داشته باشد آنگاه همه نمایشهای تصویری تحویلناپذیر H را می توان از نمایشهای تحویلناپذیر G به دست آورد. اگر این حالت اتفاق افتد، G را گروه نمایشی H می نامند. یک روش برای ساختن گروههای نمایشی در مقاله دوم شور در مجله کرله ۱۳۲ (۱۹۰۷) ارائه می شود.

گروه H را بسته می نامند هرگاه خودش گروه نمایشی خودش باشد، یعنی، در صورتی که همه نمایشهای تصویری به نمایشهای ماتریسی عادی وابسته باشند. به عنوان مثال، همه گروههای دوری بسته اند. گروه کوآترینیونها بسته است. گروه H بسته است هرگاه همه زیرگروههای سیلوی آن بسته باشند.

۱. شور گروههای نمایشی

$$S_n \text{ و } A_n, PGL(2, p^n), SL(2, p^n)$$

را معین کرده است، و ر. فروشت^۱ گروههای نمایشی همه گروههای آبلی را مشخص کرده است (مجله کرله ۱۶۶، ص. ۱۶-۲۹، ۱۹۳۱).

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره نمایشهای تصویری گروههای متناهی ن. ک. کتاب من «گروههای تبدیلات خطی»، ص. ۸۴-۸۸.

امی نوتر

امی نوتر نخستین کسی بود که یک نظریه کلی نمایش گروهها و جبرها را که برای هیأتهاى زمينه دلخواه برقرار است، به وجود آورد. من در ترم زمستانی ۱۹۲۷-۱۹۲۸ در سلسله درسهای او «کمیتهای ابر مختلط و نظریه نمایش^۲» در دانشگاه گوتینگن حضور یافتم، و او از یادداشتهای درسی من در انتشار مقاله اش «کمیتهای ابر مختلط و نظریه نمایش» در ماتماتیشه آنالن^۳، ص. ۶۴۱-۶۹۲، به عنوان مبنای کار، استفاده کرد. این مقاله تأثیر عمیقی در بسط جبر جدید داشته است. ذیلاً محتوای آن را خلاصه خواهم کرد.

امی نوتر در مقدمه بیان می کند که در نشریات اخیر نظریه ساختاری جبرها و نظریه نمایش گروههای متناهی کاملاً از هم تفکیک شده اند. از طرف دیگر، هدف او یک بنیانگذاری صرفاً حسابی است، که در آن نظریه ساختاری و نظریه نمایش گروهها و جبرها به عنوان منظومه ای واحد، یعنی به صورت یک نظریه مدولها و ایدآلها در حلقه ها که در شرایط تناهی صدق می کنند، ظاهر شوند. مقاله امی نوتر به چهار فصل تقسیم می شود.

فصل I. مبانی نظریه گروهی

§۱. گروهها با عملگرها. مفاهیم این بخش از ولفگانگ کرول^۴ و اوتو اشمیت^۵ اقتباس شده است. در حالی که کرول خود را به گروههای آبلی مقید کرد، اوتو اشمیت ریاضیدان روسی مفهوم کلی «گروهها با عملگرها» را معرفی کرد، که تنها به

$$\Theta(ab) = \Theta(a) \cdot \Theta(b)$$

نیاز دارد.

ن. ک: در باب گروههای نامتناهی با [شرط] زنجیر متناهی^۵، مجله ادواری ریاضی^۶ ۲۹، ص.

- 1) R. Frucht 2) Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie 3) Wolfgang Krull
4) Otto Schmidt 5) Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette 6) Math. Zeitschrift

۳۴-۴۱ (۱۹۲۸).

§۲. قضیه‌های یکریختی. در این بخش قضیه‌های مشهور مربوط به همریختیهای گروهی، گروههای عاملی، و یکریختیها به گروههای با عملگرها تعمیم داده می‌شوند.

§۳. سریهای ترکیبی. در این بخش، امی نوتر قضیهٔ ژوردان-هولدر را برای گروههای با عملگرها فرمولبندی می‌کند. و در مورد برهان خواننده را به ص. ۵۷ مقاله‌اش «ساختمان مجرد نظریهٔ ایدآلها در حساب جبری و هیأت‌های تابعی^۱»، ماتماتیشه آنالن ۹۶، ص. ۲۶-۶۱ (۱۹۲۶) ارجاع می‌دهد.

§۴. حاصلضربهای مستقیم و اشتراکها. از مفهوم «حاصلضرب مستقیم» دو تعریف هم‌ارز ارائه می‌شود. هر گروه که در شرط تناهی برای زنجیرهای نزولی از زیرگروههای نرمال صدق کند حاصلضرب مستقیمی از عوامل تجزیه‌ناپذیر است. اوتو اشمیت در مقالهٔ سابق‌الذکر خود ثابت کرده است که چنین تجزیه‌ای قطع نظر از یکریختیها یکتاست.

§۵. گروههای کاملاً تحویلپذیر. یک گروه (با عملگرها یا بدون عملگرها) را کاملاً تحویلپذیر گویند هرگاه حاصلضرب مستقیمی از گروههای ساده باشد. این عوامل در عین حال عوامل ترکیبی‌اند، و لذا قطع نظر از یکریختیها یکتا هستند.

§۶. مدولها روی یک هیأت. جبرها. اگر مدولی روی یک هیأت اریب K دارای پایه‌ای متناهی باشد، حاصلجمع مستقیمی از مدولهای یک بعدی است:

$$G = a_1 K + \dots + a_n K$$

و در نتیجه کاملاً تحویلپذیر است. عدد n را رتبهٔ G روی K می‌نامند؛ امروزه این عدد را بعد فضای برداری G می‌گویند.

§۷. ماتریسها. هر ماتریس روی یک هیأت اریب K که دارای وارون راست باشد، دارای وارون چپ نیز هست، و برعکس. چنین ماتریسی را ماتریس منظم می‌گویند.

فصل II. نظریهٔ ایدآلهای تعویضناپذیر

§۸. قضیه‌های همریختی برای حلقه‌ها. هر تصویر همریخت یک حلقه o با یک حلقهٔ ردهٔ مانده‌ها مانند o/A یکریخت است، که در آن A یک ایدآل دوطرفه در o است. امروزه A را هستهٔ همریختی می‌نامیم.

1) Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionskörpern

§۹. اعضای خودتوان. حاصلجمعهای مستقیم ایدآلهای راست. فرض کنیم o حلقه‌ای با عضو واحد e باشد. اگر o حاصلجمع مستقیمی از ایدآلهای راست باشد:

$$o = R_1 + \dots + R_n$$

و هرگاه

$$e = e_1 + \dots + e_n \quad (e_i \in R_i),$$

آنگاه

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \quad (i \neq k)$$

و

$$R_i = e_i o.$$

برعکس، اگر

$$e = \sum e_k$$

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \quad (i \neq k)$$

و هرگاه قرار دهیم

$$R_i = e_i o$$

آنگاه o حاصلجمع مستقیمی است مانند

$$o = R_1 + \dots + R_n.$$

بنابراین یک تجزیه راست مانند

$$o = R_1 + \dots + R_n = e_1 o + \dots + e_n o$$

مستلزم تجزیه چپی است مانند

$$o = L_1 + \dots + L_n = o e_1 + \dots + o e_n.$$

§۱۰. حاصلجمع ایدآلهای دوطرفه. اگر o حلقه‌ای با عضو واحد باشد، و هرگاه o حاصلجمعی از ایدآلهای دوطرفه باشد

$$o = A_1 + \dots + A_n \quad (۱۲)$$

$$A_i^2 = A_i, \quad A_i A_k = 0 \quad (i \neq k).$$

اگر A_i ها را دیگر نتوان به ایدآلهای دوطرفه تجزیه کرد، تجزیه (۱۲) یکتاست.
۱۱. مرکز. به هر تجزیه (۱۲) از یک حلقه o تجزیه‌ای از مرکز Z نظیر می‌شود:

$$Z = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$Z_i = A_i \cap Z.$$

۱۲. ایدآلهای پوچتوان. یک ایدآل C پوچتوان است، هرگاه توانی از C صفر باشد. اگر یک حلقه o دارای یک ایدآل راست پوچتوان R باشد، ایدآل دوطرفه پوچتوانی نیز دارد. اگر شرط تناهی برای زنجیرهای صعودی از ایدآلهای راست برقرار باشد، ایدآل دوطرفه پوچتوان ماکسیمالی وجود دارد که شامل همه ایدآلهای راست یا چپ پوچتوان است. این ایدآل را رادیکال o می‌گویند. اگر o حلقه‌ای بدون رادیکال باشد، مرکز Z نیز بدون رادیکال است.

۱۳. حلقه‌های کاملاً تحویلپذیر. حلقه‌ای را کاملاً تحویلپذیر راست گویند، که حاصلجمع مستقیمی از ایدآلهای راست ساده باشد.

یک حلقه کاملاً تحویلپذیر راست واحداً فاقد رادیکال است.
برعکس: یک حلقه بدون رادیکال با شرط زنجیر نزولی برای ایدآلهای راست، کاملاً تحویلپذیر راست است، و یک عضو واحد دارد.

۱۴. حلقه‌های ساده کاملاً تحویلپذیر. اگر یک حلقه واحداً o نهاده و کاملاً تحویلپذیر راست باشد، همه ایدآلهای راست یکرخت‌اند و حلقه یک حلقه ماتریسی کامل روی یک هیأت اریب Λ است.
برعکس: حلقه ماتریسهای $n \times n$ روی Λ ساده و کاملاً تحویلپذیر است.

فصل III. مدولها و نمایشها

۱۵. نمایشها و مدولهای نمایشی. فرض کنیم o یک حلقه، و K حلقه‌ای واحداً باشد. در کاربردها K همواره یک هیأت اریب است.
یک نمایش از درجه n ، یک همریختی مانند

$$o \rightarrow \mathcal{O}$$

است که در آن $\mathcal{O}$ حلقه ماتریسهای $n \times n$ روی K است.

یک مدول نمایشی یک «مدول دوگانه» M است، که o -مدول چپ و K -مدول راست است:

$$oM \subseteq M, \quad MK \subseteq M,$$

و یک حاصلجمع مستقیم مانند

$$M = x_1 K + \cdots + x_n K$$

است، که در آن عضو واحد K یک عملگر واحد است.

هر مدول نمایشی یک نمایش مانند

$$cx_k = \sum x_i \gamma_{ik}$$

تولید می‌کند.

برعکس: هر نمایش با یک مدول نمایشی تولید می‌شود.

مدولهای نمایشی عملگر-یکریخت نمایشهای هم‌ارز تولید می‌کنند، و برعکس.

۱۶§. نمایشهای تحویلپذیر. اگر K یک هیأت اریب باشد. هر زیرمدول A از یک مدول نمایشی M ، پایه‌ای مانند $(y_1, \dots, y_r)$ دارد که می‌توان آن را برای تشکیل پایه‌ای از M کامل کرد:

$$M = y_1 K + \cdots + y_r K + z_1 K + \cdots + z_{n-r} K.$$

اگر این را مفروض بگیریم، ماتریسهای نمایش به صورت

$$C = \begin{pmatrix} R & o \\ S & T \end{pmatrix}$$

در می‌آیند و نمایش تحویلپذیر نامیده می‌شود.

یک سری ترکیبی مانند

$$M \supset A_1 \supset \cdots \supset A_e = o$$

به ماتریسهایی به صورت

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ R_{12} & R_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ R_{1e} & R_{2e} & \cdots & R_{ee} \end{pmatrix}$$

منجر می شوند که در آنها R_{ii} ها نمایشهای تحویلناپذیرند که با عوامل ترکیبی A_{i-1}/A_i تولید می شوند. از قضیه ژوردان-هولدر نتیجه می شود که R_{ii} ها قطع نظر از هم ارزی و ترتیب آنها یکتا هستند.

۱۷ §. تجزیه های مدولهای نمایشی به صورت حاصلجمع مستقیم. فرض کنیم M یک o -مدول، و o حلقه ای با عضو واحد e باشد. در این صورت هر عضو m از M را می توان به صورت:

$$m = em + (m - em)$$

تجزیه کرد و در نتیجه M حاصلجمع مستقیمی است به صورت

$$M = M_e + M_o$$

به طوری که e عملگر واحد برای M_e است، و $eM_o = 0$. بنابراین، همواره می توان خود را به مطالعه مدولهایی که e یک عملگر واحد برای آنهاست محدود کرد. در حالت مدول نمایشی این بدین معنی است که e با ماتریس واحد E نمایش داده می شود.

اگر o حاصلجمع مستقیمی از ایدآلهای دوطرفه باشد

$$o = A_1 + \dots + A_s,$$

آنگاه هر o -مدولی که e یک عملگر واحد برای آن است، یک حاصلجمع مستقیم است

$$M = A_1 M + \dots + A_s M.$$

بنابراین همواره می توان خود را به نمایشهای حلقه های تجزیه ناپذیر محدود کرد، یعنی به نمایشهای حلقه هایی که نمی توانند به ایدآلهای دو طرفه تجزیه شوند.

۱۸ §. مدولها و نمایشهای حلقه های کاملاً تحویلپذیر. از قضیه هایی که در نظریه نمایش امیوتر از اهمیت اساسی برخوردارند، قضیه ذیل است:

فرض کنیم o ساده و کاملاً تحویلپذیر باشد، و فرض کنیم M یک o -مدول متناهی باشد که عضو واحد o برای آن عملگر واحد باشد. در این صورت M کاملاً تحویلپذیر است، و مؤلفه های تحویلناپذیر M با ایدآلهای چپ ساده L_i ی حلقه o یکرخت اند.

برهان بی اندازه ساده است. فرض کنیم o و M به صورت ذیل نوشته شده باشند

$$o = L_1 + \dots + L_n$$

$$M = (om_1, \dots, om_k).$$

در این صورت

$$M = (\dots, L_i m_k, \dots),$$

و هرگاه مدولهای $L_i m_k$ را که در حاصلجمع مدولهای قبلی مشمول اند، به حساب نیاوریم، M حاصلجمع مستقیمی از مدولهای $L_i m_k$ می شود که با L_i یکرخت است.

۱۹ §. عملهای ترکیبی ساده مدولها و مدولهای نمایشی. فرض کنیم o حلقه‌ای با شرط ماکسیمال و مینیمال برای ایدآلهای چپ باشد، و فرض کنیم R رادیکال باشد. در این صورت هر o -مدول ساده یا با o بوج می شود یا با ایدآل چپ ساده‌ای در o/R یکرخت است. بخصوص، اگر M مدولی از رتبه متناهی روی یک هیأت Γ باشد، یک مدول نمایشی است، و نتیجه می شود که همه نمایشهای تحویلناپذیر (قطع نظر از نمایش صفر) با ایدآلهای چپ ساده o/R تولید می شوند.

فصل IV. نمایشهای گروهها و جبرها

۲۰ §. جبرها. اگر o جبری روی یک هیأت Γ باشد، و اگر خود را به ایدآلهای چپ و راستی که Γ -مدول اند محدود کنیم. شرایط زنجیر متناهی برای این ایدآلها برقرارند، و می توان قضیه‌های ۱۹ § را برای تعیین نمایشهای تحویلناپذیر به کار بست. نتیجه چنین است: همه نمایشهای تحویلناپذیر به وسیله ایدآلهای چپ ساده

$$\bar{o} = o/R$$

تولید می شوند، که در آن R رادیکال o است. چون $\bar{o}$ نیمساده است، حاصلجمع مستقیمی از جبرهای ساده است:

$$\bar{o} : A_1 + \dots + A_t \quad (13)$$

و درست به اندازه تعداد جملات جمع (۱۳) نمایش تحویلناپذیر وجود دارد. در حالت خاص، اگر Γ جبری بسته باشد، هر زیرجبر A_i یک حلقه تمام-ماتریسی از رتبه n_i^2 روی Γ است. در این حالت، هر نمایش تحویلناپذیر درست شامل n_i^2 ماتریس مستقل خطی است، و هر نمایش کاملاً تحویلپذیر شامل

$$n_1^2 + \dots + n_r^2$$

ماتریس مستقل خطی است، که در آن $n_1, \dots, n_r$ درجه‌های مؤلفه‌های ناهم‌ارز نمایش اند. این قضیه ازگ. فروبنیوس و ا. شور است: «در باب هم‌ارزی گروههای جانشینی خطی» خلاصه گزارشات

پروس. فرهنگستان برلین ۱۹۰۶.

۲۱. توسیع هیأت زمینه. نمایشهای مرکز. اگر $\Gamma = a_1\Gamma + \dots + a_n\Gamma$ و Ω یک جبر، Ω یک توسیع هیأت زمینه Γ باشد، می توان جبر جدیدی مانند

$$a\Omega = a_1\Omega + \dots + a_n\Omega$$

تشکیل داد که قواعد ضرب را در مورد اعضای پایه a_i حفظ کند. بنابراین، جبری مانند $a\Omega$ روی Ω به دست می آید. هرگاه $a\Omega$ حلقه ای بدون رادیکال باشد، Ω نیز حلقه ای بدون رادیکال است، ولی عکس آن عموماً درست نیست. این سؤال که آیا $a\Omega$ دارای رادیکال است یا نه، بستگی به ساختار Z ، مرکز Ω ، دارد.

فرض کنیم Ω توسیع جبری بسته (جبری) Γ باشد. اگر Ω بدون رادیکال باشد، Z نیز بدون رادیکال است، و در نتیجه Z حاصلجمعی از هیأتهاست:

$$Z = Z_1 + \dots + Z_t.$$

هرگاه یکی از این هیأتها توسیع تفکیکناپذیری از Γ باشد، آنگاه $Z\Omega$ رادیکال دارد، و $a\Omega$ نیز رادیکال خواهد داشت. از طرف دیگر، اگر همه هیأتها Z_i روی Γ تفکیکپذیر باشند، جبر $a\Omega$ رادیکال ندارد، و همه نمایشهای Ω در Ω کاملاً تحویلپذیرند.

یک نمایش Ω را مطلقاً تحویلپذیر نامند هرگاه پس از گذر از Γ به توسیع جبری بسته Ω ، تحویلپذیر باقی بماند. امی نوتر اینک ثابت می کند که:

اگر $a\Omega$ رادیکالی نداشته باشد، آنگاه در هر نمایش مطلقاً تحویلپذیر اعضای z از مرکز Z با ماتریسهای قطری $E\zeta$ نمایش داده می شوند. هر نمایش مطلقاً تحویلپذیر Ω یک نمایش خطی ζ — z از Z را القا می کند. تعداد رده های نمایشهای مطلقاً تحویلپذیر با رتبه Z برابر است.

۲۲. کاربرد در گروههای آبلی. نمایشهای مطلقاً تحویلپذیر گروههای آبلی همان سرشتهای معروف χ هستند.

۲۳. دترمینان یک جبر. به وسیله متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ می توان «عضو عام» یک جبر Ω را تشکیل داد:

$$w = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

اگر $A \mapsto a$ یک نمایش باشد، عضو عام W با

$$W = A_1x_1 + \dots + A_nx_n$$

نمایش داده می‌شود.

دترمینان ماتریس W را دترمینان دستگاهی می‌گویند. نمایش منظم، دترمینان دستگاهی منظم را به وجود می‌آورد. اگر نمایش $a \rightarrow A$ تحویلپذیر باشد، ماتریس W را می‌توان به صورت

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & & & \\ W_{r1} & W_{rr} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ W_{e1} & W_{er} & \dots & W_{ee} \end{pmatrix}$$

نوشت، و $\text{Det}(W)$ حاصلضرب دترمینانهای دستگاهی نمایشهای تحویلناپذیر $w = W_{ii}$ است. §۲۴. اثرها و سرشتها. به ازای هر نمایش $a \rightarrow A$ ، اثر A یک تابع خطی از a است:

$$\text{Tr}(a + b) = \text{Tr}(a) + \text{Tr}(b)$$

$$\text{Tr}(c\alpha) = \alpha \text{Tr}(c).$$

در نمایش مطلقاً تحویلناپذیر، اثرها را سرشتهای $\chi(a)$ می‌نامند.

اگر o رادیکال نداشته باشد و اگر مشخصه هیأت Γ صفر باشد، آنگاه هر رده از نمایشهای هم‌ارز به طور یکتا با اثرهای آن معین می‌شود.

§۲۵. مبین‌ها. اگر $\text{Tr}(a)$ اثر a در نمایش منظم باشد، می‌توان دترمینان ماتریس متشکل از اثرهای $\text{Tr}(a_i a_k)$ را تشکیل داد. این دترمینان را مبین می‌نامند. اگر پایه را تغییر دهیم، مبین در مربع دترمینان تبدیل ضرب می‌شود.

مبین صفر است هرگاه o دارای یک ایدال پوچتوان باشد. از طرف دیگر، اگر o رادیکالی نداشته باشد و اگر مشخصه هیأت صفر باشد، مبین صفر نیست.

توضیح اینکه ماتریس متشکل از اثرهای

$$p_{ik} = \text{Tr}(a_i a_k),$$

پیشتر به توسط ددکیند و مولین به عنوان محکی برای نیمسازگی به کار رفت.

§۲۶. جبر گروهی. اگر o جبر گروهی یک گروه متناهی از مرتبه h باشد، مبین o عبارت است از

$$D = h^h e.$$

بنابراین، اگر مرتبه گروه بر مشخصه هیأت زمینه قابل قسمت نباشد، جبر گروهی O رادیکال ندارد، همه نمایشها کاملاً تحویلپذیرند، و تعداد نمایشهای مطلقاً تحویلناپذیر با تعداد ردهها برابر است.

برای اینکه خواننده تصویری از سبک بیان شخص امی نوتر داشته باشد، تا حدّ زیادی از طرز بیان او پیروی کرده‌ام.

فصل ۱۴

نمایشهای گروههای لی و جبرهای لی

برای توضیح سوفوس لی، هر نمایش موضعی یک گروه لی مانند G با تبدیلات خطی، به وسیله یک نمایش جبر لی L_G گروه G تولید می شود. ماتریسهای این نمایش ترکیبات خطی اند

$$A = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n,$$

و هر همسایگی عضو واحد G با ماتریسهای

$$\exp A = \exp(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)$$

نمایش داده می شود، که x ها در یک همسایگی مبدأ $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ تغییر می کنند. درست است که لی عبارتهای جدید «exp» و «همسایگی» را به کار نمی برد، ولی گزاره های او با آنچه هم اکنون ذکر کردم هم ارز است.

نخستین کسی که نظریه کلی نمایش گروههای لی را بسط داد، الی کارتان بود.

الی کارتان

بنابر اظهار الی کارتان، اگر بخواهیم همه گروههای تحویلناپذیر تبدیلات خطی لی را بیابیم، کافی است همه نمایشهای تحویلناپذیر گروههای ساده لی را به دست آوریم. این حکم در ص. ۹۹ مقاله ۱۹۰۹ الی کارتان «گروههای تبدیلات پیوسته، نامتناهی، ساده»^۱، سالنامه دانشسرایعالی پاریس (۳) ۲۶، ص. ۹۳-۱۶۱، ثابت شد.

اگر هیأت زمینه، هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد آنگاه چهار دنباله نامتناهی و پنج نوع استثنایی از جبرهای ساده لی وجود دارد. کارتان برای این نوعها همه نمایشهای تحویلناپذیر را در مقاله اساسی خود «گروههای تصویری که هیچ یک از خمینه های مسطح را پایا نگه نمی دارند»^۲ بولتن انجمن ریاضی فرانسه^۳

1) Les groupes de transformations continus, infinis, simples 2) Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane 3) Bulletin de la Société Math. de France

۴۱، ص. ۵۳-۹۶ (۱۹۳۱) معین کرده است.

چنانکه در فصل ۹ دیدیم، چهار دنباله نامتناهی از گروههای ساده که به توسط لی کشف شده‌اند عبارت‌اند از:

(آ): گروههای خطی تصویری $PGL(n, \mathbb{C})$ با فرض $n > 1$.

(ب): گروههای متعامد تصویری $PO(2n, \mathbb{C})$ با فرض $2n \geq 4$.

(پ): گروههای سیمپلکتیک $PSp(2n, \mathbb{C})$.

(ت): گروههای متعامد تصویری $PO(2n-1, \mathbb{C})$ با فرض $2n-1 > 1$.

بحث را با نوع (آ) آغاز می‌کنیم. به جای $PGL(n, \mathbb{C})$ می‌توان گروه موضعاً یکرخت $SL(n, \mathbb{C})$ را در نظر گرفت. اعضای آن ماتریسهای $n \times n$ با دترمینان ۱ هستند. تبدیلات بینهایت کوچک آن ماتریسهایی هستند که اثر آنها صفر است:

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0. \quad (1)$$

دو روش برای یافتن نمایشهای این گروه SL وجود دارد: روش فراموضعی و روش بینهایت کوچک. هر دو روش جبری محض‌اند، و هر دو به یک نتیجه منجر می‌شوند.

روش فراموضعی

روش فراموضعی با گروه $GL(n, F)$ آغاز می‌شود، که در آن F هیأت دلخواهی با مشخصه صفر است. این روشی است که همه نمایشهایی از گروه GL را به دست می‌دهد که در آنها اعضای ماتریس $T(A)$ ، ماتریس نمایش‌دهنده A ، چندجمله‌ایهایی بر حسب اعضای a_{xx} ماتریس A هستند.

روش فراموضعی با ایسائی شور در رسالهٔ دکترایش (برلین ۱۹۰۱) آغاز شد. این روش به توسط هرمان وایل در ۱۹۲۵ و د. ا. لیتوود، و آ. ریچاردسن در ۱۹۳۸ بیش از پیش بسط یافت. مقالات مهم در این موضوع عبارت‌اند از:

ا. شور: در باب یک رده از ماتریسها^۱، رسالهٔ برلین ۱۹۰۱، آثار I، ص. ۷۵-۱؛

ه. وایل: نظریهٔ نمایش گروههای پیوستهٔ نیمساده با تبدیلات خطی^۲، مجلهٔ ادواری ریاضی ۲۳،

ص. ۲۷۱-۳۰۹ (۱۹۲۵)، یا آثار منتخب هرمان وایل، ص. ۲۶۳-۲۹۸؛

ا. شور: در باب نمایشهای گویای گروههای خطی کلی^۳، خلاصهٔ مذاکرات پروس فرهنگستان برلین

- 1) Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen
- 2) Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen
- 3) Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe

۱۹۲۷، ص. ۵۹-۷۵؛

د. ا. لیتوود و ا. ر. ریچاردسن: سرشتهای گروهی و جبرها، خلاصه گزارشات فلسفی انجمن سلطنتی A۲۲۳، ص. ۹۹-۱۴۱ (۱۹۳۴).

در تشریح روش فراموضعی، از توضیحی که در کتابم «گروههای تبدیلات خطی» (اشپرینگر-فرلاک ۱۹۳۵)، ص. ۸۸-۹۱، آورده‌ام پیروی خواهم کرد که عمده‌تأثیر از کار هرمان وایل است. ایده اصلی نهفته در نظریه فراموضعی بسیار ساده است. ابتدا نشان می‌دهیم که هر نمایش را که در آن اعضای ماتریسی چندجمله‌ایهایی برحسب $a_{\kappa\lambda}$ هستند، می‌توان به نمایشهایی که در آنها اعضای ماتریس چندجمله‌ایهایی همگن‌اند تجزیه کرد. اگر m درجه آنها باشد، خواهیم گفت نمایشی از ارتفاع m داریم (به آلمانی: Stufe m).

یک نمایش نسبتاً کلی از ارتفاع m ، نمایش تانسوری است. هرگاه $u_1, \dots, u_n$ بردارهای پایه فضای برداری باشند که $GL(n, F)$ بر آن عمل می‌کند، و $v_1, \dots, v_n$ بردارهای پایه نسخه دیگری از همان فضای برداری باشند، و به همین ترتیب، آنگاه حاصلضریبهای m عامل

$$u_\lambda v_\mu \dots w_\nu$$

اعضای پایه یک فضای تانسوری از ارتفاع m اند. اعضای این فضا، تانسورهای ذیل‌اند

$$t = \sum t_{\lambda\mu\dots\nu} u_\lambda v_\mu \dots w_\nu.$$

اعضای ماتریسی نمایش تانسوری $GL(n, F)$ عبارت‌اند از

$$a_{k_1\dots k_m, \lambda_1\dots\lambda_m} = a_{\kappa_1\lambda_1} a_{\kappa_2\lambda_2} \dots a_{\kappa_m\lambda_m}.$$

بستار خطی این مجموعه از ماتریسها، S ، متشکل از همه ماتریسهای متقارن، یعنی، شامل همه ماتریسهایی است که در آنها اعضای ماتریسی

$$a_{\kappa_1\dots\kappa_m}, \lambda_1\dots\lambda_m$$

با اعمال یک جایگشت واحد مانند Q هم به κ و هم به λ ، ثابت باقی می‌مانند. برهان این حکم، که از هرمان وایل است، بسیار آسان است.

هر جایگشت Q از S_m ، هرگاه هم به κ و هم به λ اعمال شود، یک تبدیل خطی

$$\tau \rightarrow Q^T$$

از فضای تانسوری را به خودش القا می‌کند. فرض کنیم R مجموعه همه این تبدیلات خطی باشد. بر طبق قضیه اخیرالذکر وایل، بستر خطی S شامل تبدیلاتی از V به خودش است که با ماتریسهای R تعویضپذیرند. اما R یک نمایش گروه متقارن S_m ، و در نتیجه کاملاً تحویلپذیر است. به موجب قضیه‌ای از ایسائی شور، تعیین همه تبدیلات خطی که با مجموعه کاملاً تحویلپذیر مفروضی از ماتریسها تعویضپذیرند، بسیار آسان است. از اینجا نتیجه می‌شود که S حاصلجمع مستقیمی از حلقه‌های تمام-ماتریسی روی هیأت زمینه F است، و همه نمایشهای تحویلناپذیر GL از ارتفاع m مشمول در نمایش تانسوری هستند. دیدیم که نمایشهای تحویلناپذیر S_m با جدول یانگ نظیر

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$$

معین می‌شوند.

اگر P مجموع جایگشتهای بین سطرهاى چنین جدولی باشد، و N حاصلجمع متناوب جایگشتهای بین ستونهای آن باشد، حاصلضرب PN (قطع نظر از یک عامل ثابت) عضو خودتوان جبر گروهی S_m است. اینک اگر عملگر PN به همه تانسورهای t اعمال شود، مجموعه‌ای خطی از تانسورها به دست می‌دهد، که با همه تبدیلات GL به خودش تبدیل می‌شود، و این تبدیلات یک نمایش تحویلناپذیر GL را تشکیل می‌دهند. همه نمایشهای گویا از ارتفاع m را می‌توان از این طریق به دست آورد. همین!!

روش بینهایت کوچک

روش بینهایت کوچک الی کارتان بر نظریه ساختاری جبرهای ساده لی استوار است. من از ساده‌ترین حالت، با پیروی از توصیفی که وایل کرده است (آثار منتخب هرمان وایل، ص. ۲۶۶-۲۷۸) آغاز می‌کنم: جبر L_G لی گروه خطی خاص $G = SL(n, \mathbb{C})$.

این گروه شامل یک زیرگروه آبلی ماکسیمال H است که از ماتریسهای قطری با درمیانان ۱ تشکیل شده است. تبدیلات بینهایت کوچک این گروه به وسیله ماتریسهای قطری با اثر صفر تعریف می‌شوند:

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$$

فرض کنیم $e_{ik} (i \neq k)$ ماتریسی باشد که عضو واقع در سطر i م و ستون k م آن ۱، و باقی اعضای آن صفر باشند. ماتریسهای e_{ik} ، به انضمام ماتریسهای $h(\lambda)$ ، پایه‌ای از جبر لی L را تشکیل می‌دهند. روابط تعویضگر مشتعل بر ماتریسهای $h(\lambda)$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0 \\ [h, e_{ik}] &= (\lambda_i - \lambda_k) e_{ik}. \end{aligned} \quad (2)$$

به موجب این روابط، فرمهای خطی $\lambda_i - \lambda_k$ را ریشه‌های جبر لی می‌نامند. گویند عضو $e_\alpha = e_{ik}$ به ریشه $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ متعلق است.

فرض کنیم h_α ماتریس $h(\lambda)$ باشد که در آن $\lambda_i = 1$ و $\lambda_k = -1$ ، و همه λ های دیگر صفر است. روابط تعویضگر بین e_α ها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} [e_\alpha, e_{-\alpha}] &= h_\alpha \\ [e_\alpha, e_\beta] &= \begin{cases} \pm e_{\alpha+\beta} & \text{(اگر } \alpha + \beta \text{ یک ریشه باشد)} \\ 0 & \text{(در غیر این صورت).} \end{cases} \end{aligned}$$

مسئله کارتان یافتن نگاشتی است مانند

$$u \rightarrow U$$

به طوری که

$$[u, v] \rightarrow [U, V] = UV - VU.$$

این بدین معنی است که: ماتریسهای $H(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ و E_α باید در شرایط ذیل صدق کنند:

$$\begin{aligned} [H, H'] &= 0, & [H, E_\alpha] &= \alpha E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= H_\alpha, & [E_\alpha, E_\beta] &= \pm E_{\alpha+\beta} \text{ یا } 0. \end{aligned} \quad (3)$$

بردارهایی که ماتریسهای U روی آنها عمل می‌کنند با حروف لاتینی نشان داده خواهند شد. اگر براداری در رابطه

$$He = \Lambda e$$

که در آن Λ یک فرم خطی بر حسب λ هاست صدق کند، خواهیم گفت e دارای وزن Λ است.

اگر برداری مانند x دارای وزن Λ باشد، آنگاه Hx نیز دارای وزن Λ است و $E_\alpha x$ دارای وزن $\Lambda + \alpha$ است.

اگر $\epsilon \neq 0$ برداری به وزن Λ باشد، می‌توان زیرفضای خطی پایای تولید شده با بردارهای

$$\epsilon, E_\alpha \epsilon, E_\alpha E_\beta \epsilon,$$

و غیره را تشکیل داد.

اگر نمایش تحویلناپذیر باشد، این زیرفضا باید تمامی فضای برداری V باشد، بنابراین V پایه‌ای دارد که متشکل از بردارهایی است که هر یک از آنها دارای وزن معینی است. فرض کنیم Λ یک وزن باشد:

$$\Lambda = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n, \quad (4)$$

و فرض کنیم Λ_α مقدار Λ به ازای $H = H_\alpha$ باشد، یعنی،

$$\Lambda_\alpha = m_i - m_k.$$

وزن Λ را اکسترم نسبت به α گویند هرگاه $\Lambda + \alpha$ دیگر یک وزن نباشد. با آغاز از یک وزن اکسترم Λ ، می‌توان دنبالهٔ ذیل را تشکیل داد

$$E_{-\alpha} \epsilon = \epsilon_1, \quad E_{-\alpha} \epsilon_1 = \epsilon_2, \dots$$

در این دنباله فرض می‌کنیم ϵ_{h-1} نخستین بردار صفر باشد. بردارهای

$$\epsilon, \epsilon_1, \dots, \epsilon_h$$

دارای وزنهای

$$\Lambda, \Lambda - \alpha, \dots, \Lambda - h\alpha$$

هستند.

همچنین می‌توان از ϵ_i به ϵ_{i-1} بازگشت:

$$E_\alpha \epsilon_i = \mu_i \epsilon_{i-1}$$

آخرین نتیجهٔ تحقیقات کارتان را می‌توان به قرار ذیل بیان کرد. فرض کنیم

$$x_1, \dots, x_n$$

$$y_1, \dots, y_n$$

m مجموعه از «متغیرهای هم‌گردیان» باشند. این بدین معنی است که: اگر یک تبدیل خطی T به x اعمال شود، همان تبدیل به y ، به z ، و غیره اعمال خواهد شد. فرض کنیم

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$$

افزایی از عدد صحیح m با شرایط ذیل باشد

$$r \leq n \quad \text{و} \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 0$$

اگر همه تبدیلات خطی T از $x, y, \dots$ را به فرم

$$f = x_1^{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots (\sum \pm x_1 y_2 z_3)^{\alpha_r}$$

اعمال کنیم، یک مجموعه خطی از فرمهای Tf به دست می‌آوریم. با اعمال تبدیلات بینهایت کوچک $SL(n, \mathbb{C})$ به این فرمها، یک نمایش تحویلناپذیر جبر لی L_G به دست می‌آید، و همه نمایشهای تحویلناپذیر L_G را می‌توان از این طریق به دست آورد.

بدیهی است که این نمایشهای بینهایت کوچک را می‌توان به نمایشهای فراموضعی SL ، و حتی به نمایشهای فراموضعی گروه خطی کلی GL ، توسیع داد. تنها باید همه تبدیلات خطی ناکین S از GL را به فرمهای Tf اعمال کرد. نمایشهای GL که بدین ترتیب به دست می‌آیند، درست نمایشهای گویایی هستند که ایسائی شور در ۱۹۰۱ پیدا کرده بود. کارتان در نامه‌ای به هرمان وایل به تاریخ اول مارس ۱۹۲۵، اظهار می‌دارد که نمایشهای تحویلناپذیر جبر لی را بدون اطلاع از تحقیقات ایسائی شور معین کرده بود.

کارتان همین روش را برای جبرهای لی از نوعهای B, C ، و D به کار برد. برای گروههای سیمپلیکتیک (نوع C) نتیجه عیناً همان است: همه نمایشهای بینهایت کوچک تحویلناپذیر را می‌توان برای نمایشهای فراموضعی مشمول در نمایشهای تانسوری $Sp(n, \mathbb{C})$ توسیع داد.

برای گروههای متعامد (نوعهای B و D) وضعیت متفاوت است، در فصل ۱۰، در بخش «اسپینورهای n بعدی»، من به توصیف «نمایشهای اسپینوری» دومتقداری گروههای متعامد پرداخته‌ام، که پیشتر در کار لیشتیس درباره مجموع مربعات به طور ضمنی آمده‌اند، و به طور صریح به توسط براوئر و وایل مشخص شده‌اند. کارتان نیز، که به طور نظام‌مند همه نمایشهای تحویلناپذیر بینهایت کوچک را با استفاده از روش

وزنهای ابداعی خود معین کرد، طبعاً این نمایشهای دومقداری را نیز پیدا کرد. ن. ک. ا. کارتان: آثار کامل^۱، ص. ۳۸۷-۳۹۳.

با همین روش، کارتان نمایشهای تحویلناپذیر بینهایت کوچک پنج جبر ساده لی استثنایی را نیز معین کرده است.

هرمان وایل

این داستان که چگونه هرمان وایل به نظریه قابل تحسین خود راجع به نمایش گروههای نیمساده رسید، بسیار شگفت‌انگیز است. وایل در آوریل ۱۹۱۸ نخستین چاپ کتاب مشهور خود را درباره نسبت عام: «فضا، زمان، ماده^۲» منتشر کرد. در چاپ چهارم این کتاب (۱۹۲۱)، وایل بخشی (۱۸§) به این کتاب با عنوان «ادراک نظریه گروهی فضای متری^۳» افزود که می‌توان آن را به صورت ذیل خلاصه کرد. در یک خمینه ریمانی در هر نقطه مانند P یک فضای برداری مماسی به بعد n داریم. در این فضای برداری یک «متریک فیثاغورسی» با فرم درجه دوم ذیل تعریف می‌شود

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k.$$

گروه دورانها که این فرم را به خودش تبدیل می‌کند یک گروه لی G به بعد

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

است.

وایل اینک می‌پرسد: چه ویژگیهایی از گروه G این «متریک فیثاغورسی» درجه دوم را مشخص می‌کنند؟

ابتدا وایل می‌خواهد که تبدیلات G حجمها را حفظ کنند، یعنی، دارای دترمینان یک باشند. شرط دوم او وجود و یکتایی تغییر مکانهای موازی بردارهاست به نقاط بینهایت نزدیک، که متریک را حفظ کنند. از این شرط نتیجه می‌شود که بعد گروه G حداکثر $\frac{1}{2}n(n-1)$ است. شرط سوم وایل نیاز به وجود به قدر کافی تغییر مکانهای همبسته بردارهاست، به نقاط بینهایت نزدیک. از این شرط نتیجه می‌شود که بعد G حداقل $\frac{1}{2}n(n-1)$ است.

1) Oeuvres complètes 2) Raum, Zeit, Materie 3) Gruppentheoretische Auffassung der Raummetrik

وایل حدس می‌زند که یگانه گروههایی که در این شرایط صدق می‌کنند گروههای دوران‌اند که با فرمهای درجه دوم ناتکین تعریف شده‌اند. او اظهار می‌دارد که این حدس را به ازای $n = 2$ و $n = 3$ ثابت کرده است.

اوایل ۱۹۲۱، وایل در اثبات این حدس موفق شد. مقاله او تحت عنوان «یکتایی تعیین اندازه‌های فیثاغورسی»^۱ در آوریل ۱۹۲۱ به مجله ریاضیات^۲ ارائه و در ژانویه ۱۹۲۲ در مجلد ۱۲ منتشر شد. مستقل از وایل، الی کارتان برهان ساده‌تری برای حدس وایل یافت، که بر نظریه نمایش گروههای لی او مبتنی بود. برهان او در یادداشتی به «مجله گزارشها» در ۱۹۲۲ اعلام شد (مجله گزارشها، فرهنگستان علوم پاریس^۳ ۱۷۵، ص. ۸۲)، و در ۱۹۲۳ در مقاله‌ای تحت عنوان «در باب قضیه اساسی. م. ه. وایل»^۴، مجله ریاضیات^۵ ۲، ص. ۱۶۷-۱۹۲ منتشر شد (مجموعه آثار^۶ III، ص. ۶۳-۸۸).

کارتان نسخه دومی از مقاله‌اش را برای وایل فرستاد. به دنبال آن مکاتبات بی‌اندازه جالبی بین کارتان و وایل صورت گرفت. تاریخ مهمترین نامه‌های آنها چنین است:

از وایل ۵ اکتبر ۱۹۲۲،

از کارتان ۹ اکتبر ۱۹۲۲،

از کارتان ۲۸ ژوئن ۱۹۲۳،

از کارتان اول مارس ۱۹۲۵،

از وایل ۲۲ مارس ۱۹۲۵،

از کارتان ۲۸ مارس ۱۹۲۵،

من مدیون دکتر ب. گلاوس^۷، کتابدار E. T. H. زوریخ، هستم که سه نامه نخست از کارتان به وایل را نشان داد. پس از آن، هانری کارتان پسرالی کارتان نسخه‌هایی از سه نامه دیگر را برایم فرستاد. نامه‌ها و نسخه‌ها هم اکنون در بایگانی E. T. H. زوریخ هستند.

از نامه نخست، که در آن وایل از کارتان به خاطر ارسال یادداشت «مجله گزارشها»^۸ یش تشکر می‌کند، معلوم می‌شود که وایل با نظریه کلی جبرهای لی کارتان پیش از اکتبر ۱۹۲۲ آشنایی نداشته است. او می‌نویسد:

Unbewandert auf den gebahnten Strassen der allgemeinen Theorie der kontinuierlichen Gruppen, deren Anlage und Ausbau man Ihrer Meisterschaft verdankt, habe ich auf eigene Faust einen steilen, unbequemen

1) Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung 2) Math. Zeitschrift

3) Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 4) Sur un théorème fondamental de M. H Weyl

5) Journal de Math. 6) Oeuvres complètes 7) B. Glaus

Fusspfad durch das Gestrüpp zum Ziel gebahnt. Ich zweifle nicht daran, dass Ihre Methode der Natur der Sache besser entspricht...

باید اعتراف کنم که از ترجمهٔ عبارات شاعرانهٔ هرمان وایل به انگلیسی^۱ عاجزم. من شاعر نیستم. پاسخ کارتان بسیار مؤدبانه است. او «قضیهٔ مهم» وایل را تحسین و اضافه می‌کند: «همین که درستی قضیه معلوم شود، سهولت برهان آن ابداً با اهمیت فلسفی^۲ آن قابل مقایسه نیست. در ژوئن ۱۹۲۳، وایل نسخه‌ای از کتاب «آنالیز ریاضی مسایل فضا»^۳ی خود را برای کارتان فرستاد. کارتان بی‌درنگ جواب داد: «از شما بسیار تشکر می‌کنم که لطف کرده‌اید و کتاب زیبای خود را به این زودی برای من فرستاده‌اید.»

از این مکاتبات چنین برمی‌آید که وایل در اکتبر ۱۹۲۲ مطالعهٔ نظریهٔ کارتان را آغاز کرد، زیرا دریافت که این نظریه به تحقیق او دربارهٔ «مسئلهٔ فضا» کمک بزرگی می‌کند. او به سرعت بر نظریهٔ کارتان تسلط پیدا کرد، و مساهمتهای مهمی را به عمل آورد. تحقیقات او به سه مقالهٔ زیبا منجر شد، که نسخه‌هایی از آنها را در فوریهٔ ۱۹۲۵ برای کارتان فرستاد. این مقالات در مجلهٔ ادواری ریاضیات^۴ ۲۳ (۱۹۲۵) و ۲۴ (۱۹۲۶) تحت عنوان کلی «نظریهٔ نمایش گروههای پیوستهٔ نیمساده به وسیلهٔ تبدیلات خطی»^۵ با عنوانهای فرعی ذیل منتشر شدند.

فصل I: مبانی نظریهٔ گروهی محاسبات تانسوری^۶

فصل II: نمایش گروه مختلط و توسیع گروه^۷

فصل III: ساختار گروههای نیمساده^۸

پیوست (۳ صفحه)

این سه مقاله و «پیوست» در «آثار منتخب هرمان وایل» (انتشارات بیرکهایزر^۹، بال ۱۹۵۶) در صفحات ۲۶۲-۳۶۶ چاپ شده‌اند.

فصل I کلاً به گروه خطی خاص $G = SL(n, \mathbb{C})$ اختصاص یافته است. ابتدا، نمایشهای تحویلناپذیر

جبر لی L_G با روش بینهایت کوچک کارتان معین می‌شوند. سپس، وایل قضیهٔ بی‌اندازه مهمی را ثابت می‌کند:

(۱) زبان نوشتاری نویسندهٔ کتاب حاضر آلمانی است و کتاب را به انگلیسی تألیف کرده است. م.

2) Sa portée philosophique 3) Mathematische Analyse des Raumproblems 4) Math. Zeitschrift 5) Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen 6) Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung 7) Die Darstellungen der Komplexgruppe und der Dehnungsgruppe 8) Struktur der halb-einfachen Gruppen 9) Birkhäuser, Basel

هر نمایش جبر لی L_G ، و در نتیجه هر نمایش گروه G ، کاملاً تحویلپذیر است.

وایل این قضیه را با استفاده از ترفندی که خود او آن را «ترفند یکانی» می نامد، ثابت می کند، که ذیلاً به شرح آن خواهیم پرداخت. اگر خود را به تبدیلات یکانی محدود کنیم، یعنی تبدیلاتی که فرم ارمیتی

$$x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$$

را به خودش تبدیل می کنند، یک فرم فشرده لی مانند H به دست می آوریم. روی هر گروه لی می توان یک جزء حجمی پایا مانند dV معرفی کرد. حال اگر نمایشی از یک گروه فشرده لی مانند H داشته باشیم، می توان روشی از هوروتیس را به کار بست. با شروع از یک فرم ارمیتی مثبت دلخواه در فضای نمایش، می توان همه تبدیلات H را به این فرم اعمال کرد و روی H انتگرال گرفت. بدین ترتیب یک فرم ارمیتی مثبت به دست می آید که تحت این تبدیلات نمایش پایاست. هر زیرفضای پایا معرّف یک زیرفضای پایای متعامد است، و از اینجا نتیجه می شود که هر نمایش H کاملاً تحویلپذیر است.

هرگاه یک نمایش بینهایت کوچک H داشته باشیم، می توان همواره از آن انتگرال گرفت، و بدین ترتیب یک نمایش فراموضعی از خمینه پوششی H به دست آورد. وایل ثابت می کند که گروه یکانی $H = SU(n, \mathbb{C})$ ساده-همبند است، که از آن نتیجه می شود که هر نمایش بینهایت کوچک را می توان به یک نمایش تکمقداری فراموضعی H توسیع داد. هم اکنون دیدیم که این نمایشهای فراموضعی کاملاً تحویلپذیرند، بنابراین می توان نتیجه گرفت که هر نمایش بینهایت کوچک H کاملاً تحویلپذیر است.

وایل سپس ثابت می کند که: هرگاه تبدیلات بینهایت کوچک H یک زیرفضای خطی را به خودش تبدیل کنند، تبدیلات بینهایت کوچک G هم آن زیرفضا را به خودش تبدیل می کنند. چون فضای نمایشی جبر لی L_H حاصلجمع مستقیمی از زیرفضاهای تحویلناپذیر است، همین امر برای L_G برقرار است. این برهان قضیه وایل را کامل می کند.

برهان وایل بسیار قابل توجه است. روش انتگرالگیری هوروتیس را نمی توان مستقیماً به گروه G اعمال کرد، زیرا G فشرده نیست. بنابراین وایل ابتدا از گروه G به گروه فشرده H می رسد، و سپس به جبر لی L_H ، سپس به L_G ، و سرانجام به G :

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & H \\ | & & | \\ L_G & \rightarrow & L_H \end{array} .$$

ناבעه ای مانند وایل لازم است تا چنین برهانی را بیابد.

مقاله دوم در مجله ادواری ریاضیات ۲۴ مشتمل بر فصلهای II و III است. در فصل II وایل روش خود را برای گروه سیمپلیکتیک $Sp(2n, \mathbb{C})$ و گروه دوران $O(n, \mathbb{C})$ به کار می برد. در مورد گروه

نمایشهای گروههای لی و جبرهای لی

سیمپلکتیک زیرگروه یکانی H از نو ساده-همبند است، که ایجاب می‌کند همه نمایشهای بینهایت کوچک، نمایشهای فراموضعی تکمقداری تولید کنند. یک بار دیگر، همه نمایشها مشمول در نمایشهای تانسوری‌اند. در مورد گروه دوران مختلط $(\mathbb{C})$ ابتدا زیرگروه دورانهای حقیقی، H ، را تشکیل می‌دهیم. این گروه فشرده است، اما ساده-همبند نیست. این گروه دارای یک گروه پوششی دولایی ساده-همبند H^* است. جبر لی H^* با جبر لی H یکی است: آن را L_H می‌نامیم. اینک می‌توان «ترفند یکانی» را به کار بست، تا از $(\mathbb{C})$ به H^* ، از H^* به L_H ، و از L_H به L_G رسید. نتیجه اینکه: همه نمایشهای بینهایت کوچک $(\mathbb{C})$ کاملاً تحویلپذیرند، و نمایشهای تحویلناپذیر، نمایشهایی‌اند که به توسط کارتان کشف شدند. این نمایشها، نمایشهای یکمقداری یا دومقداری $(\mathbb{C})$ را تولید می‌کنند. ساده‌ترین نمایشهای دومقداری «نمایشهای اسپینوری»‌اند.

در فصل III، وایل استنتاج ساده جدیدی از نظریه ساختاری گروههای نیمساده لی ارائه و ثابت می‌کند که «ترفند یکانی» را می‌توان به همه گروههای نیمساده توسیع داد.

در فصل IV، وایل نشان می‌دهد که نظریه نمایش او قابل توسیع به همه گروههای نیمساده، از جمله گروههای استثنایی، است.

وایل در ۱۹۲۷، با شاگردش ف. پتر^۱، مقاله‌ای تحت عنوان «تمامیت نمایشهای اولیه یک گروه پیوسته بسته^۲» ماتماتیشه آنالن ۹۷، ص. ۷۳۷-۷۵۵ منتشر کرد. در این مقاله مؤلفان ابتدا توضیح می‌دهند که نمایشهای یک گروه فشرده لی مانند $(\mathbb{C})$ با نمایشهای یکانی هم‌ارزند. سپس ثابت می‌کنند که $c_{ik}(s)$ ها، اعضای ماتریسی نمایشهای تحویلناپذیر، یک مجموعه متعامد کامل از توابع، بر گروه $(\mathbb{C})$ تشکیل می‌دهند. برهان مبتنی بر نظریه معادلات انتگرالی است.

جان فون نویمان

در مقاله‌های کارتان و وایل فرض شده بود که همه نمایشهای گروههای لی در شرایط خاصی از مشتق‌پذیری صدق می‌کنند. در ۱۹۲۹ جان فون نویمان نشان داد که به جای این شرایط، می‌توان شرایط بسیار ضعیف پیوستگی را به کار برد. ن. ک. ج. فون نویمان: «در باب خواص تحلیلی گروههای تبدیلات خطی و نمایشهای آنها^۳» مجله ادواری ریاضیات^۴ ۳۰، ص. ۳-۴۲. قسمتی از نتایج فون نویمان پیشتر در مقاله‌ای تحت عنوان «در باب نظریه نمایش گروههای پیوسته^۵»، خلاصه مذاکرات پروس. فرهنگستان^۶

1) F. Peter 2) Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe 3) Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen 4) Math. Zeitschrift 5) Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen - 6) Sitzungsber preuss, Akad.

۱۹۲۷، ص. ۷۶-۹۰، ارائه شده بودند. هر دو مقاله در مجموعه آثار فون نویمان، ص. ۱۳۴-۱۵۰ و ۵۰۹-۵۴۹، از نو چاپ شده‌اند.

فون نویمان قدرمطلق یک ماتریس A با ضرایب مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کند

$$|A| = \sqrt{\sum |a_{\mu\nu}|^2}. \quad (5)$$

او ابتدا گروه‌های ماتریسی و سپس نمایش‌های آنها را در نظر می‌گیرد. اگر G یک گروه ماتریسی و $\bar{G}$ بستار آن باشد، ثابت می‌کند که مؤلفه E در $\bar{G}$ یک گروه لی مانند H است که به وسیله تبدیلات خطی بینهایت کوچک

$$U = a_1 V_1 + \dots + a_k V_k$$

تولید می‌شود، که در آن $\bar{G}/H$ یک گروه گسسته است.

راجع به نمایش‌های G ، فون نویمان ثابت می‌کند که: اگر وارایسیون یک نمایش $D(A)$ در یک همسایگی E ، که با متریک (۵) تعریف شده، کوچکتر از ۲ باشد، نمایش پیوسته است. در یک همسایگی مناسب E اعضای ماتریسی $D(a)$ سریهای توانی همگرا برحسب اجزاء حقیقی و موهومی اعضای ماتریسی $a_{\mu\nu}$ هستند.

من در مقاله‌ای تحت عنوان «سازگاری قضایا برای گروه‌های نیمساده لی^۱» (مجله ادواری ریاضیات^۲ ۳۶، ص. ۷۸۰-۷۸۶، ۱۹۳۳) برهان ساده‌تری از قضیه دوم فون نویمان را ارائه داده و ثابت کرده‌ام که همه نمایش‌های گروه‌های نیمساده فشرده لی پیوسته‌اند. این نتیجه اخیر، پیشتر در ۱۹۳۰ به توسط الی کارتان به دست آمده بود: «در باب نمایش‌های خطی گروه‌های بسته^۳» توضیحات ریاضی سوییسی^۴، ص. ۲۶۹-۲۸۳. این قضیه به توسط هانس فرویدنتال^۵ در مقاله‌ای تحت عنوان «توپولوژی گروه‌های لی به عنوان پدیده‌های جبری^۶»، سالنامه ریاضی^۷ ۴۲، ص. ۱۰۵۱-۱۰۷۴ (۱۹۴۱) به نحو قابل ملاحظه تعمیم یافته است.

در ۱۹۳۴، جان فون نویمان مقاله بی‌اندازه مهمی تحت عنوان «توابع تقریباً متناوب در یک گروه I »، خلاصه مذاکرات انجمن ریاضی امریکا ۳۶، ص. ۴۴۵-۴۹۲ منتشر کرد. مقدمه این مقاله چنین شروع می‌شود:

هدف از مقاله حاضر بسط نظریه مشهور توابع تقریباً متناوب ه. بوهر^۸ است به گروه‌های

دلخواه، و اثبات این حکم که این بسط حوزه ماکسیممی را به دست می‌دهد که در آن حوزه نتایج

- 1) Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen 2) Math. Zeitschrift 3) Sur les représentations linéaires des groupes clos 4) Comment. Math. Helv. 5) Hans Freudenthal
6) Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches phänomen 7) Annals of Math.
8) H. Bohr

اساسی نظریه نمایش فرونیوس-شور و توسعه‌های آن از سوی وایل و پتر قرارند. بالاخص ملاحظه خواهیم کرد که همه نمایشهای خطی کراندار یک گروه، با نمایشهای یکانی هم‌ارزند و بدین رده تعلق دارند. نکته مهم دیگر این که، با استفاده از تعریف تناوب تقریبی بوخنر^۱، کاملاً خود را از مفروضات توپولوژیک (نظیر پیوستگی، و جز آن) آزاد می‌کنیم. بدین ترتیب معلوم می‌شود که این نظریه کلی، که به هر گروه دلخواه قابل اعمال است، گرچه کاملاً از مفروضات توپولوژیک آزاد است، ولی همه نتایج آن (به عنوان مثال، همه بسطهای سریها) دارای ویژگی بستاری اند؛ اگر به توابعی که در توپولوژی معینی پیوسته‌اند اعمال شوند، تنها به توابعی از یک نوع منجر خواهند شد.

اگر f و g دو تابع مختلط-مقدار بر گروهی مانند G باشند، فاصله آنها، $D(f, g)$ ، به صورت کوچکترین کران بالای تفاضل $|f(x) - g(x)|$ تعریف می‌شود:

$$D(f, g) = l.u.b. |f(x) - g(x)|.$$

مجموعه M از چنین توابع را شرطی-فشرده (ش. ف) گویند هرگاه هر دنباله مانند $f_1, f_2, \dots$ شامل زیردنباله‌ای باشد به طوری که

$$D(f_\mu - f_\nu) \rightarrow 0 \quad (\mu, \nu \rightarrow \infty)$$

تابعی مانند $f(x)$ در G را تقریباً متناوب گوئیم هرگاه مجموعه R_f متشکل از همه توابع $f(xa)$ و مجموعه L_f متشکل از همه توابع $f(ax)$ هر دو شرطی-فشرده باشند. این تعریف از س. بوخنر است (سالنامه ریاضی ۹۶، ص. ۱۱۹-۱۴۷، ۱۹۲۷). اگر G گروه جمعی اعداد حقیقی و f پیوسته باشد، تعریف بوخنر با تعریف هارال بوهر^۲ هم‌ارز است.

محدب یک مجموعه M از توابع، که با $Co(M)$ نشان داده می‌شود، به صورت مجموعه همه ترکیبات خطی ذیل تعریف می‌شود

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum \alpha_i = 1, \quad f_i \in M.$$

اگر f تقریباً متناوب باشد، ثابتی وجود دارد که زیردنباله‌ای از $Co(R_f)$ به آن به طور یکنواخت همگراست. چنین ثابتی را میانگین راست تابع f می‌گویند. اگر $f(x)$ تقریباً متناوب باشد، درست دارای یک میانگین راست است، که ضمناً یک میانگین چپ نیز هست، که آن را میانگین

$$Mf = M_x f(x)$$

می‌خوانند.

به آسانی ملاحظه می‌شود که اعضای ماتریسی $d_{ik}(x)$ یک نمایش کراندار G تقریباً متناوب‌اند. اینک اگر از یک فرم ارمیتی مثبت مانند

$$h = \bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n$$

شروع کنیم و همه تبدیلات یک نمایش کراندار را به این فرم اعمال کنیم و میانگین Mh را تشکیل دهیم، نتیجه می‌شود که هر نمایش کراندار G یکانی و کاملاً تحویلپذیر است.

اگر $d_{ij}(x)$ ها اعضای ماتریسی یک نمایش کراندار تحویلناپذیر باشند، روابط تعامد ایسائی شور را می‌توان به صورت ذیل تعمیم داد:

$$M_y d_{ij}(xy^{-1}) d_{kl}(y) = (1/n) \delta_{jk} d_{il}(x) \quad (6)$$

$$M_y d_{ij}(xy^{-1}) d'_{kl}(y) = 0 \quad (\text{اگر } D' \text{ هم‌ارز با } D \text{ باشد}). \quad (7)$$

اگر $f(x)$ و $g(x)$ تقریباً متناوب باشند، حاصلضرب خارجی $f \times g$ به صورت ذیل تعریف می‌شود

$$h(x) = M_y [f(xy^{-1})g(y)].$$

با این ضرب، توابع تقریباً متناوب یک حلقه R تشکیل می‌دهند. اگر گروه G متناهی باشد، این حلقه همان جبر گروهی است.

در حلقه R حاصلضرب اسکالر (f, g) را می‌توان به صورت

$$(f, g) = M_y [f(y) \overline{g(y)}],$$

و نرم $N(f)$ را به صورت

$$N(f) = \sqrt{(f, f)}$$

تعریف کرد.

مجموعه‌ای از توابع f_i را نام‌گویند هرگاه ترکیبات خطی

$$\gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_r f_r \quad (8)$$

در فضای برداری R همه جا چگال باشند، یعنی، هرگاه بتوان هر تابع تقریباً متناوب f را با یک ترکیب خطی مانند (۸) تقریب‌پذیر کرد:

$$N(\gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_r f_r - f) < \varepsilon.$$

برای اثبات تمامیت $d_{ik}(x)$ ها، جان فون نویمان معادله انتگرالی

$$f \times f^{\dagger} \times \psi = \lambda \psi$$

را در نظر می‌گیرد، که در آن $f^{\dagger}(x)$ مزدوج مختلط $f(x^{-1})$ است.

این روش یک تعمیم روشی است که به توسط ف. پترو ه. وایل در سالنامه ریاضی^۱ ۹۷ (۱۹۲۷)، ص. ۷۳۷-۷۵۵ به کار گرفته شده است. در §۱۴ کتاب «گروههای تبدیلات خطی»، تمامیت $d_{ik}(x)$ ها را با روش دیگری، که از گوتفریت کوته^۲ است، ثابت کرده‌ام. در این برهان نظریه فضاها تعمیم یافته هیلبرت را به کار برده‌ام که به توسط فرانتس رلیش^۳ در سالنامه ریاضی^۴ ۱۱، ص. ۳۴۲-۳۵۶ (۱۹۳۴) پی‌ریزی شده است.

فون نویمان اندکی بیش از تمامیت توابع $d_{ik}(x)$ را ثابت کرد. او ثابت کرد: هر تابع تقریباً متناوب $f(x)$ را می‌توان به طور یکنواخت با یک ترکیب خطی از $d_{ik}(x)$ ها تقریب زد.

هرگاه خود را به توابع کراندار پیوسته $f(x)$ بر یک گروه توپولوژیک G و به نمایشهای کراندار پیوسته محدود کنیم، همه قضیه‌های اخیرالذکر برقرار می‌مانند.

یک گروه توپولوژیک را «ماکسیمال-تقریباً متناوب» گویند، هرگاه به ازای هر دو عضو گروه مانند a و b ، تابع تقریباً متناوبی مانند f موجود باشد به طوری که

$$f(a) \neq f(b).$$

مثالهایی از چنین گروهها، گروههای توپولوژیک فشرده و گروههای توپولوژیک موضعی فشرده آبلی هستند.

در ۱۹۳۵، هانس فرویدنتال ثابت کرد که گروههای ماکسیمال-تقریباً متناوب دیگری غیر از آنچه ذکر شد و نیز حاصلضربهای مستقیم آنها وجود ندارد. به طور دقیقتر:

هر گروه توپولوژیک همبند، موضعی فشرده، تفکیکپذیر، ماکسیمال-تقریباً متناوب حاصلضرب مستقیمی از گروه انتقال یک فضای اقلیدسی n -بعدی $\mathbb{R}^n$ و یک گروه توپولوژیک فشرده همبند است.
ن. ک. ه. فرویدنتال: گروههای توپولوژیک با توابع تقریباً متناوب به قدر کافی زیاد^۴، سالنامه ریاضی ۳۷، ص. ۵۷-۷۷ (۱۹۳۵).

ضمیمہ



بارتل لیندرت وان در واردن، یکی از بزرگترین ریاضیدانان سده حاضر در دوازدهم ژانویه ۱۹۹۶ در زوریخ درگذشت. وی که در دوم فوریه ۱۹۰۳ در آمستردام متولد شده بود، از همان اوان کودکی علاقه‌مندی خود را به ریاضیات نشان داد. پدرش که مهندس و معلم ریاضیات و با تمایلات چپ بدون اینکه کمونیست باشد به طور فعال به سیاست علاقه‌مند بود از پسرش می‌خواست به دور از کتابهای ریاضی در منزل، در بیرون خانه بازی کند. اما، وان در واردن نوجوان ترجیح می‌داد خود را با بازی تک‌نفره‌ای موسوم به «فیثاغورث» سرگرم کند. این وسیله بازی متشکل از قطعاتی بود که می‌شد آزادانه آنها را جابه‌جا کرد و به راههای گوناگون از آنها یک مربع، یک مستطیل، و یک مثلث ساخت. مدتی بعد پس از اینکه به نحوی با مفهوم کسینوس آشنا شد، با شروع از قانون کسینوسها، به بازآفرینی مثلثات پرداخت. وقتی شاگرد مدرسه بود، به طور منظم به قرائتخانه کتابخانه عمومی آمستردام می‌رفت، و در اینجا بود که رساله‌ای را در هندسه تحلیلی از یوهان آنتونی بارائو^۱، استادی در گرونینگن^۲، مطالعه کرد. بخش II ای این کتاب مشتمل بر

1) Johan Antony Barrau 2) Groningen

قضیه‌های زیادی بود که برهناها، و حتی بیانهای نارسایی داشتند، و این امر وان در واردن را بر آن داشت که موضوع را برای مؤلف بنویسد. عکس‌العمل بارائو چه بود؟ در صورت رفتن او از گرونینگن، دانشگاه می‌بایست وان در واردن را نامزد جانشینی او کند! این پیشگویی به حقیقت پیوست. بارائو در ۱۹۲۷ به اوترخت^۳ منتقل شد، و در ۱۹۲۸، وان در واردن از قبول نخستین مقام استادی پیشنهاد شده به او از طرف روستوک^۴ در گرونینگن سر باز زد.

پس از آنکه وان در واردن مدرسه را تمام کرد، از سال ۱۹۱۹ تا ۱۹۲۴ در دانشگاه آمستردام زیر نظر براونر^۵؛ رونالد وایتسنوک^۶؛ گریت مانوری^۷؛ هندریک دو وریز^۸؛ و یان دیرک وان در والس^۹ فیزیکدان، پسر برنده جایزه نوبل، به تحصیل پرداخت. معروفترین اینان، براونر بود، ریاضیدانی که علی‌رغم اینکه مساهمتهای پژوهشی مهمش در توپولوژی بود، هرگز درسی را در توپولوژی ارائه نداد، و تنها به تدریس در مبانی شهودگرایی خود پرداخت. (او ظاهراً از نتایجی که در توپولوژی به دست آورده بود، به لحاظ اینکه از دیدگاه شهودگرایی درست نبودند، راضی نبود). گرچه وان در واردن نظریه پایاها را نزد وایتسنوک تحصیل کرد، ولی به نظرش قسمت عمده آن را از مانوری، ریاضیدانی که توپولوژی را به هلند آورد، آموخت.

در ۱۹۲۴ وان در واردن امتحان نهایی‌اش را با دو وریز، که درسهای او را در جبر کلاسیک بسیار دوست می‌داشت، به پایان برد. این درسها مشتمل بودند بر موضوعاتی نظیر دترمینانها و معادلات خطی، توابع متقارن، برآیندها و مینها، قضیه اشتورم^{۱۰} درباره ریشه‌های حقیقی، «شاخص لختی^{۱۱}» سیلوستر^{۱۲} برای فرمهای درجه دوم، و حل معادلات درجه سوم و دوم‌جذوری به وسیله رادیکالها. وان در واردن این درس را با مطالعه نظریه گالوا و سایر موضوعات از کتاب درسی هاینریش وبر^{۱۳} در جبر تکمیل کرد. او ضمناً کتاب مطالعاتی در باب بیست وجهی^{۱۴} فلیکس کلاین را خواند و نظریه پایاها را به طور کامل مطالعه کرد. هنگامی که هنوز دانشجوی دانشگاه بود، مفاهیمی چون «بعد» و «نقطه عام» یک چندگونای جبری، اصلهایی مانند «اصل بقای عدد» شوبرت^{۱۵}، و قضیه‌هایی نظیر «قضیه اساسی توابع جبری» ماکس نوتر^{۱۶} ذهن او را مشغول می‌داشت.

وان در واردن در «درباره منابع کتاب جبر جدید من» توضیح می‌دهد که

پایاها ابزار توانایی در هندسه جبری بود. بر طبق «برنامه ارلانگر» فلیکس کلاین، هر شاخه از هندسه به ویژگیهایی از اشیای هندسی مربوط می‌شود که تحت گروه معینی پایا هستند. با این حال وقتی من مقالات اساسی ماکس نوتر، «پدر هندسه جبری» و پدر امی نوتر، و آثار تحقیقی هندسه‌دانان

3) Utrecht 4) Rostock 5) L. E. J. Brouwer 6) Ronald Weitzenböck 7) Gerrit Mannoury 8) Henrick de Vries 9) Jan Dirk van der Waals 10) Sturm 11) index of inertia 12) Sylvester 13) Heinrich Weber 14) Studien über das Ikosaeder 15) Schubert 16) Max Noether

بزرگ ایتالیایی، به ویژه سیوری^{۱۷} را مطالعه کردم، به زودی دریافتم که نمی‌توان به مشکلات هندسه جبری با محاسبه پایاها و همورداها فائق آمد. [۳۲، ۹]

چون وان در واردن دوره تحصیل خود را در مدت بسیار کوتاهی به پایان برد، پدرش موافقت کرد تا مخارج تحصیلی او را به مدت یک سال دیگر درگوتینگن تأمین کند. در این ایام، داوید هیلبرت، گوستاو هرگولتس، ادموند لاندائو، کارل رونگه^{۱۸}، ریشارد کورانت، امی نوتر، و فلیکس برنشتاین^{۱۹} هیأت علمی دائمی مؤسسه ریاضیات را تشکیل می‌دادند، در حالی که گروه پریوات دوستنها^{۲۰} [معلمان حق‌التدریس] مشتمل بودند بر الکساندر اوستروفسکی^{۲۱}، هلموت کنسر^{۲۲}، پائول برنیس، و مورخ علم اوتو نوگه باوئر^{۲۳}. استادان مدعو سرشناس-نظیر هرمان وایل، کنستانتین کاراتودوری^{۲۴}، یان فون نویمان، کارل لوتویگ زیگل^{۲۵}، هلموت هاسه، ریشارد براوئر، هاینتس هوپف^{۲۶}، پائول الکساندروف^{۲۷}، اوزوالد وبلن^{۲۸}، گ. د. بیرکهوف^{۲۹}، و نوربرت وینر^{۳۰} از آلمان و سایر نقاط دنیا بودند. وان در واردن در ۱۹۲۴ با توصیه‌نامه‌ای از براوئر به کنسر، به گوتینگن رفت. در طول مسیر پیاده‌روی بعد از ناهار که با کنسر داشت مطالب زیادی در توپولوژی از او فرا گرفت؛ سایر استادان او در توپولوژی عبارت بودند از الکساندروف و کازیمیرز کوراتوفسکی^{۳۱}. وان در واردن هیلبرت را نیز ملاقات کرد، او را خوش برخورد یافت و از طرف او به منزلش دعوت شد. بالاتر از همه، امی نوتر را ملاقات کرد، که دنیای جدیدی را در مقابل دیدگانش گشود. از او آموخت ابزارهایی که می‌شد در سوالات ریاضی او به کار آید، پیشتر به وجود آمده‌اند، و نوتر به وی گفت چه چیزهایی را مطالعه کند: مقاله اساسی ارنست اشتاینیتس^{۳۲} با عنوان «نظریه جبری هیأتها^{۳۳}»؛ رساله چاپ کیمبرج نظریه جبری دستگاههای مدولی مکولی^{۳۴} درباره ایدآلهای چندجمله‌ای؛ مقاله ۱۸۸۲ی ریشارد ددکیند و هاینریش وبر تحت عنوان «نظریه توابع جبری یک متغیره^{۳۵}»؛ و مقاله خود او را درباره «نظریه ایدآل در توسیع حلقه‌ها^{۳۶}» ر «نظریه حذف و نظریه عمومی ایدآل^{۳۷}». وان در واردن با بهره‌مندی از کتابخانه مجهز گوتینگن شروع به آموختن جبر مجرد و کار درباره مسأله اصلی خود، یعنی تعیین مبانی حقیقی برای هندسه جبری، کرد.

در ۱۹۲۵، وان در واردن برای انجام خدمت نظام وظیفه اجباری خود به هلند بازگشت، و در پایگاه

17) Severi 18) Carl Runge 19) Felix Bernstein 20) privatdozenten 21) Alexander Ostrowski 22) Hellmut Kneser 23) Otto Neugebauer 24) Constantin Carathéodory 25) Carl Ludwig Siegel 26) Heinz Hopf 27) Paul Alexandroff 28) Oswald Veblen 29) G. D. Birkhoff 30) Norbert Wiener 31) Kazimierz Kuratowski 32) Ernst Steinitz 33) Algebraische Theorie der Körper 34) F. S. Macaulay 35) Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen 36) Idealtheorie in Ringbereichen 37) Eliminations theorie und allgemeine Idealtheorie

دریایی دن هلدر^{۳۸} به خدمت مشغول شد. هنگام اقامت در آنجا، رساله دکترای خود با عنوان «De algebraïese grondslagen der meetkunde van het aantal» نوشت که برنامه‌ای را برای مبانی هندسه جبری عرضه می‌داشت. چون در آن زمان تنها رساله‌هایی در هلند پذیرفته می‌شدند که به زبان هلندی یا لاتین بودند، وان در واردن کارهای بنیادی خود را به انضمام برهانهای آن در مقالات متعددی در ماتماتیکه آنالن^{۳۹} منتشر کرد، در حالی که خود رساله هلندی تنها مشتمل بر بیان قضیه‌هایی بدون برهان آنها بود.

وان در واردن پس از اتمام خدمت نظام خود، در ۱۹۲۶ با استفاده از یک بورس تحصیلی را کفلر که به توسط کورانت و به توصیه امی نوتر برای او در نظر گرفته شده بود برای تحصیل نزد امیل آرتین، اریش هکه^{۴۰}، و اتو شرایر^{۴۱} رفت.

آرتین در تابستان همان سال درسی در جبر ارائه داد، و بر مبنای یادداشتهای وان در واردن، آن دو طرح تألیف کتابی در جبر را برای انتشارات اشپرینگر-فلاک (سری زرد^{۴۲}) ریختند. هنگامی که وان در واردن یادداشتهایش را تنظیم کرد و فصلی را پس از دیگری به آرتین نشان داد، میزان خوشنودی او به قدری بود که گفت «چرا خود شما همه کتاب را نمی‌نویسید؟»

وان در واردن در ترم تابستانی ۱۹۲۹ به گوتینگن بازگشت و همسر آینده‌اش، کامیلا رلیش^{۴۳}، خواهر فرانتس رلیش^{۴۴} ریاضیدان، را ملاقات کرد. همان نگاه اول با عشق توأم بود، و این عشق همه عمر دوام یافت. او محیطی را به وجود آورد که همسرش توانست به خلق ریاضیات بپردازد. کامیلا وان در واردن آن دوران را چنین به خاطر می‌آورد، «ما همدیگر را در ژوئیه ملاقات و در سپتامبر ازدواج کردیم. سپس به گوتینگن رفتیم. همه چیز خوب و زیبا بود، بسیار زیبا. پس از اندک زمانی امی نوتر او را خواست، به وضوح به یاد دارم که گفت 'ماه‌عسل تمام شد، دوباره بر سر کارت بازگرد!' آنگاه او نشست و کتاب را بی‌وقفه تمام کرد» [۱، ۱۳۶؛ ۲، ۳۱۶]. این کتاب، جبر نوین I (پس از ویرایش سوم به بعد با نام جبر نامیده شد)، در ۱۹۰۳ منتشر شد و مبنای آن درسهای آرتین و امی نوتر بود. کتاب با تشریح مفاهیمی اساسی مانند گروه، مقسوم‌علیه نرمال، گروه عاملی، حلقه، ایدال، هیأت و چندجمله‌ای آغاز می‌شود و با برهان قضیه‌هایی مانند قضیه هم‌ریختی و قضیه‌های یکتایی تجزیه برای اعداد صحیح و چندجمله‌ایا ادامه می‌یابد. چون این چیزها عموماً معلوم بودند، وان در واردن در بسیاری از حالات برهانهای آرتین را با استفاده از یادداشتهایش بازسازی کرد. هانس هان و آلگا تاوسکی در نقد بخش I، فلسفه اصلی کتاب را چنین شرح می‌دهند:

مقصود وان در واردن از جبر، که گاهی جبر مجرد خوانده می‌شود، جبری است که در آن ثابتها

و نامعینها نه به عنوان اعداد حقیقی یا مختلط، بلکه به عنوان اعضای از یک مجموعه مجرد در نظر

38) Den Helder 39) Mathematische Annalen 40) Erich Hecke 41) Otto Schreier

42) Yellow series 43) Camilla Rellich 44) Franz Rellich

گرفته می‌شوند. بین این اعضا روابطی مفروض‌اند که در اصول موضوع مناسبی صدق می‌کنند، این تعبیر، که مدت درازی است در نظریهٔ گروه‌ها معمول شده است، در نظریهٔ نقطه‌ای مجموعه‌ها و توپولوژی و نیز نظریهٔ حد‌ها (فرشه) پذیرفته می‌شود، و از طریق مقاله‌ای از اشتاینیتس به تمامی جبر تتری پیدا می‌کند. این تعبیر مجرد، بیش از ژرفی در ساختار منطقی نظام‌های علمی مجزا [و] تعیین حدود دقیقی از مفاد قضایای جدا از هم فراهم می‌آورد، و [آن]، برخلاف آنچه ممکن است در بدو امر چنین به نظر برسد، مانع از فهم نمی‌شود، بلکه به تسهیل قابل ملاحظه‌ای در فهم می‌شود. همهٔ این مزایای روش مجرد در کتاب وان در واردن فراوان است. وجوه ممیزهٔ آن دقت کامل، وضوح وافر، و فهمپذیری آسان آن است. [۴، ۱۱-۱۲].

در حالی که بخش I جبر نوین اساساً به نظریه‌ها و مسائلی می‌پردازد که جبر از آن نشأت گرفته است، بخش II، که در ۱۹۳۱ منتشر شد، با پیشرفتهای بعدی آن سروکار دارد، پیشرفتی که وان در واردن در آن سهمی قطعی دارد [۷، ۳]. کتاب، از آغاز، از لوازم ضروری بوده، و سلهایی از ریاضیدانان جبر را از آن آموخته‌اند و این آموزش همچنان ادامه دارد.

در سال ۱۹۳۱ وان در واردن، که به ویژه مجذوب ورنر هایزنبرگ^{۴۵} و فریدریش هوند^{۴۶} فیزیکدان شده بود، به لایبزیگ رفت. او در گوتینگن روشهای فیزیک ریاضی را از کورانت و دانشجویانش هانس لوی^{۴۷} و کورت فریدریش^{۴۸} آموخته بود. هایزنبرگ و هوند سمینار مشترکی در لایبزیگ برگزار کردند، و وان در واردن در آنجا فیزیک آموخت. نتیجهٔ این کار، کتابی دربارهٔ روشهای نظریهٔ گروه‌ها در مکانیک کوانتومی، روشهای نظریهٔ گروه در مکانیک کوانتومی^{۴۹}، بود که در ۱۹۳۲ در برلین چاپ شد. این کتاب که مورد استقبال جامعهٔ فیزیکدانان قرار گرفت و به سرعت به فروش رفت، بعداً به انگلیسی بازنویسی شد.

همچنین، در ۱۹۳۳، «دربارهٔ هندسهٔ جبری (دهج)»^I، تعیین درجهٔ تعداد نقاط اشتراک یک چندگونای دلخواه با ابر صفحه^{۵۰} در ماتماتیکه آتالن چاپ شد. با این سری مقالات (دهج XX-I)، وان در واردن، جبری کردن هندسهٔ جبری ایتالیایی را آغاز کرد. دهج IX کاری مشترک با وای-لیانگ چاو^{۵۱} بود و یکی از پرنفوذترین نتایج چاو را در بر دارد: با هر چندگونای تصویری، یک چندجمله‌ای همگن پیوند می‌یابد به گونه‌ای که این پیوند به یک همربختی از تکوارة جمعی دوره‌های مؤثر در فضای تصویری به تکوارة ضربی چندجمله‌ایهای همگن توسیع می‌یابد؛ این پیوند با توپولوژی زاریسکی^{۵۲} سازگاری دارد (به عبارت دیگر، اگر یک دور، یک خاص‌سازی از دیگری باشد، آنگاه صورت پیوند یافتهٔ چاو نیز یک خاص‌سازی است).

45) Werner Heisenberg 46) Friedrich Hund 47) Hans Lewy 48) Kurt Friedrichs
49) Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik 50) Zur algebraischen Geometrie (ZAG) I, Gradbestimmung von Schnittmannigfaltigkeiten einer beliebigen Mannigfaltigkeit mit Hyperflächen 51) Wei-Liang Chow 52) Oskar Zariski

در مقدمه دهج IX، برهان این نتیجه به چاو نسبت داده شده است. وان در واردن کار را برای ایجاد یک نظریه عام اشتراک در دهج IX ادامه داد که این کار پژوهشهایی بیشتر درباره چندگانگیهای اشتراک به توسط پی‌یر ساموئل^{۵۳}، کلود شوالی^{۵۴}، و ژان پی‌یر سره را در پی داشت. نظرگاههایی کاملاً تازه به توسط آندره وایل، نخستین کسی که مفهوم موضعی نظریه جبری اشتراکها را تدوین کرد؛ به توسط اسکار زاریسکی، توسط چاو؛ و به توسط مکتب گروتندیک^{۵۵}، به ویژه پی‌یر دلاینی^{۵۶} [۸]، وارد مبحث شد.

خانواده وان در واردن تا سال ۱۹۴۵ در لایپزیگ ماند، آنها سپس از بیمارانهای وقفه‌ناپذیر به حومه گراتس، در اتریش، جایی که مادر کامیلا وان در واردن می‌زیست، گریختند. وقتی که امریکاییها در ژوئیه ۱۹۴۵ وارد آنجا شدند، اعضای خانواده وان در واردن به عنوان «افراد تبعیدی» قلمداد و با اتوبوس به هلند منتقل شدند. شرایط زندگی در آنجا برای آنها به دشواری گرایید زیرا هلندیها از آنها به خاطر ماندن در آلمان نازی دلگیر بودند. (با این حال، پرونده شخصی وان در واردن، که در بایگانی دانشگاه لایپزیگ نگهداری می‌شود، نشان می‌دهد که وی به طرفداری از جهودان جوان زبان به سخن گشوده است. دانشگاه در سال ۱۹۴۸ وی را به افتخار دریافت درجه دکترا نایل کرد.) وان در واردن، پس از بازگشت، هیچ نوع امکانات مالی نداشت تا اینکه هانس فرویدنتال^{۵۷} به او کمک کرد تا پستی در شل^{۵۸}، کمپانی نفتی سلطنتی هلند^{۵۹} دست و پا کند. وان در واردن در همکاری با مهندسان شل، مسائلی را در بهینه‌سازی، مبحثی که برای او بسیار لذتبخش در آمد، حل کرد.

در سال ۱۹۴۷ در ایالات متحده در دانشگاه جانز هاپکینز^{۶۰} در بالتیمور^{۶۱} پیدایش شد. وقتی هاپکینز به او پیشنهاد یک شغل دائم را کرد، او از قبول آن سر باز زد، و به جای آن پستی را در دانشگاه ولایتی آمستردام پذیرفت و پیشنهاد کرد که هاپکینز پیشنهاد را به چاو ارائه کند. وان در واردن نزدیک به ۲ سال در آمستردام ماند، در ۱۹۵۱ وی به زوریخ کوچ کرد، و تا پایان عمر همانجا ماند.

همان اوائل در ۱۹۳۸، نخستین مقاله وان در واردن در تاریخ علم، «مبادی تاریخی کسره‌های مصری»^{۶۲} در منابع و مطالعات تاریخ ریاضیات^{۶۳} [۳، ۲۴۳؛ ۱۰، ۱۸۳] منتشر شد. در زمان دانشجویی در آمستردام، از ابتدای کار از طریق درسی که به وسیله هندریک ده وریز^{۶۴} ارائه شده بود، به تاریخ ریاضیات علاقه‌ای پیدا کرده بود. در پی آن، وی اصول اقلیدس و برخی آثار ارشمیدس را خواند، و طی اولین بار اقامت موقت در گوتینگن، وی در سلسله سخنرانیهای نوینگه باوئر و نیز درس او در ریاضیات یونانی حاضر شده بود. با این حال نوینگه باوئر عمدتاً در ریاضیات مصری کار می‌کرد، از آن رو که پایان‌نامه‌اش در این

53) Pierre Samuel 54) Claude Chevalley 55) Grothendieck 56) Pierre Deligne
57) Hans Freudenthal 58) Shell 59) Royal Dutch Petroleum Company 60) Johns
Hopkins University 61) Baltimore 62) Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen
Bruckrechnung 63) Quellen und Studien Zur Geschichte der Mathematik 64) Hendrik
de Vries

مبحث بود، و وان در واردن این تحقیق را به ویژه انگیزه بخش یافت. بعداً هنگام دیدار از نویگه باوئر در کپنهاگ، شیفته تفاسیر او از نجوم بابلی شد. این علاقه جدید او طی تعطیلات او در حوالی گراتس، بر اثر مباحثاتی که با ارنست وایدنر^{۶۵} آشورشناس داشت، عمق بیشتری یافت. سرانجام در لایپزیگ، دوست خوب و همکارش هانس گتورگ گادامر^{۶۶} فلسفه دان، علاقه پیشین او به ریاضیات یونانی را از نو برانگیخت. نتیجه همه اینها، کتاب بیداری علم^{۶۷} بود که نخستین بار به زبان هلندی در سال ۱۹۵۰ به چاپ رسید. این شرح وان در واردن که بسیاری زبانها، جدیدتر از همه به فارسی در ۱۹۹۴، ترجمه شده، پاسخی به نیازهای ریاضیدانان بود که میل داشتند شناختی از ریشه های موضوع کارشان به دست آورند.

نقدهای بسیار نیکی درباره این کتاب نوشته شد. مثلاً دیرک استرویک^{۶۸} متذکر شد که: این نخستین کتابی است که بحثی کامل از ریاضیات یونانی را بر بحث مبتنی بر ریاضیات مقدم بر دوره یونانی استوار می گرداند» [۶]. استرویک به ویژه به ذکر آن جنبه های متن می پردازد که از نگاه او نوست: (۱) تحلیلی از فرضیه فرویدنتال که به عقیده او هندوان، پس از ایجاد دستگاه ددهی، دستگاه شصتگانی و صفر را به واسطه نجوم یونانی آموختند و بدین ترتیب دستگاه ارزش موضعی خود را به دست آوردند؛ (۲) استدلالهایی که نشان می دهد تالس واقعاً برهانی منطقی از چهار قضیه منسوب به او توسط اودموس^{۶۹} ارائه کرده است؛ (۳) بازسازی از نظریه فیثاغورسی اعداد بر مبنای مقاله های مختص حساب کتاب اصول اقلیدس؛ (۴) مقایسه ای از جبر هندسی اصول با متون بابلی که نشان می دهد یونانیان، به ویژه فیثاغورسیان، مطالب خود را از سنت بابلی اقتباس کرده اند؛ (۵) توضیحی از اینکه چگونه تئودوروس کورنه ای^{۷۰}، اصم بودن آنچه را که $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، ...، $\sqrt{17}$ می نامیم واقعاً نشان داده و اینکه چرا او در $\sqrt{17}$ توقف کرده است؛ (۶) شرحی از برخی نقیصه ها در تفکر منطقی آرخوتاس^{۷۱} به کمک مقالة VIII اصول؛ (۷) تفسیری از ریاضیات در کتاب پس از وفات انتشار یافته اپینومیس^{۷۲} افلاطون، بر مبنای کارهای آرخوتاس؛ و (۸) تحلیلی از مقالة X اصول که به تثایتوس^{۷۳} منسوب است.

چندین اثر دیگر از او متعاقباً انتشار یافتند. سرانجام، علائق وان در واردن به تاریخ نجوم، نجوم سنسکریت، آریه پطه^{۷۴}، و نجوم ایرانی معطوف شد. آخرین مقالة او «حرکت زهره در متون یونانی، مصری، و هندی»^{۷۵} در سال ۱۹۸۸ در سنترالوس^{۷۶} منتشر شد. در موارد زیادی، مانند روش هندیان در سده های میانی برای محاسبه مکانهای سیارات، وان در واردن نگرشهای ریاضی خود را برای توضیح آثار ریاضیدانان و منجمان باستان و سده های میانی به کار گرفت [۵، ۱۵۲-۱۵۷]. آخرین اثر او، تاریخ جبر

65) Ernst Weidner 66) Hans Georg Gadamer 67) Science Awakening 68) Dirk Struik
69) Eudemos 70) Theodoros of Kyrene 71) Archytas 72) Epinomis
73) Theaitetos 74) Aryabhata 75) The Motion of Venus in Greek, Egyptian, and Indian Texts 76) Centaurus

از خوارزمی تا امی نوتر، در سال ۱۹۸۵ منتشر شد و بیانی شخصی از بسط جبر را فراهم آورد. با شروع از خوارزمی، که کلمه «جبر» از رساله او مشتق شده است، وان در واردن بسط جبر را از دل اعصار تا دوران جدید دنبال کرد. به نظر او، جبر نوین با گالوا آغاز شده که به تحقیق در ساختار هیأتها و گروهها پرداخته و نشان داده است که این دو ساختار ارتباطی نزدیک با هم دارند. پس از گالوا، تلاشهای جبردانان برجسته عمده‌تاً به تحقیق در ساختار حلقه‌ها، هیأتها، جبرها، و امثال آنها معطوف شده است. وان در واردن، چنین تحقیقاتی را در بحثی که حدوداً دو ثلث کتاب را تشکیل می‌دهد و برخی از مساهمتهای خود را در بر می‌گیرد، تقریباً تا نیمه‌های سده ۲۰ پی می‌گیرد. تنها از عهده وان در واردن ساخته است که این شرح دل‌انگیز را به ما ارائه دهد.

پس از بازنشسته شدن از دانشگاه زوریخ، وان در واردن افتخار تأسیس موسسه‌ای برای تاریخ ریاضیات را کسب کرد و بخش اعظم کتابخانه شخصی خود را سخاوتمندانه به این موسسه اهدا کرد. وقتی در تابستان ۱۹۹۴ به دیدار او رفتم، او مرا به کتابخانه‌اش دعوت کرد و از من خواست هر چه می‌خواهم، از کتابخانه بردارم. این کتابها نه تنها مجموعه‌ای ارزشمند در کتابخانه شخصی خود من است بلکه، مهمتر از هر چیز، یادگاری گرامی از مردی فوق‌العاده مهربان و سخاوتمند است. آخرین بار وان در واردن را در فوریه ۱۹۹۵ ملاقات کردم. وی از نظر جسمی ضعیف، اما از نظر ذهنی بسیار هشیار بود و روحیه بسیار خوبی داشت. مانند همیشه، وی شنوده‌ای سراپا گوش و الهامبخش بود، و مانند همه ایام، من از بودن با او و همسرش در محیط مطبوع خانه‌شان لذت بردم. از اینکه او را می‌شناختم، احساس خوشبختی می‌کنم.

مراجع

1. Yvonne Dold-Samplonius, Bartel Leendert van der Waerden befragt von Yvonne Dold-Samplonius. *NTM (International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine)*, New Series 2 (1994), 129-147.
2. Yvonne Dold-Samplonius, Interview with Bartel Leendert van der Waerden, trans. Yvonne Dold-Samplonius and Hugo Rossi, *Notices of the American Mathematical Society* 44 (1997), 313-320.
3. Günther Eisenreich, B. L. van der Waerden's Wirken von 1931 bis 1945 in Leipzig, in *100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität, Leipzig*, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1981, pp. 218-244.

4. Hans Hahn and Olga Taussky, Review of van der Waerden's *Moderne Algebra*, Part I. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **39** (1932), Literaturberichte 11-12, reprint ed., New York: Johnson Reprint Corporation, 1958.
5. Jan P. Hogendijk, B. L. van der Waerden's Detective Work in Ancient and Mathematical Astronomy, in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4th series **12** (1994), 145-158.
6. Dirk J. Struik, Review of van der Waerden's *Ontwakende Wetenschap: Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde*, *Mathematical Reviews* **12** (1951), 381.
7. Olga Taussky, Review of van der Waerden's *Moderne Algebra*, Part II, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **40** (1933), Literaturberichte 3-4, reprint ed., New York: Johnson Reprint Corporation, 1958.
8. Bartel L. van der Waerden, The Foundation of Algebraic Geometry from Severi to André Weil, *Archive for History of Exact Sciences* **7** (1971), 171-180.
9. Bartel L. van der Waerden, On the Sources of My Book *Moderne Algebra*, *Historia Mathematica* **2** (1975), 31-40.
10. Bartel L. van der Waerden, Bibliography of B. L. van der Waerden, ed. Jaap Top and Lynne Walling, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4th series **12** (1994), 179-193.

نام و نشانی مقاله فوق به شرح زیر است:

- * Yvonne Dold-Samplonius, IN MEMORIAM, Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), *Historia Mathematica* **24** (1997), 125-130.

فهرست راهنما

- آبل، ۱۰۴، ۱۴۹، ۱۱۷-۱۲۱
 آپولونیوس پرگایی، ۷، ۱۶، ۲۱، ۹۶، ۱۰۱، ۱۰۳
 آثار نجومی ثابت بن قره، ۲۱
 آرتین، امیل، ۱۱۵، ۲۸۰
 آرخوتاس، ۵۲
 آرگان، ژان روبور، ۲۳۷، ۲۵۳
 آریهطه، ۱۶
 آریهطیه، ۷، ۱۶
 آریمتیکا، ۸۶
 آشنایی با مکانهای هندسی مسطحه و فضایی، ۹۴
 آلبرت، آ. آ.، ۲۸۳
 آنالیز جانشینی کتی، ۳۱۹
 آنتونیو ماتسینگی، ۵۶، ۵۸-۶۰
 آنتونیو ماریا فیوره، ۷۳
 آندره وایل، ۹۴
 آیشلر، م.، ۲۶۵
 آفرباخ، ه.، ۲۱۱
 ابرهم برخیا، ۵۲
 ابرلی، گ.، ۲۴۹، ۲۶۵
 ابن اثیر، ۳۱
 ابن هیثم، ۳۸
 ابوجعفر خازن، ۵۵
 ابویوسف یشوع القطعی، ۲۰
 اُبرین، ۲۵۵
 احمد جبّار، ۳۱
 ارانی، تقی، ۳۸

- ارتفاع نمایش، ۳۳۵
- ارزه‌های ارشمیدسی، ۲۸۷
- ارزه‌های هیأت‌های اعداد جبری، ۲۸۷
- ارزه‌های P -ای، ۲۸۷
- ارسطو، ۳۹، ۴۱
- ارشمیدس، ۲۱، ۵۲
- ارمیت، م.، ۱۵۲، ۱۵۵، ۱۶۶، ۲۱۱
- اسپینور π -بعدی، ۲۶۰-۲۶۱، ۳۳۹
- اسکات، ۳۰
- اسمیت، د.ی.، ۹۹
- اشپایزر، ا.، ۲۱۱
- اشتاینر، یاکوب، ۱۷۳
- اشتودی، اتوارت، ۲۴۳، ۲۵۰، ۲۵۲، ۲۷۱
- اشتیگلبرگر، ۲۰۷
- آشنايدر، ایو، ۲۳۶
- اشمیت، اوتو، ۳۲۳-۳۲۴
- اصحاب جبر، ۲۶
- اصول اقلیدس، ۴۰، ۴۴
- اصل طرد واسپین، ۲۵۹
- اصول کیهانشناسی، ۸۵
- اصل موضعی-فراموضعی هاسه، ۲۶۴، ۲۸۷، ۲۸۹
- اطولوقوس، ۲۱
- اعداد شبه صفر، ۲۷۸
- اعداد کلیفورد، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱
- اعداد کیلی، ۲۴۴
- افلاطون، ۵۲
- اقلیدس، ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۵، ۲۶، ۲۹، ۴۴، ۵۲، ۱۰۱
- اکرم، م.، ۲۱۴
- اگریمنسورس، ۵۲

الجبر و المقابله، ۲۶

الفزاری، ۱۲

القفطی، ۲۱

الکزندری، ج. ف.، ۲۹۵

النّذیم، ۲۱

انگل، فریدریش، ۱۹۶، ۲۱۴، ۲۱۷، ۲۲۱، ۲۲۳

اوکتانینون، ۲۴۳-۲۴۴

اوگوست شوالیه، ۱۴۳

اولین جبر کلیفورد، ۲۵۶

اولینده رودریگز، ۱۶۳

اولین گروه لی، ۲۶۹

اوملاؤف، آرتور، ۲۲۳

اوایلر، لئونهارت، ۳۰، ۱۳۰-۱۶۲، ۱۸۸، ۱۹۷، ۱۹۸، ۲۳۶، ۲۴۴، ۲۴۷

اهل جبر (= اصحاب جبر)، ۲۶

اتوتوکیوس، ۳۴

ایدآل پوچتوان، ۳۲۶

اتودوکسوس، ۳۹

ایوونه دولد، ۳۸

باب الوصایا، ۹

بارهه برائوس، ۲۱

بازنگری قانونمندانہ عملیات هندسی، ۸۷

بتی، ۱۵۵-۱۵۷

بحث از مشکلات اقلیدس، ۳۸

برانت، ه.، ۲۶۵

براوله، ۱۶۱

براوئر، ریچارد، ۲۵۷، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۸۹

بررسی جدولهای نجومی اسلامی، ۱۲، ۱۴

برنامه ارلانگر، ۱۹۳

برنساید، ویلیام، ۳۱۴-۳۱۵، ۳۱۷

- برنوبی، یوهان، ۲۳۶
 برهمسپهوتہ سدھانتہ، ۷، ۱۶، ۱۷
 برهمہ سدھانتہ تصحیح شدہ، ۱۳
 برهمہ گوپتہ، ۱۳، ۱۶، ۱۷
 بطلمیوس، ۱۱، ۱۳، ۲۱، ۲۲، ۲۶
 بکر، ۳۹، ۴۱
 بلیشفلت، ۲۱۱
 بنکرافت، جورج، ۲۶۹
 بنوموسی، ۲۱
 بنہ دتو، ۵۶-۵۸
 بوخنر، ۳۴۶
 بوخہایم، ۲۵۲
 بورشرت، ۱۸۵
 بورکھارت، ه.، ۱۳، ۱۵، ۱۶۲، ۱۶۸، ۱۸۵
 بومبلی، ۲۳۵
 بونکومیانی، ۱۱، ۴۶، ۵۱
 بوهر، ہارال، ۳۴۵-۳۴۶
 بویوئی، ۱۹۱
 بہاسکرہ، ۷
 بہ طور موضعی حلپذیر، ۲۶۴
 بہ طور موضعی یکریخت، ۲۱۷، ۲۲۰
 بیادجو، ۵۶
 بیبرباخ، ل.، ۲۱۱
 بشر، راینہولت، ۲۸۱
 پاپوس، ۱۰۱
 پارامتر سهمی، ۳۳
 پاش، ۲۵۲
 پتانسیل نیوتونی، ۲۰۷
 پترسن، م. ج.، ۱۸۷

پراکتیکا گنومتریا، ۴۴، ۵۱-۵۲

پرنیکییا، ۲۵۳

پروکلوس، ۲۰، ۲۱

پلاتوی تیولایی، ۵۲

پواسون، ۱۴۶

پوانکاره، آنری، ۱۵۵، ۱۵۶، ۲۶۹

پوییزو، ۱۵۲-۱۵۵

پوچ-ایدآل، ۲۸۰

پوچتوان، ۲۷۰، ۳۲۰

پونتریاگین، ل.، ۲۹۵-۲۹۷

پونسله، ۱۹۰

پیچ، م.، ۲۲۱

پیرس، بنجامین، ۲۶۹-۲۷۱

پی‌یر دو فرما، ۹۴-۹۹

پی‌یرو دلا فرانچسکا، ۶۶

تابر، ۲۵۲

تابع تتا، ۲۴۸

تابع گاما، ۲۰۸

تار تاگلیا، ۶۳، ۷۰، ۷۴-۷۶، ۱۰۴

تاریخ یزدگردی، ۱۵

تبدیلات بینهایت کوچک، ۲۱۵-۲۱۹، ۲۲۷، ۲۶۰، ۲۶۹، ۳۳۴، ۳۳۹، ۳۴۳، ۳۴۵

تبدیل لورنتس، ۲۵۹

تجزیه راست و چپ پیرس، ۲۷۰

تحقیقات حسابی، ۱۲۴

تحقیق هندسی صحت حل معادلات درجه دوم، ۲۲

ترسیمهای گرایشی، ۸۷

ترفند یکانی، ۳۴۳، ۳۴۴

تروپفکه، ۴۸، ۹۳

تصویر گنجنگاشتی، ۱۹۴

- تضعیف مکعب، ۳۴، ۵۲
- تقویم اعتدالین، ۲۲
- تناسب مسلسل، ۳۳
- توابع تقریباً متناوب، ۲۹۶، ۳۴۵، ۳۴۷
- توسیع نامنشعب، ۲۸۶
- توسیع نرمال تفکیکپذیر، ۲۶۵
- تومر، ۳، ۱۲، ۱۳، ۱۷
- تئودوروس، ۴۴
- ثابت بن قره صرافی، ۳، ۱۹-۳۱
- ثرلفال، و، ۲۱۲
- جان پالرمویی، ۴۴
- جبر ارث، ۹
- جبر انتگرالپذیر لی، ۲۲۱
- جبر تعمیم یافته کلیفورد، ۲۶۲
- جبر تقسیمی، ۲۶۲، ۲۶۷، ۲۸۲، ۲۸۴
- جبر تقسیمی نرمال، ۲۸۹
- جبر تمام-ماتریسی، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۹، ۲۶۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۹۹
- جبر حلپذیر لی، ۲۲۶
- جبر دوری، ۲۶۲
- جبر ساده، ۲۷۵، ۲۷۸-۲۷۹
- جبر ساده لی، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۳۱، ۳۳۳، ۳۳۶، ۳۴۰
- جبر ساده نرمال، ۲۸۲، ۲۸۵
- جبر شوالی، ۲۶۲
- جبر عمر خیام، ۳۱-۳۳
- جبر کاملاً تحویلپذیر، ۲۵۳
- جبر کواترنیونها، ۲۶۷، ۲۷۳
- جبر کواترنیونهای تعمیم یافته، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۵
- جبر گراسمان، ۲۵۶، ۲۶۲
- جبر گروهی، ۲۵۲، ۳۰۲، ۳۰۸، ۳۱۵، ۳۲۰، ۳۳۱-۳۳۲

جبر نیمساده، ۲۶۲، ۲۷۸-۲۷۹، ۳۰۷

جبر نیمساده لی، ۲۷۶

جبر لی، ۲۱۶، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۴، ۲۲۶، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۶۰، ۳۳۷، ۳۴۲، ۳۴۳

جبر و مقابله، ۴-۶

جبرهای ساده حقیقی لی، ۲۳۱

جدول سینوس خوارزمی، ۱۲

جدولهای خوارزمی، ۱۴

جدولهای سهل الاستعمال، ۱۲، ۱۳

جدولهای نجومی، ۱۲-۱۳

جدول یانگ، ۳۱۹، ۳۲۱

جغرافیا، ۱۱

جمشید بن مسعود کاشانی، ۴۵

جیکوبسن، نیتن، ۲۸۱

جینو آریگی، ۶۶

حاصلضربهای خاجی، ۲۶۵، ۳۴۷

حاصلضربهای خارجی، ۲۵۵

حجاج بن یوسف بن مطر، ۱۸، ۲۶

حرکتهای اقلیدسی، ۲۵۰

حرکتهای هذلولی، ۱۹۳

حساب توسیع گراسمان، ۲۵۳-۲۵۴

حساب عملی، ۴۳

حلالهای لاگرانژ، ۱۰۶

حلقه تقسیمی، ۲۸۳، ۲۸۴

حلقه تمام-ماتریسی، ۲۵۱، ۲۸۶، ۳۲۹

حلقه ساده، ۲۸۰، ۲۸۱

حلقه ساده کاملاً تحویلپذیر، ۳۲۶

حلقه کواترنیونها، ۲۵۰

حلقه نیمساده، ۲۸۰، ۲۸۲، ۳۲۹

حلقههای کاملاً تحویلپذیر، ۳۲۶، ۳۲۸

حل معادله‌های درجه دوم، ۹-۱۱

حل معادله‌های درجه سوم و چهارم، ۷۰-۸۴

خاخام نه‌می‌ا، ۸

خوارزمی، ۳-۱۹، ۲۶، ۵۰

خوارزمی، درباره تقویم یهود، ۹

خوارزمی، مخالف نفوذ یونانی، ۱۸

خمینه، ۲۱۵

خودتوان، ۲۷۰، ۳۱۹

داردی پیسایی، ۶۳-۷۰

دالامبر، ۱۳۰

دانتیش، داوید وان، ۲۸۷

دانت، ۴۴

دایک، والتر وان، ۱۸۳، ۱۹۷، ۲۰۲-۲۰۵، ۲۰۶

دایرة المعارف اسلام، ۱۸

دترمیان گروهی، ۲۹۷-۲۹۸، ۳۰۰، ۳۰۲، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۴

دکیند، ریشارد، ۲۱۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۷، ۳۱۰، ۳۱۳، ۳۳۱

در باب اصلاح معادلات، ۸۹

در باب شناسائی معادلات، ۸۹

درباره ارقام هندی، ۱۱

درباره اعداد متحاب، ۲۶، ۳۰

درباره تقویم یهود، ۸-۹

درباره حرکت فلک هشتم، ۲۱، ۲۲

درباره دژهای نیرومند، ۹۲

درباره فن حساب هندی، ۱۱

درباره گروههای حرکته‌ها، ۱۶۰-۱۶۳

درباره گروههای حلپذیر، ۱۷۹-۱۸۰

درباره مساحی، ۶

درباره همنهشتیه‌ها، ۱۶۳

دستگاه بسته تبدیلات، ۱۹۳

- دستگاه کواترنیونی، ۲۷۲-۲۷۳
- دستگاههای غیرکواترنیونی، ۲۷۲-۲۷۳
- دستگاه همراه، ۲۷۴
- دکارت، رنه، ۲۳۵
- دگن، ۲۴۵
- دوکواترنیون، ۲۵۰، ۲۷۱
- دوران کیلی-کلاین، ۲۴۷
- دوسگیه، ۱۶۷
- دوماور، آبراهام، ۲۳۶
- دومینکوس، ۴۴
- دومین جبر کلیفورد، ۲۵۶
- دومین گروه لی، ۲۶۹
- دویرینگ، ماکس، ۲۶۵، ۲۸۰، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۸
- دیراک، پ. ا. م.، ۲۵۷-۲۵۸، ۲۶۰
- دیریکله، لوژون، ۲۹۱، ۲۹۳
- دیکسن، لنرد یوجین، ۲۴۸، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۷۸
- دیودونه، ۱۶۷
- دیوفانتوس، ۱۷، ۴۸، ۸۶، ۹۳
- ذوالاسمین، ۷۳
- رادیکال، ۲۷۹-۲۸۱، ۳۲۹-۳۳۲
- رادیکال جیکوبسن، ۲۸۲
- رافائل بومبلی، ۸۰-۸۴
- رُدریگس، آلینده، ۱۸۸
- رَدۀ براونر، ۲۸۶
- رساله تحلیلی درباره معادلات درجه پنجم، ۱۱۱
- رشدی راشد، ۳۱
- رصدخانه در اسلام، ۳۱
- رنه دکارت، ۹۹-۱۰۳
- روابط تعامد، ۳۰۳

- رو، دیوید ا.، ۱۹۳
- روزن، ۴، ۹
- روش ایرانیان، ۱۳-۱۶
- روش بینهایت کوچک، ۳۳۶، ۳۴۲
- روش خطأین، ۴۵
- روش فراموضعی، ۳۳۴-۳۳۶
- روش نزول نامتناهی لاگرانژ، ۲۶۴
- روش هندیان، ۱۵
- روش هورنر، ۴۵
- روفینی، ۴۵، ۱۰۴، ۱۱۴-۱۱۶، ۱۲۰، ۱۸۴
- ریچاردسن، آ. ر.، ۳۲۱، ۳۳۴
- ریگاتلی، ۶۰، ۱۱۲
- زایفرت، ه.، ۲۱۲
- زومر فلد، ۲۴۷
- زیبین، ل.، ۲۲۰
- زیج خوارزمی، ۱۲
- زیج شاه، ۱۳، ۱۵
- ژاکوبی، ۲۱۶
- ژوردان، کامیل، ۱۵۷، ۱۵۸-۱۸۰، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۸، ۲۱۰، ۲۱۲
- ژیزار، آلبر، ۲۳۵
- ساده-همبند، ۳۴۴
- سرشت، ۲۷۷، ۲۹۳
- سرشت رده‌ای، ۲۹۳
- سرشتهای گروهی، ۲۹۰، ۲۹۳، ۳۰۰، ۳۰۴، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۷، ۳۲۱
- سرشتهای گروههای آبلی، ۲۹۰-۲۹۳
- سره، ۱۵۳-۱۵۵
- سره، ژ. آ.، ۱۸۵
- سری ترکیبی، ۲۰۹، ۲۲۱، ۲۷۲، ۲۷۹
- سری فیوناتچی، ۴۸

سن-ونان، ۲۵۵

سند هند، ۱۳

سوتر، هاینریش، ۱۲، ۱۴، ۲۱

سیمون استوین، ۹۲-۹۴

سیلو، م. ل.، ۱۸۵، ۱۸۶-۱۸۷، ۲۰۷

شرایر، اوتو، ۲۰۹، ۲۱۵

شرط زنجیر نزولی، ۲۸۰-۲۸۱

شرط هولدر، ۲۰۸

شرینگ، ارنست، ۱۹۹

شفرز، گتورگ، ۲۷۲-۲۷۳، ۲۷۹

شوارتس، هرمان آماندوس، ۲۷۱

شوالی، کلود، ۲۴۴، ۲۶۱

شور، ایسانی، ۳۱۶، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۳۴، ۳۳۶

شور، ف.، ۲۱۹، ۲۲۰

شونفلیس، ۱۶۲

شیپونه دل فرو، ۶۳، ۷۰، ۷۱-۷۴، ۱۰۴

صابیان، ۱۹-۲۰

صابیان و گرایش صابئی، ۱۹

صابیلی، ۳۱

صورت الارض (= جغرافیا)، ۱۱

طوبیقا، ۳۹

عمر خیام، ۳، ۳۱-۴۲

عمر خیام و نسبتها، ۳۸

فاولر، ۳۹

فرانجی، ۵۵، ۵۶، ۶۰، ۱۱۲

فرانسوا ویت، ۸۵-۹۲

فرما، ۳۰

فرم ارمیتی مثبت، ۲۱۱، ۳۱۶، ۳۴۳

فرم اصلی، ۱۹۹

فرم اولیه، ۱۹۸، ۲۹۰

فرم اشتقاقی جبر، ۲۷۴

فرم درجه دوم، ۲۲۹، ۲۶۲-۲۶۴، ۲۹۰، ۲۹۴، ۳۴۰

فرم قطبی، ۱۸۹، ۲۷۵

فرم نرمال زوردان، ۲۲۵، ۲۵۱، ۲۵۲

فروبنیوس، گ، ۱۸۵، ۱۸۸، ۲۰۷، ۲۱۱، ۲۵۲، ۲۹۳، ۲۹۷، ۲۹۹-۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۶، ۳۲۱

فروشت، ر، ۳۲۳

فرم هموردا، ۱۸۸

فرویدنتال، ه، ۱۹۶، ۲۲۸، ۳۴۵، ۳۴۸

فریکه، ر، ۱۹۴

فضای تانسوری، ۳۳۵

فلک تدویر، ۱۴

فلوس، ۴۴، ۵۳

فن حساب محمد بن موسی خوارزمی، ۱۱

فن کبیر، ۷۵، ۷۶، ۷۹

فوس، پ. ه، ۲۴۴

فوگل، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۵۱، ۵۶

فون فدوروف، ۱۶۲

فونویمان، جان، ۲۹۵، ۲۹۶-۲۹۷، ۳۲۱

فهرست التّدیم، ۲۰

فیونانچی، ۴۲، ۴۳

فیتز جرالده، ۳۱

فیثاغورسیان، ۱۹-۲۰

فیلون بیزانسی، ۵۲

قانون قدرمطلقها، ۲۳۹-۲۴۴

قرآن کریم، ۱۹

قربانی، ابوالقاسم، ۳۸

قضیه اساسی جبر، ۲۳۶

قضیه باشه، ۲۴۷

قضیه ژوردان-هولدر، ۲۰۹، ۳۲۴

قضیه کازوراتی-وایرستراس، ۲۰۸

کاربرد قوانین ریاضی در مثلثات و پیوستها، ۸۵

کارتان، الی، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۶، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۶۰، ۲۷۱، ۲۷۶-۲۷۸، ۲۷۹، ۳۱۶،

۳۳۳، ۳۳۴-۳۳۸، ۳۴۲، ۳۴۵

کاردانو، ۶۳، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۴-۸۰، ۸۲، ۹۱، ۱۰۴

کارمودی، ۲۱

کارنو، ۱۱۵

کازوری، ک.، ۴۶

کاکستر، ه. س. م.، ۲۳۱

کتاب سه قسمتی شرح اسطرلاب، ۹۳

کرجی، ۴۸

کرول، ولفگانگ، ۳۲۳

کرونکر، لئوپولد، ۱۲۱، ۱۸۳، ۱۹۷-۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۶

کلاویوس، ۹۳

کلاین، فلیکس، ۱۸۸، ۱۹۲، ۱۹۳-۱۹۴، ۱۹۵، ۲۰۲، ۲۴۶، ۲۶۰، ۳۱۶

کلبش، آلفرد، ۱۶۶، ۱۷۰

کلیفورد، ویلیام کینگدون، ۲۵۰، ۲۵۶

کمین، ا. ر. ون، ۲۹۵، ۲۹۷

کمدی الهی، ۴۴

کمیت‌های گنگ فرعی، ۲۰۸

کندی، ۱۲، ۱۳، ۱۴

کنکه، ۱۳

کوته، گونفریت، ۲۸۰-۲۸۳

کورت فوگل، ۱۱

کوشی، ۱۰۴، ۱۱۵، ۱۱۶-۱۱۷

کواترانیون، ۲۳۷، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۶، ۲۶۳، ۲۶۴

کوتس، راجر، ۲۳۶

کولبروک، ۷، ۱۷

- کومر، ۱۷۰
- کوولسون، ۱۹، ۲۰، ۲۱
- کوهن، م، ۲۱۶
- کرکمان، ۱۶۷
- کیلی، آرثر، ۱۷۱، ۱۸۳، ۱۸۸-۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۶
- کیلینگ، ویلهم، ۲۲۱، ۲۲۲-۲۲۳، ۲۲۶، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۷۵
- گالوا، ۱۰۴، ۱۲۱، ۱۴۰-۱۵۷، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۹۵
- گانتز، سولومون، ۶، ۹، ۱۸، ۲۶
- گائوس، کارل فریدریش، ۱۰۴، ۱۰۹، ۱۲۲-۱۴۰، ۱۵۰، ۱۹۸-۱۹۹، ۲۳۷، ۲۷۱، ۲۹۰-۲۹۳
- گایزر، ۱۷۶
- گراردوی کرمونایی، ۴۲، ۵۲
- گراسمان، هرمان گونتر، ۲۵۳-۲۵۵
- گروس، ه، ۲۴۹
- گروه آبلی، ۱۶۷
- گروه آزاد، ۲۰۳
- گروه الحاقی، ۲۲۳، ۲۲۴
- گروه براونر، ۲۸۳
- گروه بسته، ۳۲۲
- گروه تبدیلات خطی کسری، ۲۰۴، ۲۱۲
- گروه توپولوژیک فشرده، ۲۹۶
- گروه توپولوژیک همبند، ۲۱۳
- گروه «پارامتری لی، ۲۶۹
- گروه جانشینها، ۱۸۳، ۱۸۴-۱۸۵، ۲۰۲
- گروه چندگانه تریایا، ۱۸۶
- گروه خطی خاص، ۲۶۰، ۳۳۶، ۳۴۲
- گروه دایل، ۲۲۹-۲۳۱
- گروه ساده لی، ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۷۶
- گروه سرشتی، ۲۹۵-۲۹۶، ۳۱۰
- گروه سیمپلیکتیک، ۲۰۰، ۲۲۱، ۳۳۴، ۳۴۳

- گروه غیراولیه، ۲۱۱
- گروه فراموضعی لی، ۲۱۹
- گروه فشرده لی، ۲۱۱، ۲۳۱، ۳۴۲
- گروه گالوا، ۱۸۷، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۹، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۸۶، ۲۸۷
- گروه گسسته، ۱۹۴
- گروه لورنتس، ۲۵۹
- گروه لی، ۱۹۵، ۲۱۳، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۳، ۲۷۲، ۲۷۵، ۳۳۳
- گروه متعام تصویری، ۲۱۲، ۲۲۱، ۳۳۴
- گروه متعام حقیقی، ۲۶۰
- گروه نیمساده لی، ۲۲۶-۲۲۹، ۳۱۶، ۳۴۴، ۳۴۵
- گروه یکانی تصویری، ۲۱۲
- گروهها با عملگرها، ۳۲۳-۳۲۴
- گروههای آبلی، ۱۹۹، ۲۰۰
- گروههای اشتاینر، ۱۶۷
- گروههای تبدیلات، ۱۸۳، ۱۸۸، ۱۹۴، ۲۱۴، ۲۱۷، ۲۲۰، ۲۲۳
- گروههای تحت آبلی، ۱۶۷
- گروههای توپولوژیک، ۲۲۰، ۳۴۸
- گروههای پیوسته، ۱۹۳، ۱۹۶، ۲۱۳، ۲۱۴
- گروههای خطی تصویری، ۲۲۱، ۳۳۴
- گروههای خطی منتهای، ۲۱۰-۲۱۲
- گروههای ساده، ۲۰۹، ۲۲۳
- گروههای کاملاً تحویلپذیر، ۳۲۴
- گروههای منتهای، ۲۰۶-۲۰۷، ۲۰۹، ۲۲۰
- گروههای همیلتنی، ۳۰۰
- گروه یکانی خاص، ۲۶۰
- گرینس، ج. ه.، ۳۲۰
- گریفیث، ۲۶۵
- گریوز، جان، ۲۳۹-۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۴-۲۴۵
- گفتار در روش، ۹۹

گلدباخ، ۲۴۴

گودل، کورت، ۲۱۰

گورسا، ا.، ۲۱۲

لاتیمر، ۲۶۴

لاگر، ا.، ۲۵۲

لاگرانژ، ژوزف لویی، ۱۰۴، ۱۰۸-۱۱۱، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۲۰، ۱۲۴، ۱۴۰، ۱۴۶، ۱۸۴، ۲۴۷، ۲۶۴

لباچسکی، ۱۹۱

لبگ، ۱۰۶

لژاندر، آدرین ماری، ۲۴۵، ۲۶۳-۲۶۴

لوتیسکی، یاکوب، ۲۸۱

لودویکو فراری، ۶۳، ۷۶

لوکا پاچولی، ۴۲، ۶۲-۶۳

لوکی، ۲۲، ۲۶، ۴۵

لوی، ا.، ۲۱۱

لیبر آباکی، ۴۳، ۴۴، ۴۶، ۵۱*

لیبر امبادوروم، ۵۳

لیبر کوادراتوروم، ۴۴

لیشیتس، ر.، ۲۵۶، ۲۶۱

لیتلود، د. ا.، ۳۲۱، ۳۳۴

لی، سوفوس، ۱۹۳-۱۹۴، ۱۹۵-۱۹۶، ۲۱۳-۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۸، ۲۶۰، ۲۷۲

لئوناردوی پیسای، ۴۲

لیوویل، ۱۴۰

لیوهوی، ۷

ماتریس دیراک، ۲۵۹

ماتریسهای اسپین بازلی، ۲۵۸

ماتیو، ا.، ۱۶۶، ۱۸۵-۱۸۶

مابر، آریستید، ۸

ماشکه، هاینریش، ۳۱۶

مالفاتی، ۱۰۴، ۱۱۲-۱۱۴

- مأمون خلیفه، ۴، ۵-۶، ۱۱، ۱۸
 ماندایی‌ها، ۱۹
 مایه، ۱۸۵
 متریکا، ۱۸
 متریک فیثاغورسی، ۳۴۰
 متمم هندسه، ۸۷
 مجتمع، ۲۷۸
 مجسطی، ۱۲، ۱۶
 مجموعه شرطی-مفترده، ۳۴۶
 مجموعه عاملی، ۲۶۶، ۳۲۲
 مجموعه متعامد کامل، ۲۹۶، ۳۴۴
 محمد بن لیث ابوالجود، ۳۸
 محمد بن موسی شاکر، ۲۱
 مختصر من حساب الجبر والمقابلہ، ۶
 مدول ساده (تحوینا پذیر)، ۲۸۱
 مدخل فنون تحلیل، ۸۶
 مرسن، ۹۵
 مسعودی، ۱۹
 مسلمة بن احمد مجریطی، ۱۲
 مصاحب، ۳۱
 معادله آنومالی، ۱۴
 معادله دایره بری، ۱۰۵
 معادله های کلبش، ۱۷۰
 معادله لایلاس، ۲۰۷
 معادله مرکز، ۱۴
 مک دافی، ۲۵۱
 منابع خوارزمی، ۱۶-۱۹
 منایخموس، ۳۴
 منکه، ۱۳

- مور، ا. ه.، ۲۱۱، ۳۱۶
- مولین، تنودور، ۲۵۲-۲۵۳، ۲۷۳-۲۷۶، ۲۷۸، ۲۷۹، ۳۱۱، ۳۱۴-۳۱۶، ۳۳۱
- مونتگومری، د.، ۲۲۰
- میانگین راست (چپ)، ۳۴۶
- میچل، ه. ه.، ۲۱۲
- میشانات هلمیدوت، ۶، ۷، ۸، ۱۸
- میکائل اسکوتوس، ۴۴
- میل دایرة البروج، ۲۲
- میلر، ۱۸۵
- نامه به تنودوروس، ۵۳
- تو، ۱۸۵
- نسبیت عمومی، ۲۲۹
- نسوی، ۴۹
- نصیرالدین طوسی، ۴۱
- نظریة الکترون چرخان دیراک، ۲۵۸-۲۶۰
- نظریة جبری اسپینورها، ۲۴۴، ۲۵۵
- نقاط مستدیر، ۱۹۰
- نماد لژاندر، ۲۹۱
- نمایش تحویلناپذیر، ۳۰۶، ۳۱۳، ۳۲۱، ۳۲۹، ۳۳۸، ۳۴۰، ۳۴۲
- نمایش تحویلناپذیر جبر گروهی، ۳۰۱
- نمایش تصویری، ۳۲۲
- نمایش دومقداری فراموضعی، ۲۶۰
- نمایش کراندار تحویلناپذیر، ۲۹۶، ۳۴۷
- نمایش مطلقاً تحویلناپذیر، ۳۳۰
- نمایش منظم جبر، ۲۶۸
- نمایش منظم گروه، ۳۱۵
- نمایشهای اسپینوری، ۳۳۹، ۳۴۴
- نمایشهای تانسوری، ۳۳۹
- نمایشهای تحویلپذیر، ۳۲۷

- نمایشهای فراموضعی، ۳۳۹، ۳۴۳، ۳۴۴
 نوتر، امی، ۲۶۵، ۲۸۰-۲۸۱، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۸۹، ۳۲۳، ۳۲۸
 نورث، د.، ۱۸۸
 نوگه باوتر، ۱۳، ۲۱، ۹۶
 نوینشواندر، ا.، ۲۰۸
 نویمان، جان فون، ۳۴۴-۳۴۸
 نه باب در فن حساب، ۴۵
 نیدهام، ۴۵
 نیکو ماخوس، ۲۱
 واردن، ب. ل. وان در، ۲۲۸
 وارن، جان، ۲۳۷، ۲۴۰
 وارن وان اخمونت، ۴۲، ۶۳
 والین، ۲۶۵
 والیتیرا، ه.، ۲۱۲
 واندرموند، ۱۰۴، ۱۰۵-۱۰۸، ۱۲۴
 وایرستراس، کارل تئودور، ۱۶۶، ۲۰۷-۲۰۸، ۲۷۱
 وایل، هرمان، ۲۲۸، ۲۳۱، ۲۵۷، ۲۶۰، ۲۶۱، ۳۳۴، ۳۴۰-۳۴۳
 وبر، هاینریش، ۱۹۷، ۲۰۵-۲۰۶، ۲۹۳
 ویکه، ۳۱، ۳۸
 ودرین، مکلاگان، ۲۶۲، ۲۶۷، ۲۷۰، ۲۷۵، ۲۷۸-۲۸۰، ۲۸۴
 ورینگ، ۱۰۴-۱۰۵
 وزن، ۳۳۸
 وسل، کاسپار، ۲۳۷، ۲۵۳
 ونکوف، ب.، ۲۶۴
 ووسینک، ه.، ۱۸۳، ۱۹۶
 ویدمان، ۱۸
 ویر، ۲۵۲
 وینتر، ۳۱
 هار، آ.، ۲۹۵-۲۹۶

هارون الرشید، ۱۸

هاسه، هلموت، ۲۶۴-۲۶۵، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۸۹

هانکل، هرمان، ۱۸، ۲۵۴-۲۵۵

هاوکینز، ۱۶۶، ۲۷۵، ۲۹۷، ۳۰۰، ۳۱۱، ۳۱۴، ۳۱۶

هرمان، ر، ۲۱۴

هرون اسکندرانى، ۷، ۱۸، ۵۲

هسه، ۱۶۹

هماهنگی افلاک، ۸۵

هميلتن، ويليام راوثن، ۲۳۷-۲۴۳، ۲۴۵، ۲۵۰، ۲۵۴

هسته گروهی لی، ۲۱۹

هندسه، ۹۹

هندسة نااقلیدسی، ۱۸۸-۱۹۳

هندسة وضعی، ۲۲۰

هنسل، کورت، ۲۸۵

هوروتیس، آدولف، ۲۱۱، ۲۳۹، ۲۴۵، ۲۴۸، ۲۴۹

هولدر، اتو، ۱۶۴-۲۰۷، ۲۱۰

هیأت P -ای، ۲۸۵

هیأت اریب، ۳۲۴

هیأت رده‌ای، ۲۸۷

هیأت شکافنده، ۲۶۶

هیأت شکافنده تفکیک‌پذیر، ۲۸۳

هیأت گالوا، ۱۹۷، ۲۵۴، ۲۸۵

هیأت‌های عددی P -ای، ۲۶۴

هیأت‌های عددی p -ای، ۲۶۴

هیأت‌های اریب متناهی، ۲۸۵

هیأت‌های عددی جبری، ۲۶۴

هیأت‌های گالوا، ۱۴۹-۱۵۵

هیپوکراتس خیوسی، ۳۴

یامبلیخوس، ۱۹

یانگ، آ.، ۳۲۰-۳۲۱

یزدگرد، ۱۲

یعقوب بن طارق، ۱۳

یوردانوس دو نموره، ۵۲

یوشکویچ، ۳۸، ۴۰، ۴۱

انتشارات مبتکران، ناشر برگزیده سال ۱۳۷۵

تاریخ جبر وان در واردن

بسط تاریخی معادلات جبری، گروهها و جبرها موضوع اصلی این نوشتار مهم درباره تاریخ ریاضیات است.

نظریه معادلات جبری در کارهای اواریست گالوا، که بنیانگذار نظریه گروهها نیز هست، به اوج خود رسید. بعداً، ویلیام راون همیلتن، نظریه جبرها یا دستگاههای عددی ابر مختلط را پایه ریزی کرد. این پیشرفتهای پیاپی آنها در این کتاب، درست تا زمان معلم خود مؤلف، امی نوتر، دنبال شده است. فصلهای به ویژه جالب توجه، فصلهای مربوط به جبر در ایتالیا، گاوس، گالوا، همیلتن و امی نوتر هستند.

مبتکران

تهران، انتهای خیابان طالقانی، کوچه طباطبایی مقدم

بلاک ۳۹ طبقه اول، کدپستی: ۱۵۶۱۹ تلفن: ۷۶۲۸۲۳

دورنویس: ۷۶۷۵۶۴

ISBN 964-486-023-3



9 789644 860232