ریاضیات است که ما را انتخاب می‌کند*

میخائیل گلفاند

یوری منین، ریاضیدان روس، از ریاضیدانان برجستهٔ معاصر است که دستاوردهای مهمی به‌خصوص در هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، و فیزیک ریاضی دارد. وی پس از بازنشستگی از کار در مؤسسهٔ ریاضی ماکس پلانک در بُن، در حال حاضر استاد ریاضیات دانشگاه نورث وسترن در آمریکا و در عین حال، پژوهشگر ارشد مؤسسهٔ ریاضی استکلف در مسکو است. از ویژگیهای اندیشهٔ منین، علائق و دیدگاه فرهنگی گستردهٔ اوست که از قلمرو ریاضیات فراتر می‌رود و ریاضیات را هم جزئی از یک کلِ منسجم، یعنی فرهنگ بشر، می‌داند. این دیدگاه، از جمله، در کتابی از او با عنوان ریاضیات همچون استعاره (*Mathematics as Metaphor*) بازتاب یافته است. وی همچنین صاحب آثار توصیفی فراوان در زمینه‌های متنوعی از منطق ریاضی تا فیزیک نظری است.

قبلاً هم (در شمارهٔ اسفند ۱۳۷۷ نشر ریاضی) ترجمهٔ مصاحبه‌ای با منین در مجله چاپ شده بود. کلمهٔ «دیگر» در عنوان این مصاحبه اشاره به آن است.

مصاحبه‌کننده، میخائیل گلفاند، معاون علمی مؤسسهٔ «مسائل انتقال اطلاعات خارکویچ (A. A. Kharkevich)» در آکادمی علوم روسیه است.

گلفاند: آیا اسلوبِ پژوهش ریاضی در پنجاه سال گذشته تغییر کرده است؟

منین: در سطح فردی یا اجتماعی؟

گلفاند: هردو

منین: به‌نظر من، امروز ریاضیدانها همان‌طور پژوهش می‌کنند که ۲۰۰ سال پیش می‌کردند. علتش تا حدودی این است که ما ریاضیات را به‌عنوان حرفهٔ خود انتخاب نمی‌کنیم، بلکه ریاضیات است که ما را انتخاب می‌کند، و انتخاب‌شدگان نوع خاصی از اشخاص هستند که در هر نسلی در سراسر جهان بیش از چندهزار نفر نیستند و همگی مهر و نشان آن نوع خاص را بر پیشانی دارند.

اما روال کار در سطح اجتماعی تغییر کرده است، به این معنا که نهادها و مؤسساتی که ریاضیدانها در آنها به‌کار تحقیق می‌پردازند تغییر کرده‌اند. این تحول نامعمول نبوده است. در دورهٔ نیوتن، و بعد لاگرانژ و غیره، آکادمیها و دانشگاهها در حال شکل‌گیری بودند؛ ریاضی ورزان آماتور که زمانی به مطالعهٔ کیمیاگری یا اختر بینی می‌پرداختند، به‌همان روش سابق، یعنی از طریق مکاتبه، افکار علمی را مبادله می‌کردند و به این ترتیب، روابط و نهادهای اجتماعی را پایه‌ریزی کردند (از عهد باستان صرف‌نظر می‌کنم که رشد طبیعی آن در اروپا در طی هزارهٔ اول مسیحیت متوقف ماند). بعد مجلات علمی وارد عرصه شدند. همهٔ اینها تا ۳۰۰ سال پیش استقرار یافتند. در نیمهٔ دوم قرن بیستم، ظهور رایانه به تکامل این جریان کمک کرده است.

گلفاند: ولی آیا از زمان نیوتن و لاگرانژ تا نیمهٔ دوم قرن بیستم هیچ اتفاق مهمی نیفتاده است؟

منین: نه. این نظام اجتماعی ــ آکادمیها به‌اضافهٔ دانشگاهها به‌اضافهٔ مجله‌ها ــ تثبیت شد و اندک‌اندک به‌شکلی درآمد که امروز می‌بینیم. مثلاً اولین جلد مجلهٔ کرله (مجلهٔ ریاضیات محض و کاربردی) را که در ۱۸۲۶ انتشار یافت درنظر بگیرید. این مجله هیچ فرقی با یک مجلهٔ امروزی ندارد. در آنجا مقالهٔ آبل دربارهٔ حل‌ناپذیری معادلهٔ کلی درجهٔ پنجم به بالا به‌وسیلهٔ رادیکالها چاپ شده است. مقاله‌ای بسیار عالی! من به‌عنوان عضو هیأت ویراستاران کرله حتی امروز این مقاله را با خرسندیِ زیاد می‌پذیرفتم.

اما در چند دههٔ گذشته نحوهٔ ارتباط بین جامعه و ریاضیدانان حرفه‌ای تغییر کرده است. این ارتباط امروز از طریق جماعت رایانه‌چی و افراد دوروبر آنها، مانند مسؤولان روابط عمومی و نظایر آنها، برقرار می‌شود که به‌خاطر روشهای جدید تأمین منابع مالی برای کارمان ــ پژوهانه‌ها، طرح‌واره‌ها، و غیره ــ به آنها نیازمندیم. این موضوع در ریاضیات، غریب می‌نماید. شما باید اول بنویسید که کاری که می‌کنید دقیقاً چیست که آنقدر اهمیت دارد، و بعد از انجام کار

گزارشی از آنچه کرده‌اید بنویسید.

گلفاند: یکی از شاگردان کانتورویچ می‌گفت که کانتورویچ در یک گزارش وسط سال با لحن جدی نوشته است: «۵۰ درصد قضیه ثابت شده است».

منین: در انستیتوی ریاضیات مسکو روال مشخصی وجود داشت: من باید می‌نوشتم که مشغول برنامه‌ریزی برای اثبات قضایایی هستم، قضیه‌هایی که در واقع در سال قبل ثابت کرده بودم. آن وقت یک سالِ کامل وقت برای ادامهٔ کار داشتم.

اما این چیزها هیچ اهمیتی ندارد. مادامی که ریاضیاتْ ما را انتخاب می‌کند و تا وقتی که امثال گریگوری پرلمان و الکساندر گروتندیک یافت می‌شوند، ما ایده‌آلهای خود را به‌خاطر خواهیم داشت.

گلفاند: بله، این موضوعِ پژوهانه در ریاضیات خیلی غریب است. ولی اگر پژوهانه‌ای در کار نباشد، چه سازوکار دیگری ممکن است وجود داشته باشد؟

منین: مگر ما به چه چیزی نیاز داریم؟ حقوق برای افراد و بودجه برای مؤسسه. من از این خوش اقبالی برخوردار بوده‌ام که در ازای دریافت حقوق کار می‌کرده‌ام، نه فقط در مسکو بلکه همچنین به‌مدت پانزده سال در بن. هیچ چیز بدی در این نمی‌بینم.

ولی اینکه سازمانهایی که این حقوقها و بودجه‌ها را تأمین می‌کنند تصمیم گرفته‌اند زبان بازار را به‌کار بگیرند، چیز دیگری است. زبان بازار در سه حوزه باعث تقلیل ارزش و اهمیت آن حوزه‌ها می‌شود: بهداشت، آموزش، و فرهنگ. راجر بیکن از کژاندیشی تحت تأثیر «بتهای بازار» سخن می‌گفت. ریاضیات بخشی از فرهنگ به معنی کلی کلمه است و نه بخشی از صنعت یا خدمات یا چیزهایی از این قبیل.

گلفاند: ولی آیا روشهای غیربازاری به رکود و عدم پیشروی نمی‌انجامد؟

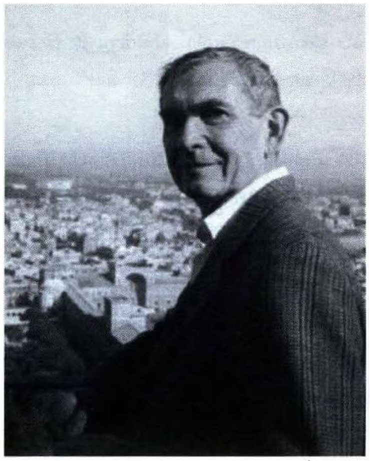
منین: تا حالا رکودی پیش نیامده است.

گلفاند: آنچه می‌گویی برای ریاضیاتْ ممکن است، چون ریاضیات رشتهٔ ارزانی است.

منین: دقیقاً. من همیشه می‌گویم: «چرا باید خودمان را در بازار عرضه کنیم؟ ما اولاً قیمتی در بازار نداریم و ثانیاً منابع طبیعی را مصرف نمی‌کنیم و باعث تخریب محیط زیست نمی‌شویم». به ما حقوق بدهید و ما را به‌حال خود بگذارید. من به‌هیچ وجه نمی‌خواهم این را تعمیم بدهم. فقط در مورد ریاضیات صحبت می‌کنم.

گلفاند: شما از رایانه صحبت کردید. با ظهور رایانه چه تغییری در ریاضیات ایجاد شده است؟

منین: در ریاضیات محض؟ رایانه امکان منحصر به‌فرد اجرای آزمایشهای فیزیکی بزرگْ‌مقیاس را در بارهٔ واقعیات ذهنی به‌وجود آورده است. ما می‌توانیم نامحتمل‌ترین چیزها را امتحان کنیم. دقیق‌تر بگویم، نه نامحتمل‌ترین چیزها، بلکه کارهایی که اویلر حتی بدون رایانه می‌توانست انجام دهد، و گاوس هم می‌توانست. ولی امروز کارهایی را که آنها می‌توانستند انجام دهند هر کسی می‌تواند پشت میزش با رایانه انجام دهد. پس اگر شخص از چنان تخیلی برخوردار نباشد که بعضی از جنبه‌های این واقعیت ذهنی افلاطونی را تشخیص دهد، می‌تواند آزمایش کند. اگر ایدهٔ درخشانی دربارهٔ برابری فلان چیز با بهمان چیز به ذهنش رسید، می‌تواند بنشیند و یک یا دو یا یک میلیون مقدار را محاسبه کند. موضوع به این محدود نمی‌شود. امروز افرادی پیدا شده‌اند که



تصویر ۱ منین با تصویر چشم‌اندازی از رُم، ۱۹۹۸

ذهنی ریاضی با گرایش رایانه‌ای دارند. دقیق‌تر بگویم، این قبیل افراد قبلاً هم بودند ولی بدون استفاده از رایانه، چیزی، به‌گونه‌ای، کم‌وکسر داشتیم. اویلر، تا جایی که ریاضیدانِ صرف بود، از این سنخ اشخاص بود—او بسیار فراتر از ریاضیدانانِ صرف بود—ولی اویلرِ ریاضیدان اگر امروز زنده بود مشتاقانه به سمت رایانه می‌رفت. رامانوجان هم همین‌طور، رامانوجانی که حتی واقعاً ریاضی نمی‌دانست. یا مثلاً، همکارم در این انستیتو، دان تساگیر[1]، که ذهن طبیعی و قویِ ریاضی دارد ولی ذهنی که در عین حال، خیلی مستعد کارکردن با رایانه است. رایانه به او کمک می‌کند که این واقعیت افلاطونی را مطالعه کند و اضافه می‌کنم که این کمک بسیار مؤثر است.

من خودم به‌هیچ وجه از این قبیل اشخاص نیستم، ولی می‌فهمم که جریان از چه قرار است و خوشحال می‌شوم همکارانی داشته باشم که بتوانند در این جهت به من کمک کنند. پس، این کاری است که رایانه برای ریاضیات محض کرده است.

گلفاند: دربارهٔ ارتباط بین ریاضیات و فیزیک نظری چه می‌گویید؟ این ارتباط چگونه سازمان می‌یابد؟

منین: این ارتباط طی دورهٔ زندگی خودِ من تغییر کرده است.

توجه به این نکته مهم است که در زمان نیوتن، اویلر، لاگرانژ، و گاوس، این رابطه چنان نزدیک بود که افراد واحدی هم در ریاضیات و هم در فیزیک نظری تحقیق می‌کردند. شخص ممکن بود خودش را بیشتر فیزیکدان یا بیشتر ریاضیدان بداند، ولی یک فرد واحد در هر دو رشته تحقیق می‌کرد. این وضع تا اواخر قرن نوزدهم برقرار بود. در قرن بیستم تفاوتهای مهمی بروز کرد. ماجرای تکوین نظریهٔ نسبیت عام نمونهٔ برجسته‌ای است. اینشتین وقتی در سال ۱۹۰۷ به زبان شهودیِ بسیار درخشان خودش شروع به پروراندن نسبیت عام کرد، نه تنها از ریاضیات مورد نیازش بی‌اطلاع بود بلکه حتی نمی‌دانست چنین ریاضیاتی وجود دارد. پس از سالها وقت که صرف مطالعهٔ کوانتومها کرد، به موضوع گرانش برگشت و در ۱۹۱۲ به دوستش مارسل گراسمان نوشت: «باید به کمک من بیایید وگرنه دیوانه خواهم شد!» عنوان اولین مقالهٔ آنها چنین بود: «طرحی از نظریه‌ای در باب نسبیت عام و نظریه‌ای در

1. Don Zagier

باب گرانش: I بخش فیزیک به قلم آلبرت اینشتین؛ II. «بخش ریاضیات به قلم مارسل گراسمان.»

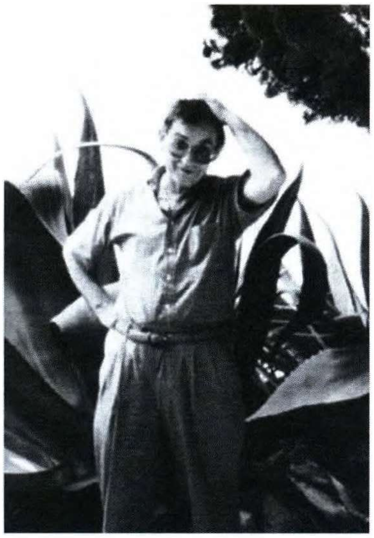
این اقدامْ نیمه موفق بود. آنها زبان مناسب را یافتند اما معادله‌های لازم را نیافتند. معادله‌های لازم را اینشتین و داوید هیلبرت در ۱۹۱۵ پیدا کردند. هیلبرت آن معادلات را با یافتن چگالیِ لاگرانژیِ صحیح به‌دست آورد که اهمیت این مسأله ظاهراً برای مدتی از نظر اینشتین نیز دور مانده بود. این ماجرا، همکاری مهمی بین دو ذهنِ درخشان بود که متأسفانه تاریخ‌نویسان را به مجادلات احمقانه‌ای دربارهٔ حق تقدم برانگیخت: حال آنکه خودِ این ذهنهای آفریننده دیدگاههای یکدیگر را با خرسندی و سعهٔ صدر می‌پذیرفتند.

به‌نظر من، این ماجرا سر آغاز دوره‌ای بود که ریاضیات و فیزیک از هم جدا شدند. این واگرایی تا حدود دههٔ ۱۹۵۰ ادامه یافت. فیزیکدانها به تفکر دربارهٔ مکانیک کوانتومی پرداختند و در آن به‌فضای هیلبرت، معادله‌های شرودینگر، کوانتوم کنش، اصل عدم قطعیت، و تابع دلتا نیاز پیدا کردند. این نوع کاملاً جدیدی از فیزیک و نظریه‌پردازی فیزیکی بود. هر نوع ریاضیاتی که لازم بود فیزیکدانها خودشان ایجاد می‌کردند.

در این ضمن ریاضیدانها به تحقیق در آنالیز و هندسه پرداختند و در مسیر ایجاد توپولوژی و آنالیز تابعی قدم برداشتند. موضوع مهم در آغاز این قرن، فشار فیلسوفان و منطقدانان بود که سعی می‌کردند دیدگاههای کانتور، تسرملو، وایتهد، و دیگران را دربارهٔ مجموعه‌ها و بینهایت «خلوص ببخشند». نکته‌ای که تا حدی تناقض‌آمیز است، این است که این خط فکری هم به چیزی انجامید که «بحران در مبانی» نامیده می‌شود و هم به علوم رایانه. اینکه زبانی متناهی بتواند اطلاعاتی دربارهٔ چیزهای نامتناهی به‌دست دهد تعارض‌آمیز به‌نظر می‌رسد. آیا چنین چیزی ممکن است؟ در این مدت، مفاهیم و مباحث بسیار مهمی مانند زبانهای صوری، مدلها و صدق، سازگاری، و (نا)تمامیت عرضه شدند ولی کاملاً جدا از مشغلهٔ ذهنی فیزیکدانها در آن زمان.

الن تورینگ ظاهر شد که به ما بگوید: «مدل استنتاج ریاضی یک ماشین است نه یک متن». یک ماشین! ایدهٔ درخشانی بود. طی ده سال بعد، ماشین فون نویمان را داشتیم و اصل جدایی برنامه‌ها (نرم‌افزار) و سخت‌افزار را. بیست سال دیگر هم گذشت و آنگاه همه چیز آماده بود.

طی ثلث اول قرن بیستم، اشخاصی که در هر دو رشته کار می‌کردند بسیار معدود بودند. فون نویمان بی‌شک یکی از این اشخاص بود و من کسی را در قرن بیستم نمی‌شناسم که ذهنش در حد او در هر دو رشتهٔ ریاضی و فیزیک فعال بوده باشد. ریاضیات و فیزیک به موازات هم توسعه می‌یافتند و پس از مدتی از توجه به یکدیگر غافل شدند. در دههٔ ۱۹۴۰ فاینمن انتگرال مسیریِ شگفت‌انگیزش را عرضه کرد که وسیلهٔ جدیدی برای کمّی‌سازی چیزهاست، و به شیوهٔ ریاضی غریبی روی آن کار کرد—چیزی مانند برج ایفل را تصور کنید که در هوا معلق است و روی پایه‌ای قرار ندارد. این ساختار وجود دارد و خیلی هم کاراست ولی روی چیزی که آن را بشناسیم نایستاده است. سپس، در دههٔ ۱۹۵۰ نظریهٔ میدان کوانتومی نیروهای هسته‌ای پدیدار شد، و معلوم شد که میدانهای کلاسیک متناظر از لحاظ ریاضی، فرمهای هموستار هستند. آنها معادلهٔ کلاسیک کنش پایا را در هندسهٔ دیفرانسیل می‌شناختند. معادلهٔ یانگ-میلز وارد صحنه شد. ریاضیدانها با تردید به فیزیکدانها نگریستند و فیزیکدانها به ریاضیدانها. نکتهٔ عجیب—و برای من دلپذیر—این بود که معلوم شد بیشتر از آنکه فیزیکدانها از ما یاد بگیرند ما از آنها یاد می‌گیریم. آشکار



تصویر ۲ منین، ایتالیا، ۱۹۹۴

شد که آنها به کمک نظریهٔ میدان کوانتومی و ابزار انتگرال فاینمن ابزارهایی شناختی پدید آورده‌اند که به آنها امکان می‌دهد حقایق ریاضی را یکی پس از دیگری کشف کنند. اثباتی در کار نبود، هر چه بود کشف بود. بعد ریاضیدانها نشستند، سخت به فکر افتادند که کاری بکنند، و بعضی از این کشفیات را به شکل قضیه درآوردند و شروع به اثبات آنها به شیوهٔ دقیق خود کردند. این نشان داد که آنچه فیزیکدانها می‌کنند از لحاظ ریاضی معنی‌دار است. فیزیکدانها می‌گویند: «ما اینها را همیشه می‌دانستیم، ولی البته از توجه شما متشکریم». اما در نتیجه، ما به‌طور کلی از فیزیکدانان آموختیم که چه پرسشهایی مطرح کنیم و چه پاسخهایی را می‌توانیم مفروض بگیریم—پاسخهایی که قاعدتاً درست از آب درمی‌آیند. فریمن دایسن ریاضیدان و فیزیکدان سرشناس در سخنرانی گیبس[1] خود با عنوان «فرصتهای از دست‌رفته» (۱۹۷۲) موارد متعددی را به‌خوبی توصیف کرده است که «ریاضیدانها و فیزیکدانها شانس اکتشاف را به‌خاطر گفتگو نکردن با یکدیگر از دست دادند». به‌خصوص برای من این نکته جالب بود که خودش «شانس کشف رابطهٔ عمیق‌تری بین صورتهای پیمانه‌ای و جبرهای لی را فقط به این دلیل از دست داد که دایسنِ نظریهٔ اعداددان و دایسنِ فیزیکدان با یکدیگر گفتگو نکردند».

سپس ویتن در صحنه ظاهر شد که استعدادی منحصربه‌فرد در بیرون کشیدن ریاضیاتی پرشکوه از این برج ایفلِ آویزان در هوا دارد. در ویکی‌پدیا دیدم که او قبل از دریافت مدرک دکتری فیزیک در ۱۹۷۶، هنگامی که بیست‌وپنج‌ساله بود، اول به ژورنالیسم سیاسی، و بعداً به اقتصاد گرایش داشت، اما بالاخره به ندای ریاضیات و فیزیک پاسخ مثبت داده است.

او صاحب چنان دستگاه ذهنی شگفت‌انگیزی است که ریاضیاتی با استحکام و نیرویی عجیب، اما برخاسته از دیدگاههای فیزیکی، تولید می‌کند. ولی نقطهٔ شروع دیدگاههای او دنیای فیزیکی، آن‌طور که فیزیک تجربی توصیف می‌کند، نیست بلکه ابزارهایی ذهنی است که فاینمن، دایسن، شرودینگر، توموناگا، و بسیاری فیزیکدانهای دیگر برای تبیین این دنیا پدید آورده‌اند—ابزارهایی که کاملاً ریاضی‌اند اما بنیادِ ریاضی ضعیفی دارند. این

1. Gibbs lecture

مجموعهٔ ابزارها به‌هیچ‌وجه بی‌ارزش نیست بلکه باید دوباره بگویم که، ساختار عظیمی است بدون پایه و مبنا؛ یا لااقل پایه‌ای از آن نوع که ما به آن عادت کرده‌ایم ندارد.

گلفاند: پس همه به این عادت کرده‌اند که مبنایی در کار نباشد و با آن کنار می‌آیند، یا سعی می‌کنند مبنایی ایجاد کنند؟

منین: هیچ یک از اقداماتی که تاکنون انجام شده در حدی که از کلیت کافی برخوردار باشد موفقیت‌آمیز نبوده است. ریاضیدانها تقریبهایی از آنچه می‌توان انتگرال فاینمن نامید به‌دست داده‌اند؛ مثلاً انتگرال‌گیری وینر که در دههٔ ۱۹۲۰ ابداع شد و برای بررسی حرکت براونی به‌کار رفت که در مورد آن نظریهٔ ریاضی مستحکمی وجود دارد. همچنین گونه‌های جالب توجهی از این نظریه وجود دارد ولی نظریه محدودتر از آن است که همهٔ کاربردهای متنوع انتگرال فاینمن را در برگیرد. اگر به‌عنوان نظریه‌ای ریاضی به آن نگریسته شود، استحکام و قدرتش به‌هیچ‌وجه قابل مقایسه با دستگاهی که امروز ریاضیات واقعاً مهم را تولید می‌کند نیست.

من نمی‌دانم که وقتی ویتن کارکردن روی این ابزارها را متوقف کند چه بر سرشان خواهد آمد، ولی خیلی امیدوارم که اینها به‌زودی در دنیای ریاضی رسوخ کند. حوزهٔ کاری کوچکی به‌وجود آمده است که هدف آن اثبات قضایایی است که ویتن حدس زده است، به‌خصوص در نظریهٔ میدانهای کوانتومی توپولوژیک (TQFT)، و نتایج پر بار و معروفی به‌بار آورده است.

در واقع، توپولوژی هوموتوپیک و TQFT چنان نزدیک هم رشد می‌کنند که کم‌کم فکر می‌کنم در حال تبدیل‌شدن به زبان مبانی جدید هستند.

این چیزها قبلاً هم پیش آمده است. نظریهٔ کانتور دربارهٔ بینهایت هیچ پایه‌ای در ریاضیات قدیم‌تر نداشت. شما می‌توانید در این موضوع مناقشه کنید، ولی این نظریه نوع جدیدی از ریاضیات بود، راه جدیدی برای فکرکردن دربارهٔ ریاضیات، و شیوهٔ تازه‌ای برای تولید ریاضیات. در تحلیل نهایی، علی‌رغم جروبحثها و تناقضها، گروه بورباکی دنیای کانتور را بی‌هیچ عذر و بهانه‌ای پذیرفت. آنها «مبانی عملگرایانه» را پدید آوردند که دهها سال است مورد قبول همهٔ ریاضیدانانِ اهل عمل بوده است و در مقابل «مبانی تجویزی» قرار دارد که منطقدانان یا ساختگرایان سعی می‌کرده‌اند بر ما تحمیل کنند.

گلفاند: ظاهراً ریاضیدانانی که به زبان روسی مطالبی دربارهٔ بورباکی نوشته‌اند نظرات متفاوتی دارند. بعضی از آنها از همهٔ این کارِ مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها سخت انتقاد کرده‌اند. آنها از جدایی بورباکی از فیزیکدانها، که می‌توانند امکانات چشمگیری در برابر ما قرار دهند، انتقاد دارند.

منین: هیچ نکتهٔ خاصی در این انتقادها نیست. اینکه به بورباکی می‌تازند، نشان می‌دهد که نمی‌دانند جریان از چه قرار است. بورباکی یک گام تاریخی برداشت، همان‌طور که خود کانتور برداشته بود. ولی این گام، هر چند نقش عظیمی داشته است، خیلی ساده است. کار بورباکی ایجاد مبانی فلسفی برای ریاضیات نیست بلکه ایجاد یک زبان ریاضیِ عام و مشترک برای احتمالدانها، توپولوژیدانها، متخصصان نظریهٔ گراف، آنالیز تابعی، هندسهٔ جبری، . . .، و نیز منطقدانهاست.

شما با چند کلمهٔ مشترک ابتدایی شروع می‌کنید: «مجموعه، عنصر، زیرمجموعه، . . .»، بعد ساختارهای بنیادی مورد مطالعهٔ خود: «گروه، فضای توپولوژیک، زبان صوری. . .» را تعریف می‌کنید. نامهای آنها لایهٔ دوم مجموعهٔ اصطلاحات شما را تشکیل می‌دهد. ممکن است لایهٔ سوم، چهارم، یا پنجم هم درکار باشد، ولی قواعد بنیادیِ ساخت، مشترک است و ریاضیدانها می‌توانند با هم بنشینند و با تفاهم کامل صحبت کنند: «زبان صوری مجموعه‌ای از حروف است به‌اضافهٔ زیرمجموعه‌ای از واژه‌های درست‌ساخت ــ جمله‌ها به‌اضافهٔ رابطها و سورها، به‌اضافهٔ قواعد استنتاج . . .». با توجه به این چشم‌انداز، مثلاً، قضیهٔ ناتمامیت گودل هر نوع راز و رمز خود را از دست می‌دهد. این قضیه وقتی پیچیده و رازآمیز است که شما آن را از لحاظ فلسفی بررسی کنید ولی در واقع، این قضیه چیزی نمی‌گوید جز اینکه یک ساختار معین تعداد متناهی مولد ندارد. از این ساختارها در ریاضی زیاد است و این هم یکی دیگر. عمق قضیه وقتی آشکار می‌شود که معناشناسی خود ارجاعیِ خاصی به آن اضافه کنید. آن وقت وارد مبانی فلسفی ریاضیات می‌شود.

بورباکی در واقع کاری متفاوت با آنچه این آقایان فکر می‌کنند انجام داد. (در اینجا از بحث راجع به تأثیر بورباکی بر آموزش ریاضی در فرانسه صرف‌نظر می‌کنم: این موضوع مانند همهٔ مسائل جامعه‌شناختی بحث و مناقشهٔ بسیار به‌دنبال دارد.)

گلفاند: جایگاه فرضیه‌ها در ریاضیات چیست؟ مثلاً در مورد قضیهٔ آخر فرما، در دوران اخیر کسی سعی نکرده مثال ناقضی برای آن بیاورد؛ همه قبول داشته‌اند که درست است و کسی باید آن را ثابت کند. و فرضیه‌های معروف زیادی از این قبیل، به‌خصوص در نظریهٔ اعداد، هست.

منین: من موضعی در این مورد دارم که مرا از بسیاری از همکاران خوبم جدا می‌کند. استدلالهای زیادی علیه نظرم در این باره شنیده‌ام. باید برایتان توضیح بدهم که تصورم راجع به ریاضیات چیست. من افلاطون‌گرای احساسی هستم (نه افلاطون‌گرای عقلی. هیچ استدلال عقلایی به نفع افلاطون‌گرایی وجود ندارد). پژوهش ریاضی درنظر من، به هر نحوی که باشد، از نوع کشف است نه ابداع و اختراع، من قلعهٔ عظیمی، یا چیزی شبیه آن را تصور می‌کنم که شما شبحی از آن را به‌تدریج در میان مه غلیظ می‌بینید. اینکه دیده‌های خود را چطور فرمول‌بندی کنید بستگی دارد به نوع تفکر شما، حدّ و حدود آنچه دیده‌اید، شرایط و اوضاع اجتماعی اطراف شما، و غیره.

آنچه دیده‌اید، ممکن است به‌صورت حضور یا عدم حضور چیزی فرمول‌بندی شود. به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ توجه کنید. خوشبختانه می‌توانیم همهٔ جوابهای صحیح آن را با یک فرمول نشان دهیم. این موضوع، به معنایی، بر دیوفانتوس هم معلوم بود. وقتی این کار را کردید، این سؤال پیش می‌آید: خُب، ولی در مورد توانهای سوم جوابها چیستند؟ جستجو می‌کنید و هیچ جوابی پیدا نمی‌کنید. عجب! و در مورد توانهای چهارم؟ باز هم هیچ. خُب. آیا ممکن است برای هیچ توان بالاتری جوابی وجود نداشته باشد؟ و به این ترتیب، تفاوتی بین توان دوم و توانهای سوم، چهارم، و بالاتر کشف می‌کنید. این است تاریخچهٔ قضیهٔ آخر فرما. ولی وقتی مسأله‌ای طرح می‌کنید حاکی از اینکه فلان با بهمان برابر است یا فلان و بهمان اصلاً رخ نمی‌دهد، هرگز از قبل نمی‌دانید که مسألهٔ خوبی است یا نه ــ تا وقتی که مسأله حل شود یا تقریباً حل شود.

مسأله‌ها کیفیاتی دارند. در نظریهٔ اعداد، مسأله‌های زیادی هستند که صورت آنها به زبان مقدماتی قابل بیان است. مسألهٔ فرما را می‌دانیم که مسألهٔ فوق‌العاده‌ای بود. این را از آنجا می‌دانیم که طی تاریخ آن، از بیان تا حل مسأله، معلوم شد که این مسأله با مفاهیم زیادی ارتباط دارد که از قبل

به هم مربوط نبودند، و برای حل آن، تحقیق در آن مفاهیم اساسی لازم بود. معلوم شد که این مسأله، جزئی از عمارتی عظیم است.

اما می‌توانیم مسأله‌های دیگری را درنظر بگیریم، مثلاً دربارهٔ اعداد تام یا عددهای اول دوقلو. آیا تعداد اعداد تام یعنی عددهایی که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های خودشان هستند، نامتناهی است؟ همین‌طور آیا بینهایت جفت عدد اول وجود دارد که تفاضلشان ۲ است؟ تا به امروز هیچ کس نظریهٔ جالبی حول و حوش این مسأله‌ها نپرورانده است، هر چند صورت آنها بدتر از صورت قضیهٔ آخر فرما به‌نظر نمی‌رسد.

گلفاند: آیا این ویژگیها مربوط به خود مسأله‌هاست یا موضوع این است که کسی، به‌دلیلی اجتماعی، فعالانه در آنها تحقیق نکرده است؟

منین: من به‌عنوان افلاطون‌گرا می‌دانم که ویژگیها مربوط به ذات مسأله‌اند ولی ممکن است در هنگام صورت‌بندی مسأله قابل تشخیص نباشند و در فرایند تحول تاریخی نمایان شوند.

من، تا حدی به این دلیل، طرفدار مسأله نیستم. حل مسأله مستلزم مهارت در پیداکردن یک حقیقت جزئی است ولی شما نمی‌دانید که آن حقیقت، جزئی از کدام کل است. من از موضع افلاطون‌گرایی طرفدار برنامه‌های کامل هستم. برنامه وقتی مطرح می‌شود که یک ذهن نیرومند ریاضی چیزی را به‌صورت یک کلّ می‌بیند، یا نه به‌صورت یک کلّ، ولی فراتر از حد یک جزء خاص. ولی اول فقط به‌صورت مبهم دیده می‌شود.

گلفاند: یعنی به‌جای یک جزء مجزا، کل یک ساختمان را به‌طرز مبهمی می‌بینید.

منین: بله، و بعد شروع می‌کنید به پس‌زدن غبارها، یافتن دوربینهای مناسب، جستجوی موارد تشابه با بناهایی که قبلاً کشف شده‌اند، خلق زبانی برای چیزهایی که به‌طرز مبهمی می‌بینید، و از این قبیل کارها. این همان چیزی است که من موقتاً آن را برنامه می‌نامم.

نظریهٔ کانتور دربارهٔ بینهایت، چنین برنامه‌ای بود که البته رویداد نادری بود: اینکه مراتبی از بینهایت وجود دارد، هم یک برنامه بود و هم یک کشف. و، مثلاً، فرضیهٔ پیوستار ــ اینکه آیا بین بینهایت شمارا و پیوستار چیزی وجود دارد یا نه ــ پرسشی است که معلوم شده کم‌اهمیت‌تر از بسیاری پرسشهای دیگر است هر چند بسیار انگیزه بخش بوده است. اگر کانتور فقط این پرسش را مطرح کرده بود، کار خوبی نکرده بود ــ اهمیت آن قاعدتاً در آینده معلوم می‌شد. ولی او کار بسیار بیشتری انجام داد و بی‌درنگ یک برنامهٔ کامل تحقیق را آغاز کرد.

فرضیهٔ ویل دربارهٔ تعداد جوابهای معادله‌ای به پیمانهٔ p نیز از این برنامه‌هاست که در دورهٔ زندگی من شهرت یافت. او بی‌درنگ متوجه تشابه مهمی شد: در حوزه‌هایی که او بررسی می‌کرد خلأیی وجود داشت ولی در جاهای دیگر نظریهٔ کاملی، نظریهٔ (کو)هومولوژی، وجود داشت که قضیهٔ لفشتس دربارهٔ نقاط ثابت نگاشتها از آن نتیجه می‌شد. نیمی از عمر گروتندیک و چند نفر از اطرافیان او از جمله پیر دلینی، صرفِ پرکردن آن خلأ شد، تشابه دقیق شد، و هندسهٔ جبری نوین پدید آمد و در نتیجهٔ آن بسیاری چیزهای دیگر هم اتفاق افتاد: نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان تنها زبان ریاضیات شروع به کنار رفتن کرد و رسته‌ها، با همهٔ زیرساختارهای متعاقب آنها، کم‌کم جای مجموعه‌ها را در کارکرد قدیمی‌شان گرفتند.

به‌تدریج فرمها و ساختارهای قدیمی، مانند اعداد طبیعی، جای خود را به اشیایی هندسی می‌دهند که با نیمکرهٔ راست مغز مجسم می‌شوند ... تصویر هوموتوپیک و «راست نیمکره‌ایِ» اشیا به‌صورت شهود بنیادی درمی‌آید و اگر بخواهید مجموعهٔ گسسته‌ای به‌دست آورید، به سراغ مؤلفه‌های همبند فضایی می‌روید که فقط با تقریب هوموتوپی تعریف می‌شود.

در منطق از برنامهٔ هیلبرت می‌توان نام برد، هر چند این برنامه خیلی خوشبینانه صورت‌بندی شده بود. او می‌خواست ثابت کند که هر چه صادق است، اثبات‌پذیر است. او نمای عمارت را درست ندیده بود، ولی این برنامه به‌هرحال پیش رفت. کارهای گودل، تورینگ، چرچ، و فون نویمان، رایانه و علم رایانه، تا اندازه‌ای از برنامهٔ هیلبرت نشأت گرفته است.

مسألهٔ چهاررنگ به‌نظر من نمونه‌ای از مسألهٔ بد است که به برنامه‌ای منجر نشد، این مسأله را به کمک رایانه حل کردند و ازاین‌رو تا امروز شمشیرها در مورد آن غلاف نشده است. ولی نکتهٔ مهم‌تر از حل آن، این است که تا به‌حال هیچ کس نتوانسته است آن را در هیچ نوع مبحثی که از غنای کافی برخوردار باشد بگنجاند. در نتیجه، این مسأله فقط وسیله‌ای برای تمرین فکری است.

به این دلایل، کلاً مسأله، به خودی خود، مورد علاقهٔ من نیست. ولی وقتی مسأله‌ای در قالب یک برنامه مطرح می‌شود می‌تواند مسألهٔ خوبی باشد یعنی وقتی از پیش می‌دانیم که این جزء متعلق به کدام کل است. فرضیهٔ ریمان، بی‌شک، مسأله‌ای است که ریمان آن را در قالب برنامه‌ای طرح کرده است هر چند طی یک قرن و نیم گذشته متخصصانی که دید محدود نظریهٔ اعدادی داشته‌اند همواره به آن چشم مسألهٔ منفرد بسیار مهم و مبارزطلبی می‌نگریسته‌اند. من تا حدی نگرانم که اولین اثبات آن ممکن است اثباتی با استفاده از روشهای آنالیزیِ بی‌مایه باشد. این اثبات البته هر جایزهٔ قابل تصوری را خواهد برد، در هر روزنامه‌ای در هر جای جهان با هیجان و ابزار احساسات عنوان خواهد شد، و همهٔ اینها گمراه‌کننده خواهد بود چون راه‌حل «درست و حسابی» باید در قالب وسیع‌تری عرضه شود که آن را می‌شناسیم. ما حتی چندین رویکرد به حل این مسأله را می‌شناسیم. با این حال، کاملاً ممکن است که نخستین حل آن بی‌مایه و فاقد هر نوع جاذبه‌ای باشد.

گلفاند: آیا فرضیه‌ای هست که همه کس درستی آن را بدیهی می‌دانسته‌اند ولی مثال ناقضی برای آن پیدا شده است؟

منین: فرضیهٔ دیرپایی به‌نظرم نمی‌رسد که ریاضیدانها به آن اعتقاد داشته باشند و مثال ناقضی برایش پیدا شده باشد.

گلفاند: اگر کسی به‌جای اثبات قضیهٔ آخر فرما مثال ناقضی برای آن می‌یافت، واقعهٔ تکان‌دهنده‌ای بود یا فقط به این معنی بود که مسألهٔ فرما مسألهٔ خوبی نیست؟

منین: باز هم مسألهٔ خوبی می‌بود چون محرک توسعهٔ مبحثی بوده است. حال وقتی کسی آن را در این مبحث حل می‌کند، اینکه جواب منفی باشد

یا مثبت، اهمیت ثانوی دارد. اهمیت مسأله در درجهٔ اول به این دلیل است که به ایجاد زمینهٔ مهمی کمک کرده است.

اگر مثال ناقضی پیش از دههٔ ۱۹۶۰ پیدا می‌شد، همه به فکر فرو می‌رفتند. اما اگر چنین مثالی در دههٔ ۱۹۷۰ پیدا می‌شد، موضوع خیلی جالب و تا حدی تکان‌دهنده بود چون در آن زمان روشن شده بود که می‌توان قضیهٔ فرما را از چندین حدس دیگر در ارتباط با برنامهٔ لنگ‌لندز استنتاج کرد، حدسهایی پردامنه که به هیچ‌وجه ساده نبودند. در آن زمان می‌دانستند که اگر آن حدسها درست باشند، قضیهٔ فرما هم درست است. البته اگر مثال ناقضی برای قضیهٔ فرما پیدا می‌شد، همهٔ آن حدسها غلط از آب در می‌آمدند، و این به‌معنای تخریب نظام بسیار اساسی‌تر و پیچیده‌تری از باورها بود. چنین پیشامدی، توجه زیاد و اقدامات گسترده‌ای را موجب می‌شد تا بفهمیم که اشکال کار در کجا بوده است؛ لازم می‌آمد بخش بزرگی از بنا را بازسازی کنیم. همهٔ اینها در نتیجهٔ کشف مثال ناقض پیش می‌آمد.

گلفاند: آیا چنین مثال ناقض قدرتمندی در تاریخ پیدا شده است؟ شاید قضیهٔ گودل؟ چون پیش از آن تصور می‌کردند هر گزارهٔ صادقی را می‌توان ثابت کرد.

منین: هیلبرت چنین تصوری داشت؛ نمی‌دانم چه تعداد از دیگران این اعتقاد را داشته‌اند. ولی به این برنامه باید درست نگاه کرد. اولین نتیجهٔ مهم آن ساختن مبحثی ریاضی است که در آن می‌توان مسائل مربوط به صدق و اثبات‌پذیری را با همان دقت مسائل ریاضی، نه به شکل مبهم فلسفی، صورت‌بندی کرد. بنا به طبیعت این امر، اول باید «خودْارجاعی بودن» را معرفی کرد و بقیهٔ کار از نوع خلاقیت و ابداع است، که گودل و تارسکی آن را بسیار خوب نشان داده‌اند.

در آغازِ صورت‌بندی این برنامه، حدسهای غلطی دربارهٔ سرانجام آن می‌زدند، و پیداشدن مثالهای ناقض نشان داد که آن حدسها خطا بوده‌اند.

گلفاند: چه دریافتهای نادرست و جالب دیگری وجود داشته است؟

منین: مواردی بوده است که نشان‌دهندهٔ فقدان تخیل انسانی است. در تاریخ ریاضی، این گونه موارد را مثال ناقض نمی‌نامند بلکه پارادُکس می‌گویند. مثلاً قضیهٔ باناخ-تارسکی را در نظر بگیرید. با یک گوی شروع می‌کنید و معلوم می‌شود که می‌توانید آن را پنج تکه کنید، تکه‌ها را طور دیگری کنار هم بگذارید و دو تا گوی به‌دست بیاورید که اندازهٔ هر کدام با اندازهٔ گوی اول یکی است. این ساختار چیزهای زیادی به ما می‌گوید. مثلاً در نظر غالبِ منتقدان رویکرد نظریهٔ مجموعه‌ای این بدان معنی است که اگر این دیدگاه شخص را به چنین حکمی می‌رساند، پس ریاضیات نیست بلکه مهملات است. درنظر منطقدانان، مثالی از یک کاربرد اصل موضوع انتخاب تسرملوست که به تناقض می‌انجامد و بنابراین، استدلالی علیه پذیرش آن است، ولی جدا از همهٔ اینها، یک مطلب زیبای هندسی است. یک بار از من خواسته شد در یک موزهٔ هنری برای مخاطبان عام سخنرانی کنم، و فکر کردم پارادُکس باناخ-تارسکی موضوع مهمی برای نشان دادن «هنر انتزاعی ریاضیات» است. نکتهٔ اصلی بحث من این بود که نباید «تکه‌ها» را اشیای مادی جامدی درنظر بگیریم بلکه باید آنها را «ابرها»یی از نقاط تجسم کنیم. باید تصور کنیم که گوی مرکب از نقطه‌های تقسیم‌ناپذیر است. شما مجازید هر زیرمجموعه‌ای از این نقاط را یک «تکه» بنامید، می‌توانید آن را جابه‌جا کنید و حول خودش بچرخانید ولی به‌صورت یک شیء واحد، به‌طوری که فواصل هر دو نقطهٔ آن ثابت بماند. پس شما کره را به تکه‌هایی که جسمیت دارند تجزیه نمی‌کنید بلکه به پنج ابر تجزیه می‌کنید. این ابرها می‌توانند درهم فرو روند. آنها نه حجم دارند و نه وزن، و اشیای تخیلی فوق‌العاده جالبی برای تخیلِ بسیار پرورش‌یافته هستند.

چرا تناقض آشکاری وجود ندارد؟ آیا تعداد نقاط دو گوی بیشتر از یک گوی نیست؟ نه، تعداد نامتناهیِ نقاط دوگوی و یک گوی دقیقاً یکی است. این را به‌آسانی می‌شود ثابت کرد. من این را برای نوه‌ام توضیح دادم که روی یک ورقهٔ کاغذ همان قدر نقطه هست که روی دیوار اطاق. «یک ورقه کاغذ را در دست بگیر و آن طوری نگه‌دار که دیوار را اصلاً نبینی و کاغذْ دیوار را از نظرت مخفی کند. حال اگر یک پرتو نور از هر نقطهٔ روی دیوار بتابد و به چشم تو برسد، باید از ورقهٔ کاغذ بگذرد، هر نقطهٔ دیوار متناظر با نقطه‌ای از ورقهٔ کاغذ است، پس باید تعداد نقاط دیوار و کاغذ یکی باشد».

پیام این بحث این است که اگر گردوغباری ایجاد کنید که ذرات آن نقطه‌های گوی اولیهٔ شما باشند، تعداد کافی نقطه برای پرکردن دو، یا سه، یا حتی بینهایت گوی با اندازه‌های دلخواه وجود خواهد داشت. مشکل وقتی پیش می‌آید که سعی می‌کنید ابرهایی از نقاط را تعریف کنید که باید حرکت کنند، بچرخند، بازآرایی شوند تا به‌صورت دو گوی درآیند. این یک نوع ترفند ریاضی است، بسیار زیباست، ولی اگر بخواهید آن را خوب توضیح دهید، به وقت بسیار بیشتری نیاز دارید.

پس این مثالِ ناقض نیست بلکه پارادُکسی است که اذهان پرورش نیافته را گیج می‌کند.

چند تا از این جور پارادُکسها در جریان گذار از ریاضیات کلاسیک به ریاضیات مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها کشف شد. قضیه‌ای مطرح شد که یک خم می‌تواند مربع را پر کند. چیزهای زیادی از این قبیل بود، و ما مطالب زیادی از آنها یاد گرفتیم.

به‌کارگرفتن زبان بازار در سه حوزه باعث تقلیل ارزش و اهمیت آن حوزه‌ها می‌شود: بهداشت، آموزش، و فرهنگ ... ریاضیات بخشی از فرهنگ به معنی کلی کلمه است و نه بخشی از صنعت یا خدمات یا چیزهایی از این قبیل.

خیلیها فکر می‌کردند اینها فانتزی و خیال‌پردازیِ محض است. اما تخیلی که با مفاهیم جدید پرورش یافته بود به شخص امکان می‌داد رفتار «پارادُکس‌وار» سریهای فوریه را، برای فهم حرکت براونی، تشخیص دهد و این تشخیص بود که به ابداع موجکها انجامید، و معلوم شد اینها به‌هیچ‌وجه خیال‌پردازی نبوده بلکه تقریباً ریاضیات کاربردی بوده است.

گلفاند: در بیست سال آینده چه پیش خواهد آمد؟

منین: من وقوع هیچ تحول انقلابی را پیش‌بینی نمی‌کنم چون به‌نظر من در ۳۰۰ سال گذشته هم چنین تحولی رخ نداده است. هر زمان ایده‌های شهودی تازه و نیرومندی سربلند کرده، ریاضیات به‌نحو غریبی خصلت خود را محفوظ نگه‌داشته است. این هم موضوع یک سخنرانی است که هنوز ایراد نکرده‌ام. دوست دارم سیر تکامل ایدهٔ اعداد صحیح را از دورترین اعصار تا مفهوم پیچیدگی کولموگوروف نشان دهم، و این کار را بدون توسل به ریاضیات

جدید هم می‌توان انجام داد. ایدهٔ واحدی طی قرون و اعصار باقی‌مانده است. در این یا آن دوره کمی، تغییر کرده، شیوهٔ بیان آن عوض شده، ولی با این همه، اساساً بی‌تغییر مانده و به حیات خود ادامه می‌دهد. هیچ چیزی در ریاضیات فراموش نمی‌شود.

بنابراین، من هیچ اتفاق خارق‌العاده‌ای را برای بیست سال آینده پیش‌بینی نمی‌کنم. احتمالاً بازسازی چیزی که آن را «مبانی عملگرایانهٔ ریاضیات» می‌نامم ادامه خواهد یافت. منظورم، مدون کردن ابزارهای شهودیِ کارامد جدید مانند انتگرال مسیری فاینمن، رسته‌های مراتب بالاتر، «جبر متهورانهٔ جدیدِ» نظریه‌پردازان هوموتوپی، و نیز ظهور نظامهای ارزشیِ نو و اَشکال پذیرفته‌شدهٔ جدید عرضهٔ نتایج است که در اذهان و در مقاله‌های پژوهشی ریاضیدانانِ دست‌اندرکار، اینجا و آنجا در هر زمان خاص وجود دارد.

وقتی «مبانی عملگرایانهٔ» ریاضیات به صراحت بیان شود، که این امر معمولاً به‌صورتهای مختلفی انجام می‌شود، طرفداران این گونه‌های مختلف شاید با هم به مشاجره برخیزند، ولی تا جایی که اینها به‌طور کلی در ذهن ریاضیدانانِ فعال حضور دارد همیشه چیز مشترکی بین آنها هست. پس از کانتور و بورباکی، ما هر چه بگوییم، ریاضیات مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها در ذهن ما هست. وقتی شروع به صحبت‌کردن دربارهٔ چیزی می‌کنم، آن را برحسب ساختارهای بورباکی‌وار توضیح می‌دهم: فضاهای توپولوژیک، فضاهای خطی، میدان اعداد حقیقی، توسیعهای جبری متناهی، گروههای بنیادی. کاری غیر از این نمی‌توانم بکنم. وقتی دربارهٔ مفهوم کاملاً جدیدی فکر می‌کنم، می‌گویم که مجموعه‌ای است با فلان ساختار؛ ساختار نظیر آن قبلاً وجود داشته است به‌نام بهمان، و ساختار دیگری با نامی دیگر؛ من اصول موضوع اندک متفاوتی را به‌کار می‌برم و مفهوم مورد نظر را فلان و بهمان می‌نامم. یعنی با مجموعه‌های گسستهٔ کانتور شروع می‌کنیم و چیز بیشتری را به سبک بورباکی بر آن تحمیل می‌کنیم.

اما تغییرات روانشناختی اساسی هم به وقوع می‌پیوندد. امروز این تغییرات به شکل ارائهٔ قضیه‌ها و نظریه‌های پیچیده‌ای صورت می‌گیرد که با توجه به آنها معلوم می‌شود فرمها و ساختارهای قدیمی، مانند اعداد طبیعی، جای خود را به اشیایی هندسی می‌دهند که با نیمکرهٔ راست مغز تجسم می‌شوند.

به‌جای مجموعه‌ها یعنی توده‌هایی از عناصر گسسته، انواعی از فضاهای مبهم را تجسم می‌کنیم که می‌توانند بسیار تغییر شکل یابند، یکی بر دیگری نگاشته شود، و در این حال، آن فضای خاص مهم نیست بلکه آن فضا با تقریب تغییر شکل درنظر گرفته می‌شود. اگر واقعاً بخواهیم به اشیای گسسته برگردیم، به مؤلفه‌های پیوسته نظر می‌کنیم، قطعاتی که شکل یا حتی بعد آنها مهم نیست. قبلاً همهٔ این فضاها را مجموعه‌های کانتورِ مجهز به توپولوژی درنظر می‌گرفتند که نگاشتهای آنها نگاشتهای کانتور بودند و بعضی از آنها هوموتوپی‌هایی بودند که باید تجزیه می‌شدند و نظایر اینها.

من قویاً عقیده دارم که در ضمیر جمعی ریاضیدانها حرکتی در جهت عکس در جریان است. تصویر هوموتوپیک و راست نیمکره‌ایِ اشیا به‌صورت شهود بنیادی درمی‌آید، و اگر بخواهید مجموعهٔ گسسته‌ای به‌دست آورید، به سراغ مؤلفه‌های همبند فضایی می‌روید که فقط با تقریب هوموتوپی تعریف می‌شود.

به‌عبارت دیگر، نقاط کانتور ـــ تقریباً از آغاز ـــ تبدیل به مؤلفه‌های همبند یا رباینده‌ها و نظایر آنها می‌شوند. مسأله‌های کانتور دربارهٔ بینهایت عقب می‌روند و در پس‌زمینه جای می‌گیرند: از آغاز کار، تصویرهای ذهنی ما آنقدر نامتناهی است که اگر بخواهید چیزی متناهی از آنها بیرون بیاورید، باید آنها را بر بینهایت دیگری تقسیم کنید.

این مشابه است با تصوری که از انتگرال فاینمن داریم. این انتگرال در وهلهٔ اول مانند یک علامت رمزی است که تعبیر و تفسیر می‌طلبد. دو، سه، یا چهار گام اول تعبیر، همگی موردی و متکی به تشابهات متعدد با موارد دیگری هستند که ریاضیاتِ شسته‌رفته‌ای دارند («مدلهای اسباب‌بازی»). در مرحلهٔ خاصی، ممکن است یک سری صوری به‌دست آورید که نه تنها واگراست، بلکه مرکب از جمله‌هایی است که خودشان انتگرالهایی واگرا (هرچند متناهیْ‌بعد) هستند. بعد شما هر جمله را به‌طور مصنوعی منظم می‌کنید، آن را متناهی می‌کنید. اما این سری، در حالت کلی، باز هم واگراست. پس تعبیری برای سری ابداع می‌کنید. و بالاخره، پس از اینکه راه خود را به زور از میان انبوه بینهایتها گشودید، یک پاسخ متناهی به‌دست می‌آورید. پاداش کار، رشته‌ای از قضیه‌های شگفت‌انگیز ریاضی است. من در این امر تشابهی با بازسازی مبانی عملگرایانه برحسب نظریهٔ رسته‌ها و توپولوژیِ هوموتوپیک می‌بینم.

ترجمهٔ سیامک کاظمی

* * * * * *

- Mikhail Gelfand, "We do not choose mathematics as our profession, it chooses us: Interview with Yuri Manin", *Notices Amer Math. Soc.*, (10) **56** (2009) 1268-1274.